arXiv:2305.03147v1 [math.CA] 4 May 2023

基于广义矩阵指数的矩微分方程线性系统的解

ALBERTO LASTRA 和 CRUZ PRISUELOS-ARRIBAS

摘要。本文定义了一种基于广义可求和性核算子构造的广义指数矩阵，并分析其主要性质，从而将经典指数矩阵和分数阶指数矩阵加以推广。

这一对象为以紧凑形式表示矩微分方程线性系统的解提供了实用工具，其理念与经典指数矩阵一脉相承。

目录

1. 引言 1
2. 预备知识与主要定义 3
2.1. 强正则序列与广义可求和性 3
2.2. 矩矩阵指数 4
2.3. $E(M)$ 的性质 5
2.4. Jordan 块 8
3. 主要结果 9
3.1. 可对角化情形 9
3.2. 不可对角化情形 11
3.3. 超越中等增长 14
参考文献 15

1. 引言

本文研究如下形式的矩微分方程线性系统

$$\partial_m y(z) = Ay(z), \tag{1.1}$$

其中 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个常矩阵，而 $y(z) = (y_1(z), \dots, y_n(z))$ 是一个未知函数向量，其中 $n \geq 1$ 为某个正整数，且 $\partial_m y(z) = (\partial_m(y_1), \dots, \partial_m(y_n))$ 表示

日期：2023年5月8日。2020年数学主题分类：15A16,34M03,30D15,34A08。关键词与短语：广义矩阵指数、矩微分方程系统、强正则序列、可求和性的核。第一作者的工作部分由西班牙科学与创新部项目 PID2019-105621GB-I00 资助，并得到马德里自治区教育与研究部研究与创新总局、阿尔卡拉大学 CM/JIN/2021-014 项目、阿尔卡拉大学 2021 年青年研究人员研发项目，以及科学与创新部—国家研究局 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和欧盟“NextGenerationEU”/PRTR 项目 TED2021-129813A-I00 的资助。第二作者的工作由西班牙科学与创新部项目 PID2019-107914GB-I00 资助。

$y(z)$（参见第 2.1 节）。方程（1.1）的显式通解见 [9]。本文的主要目标是提供一种实用工具来表示这类系统的解。为此，我们将借鉴经典情形下指数矩阵的思路，即考虑一阶微分方程的线性系统。我们的主要目标是用广义指数矩阵 $E(Az)$ 来表示方程（1.1）的通解。

近年来，矩微分方程的重要性日益凸显，这归功于矩微分算子的多功能性。通过选择适当的矩序列，该算子不仅可以广义化经典导数，还可以广义化 Caputo分数阶导数和 q–导数。这一理论的开端归功于 W. Balser 和 M. Yoshino [2]，他们给出了矩导数的形式定义。在过去十年中，这一定义不仅被推广到点的邻域内的全纯函数，也被推广到形式幂级数的和与多重和（见 [13, 14]）；相关研究还展示了函数方程形式解的可求和性以及其形式解系数上界估计方面的最新进展（见 [12, 21, 22]），以及 Stokes现象方面的进展（见 [16]）。

众所周知，选择矩序列 $\mathrm{m}_1 = (\mathrm{p}!)_{p\geq 0}$ 可得到通常的求导；而固定 $\mathrm{s} > 0$时，与序列 $\mathrm{m}_s = (\Gamma(1 + \mathrm{p}\,\mathrm{s}))_{p\geq 0}$ 相关联的矩导数则与 Caputo分数阶导数密切相关。更确切地说，$\partial_{m_s} \mathrm{y}(\mathrm{z}^{1/s}) = \mathrm{C}\,\mathrm{D}_z^{1/s}(\mathrm{y}(\mathrm{z}^{1/s}))$，其中 $\mathrm{C}\,\mathrm{D}_z^{1/s}$表示阶数为 1/s 的 Caputo分数阶导数。对任意固定的 $\mathrm{q} > 1$，序列 $\mathrm{m}_q = (\Gamma_q(1 + \mathrm{p}))_{p\geq 0}$ 确定了 q– 导数，其中 $\Gamma_q(\cdot)$ 是伽马函数的 q 类比（参见 [24], ）。事实上，之所以称 m 为矩序列，是因为当 $\mathrm{s} > 0$ 时，m_s 成为与某个正拉盖尔型测度相关联的矩序列；而 m_q 与序列 $(\mathrm{q}^{p(p-1)/2})_{p\geq 0}$ 密切相关，因为它们对应的经典超可微函数类相同，并且后一个序列是与可求和理论中常见的一种测度相关联的矩序列（相关例子见 [6, 10, 18] ）。不过，广义指数矩阵的构造（见 2.4）可以形式地推广到任意正实数序列 m；在对序列 m 作温和假设的条件下，还可以构造出一个整函数（见 (2.8)）。本文将区分这些在应用中重要的情形。

