arXiv:2305.03135v1 [math.DG] 4 May 2023

里奇收缩子对称性的传播

TOBIAS HOLCK COLDING 和 WILLIAM P. MINICOZZI II

谨以此文献给我们的朋友 David Jerison。

Abstract. 我们将证明，如果一个梯度收缩里奇孤子在某个尺度上具有近似对称性，那么这种对称性会传播到更大尺度。这是收缩子原理的一个例子。收缩子原理大致指出，对于收缩孤子，信息会向外传播。

0. Introduction

流形 M 上的随时间变化的度量 g 若满足以下条件，便称为里奇流：

$$\partial_t \mathbf{g} = -\mathbf{2}\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}\,. \tag{0.1}$$

这是一种非线性几何演化方程，奇点可能会形成，而理解这些奇点是理解该流的关键。例如，在 [CM4] 中研究里奇流的圆柱体刚性时，一个重要因素是名为近似分裂的传播的一种新估计。该结果表明，若一个梯度收缩里奇孤子在某个尺度上近似分裂出一条直线，那么它在严格更大的区域上也近似分裂，不过估计会有所损失。

如果一个流形是欧氏因子 R 与一个低一维流形的度量乘积，就称它分裂出一条直线。分裂会给出一个线性函数，其梯度是一个平行向量场。类似地，近似分裂会给出一个近似平行向量场，这是一种特殊的近似Killing向量场。因此，近似分裂的传播等价于证明某种近似对称性能够延伸到更大的尺度。我们将在此看到，这对于更一般的近似对称性也成立。

如果存在常数 κ 使得流形 M、度量 g 和函数 f 构成的三元组 (M, g, f) 是梯度里奇孤子，则称之为梯度里奇孤子。

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}_f = \kappa\, g\,. \tag{0.2}$$

在微分同胚意义下，当 $\kappa > 0$ 时，梯度里奇孤子的里奇流表现为收缩；当 $\kappa = 0$ 时，里奇流保持静止（或稳态）；当 $\kappa < 0$ 时，里奇流表现为膨胀。梯度收缩里奇孤子刻画了流的有限时间奇点，并描述了古老流在负无穷处的渐近结构。

Killing场 V 是一个生成等距变换的向量场，即度量 g 的李导数为零。

$$\mathbf{L}_V g = 0\,.$$

等价地，当 V 的协变导数 ∇V 是斜对称时， V 就是 Killing 场。许多最重要的孤子例子都具有高度对称性；参见 [BaK], [Br1], [Br2], [BrC], [CIM], [CM4], [K], [LW]。

作者的部分研究经费由美国国家科学基金会数学科学部资助项目 2104349 和 2005345 提供。

在欧几里得空间中，Killing 向量场有两种类型：生成平移的平行向量场，以及线性增长的旋转向量场。里奇孤立子上存在两种截然不同的对称性，具体取决于该对称性是否保持函数 f。这一二分法在最简单的缩子例子中已可见：高斯孤立子 $\left(\mathbf{R}^n, \delta_{ij}, \frac{|x|^2}{4}\right)$ 和圆柱。在高斯孤立子上，绕原点的旋转同时保持度量和 $f = \frac{|x|^2}{4}$；而沿圆柱轴线的平移保持度量，却不保持 f的等值集。可以看出，这种情况具有典型性。为精确表述这一点，利用度量 g 和函数 f，在函数、向量场和一般张量上定义加权L^2 范数如下：

$$\| \cdot \|_{L^2}^2 = \int_M | \cdot |^2 \, \mathrm{e}^{-f} \, . \tag{0.3}$$

命题 0.4. 如果 Y 是梯度收缩里奇孤子上的 L^2 Killing场，那么 Y 要么保持 f，要么 M 分裂出一条直线。

度量和权重在向量场和对称二阶张量上诱导出加权散度算子 div_f，并在一般张量上诱导出漂移拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$。div_f 的伴随算子 div_f^* 将向量场 V 映射为对称二阶张量

$$\mathrm{div}_f^* V = -\frac{1}{2} \mathbf{L}_V \, g \, . \tag{0.5}$$

与 [CM4], 中一样，在向量场上定义一个自伴算子 $\mathcal{P}$，其定义为

$$\mathcal{P} \, Y = \mathrm{div}_f \circ \mathrm{div}_f^* \, Y \, . \tag{0.6}$$

对于 Killing 场 V，$\mathrm{div}_f^* V$ 为零，因此 $\mathcal{P} \, V = 0$。

对于一个近似 Killing 向量场，其对应的流几乎保持度量 g 不变。如前所述，近似平移在 [CM4] 中发挥了重要作用，用于证明“近似分裂的传播”。我们在此关注的是一种针对更一般对称性的相应传播现象。