矩阵指数的构造在应用中极为重要。矩阵指数的经典构造是求解线性微分方程组的一种广泛使用的工具。在 [19], 中，作者引入了分数阶矩阵指数的概念，该概念用于求解形式如下的线性分数阶微分方程组。

$$D^{\alpha} y(z) = A^{\alpha} y(z),$$

其中 D^{α} 是一个分数阶微分算子，且 $\alpha > 0$。矩阵 A^{α} 推广了矩阵 A 的自然幂。事实上，解表示为 $\mathrm{y}(\mathrm{z}) = \exp(\mathrm{Az})$，并针对两种情况构造：$\mathrm{D}^{\alpha}$ 为 Caputo分数阶导数或 Riemann–Liouville分数阶微分算子。

符号说明:
对于所有的 $\mathrm{d} \in \mathbb{R}$ 和 $0 < \theta < 2\pi$，$\mathrm{S}_d(\theta)$ 表示满足 $|\arg(\mathrm{z}) - \mathrm{d}| < \frac{\theta}{2}$ 的复数 z。对于所有的 $\mathrm{z}_0 \in \mathbb{C}$ 和 $\mathrm{r} > 0$，$\mathrm{D}(\mathrm{z}, \mathrm{r})$ 是以 z_0 为中心、半径为 r 的开圆盘。

设 $\mathbb{E}$ 为复Banach空间。我们将 $\mathbb{E}[[\mathrm{z}]]$ 记作系数属于 $\mathbb{E}$ 的形式幂级数空间。$\mathbb{E}\{\mathrm{z}\}$ 表示在原点的某个邻域上具有正收敛半径的幂级数集合。

2. 预备知识与主要定义

在第一小节中，我们介绍广义可求和性和矩微分核构造中所涉及的主要要素。第二小节旨在陈述广义矩指数矩阵的定义及其主要性质。矩阵的Jordan块分解的广义指数在最后两个小节中给出了广义矩指数矩阵的最终结构。我们将讨论分为可对角化矩阵和不可对角化矩阵两部分。

2.1. 强正则序列与广义可求和性。

本节中的定义和结果详见 J. Sanz 关于广义可求和性的开创性著作 [20]及其参考文献。

按照 V. Thilliez [23],的说法，强正则序列定义如下。

定义 2.1. 若正实数序列 $\mathbb{M} = (M_p)_{p\geq 0}$ 满足归一化条件 $M_0 = 1$，则称其为强正则序列，若它满足：

(lc) 对所有 p，$M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1} \geq 1$ （即 $\mathbb{M}$ 是对数凸序列）。(mg) 存在 $A > 0$，使得 $M_{p+q} \leq AM_pM_q$ 对所有 p、q ≥ 0 均成立（即 $\mathbb{M}$ 具有中等增长性）。(snq) 存在 $A > 0$，使得

$$\sum_{q\geq p} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} \leq A\frac{M_p}{M_{p+1}}, \quad p \geq 0,$$

（即 $\mathbb{M}$ 是非拟解析的。）

强正则序列中最突出的例子是 $\mathbb{M}_\alpha = (p!^\alpha)_{p\geq 0}$，对于固定的 $\alpha > 0$，称为 α 阶 Gevrey 序列。

给定一个强正则序列 $\mathbb{M}$，函数 $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 定义为 $M(0) = 0$且 $M(t) = \sup_{p\geq 0} \log\left(t^p M_p\right)$ 对于$t > 0$，用于衡量 $\mathbb{M}$的增长，并允许定义正数 $\rho(M) = \limsup_{r\to\infty} \log(M(r))\log(r)$。

定义 2.2. 设 $\mathbb{M}$ 是一个强正则序列，并且 M 和 $\rho(M)$ 如前所述由 $\mathbb{M}$ 定义。若存在 e 和 E 使得：则序列 $\mathbb{M}$ 具有一对用于 $\mathbb{M}$-可求和性的核函数。

(i) $e \in O(S_0(\rho^\pi(M)))$. 此外，存在 $t_0 > 0$，并且对于所有 $z_0 \in S_0(\rho^\pi(M))$，存在 $r_0 = r_0(z_0) > 0$，使得 $D(z_0, r_0) \subseteq S_0(\rho^\pi(M))$，从而期特码

$$\int_0^{t_0} \sup_{z\in D(z_0,r_0)} |e(t/z)|\frac{dt}{t} l\infty.$$

我们还假设，对于每个 $\delta > 0$，都存在 $K_1, K_2 > 0$，使得

$$|e(z)| \leq K_1 \exp\left(-M(|z|/K_2)\right), \quad z \in S_0\left(\frac{\pi}{\rho(M)} - \delta\right).$$

(ii) 对于所有满足 $x > 0$ 的 x，e(x) 都是正实数。

(iii) $E \in \mathbb{O}(\mathbb{C})$，以及

$$|E(z)| \leq K_3 \exp\left(M(|z|/K_4)\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

对于某个 $K_3, K_4 > 0$。此外，存在 $\beta > 0$，使得对于所有 $0 < \theta < 2\pi - \rho^\pi(M)$ 和 R > 0，都存在 $K_5 > 0$，满足 $|E(z)| \leq K_5/|z|^\beta$，其中 $z \in S_\pi(\theta) \cup (\mathbb{C} \setminus D(0, R))$。

(iv) E 在原点处的泰勒展开为

$$E(z) = \sum_{p\geq 0} \frac{z^p}{m(p)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

其中 m $= (m(p))_{p\geq 0}$ 是函数 e 的拉盖尔型矩序列，即

$$m(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e(t)dt, \qquad p \geq 0. \tag{2.3}$$

给定一个强正则序列 $\mathbb{M}$，广泛可求和性存在相关核函数对的一个充分条件是 $\mathbb{M}$具有非零邻近阶（见 [7, 11]），大多数应用中出现的序列都满足这一条件，特别是对于任意 Gevrey 序列 $\mathbb{M}_\alpha$， $\alpha > 0$。

设 m $= (m_p)_{p\geq 0}$ 是一个正实数序列（我们通常将 m 视为与给定强正则序列相关的广义可求和性核函数所关联的矩序列）。2010 年，W. Balser 和 M. Yoshino [2] 提出了矩微分的概念，将其定义为算子 $\partial_{m,z}: \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]]$，定义如下：

$$\partial_{m,z}\left(\sum_{p\geq 0} \frac{a_p}{m_p} z^p\right) = \sum_{p\geq 0} \frac{a_{p+1}}{m_p} z^p.$$

本文中通常将矩微分算子记为 ∂_m，因为不会与变量混淆。

这一概念可以自然地推广到系数取自复向量空间的形式幂级数。在本研究中，我们通常考虑系数取自由复数元素的 n ×n 矩阵构成的巴拿赫空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$，并赋予其次乘性范数。对于定义在原点某个邻域内的全纯函数，只需将函数与其在原点处的泰勒展开对应起来，这一定义便适用。最突出的情形是 $\mathbb{M}_\alpha = (p!^\alpha)_{p\geq 0}$。在这种情况下，矩序列为 $m_k = (\Gamma(1 + p\,k))_{p\geq 0}$，且矩导数与 Caputo分数阶导数直接相关： $\partial_{m_s} f(z^{1/s}) = cD_z^{1/s}(f(z^{1/s}))$（见 [15]，定义 5 和注 1）。

2.2. 矩矩阵指数。设 m $= (m(p))_{p\geq 0}$ 是一个正实数序列。假设 m(0) = 1。我们将矩阵 M $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 m-指数定义为如下形式表达式

$$E_m(M) = \sum_{p\geq 0} \frac{M^p}{m(p)}. \tag{2.4}$$

如果序列 m 不会引起歧义，我们通常会用 E(M) 代替 $E_m(M)$。请注意，原则上，E(M) 的表达式可以视为 $\mathbb{C}[[M]]$, 中的一个形式元素，即 M 的形式幂级数，或矩阵的无穷级数。注意，如果 M 是对角矩阵，

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & m_{nn} \end{pmatrix},$$

则有

$$M^p = \begin{pmatrix} m_{11}^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22}^p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n-1n-1}^p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & m_{nn}^p \end{pmatrix},$$

因此

$$\sum_{p\geq 0} \frac{M^p}{m(p)} = \begin{pmatrix} \sum_{p\geq 0} \frac{m_{11}^p}{m(p)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{p\geq 0} \frac{m_{22}^p}{m(p)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{p\geq 0} \frac{m_{n-1n-1}^p}{m(p)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \sum_{p\geq 0} \frac{m_{nn}^p}{m(p)} \end{pmatrix},$$