我们将证明，如果一个梯度收缩里奇孤子（收缩子）在某个尺度上具有近似对称性，那么这种近似对称性会向外传播到更大的尺度。这是收缩子原理的一个例子，[CIM], [CM4], 该原理大致指出，对于这类方程，信息会向外辐射。

定理 0.7. 设 (M, g, f) 是一个非紧致收缩子，且 C_1为满足 $|\mathrm{R}| \leq C_1$的常数。存在 C_2, R，使得如果 Y是定义在 $\{f < r^2/4\}$ 上的向量场，并满足 $r \geq R$ 以及

(1) $\int_{f<r^2/4} |Y|^2 \mathrm{e}^{-f} = 1$且 $\int_{f<r^2/4} |\mathrm{div}_f^* Y|^2 \mathrm{e}^{-f} \leq \bar{\mu} \leq \frac{1}{4}$,

(2) 在 $\{f < r^2/4\}$上满足 $|Y| + |\nabla Y| \leq C_1 \, r$,

then 存在一个向量场 Z，定义在 M 上，满足 $\|Z\|_{L^2} = 1$、$\mathcal{P} \, Z = \mu \, Z$，并且 (Z1) $\|\mathrm{div}_f^* Z\|_{L^2}^2 = \mu \leq C_2 \left(\bar{\mu} + r^{4+n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}\right)$。(Z2) 对于 $s \in (r^2/4, r^2)$，我们有 $\int_{f=s} |\mathrm{div}_f^* Z|^2 \leq C_2 \, r^{C_2} \, \mu$。

该定理表明，近似对称性可以延伸到更大的集合，但估计会有所损失。在某些情形中，可以利用该情形特有的附加结构弥补这种损失，从而得到全局对称性，这一延伸因此具有强大的作用。在 [CM4], 中的定理 0.2 通过求解一个规范弥补了这种损失。

问题，然后利用圆柱在二次阶上体现出的刚性性质。这种二次刚性依赖于圆柱紧因子的结构，而不仅仅依赖于近似平移的存在。

这种对称性的传播通常在理解解的结构以及里奇流向奇点收敛的速率方面发挥重要作用。

1. Weighted manifolds and Killing fields

我们将主要关注梯度收缩里奇孤子，但许多结果具有更一般的适用性。Killing 向量场保持度量不变，因此也保持体积不变，从而始终是无散的。然而，它们不一定保持加权体积不变，因此 Killing场 Y 的加权散度 $\operatorname{div}_f Y$ 不一定为零。不过，我们将看到，在任意梯度里奇孤子上，它确实满足一个特征值方程（见下方方程（1.3））。

为证明这一点，我们回顾 [CM4] 中引理 2.8 给出的任意梯度里奇孤子上的一些一般公式（即，(M, g, f) 对某个常数 κ 满足（0.2）），其中 Y 为任意向量场：

$$(\mathcal{L}+\kappa)\,\operatorname{div}_f Y = -\operatorname{div}_f(\mathcal{P}\,Y)\,, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{L}\,\nabla \operatorname{div}_f(Y) = -\nabla \operatorname{div}_f(\mathcal{P}\,Y)\,. \tag{1.2}$$