也就是说

$$E(M) = \begin{pmatrix} E(m_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(m_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & E(m_{n-1n-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & E(m_{nn}) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

至少从纯形式的角度来看如此；在这最后一步中，我们考虑了标量（维数为 1 的矩阵）情形下 E 的定义。

2.3. E$E(M)$的性质。 本节将探讨式（2.4）定义的算子所满足的性质。具体而言，我们将这些性质与经典指数算子作用于矩阵时所具备的性质进行比较。

原则上，方阵的 m-指数是从形式角度定义的。实际上，我们将考虑由 $M \mapsto \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} M^p z^p$ 定义的形式算子 $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}[[z]]$。

引理 2.6. 设 A、B、C $\in \mathbb{C}^{n\times n}$。以下形式性质成立：

(i) 如果 AB = BA，那么在考虑形式幂级数的柯西乘积时，E(A)E(B) = E(B)E(A)。(ii) $\partial_m E(Az) = AE(Az)$。(iii) 如果 C 可逆且 $A = CBC^{-1}$，那么 $E(A) = CE(B)C^{-1}$，也就是说，如果矩阵 A 和 B 相似，那么 E(A) 和 E(B) 也相似。(iv) 如果 O 是零矩阵，那么 m(0)E(O) = I。特别地，如果 m(0) = 1，则 E(O) = I。

证明。我们首先证明（i）。注意，根据两个形式幂级数的柯西乘积，并且由于 A 与 B 可交换，有

$$\begin{aligned} E(A)E(B) &= \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{m(p)} \sum_{p\geq 0} \frac{B^p}{m(p)} \\ &= \sum_{p\geq 0} \sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{m(n)} \frac{B^{p-n}}{m(p-n)} = \sum_{p\geq 0} \sum_{n=0}^{p} \frac{B^{p-n}}{m(n)} \frac{A^n}{m(p-n)} \\ &= \sum_{p\geq 0} \sum_{l=0}^{p} \frac{B^l}{m(l)} \frac{A^{p-l}}{m(p-l)} = \sum_{p\geq 0} \frac{B^p}{m(p)} \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{m(p)} = E(B)E(A). \end{aligned}$$

（ii）的证明由形式矩导数的定义可得

$$\partial_m E(Az) = \partial_m \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{m(p)} z^p = \sum_{p\geq 0} \frac{A^{p+1}}{m(p)} z^p = A \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{m(p)} z^p = AE(Az).$$

对于 (iii)，它直接由以下事实得出：对于每个正整数 p，$(CBC^{-1})^p = CB^pC^{-1}$：

$$E(A) = \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{m(p)} = \sum_{p\geq 0} \frac{(CBC^{-1})^p}{m(p)} = \sum_{p\geq 0} \frac{CB^pC^{-1}}{m(p)} = C \sum_{p\geq 0} \frac{B^p}{m(p)} C^{-1} = CE(B)C^{-1}.$$

最后，(iv) 直接由 E(O) 的定义得出。 □

注记 2.7. 与经典情形一样，很容易看出，如果 A 和 B不满足交换律，那么引理 2.6 中的第一条结论不成立。除此之外，即使 $A(A+B)$，$E(A)E(B)$ 也不一定成立，即使 A 和 B 满足交换律。为说明这一点，注意到，假设 $AB = BA$，

$$E(A+B) = \sum_{p\geq 0} \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!m(p)} A^n B^{p-n}$$

而

$$E(A)E(B) = \sum_{p\geq 0} \sum_{n=0}^{p} \frac{A^n B^{p-n}}{m(p-n)m(n)}.$$

因此，为使其成为 $E(A+B) = E(A)E(B)$，应满足以下条件：

$$\frac{p!}{n!(p-n)!} = \frac{m(p)}{m(n)m(p-n)}, \qquad 0 \leq n \leq p,$$

这通常并不成立。注意，前述性质意味着，通过取 $n \geq 1$ 和 $n = p-1$，并利用递归论证，序列 $m = (m(p))_{p\geq 0}$ 的表达式确定了 $m(p) = m(1)^p p!$。因此，该序列等价于一阶 Gevrey 序列。