如果 Y 是梯度里奇孤子上的 Killing场，那么由 (1.1) 可得

$$(\mathcal{L}+\kappa)\operatorname{div}_f Y = 0\,. \tag{1.3}$$

因此，$\operatorname{div}_f Y$ 是调和的：

推论 1.4. 如果 Y 是梯度里奇孤子上的 Killing场，那么 $\operatorname{div}_f Y$ 是调和的。

证明。由 (1.3)，$(\mathcal{L}+\kappa)\operatorname{div}_f Y = 0$。由于对任意 Killing场都有 $\operatorname{div} Y = 0$，因此可得

$$\begin{aligned}\Delta \operatorname{div}_f Y &= \mathcal{L}\operatorname{div}_f Y + \langle \nabla f, \nabla \operatorname{div}_f Y\rangle \\ &= -\kappa \operatorname{div}_f Y - \langle \nabla f, \nabla\langle Y, \nabla f\rangle\rangle \\ &= \kappa\,\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla_{\nabla f} Y, \nabla f\rangle - \operatorname{Hess}_f(Y, \nabla f)\,.\end{aligned} \tag{1.5}$$

倒数第二项由于 Killing 方程而消失。对于最后一项，利用孤立子方程 $\operatorname{Ric} + \operatorname{Hess}_f = \kappa\, g$，得到

$$\Delta \operatorname{div}_f Y = \operatorname{Ric}(\nabla f, Y)\,. \tag{1.6}$$

最后一项因 $\operatorname{Ric}(\nabla f, Y) = \frac{1}{2}\langle \nabla S, Y\rangle$（例如参见 [CM4] 中的 (1.14)）而消失，并且标量曲率沿 Killing场必为常数。□

后面我们将需要一个作用于对称二阶张量上的二阶自伴算子 L，其定义为

$$L\,h = \mathcal{L}\,h + 2\,\mathrm{R}(h)\,, \tag{1.7}$$

其中，R 是黎曼曲率，在正交归一标架中作用于 h，其表达式为

$$[\mathrm{R}(h)]_{ij} = \sum_{m,n} \mathrm{R}_{imjn}\, h_{mn}\,. \tag{1.8}$$

[CM4] 中的定理 1.32 给出了 L 与 div_f^* 之间的以下关系

$$L \operatorname{div}_f^*(Y) = \operatorname{div}_f^*(\mathcal{L} + \kappa) Y . \tag{1.9}$$

算子 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{L}$ 之间的关系也很有用：

$$-2\mathcal{P} = \nabla \operatorname{div}_f + \mathcal{L} + \kappa . \tag{1.10}$$

最后，利用一个简单的分部积分论证可以得出，若 Y 和 $\mathcal{P}Y$ 属于 L^2，则 $Y \in W^{1,2}$ 且 $\operatorname{div}_f Y \in L^2$；这由下一个引理给出：

引理 1.11.（引理 2.15，[CM4]）对于任意梯度里奇孤子，如果 Y，$\mathcal{P}Y \in L^2$，则 $\operatorname{div}_f(Y)$，$\nabla Y \in L^2$ 并

$$\|\nabla Y\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div}_f Y\|_{L^2}^2 \leq 2\|Y\|_{L^2} \|(2\mathcal{P} + \kappa) Y\|_{L^2} . \tag{1.12}$$

1.1. 收缩子。现在我们专门讨论满足 $\kappa = \frac{1}{2}$ 的收缩子。

命题 0.4 的证明。我们分两种情况讨论。首先假设 Y 保持 f，即 $\langle \nabla f、 Y \rangle = 0$。由于 Y 是 Killing 场，$\operatorname{div} Y = 0$ 因而 $\operatorname{div}_f Y$ 为零。

现在假设 Y 不保持 f，因此，$\operatorname{div}_f Y$ 并非恒等于零。在这种情况下，由 (1.3) 可知，$\operatorname{div}_f Y$ 是下列方程的一个非平凡解：

$$\mathcal{L} \operatorname{div}_f Y = -\frac{1}{2} \operatorname{div}_f Y . \tag{1.13}$$

此外，引理 1.11 蕴含 $\operatorname{div}_f Y \in L^2$。若 $\mathcal{L}v = -\mu v$，则漂移 Bochner 公式给出：

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla v|^2 = |\operatorname{Hess}_v|^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)|\nabla v|^2 . \tag{1.14}$$

将此结果应用于 $v = \operatorname{div}_f Y$ 和 $\mu = \frac{1}{2}$，并在 M 上积分，我们得到：

$$\|\operatorname{Hess}_{\operatorname{div}_f Y}\|_{L^2} = 0 . \tag{1.15}$$

由此可知，$\nabla \operatorname{div}_f Y$ 是一个非平凡的平行向量场，从而得到所需的分裂。 □

这两类 Killing 向量场还有第二个区别。平移由收缩孤子上最小特征值对应的特征函数所产生的梯度向量场生成。另一方面，保持 f 的 Killing 向量场被证明与所有梯度向量场正交。这两类向量场都满足漂移拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 的特征值方程，但对应的特征值不同。

1.2. 收缩孤子的几何估计。接下来我们将回顾收缩孤子的若干有用公式和一些几何估计。首先，对收缩孤子方程取迹可得：

$$\Delta f + S = \frac{n}{2} , \tag{1.16}$$

其中 S 是标量曲率。在完备收缩子上，众所周知（[H], 参见 [ChLN]），可以对 f 进行归一化，使得

$$|\nabla f|^2 + S = f . \tag{1.17}$$

由于根据 [Cn]（关于非紧致收缩子的改进估计，参见 [ChLY]），$S \geq 0$，函数 $b = 2\sqrt{f}$ 非负且满足

$$|\nabla b| \leq 1\,. \tag{1.18}$$

我们还需要 Cao-Zhou 关于收缩子的几何估计。首先，[CaZd] 中的定理 1.1 给出 c_1, c_2，它们只依赖于 $B_1(x_0) \subset M$，使得

$$\frac{1}{4}\left(r(x) - c_1\right)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}\left(r(x) + c_2\right)^2\,, \tag{1.19}$$

其中，$r(x)$ 是到固定点 x_0 的距离（若将 x_0 选为 f 的最小值点，则这些常数可以取为普适常数）。其次，[CaZd] 中的定理 1.2 表明，收缩子的体积增长至多为欧几里得型：存在 c_3，使得

$$\mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \leq c_3\, r^n\,. \tag{1.20}$$

2. Small eigenvalues and almost Killing fields

在本节中，(M, g, f) 是一个完备的非紧致梯度收缩里奇孤子（即 $\kappa = \frac{1}{2}$）。

算子 $\mathcal{P}$ 的构造使其在 Killing 向量场上取值为零。下一个引理利用特征值的变分刻画以及权函数的指数衰减，在大球上存在近似对称性时，为 $\mathcal{P}$ 找到较小的特征值。

引理 2.1. 假设存在一个带紧支撑的（非平凡）向量场 V，满足

$$\|\mathrm{div}_f^* V\|^2 \leq \bar{\mu}\|V\|_{L^2}^2\,, \tag{2.2}$$

其中 $\bar{\mu} < 1$。那么存在一个 $W^{1,\,2}$ 向量场 Z，满足 $\|Z\|_{L^2} = 1$，使得

(A) $\mathcal{P}\, Z = \mu\, Z$, with $\mu \in [0, \bar{\mu}]$, and $\|\mathrm{div}_f^* Z\|_{L^2}^2 = \mu$.
(B) $\mathrm{div}_f\, Z \in W^{1,2}$ satisfies $\mathcal{L}\,\mathrm{div}_f Z = -\left(\frac{1}{2} + \mu\right)\,\mathrm{div}_f Z$ and $\|\mathrm{div}_f\, Z\|_{L^2}^2 \leq 4\,\mu + 1$.

证明。算子 $\mathcal{P}$ 按照构造是自伴的。[CM4] 中的引理 4.20 表明，$\mathcal{P}$具有一组由光滑 $W^{1,\,2}$ 特征向量场 Y_i 组成的完备基，其特征值为

$$\mu_i \to \infty\,, \tag{2.3}$$

并且满足 $\|Y_i\|_{L^2} = 1$。此外，[CM4] 中的引理 4.20 还表明

$$\int |\mathrm{div}_f^*\, Y_i|^2\, \mathrm{e}^{-f} = \int \langle Y_i, \mathcal{P}\, Y_i\rangle\, \mathrm{e}^{-f} = \mu_i\,. \tag{2.4}$$