因此，一般而言，我们无法推导出 $E(-A) = E(A)^{-1}$，其中二者均为系数取自 $n \times n$ 矩阵空间的形式幂级数。事实上，一般而言，$E(-A)$, $E(A)^{-1}$。为说明这一点，考虑以下例子：设 $m(p) := 2^p$ 且 $A := I$，则，

$$E(A) = \sum_{p\geq 0} \frac{I^p}{2^p} = 2I,$$

而

$$E(-A) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-I)^p}{2^p} = I \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(-2)^p} = \frac{2}{3} I,$$

因此

$$E(A)E(-A) = \frac{4}{3} I.$$

由前一个引理中的 (iii) 可知，给定 A、$B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 酉相似矩阵，则 $E(A)$ 和 $E(B)$ 仍为酉相似矩阵。这一相似性将在下文中发挥作用，使我们能够用 $E(\lambda z)$ 形式的函数来表示矩微分方程线性系统的解，其中 $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$。还值得指出的是，在这一一般框架下，经典恒等式 $\det(e^A) = \operatorname{etr}^{(A)}$ 不再成立，除非 $m = (B^p p!)_{p\geq 0}$ 对于某个 $B > 0$ 成立。在可对角化情形下，结合引理 2.6 的性质 (iii)，这一点是显然的。设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 A 的特征值（允许重复）。则 $\det(E(A)) =$

$\det(E(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))) = \prod_{j=1}^{n} E(\lambda_j)$，而 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$这意味着 $E(\mathrm{tr}(A)) = E(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j)$。最后我们注意到

$$\prod_{j=1}^{n} E(\lambda_j) = \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_n=p}\frac{1}{m(j_1)\cdots m(j_n)}\lambda_1^{j_1}\cdots\lambda_n^{j_n}\right)$$

and

$$E(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j) = \sum_{p\geq 0}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)^p}{m(p)},$$

当 $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)^p = \sum_{j_1+\ldots+j_n=p} m(p)\, m(j_1)\cdots m(j_n)\,\lambda_1^{j_1}\cdots\lambda_n^{j_n}$ 对每个 $p\geq 0$ 成立时，它们相等。这仅在 $m = (B^p p!)_{p\geq 0}$ 对某个 $B > 0$ 成立时有效。一般情形可用类似的方法处理，同时考虑 A 的约当分解以及算子 $E(\cdot)$ 对 Jordan 块的作用性质，详见第 2.4 节。

关于收敛性质，我们考虑 $\|\cdot\|$in $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的归一化次乘性范数。我们将关注形式幂级数 $E(Az)\in\mathbb{C}^{n\times n}[[z]]$ 的收敛性。

序列 $m = (m(p))_{p\geq 0}$ 满足该性质是自然的。

$$\liminf_{p\to\infty} m(p)^{1/p} = +\infty \tag{2.8}$$

在研究超全纯函数和/或超可微函数时，即研究其导数受到以 m 为依据给出的界约束的函数空间时。关于这一点，请参阅第 3 [8] 节中权序列的定义。关于取值于复Banach空间的全纯函数及其主要性质的综述，请参阅 [1], 附录 B。

引理 2.9。 设 $m = (m(p))_{p\geq 0}$ 是一个正实数序列，使得（2.8）成立。那么，对于每个 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，形式幂级数 $E(Az)$ 定义了一个整函数（其取值于巴拿赫空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$）。特别地，$E(A)$ 绝对收敛。此外，对于每个 $z\in\mathbb{C}$以及 $\|\cdot\|$上的每个归一化次乘性范数 $\mathbb{C}^{n\times n}$，都有

$$\|E(Az)\| \leq E(\|A\|\,|z|), \qquad z\in\mathbb{C}$$

证明。直接验证可得

$$\|E(Az)\| \leq \sum_{p\geq 0}\frac{1}{m(p)}\|A\|^p\,|z|^p. \tag{2.10}$$

我们注意到，前一个不等式右端级数的收敛半径为 ρ，其中

$$\frac{1}{\rho} = \|A\|\limsup_{p\to\infty}\frac{1}{m(p)^{1/p}} = \|A\|\left(\liminf_{p\to\infty}(m(p))^{1/p}\right)^{-1} = 0.$$

对于证明的第二部分，令 $z\in\mathbb{C}$。我们注意到，(2.10) 的右端与 $E(\|A\|\,|z|)$ 相同。 □

前面提到的 $E(A)^{-1}$ 的构造按如下方式递归确定。

引理 2.11. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $m = (m(p))_{p\geq 0}$ 是满足 (2.8) 的正实数序列。则，$E(Az)$ 是可逆矩阵，且

$$E(Az)^{-1} = \sum_{p\geq 0}\frac{\phi_p}{m(p)}A^p z^p \in \mathbb{C}^{n\times n}\{z\},$$