将 V 投影到 Y_i上进行展开，我们将 V 写成

$$V = \sum_i a_i\, Y_i\,, \tag{2.5}$$

其中每个 $a_i \in$R，且

$$\sum_i a_i^2 = \|V\|_{L^2}^2\,. \tag{2.6}$$

由于这些 Y_i 关于 L^2 正交归一，(2.2) 得出

$$\bar{\mu}\,\|V\|_{L^2}^2 \geq \|\mathrm{div}_f^* V\|_{L^2} = \int \langle V, \mathcal{P}\,V\rangle\,\mathrm{e}^{-f} = \sum_i a_i^2\,\mu_i$$

$$\geq \mu_1 \sum_i a_i^2\,. \tag{2.7}$$

将其与 (2.6) 比较可知，μ_1（最小的 μ_i）至多为 $\bar{\mu}$。令 $Z = Y_1$。由于 $Z, \mathcal{P}\,Z \in L^2$，引理 1.11 和命题 2.13 得到

$$\mathrm{div}_f\,Z \in W^{1,2} \text{ and } \nabla Z \in L^2\,. \tag{2.8}$$

（B）中 $\mathrm{div}_f Z$ 的 L^2 界由引理 1.11 得出。最后，由 (1.1) 可知，$\mathrm{div}_f Z$ 满足特征函数方程 $\mathcal{L}\,\mathrm{div}_f Z = -\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\mathrm{div}_f\,Z$。□

$\mathrm{div}_f^* Z$ 的加权 L^2 界迫使它在 f 较小的区域内也很小，但对于 f 较大且权重 e^{-f} 非常小的区域，几乎没有提供任何信息。为了在 f 较大时获得更好的界，我们转而依赖 [CM4] 中建立的多项式增长估计。为说明这一点，给定一个张量 w，定义其“加权球面平均值” $I_w(r)$ 为

$$I_w(r) = r^{1-n}\int_{b=r} |w|^2\,|\nabla b|\,. \tag{2.9}$$

先验地，这在 b的正则值处是良定义的，但 [CM4] 中的引理3.27表明，$I_w(r)$可以延拓到所有 r，该延拓几乎处处可微，并且作为 r的函数是绝对连续的；参见 [B], [CM1], [CM3]。

我们有以下多项式增长界：

命题 2.10. [CM4]. 给定 $\bar{\lambda}$，存在 r_0，使得如果 w 是一个 L^2 张量，且具有 h

$$\langle \mathcal{L}w, w\rangle \geq -\bar{\lambda}\,|w|^2\,, \tag{2.11}$$

那么，对于任意的 $r_2 > r_1 \geq r_0$，我们有

$$I_w(r_2) \leq 2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{5\,\bar{\lambda}} I_w(r_1)\,. \tag{2.12}$$

命题 2.10 是 [CM4] 中定理 3.4 的特殊情形。该命题要求 $\langle \mathcal{L}w, w\rangle$ 满足下界 (2.11)；如果 w 满足关于 $\mathcal{L}$ 的特征值方程，这一下界将成立。然而，我们希望将其应用于满足关于 $\mathcal{P}$ 的特征值方程的向量场。下一个结果给出了该方程的一个分解，使这成为可能（这是 [CM4] 中命题 4.6 的特殊情形）：

命题 2.13. [CM4]. 若 $\mathcal{P}\,Y = \mu\,Y$，并且我们设 $Z = Y + \frac{2}{2\mu+1}\nabla \mathrm{div}_f(Y)$，则 $\mathrm{div}_f(Z) = 0$ 且

$$(\mathcal{L}+\mu)\,\nabla\,\mathrm{div}_f\,(Y) = 0\,, \tag{2.14}$$

$$\left(\mathcal{L} + 2\,\mu + \frac{1}{2}\right) Z = 0\,. \tag{2.15}$$

此外，如果 $Y \in L^2$，那么 $\|Y\|^2 = \|Z\|^2 + \left(\mu+\frac{1}{2}\right)^{-2}\,\|\nabla\,\mathrm{div}_f(Y)\|^2$。

现在我们可以证明，当 Y 是 $\mathcal{P}$的特征向量场时，$\mathrm{div}_f^* Y$ 至多呈多项式增长。

定理 2.16. 假设 M, g具有有界曲率 $|\mathrm{R}| \le C_1$，并且 Y是一个满足 $\|Y\|_{L^2} = 1$的 $W^{1,2}$向量场，它满足 (A) 和 (B)。存在 C_2, R，使得对所有 $r \ge R$

$$I_{\mathrm{div}_f^* Y}(r) \le C_1 \, r^{C_2} \, \mu \, . \tag{2.17}$$

证明。由于 $\mathcal{P}\, Y = \mu\, Y$，命题 2.13 表明 $Z = Y + \frac{2}{1+2\,\mu}\, \nabla \mathrm{div}_f\, Y$满足

$$\mathcal{L}\, Z = -\left(2\,\mu + \frac{1}{2}\right)\, Z \, , \tag{2.18}$$

$$\mathcal{L}\, \nabla\, \mathrm{div}_f\, Y = -\mu\, \nabla\, \mathrm{div}_f\, Y \, . \tag{2.19}$$

将 (1.9) 应用于 (2.18) 和 (2.19)，得到

$$L\, \mathrm{div}_f^*\, Z = \mathrm{div}_f^* \left(\mathcal{L} + \frac{1}{2}\right)\, Z = 2\, \mu\, \mathrm{div}_f^*\, Z \, , \tag{2.20}$$

$$L\, \mathrm{div}_f^* \nabla \mathrm{div}_f\, Y = \mathrm{div}_f^* \left(\mathcal{L} + \frac{1}{2}\right)\, \nabla\, \mathrm{div}_f\, Y = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\, \mathrm{div}_f^*\, \nabla \mathrm{div}_f Y \, . \tag{2.21}$$

最后一个方程可改写为

$$L\, \mathrm{Hess}_{\mathrm{div}_f Y} = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\, \mathrm{Hess}_{\mathrm{div}_f Y} \, . \tag{2.22}$$

由于 M, g 具有有界曲率，且 μ 也有界，(2.20) 和 (2.22) 给出 C，从而

$$\langle \mathcal{L}\, w, w \rangle \ge -C\, |w|^2 \text{ for } w = \mathrm{Hess}_{\mathrm{div}_f Y} \text{ or } w = \mathrm{div}_f^*\, Z \, . \tag{2.23}$$

因此，命题 2.10 适用，得到 R 和 C_1，从而

$$w = \mathrm{Hess}_{\mathrm{div}_f Y} \text{ or } \mathrm{div}_f^*\, Z$$

二者都满足

$$I_w(r_2) \le \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{C_1} I_w(r_1) \text{ for any } r_2 > r_1 \ge R \, . \tag{2.24}$$

接下来，注意到由 (B) 和漂移 Bochner 公式可得

$$\|\mathrm{Hess}_{\mathrm{div}_f Y}\|_{L^2}^2 \le \mu \, . \tag{2.25}$$

另一方面，由 (A) 可得 $\|\mathrm{div}_f^* Y\|_{L^2}^2 \le \mu$ 也成立。因此

$$\|\mathrm{div}_f^* Z\|_{L^2}^2 \le C\, \mu \, . \tag{2.26}$$

由于 $|\nabla b| \le 1$，余面积公式给出了某个 $r_1 \ge R$ 以及一个常数 C_2，使得

$$I_w(r_1) \le C_2\, \mu \text{ for } w = \mathrm{Hess}_{\mathrm{div}_f Y} \text{ or } w = \mathrm{div}_f^*\, Z \, . \tag{2.27}$$

使用 t 将其代入（2.24），然后将 $\mathrm{div}_f^* Y$ 写成组合形式，即得定理。 □

现在我们已准备好证明主要定理。

定理 0.7 的证明。第一步是对向量场进行截断，以获得一个紧支撑的向量场 V，从而可以在引理 2.1 中使用。为此，定义一个截断函数 η，使得 $0 \le \eta \le 1$，其支撑集位于 $f < \frac{r^2}{4}$ 中，在距离 r^{-1} 处进行截断，满足 $|\nabla \eta| \le 2\, r$，并且使得

$$\mathrm{e}^{-f} \le \mathrm{e}^{-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}} \text{ on the support of } |\nabla \eta|\,. \tag{2.28}$$

最后一个估计利用了 (1.18) 中的 $|\nabla b| \le 1$。现在令 $V = \eta\, Y$。由于在 η 的支集上有 $|Y| \le C_1\, r$，因此

$$\|V\|_{L^2}^2 \ge \int_{\eta=1} |Y|^2\, \mathrm{e}^{-f} = 1 - \int_{0<\eta<1} |Y|^2\, \mathrm{e}^{-f} \ge 1 - C\, r^{2+n}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}\,, \tag{2.29}$$

其中，最后一个估计也用到了体积界 (1.20)。类似地，我们有

$$\begin{aligned} \|\mathrm{div}_f^* V\|_{L^2}^2 &\le 2 \int_{f<r^2/4} |\mathrm{div}_f^* Y|^2\, \mathrm{e}^{-f} + C\, r^{4+n}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}} \\ &\le 2\, \bar{\mu} + C\, r^{4+n}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Af在将 V 乘以一个常数，使其 L^2 范数为 1 之后，我们有

$$\|\mathrm{div}_f^* V\|_{L^2}^2 \le 3\, \bar{\mu} + C\, r^{4+n}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}} < 1\,. \tag{2.31}$$

引理 2.1 给出了一个 $W^{1,\,2}$ 向量场 Z，满足 $\|Z\|_{L^2} = 1$，并且满足 (A) 和 (B)。特别地，$\mathcal{P}\, Z = \mu\, Z$，其中

$$\mu \le 3\, \bar{\mu} + C\, r^{4+n}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}} < 1\,. \tag{2.32}$$

由此得到 (Z1)。精细增长界 (Z2) 可由定理 2.1 得出 6. □

References

[BaK] R. Bamler 和 B. Kleiner，关于三维 κ-解的旋转对称性，《纯粹与应用数学杂志》779 (2021)，37–55 页。[B] J. Bernstein，锥形端上漂移拉普拉斯算子几乎特征函数的渐近结构，《美国数学杂志》142 (2020)，第 6 期，1897–1929 页。[Br1] S. Brendle，里奇流自相似解的旋转对称性。《数学发明》194 (2013)，第 3 期，731–764 页。[Br2] S. Brendle，三维中的里奇流古老解。《数学学报》225 (2020)，第 1 期，1–102 页。[BrC] S. Brendle 和 K. Choi，R 中平均曲率流凸古老解的唯一性。《数学发明》217 (2019)，35–76 页。[Ca] H.D. Cao，里奇孤子研究的最新进展。几何分析最新进展，1–38 页，数学高级讲座（ALM），第 11 卷，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2010 年。[CaZd] H.D. Cao 和 D. Zhou，关于完备梯度收缩里奇孤子的研究，《微分几何杂志》85 (2010)，175–186 页。[Cn] B-L. Chen，里奇流的强唯一性。《微分几何杂志》82 (2009)，第 2 期，363–382 页。[CxZh] X. Cheng 和 D. Zhou，完备度量测度空间上漂移拉普拉斯算子的特征值，《当代数学通讯》19，1650001 (2017)。[ChLN] B. Chow、P. Lu 和 L. Ni，《Hamilton 的里奇流》，研究生数学丛书第 77 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2006 年。[ChLY] B. Chow、P. Lu 和 B. Yang，非紧梯度里奇孤子的标量曲率下界。《巴黎科学院数学报告》349 (2011)，第 23–24 期，1265–1267 页。[CIM] T.H. Colding、T. Ilmanen 和 W.P. Minicozzi II，平均曲率流一般奇点的刚性。《高等科学研究所数学出版物》121 (2015)，363–382 页。[CM1] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，具有多项式增长的调和函数，《微分几何杂志》第 46 卷，第 1 期 (1997)，1–77 页。

[CM2] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，分析、几何与概率中的热方程，即将发表。[CM3] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，Ornstein-Uhlenbeck 算子特征函数的尖锐频率界，《变分法与偏微分方程》，57 (2018) 第 5 期，文章 138。[CM4] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，里奇流的奇点与微分同胚，预印本。[H] R. Hamilton，里奇流中的奇点形成，《微分几何调查》2 (1995)，7–136，International Press。[K] B. Kotschwar，关于旋转不变的收缩里奇孤子。《太平洋数学杂志》236 (2008) 73–88。[KW] B. Kotschwar 和 L. Wang，渐近圆柱形收缩里奇孤子的唯一性定理，《微分几何杂志》，即将发表。[LW] Y. Li 和 B. Wang，里奇收缩子中圆柱体的刚性，预印本。

MIT, Dept. of Math., 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139-4307.

电子邮箱：colding@math.mit.edu 和 minicozz@math.mit.edu