其中 $\phi_0 = 1$，并且对于每个 $p\geq 1$，$\phi_p = -\sum_{j=0}^{p-1} m(p)\, m(j) m(p-j)\phi_j$。

证明。设一般的形式幂级数 $B(z) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} B_p z^p \in \mathbb{C}^{n\times n}[[z]]$。若 $B(z)E(Az) = I$，则可归纳证明 $B_p = \phi_p A^p$，其中某个 $\phi_p \in \mathbb{C}$ 满足 $\phi_0 = 1$，且 $\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{m(j)m(p-j)} \phi_j = 0$ 对所有 $p \geq 1$ 均成立。因此，$E(Az)^{-1}$ 的形式存在性得以保证。事实上，由于 $E(Az)$ 定义了一个整函数（取值于巴拿赫空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$），且 $E(Az)|_{z=0} = I$，故存在一个原点邻域，使得 $E(Az)^{-1}$ 定义一个解析函数。更准确地说，收敛半径由函数 $z \mapsto E(Az)$ 的第一个零点的模决定。也可以采用另一种归纳论证来验证，存在足够大的 c、$b > 0$，使得 $\phi_p/m(p) \leq cb^p$ 对每个 $p \geq 0$ 均成立。□

注意，当 $m = (p!)_{p\geq 0}$ 时，对于所有 $p \geq 1$，都有 $\sum_{j=0}^{p} m(p) \frac{1}{m(j)m(p-j)} \phi_j = 0$，其中 $\phi_j = (-1)^j$ 对每个 $j \geq 0$ 都成立，因此 $E(Az)^{-1} = \exp(Az)^{-1} = \exp(-Az) = E(-Az)$。

引理2.6 中陈述的性质 (ii) 可以在收敛情形下重新考察。下一个结果是引理2.9的直接推论。

引理 2.12. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 m 是一个正实数序列，并满足（2.8）。那么，$\partial_m E(Az)$ 确定一个整函数，使得 $\|\partial_m E(Az)\| \leq \|A\| E(\|A\||z|)$，对每个 $z \in \mathbb{C}$。

2.4. Jordan 块。Jordan 块 $J_{\lambda,i}$ 是一个 $i \times i$ 上三角矩阵，其对角线上的元素均为同一个数 $\lambda \in \mathbb{C}$，且超对角线上的每个元素均为 1，即

$$J_{\lambda,i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_i + N_i,$$

其中 I_i 是 $i \times i$ 单位矩阵，且

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个幂零矩阵，对于所有 $p \geq i$，$N^p{}_i$ 均为零矩阵。因此，

$$J_{\lambda,i}^p = (\lambda I_i + N_i)^p = \sum_{h=0}^{\min\{i-1,p\}} \binom{p}{h} \lambda^{p-h} I_i N_i^h = \sum_{h=0}^{\min\{i-1,p\}} \binom{p}{h} \lambda^{p-h} N_i^h.$$

因此，

$$E(J_{\lambda,i}) = \sum_{p\geq 0} \frac{J_{\lambda,i}^p}{m(p)} \tag{2.13}$$

$$= \sum_{p\geq 0} \sum_{h=0}^{\min\{i-1,p\}} \binom{p}{h} \frac{\lambda^{p-h}}{m(p)} N_i^h = \sum_{h=0}^{i-1} N_i^h \sum_{p\geq h} \binom{p}{h} \frac{\lambda^{p-h}}{m(p)}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_0 E(\lambda,1) & \Delta_1 E(\lambda,1) & \cdots & \Delta_{i-2} E(\lambda,1) & \Delta_{i-1} E(\lambda,1) \\ 0 & \Delta_0 E(\lambda,1) & \Delta_1 E(\lambda,1) & \cdots & \Delta_{i-2} E(\lambda,1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_0 E(\lambda,1) & \Delta_1 E(\lambda,1) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \Delta_0 E(\lambda,1) \end{pmatrix}.$$

这里，我们使用了以下定义。

定义 2.14 (定义 5, [9])。 设 $\lambda \in \mathbb{C}$且 $h \geq 0$。我们定义

$$\Delta_h E(\lambda, z) = \sum_{p \geq h} \binom{p}{h} \frac{\lambda^{p-h} z^p}{m(p)}.$$

3. 主要结果

本节中，我们仿照经典指数矩阵的做法，用广义指数矩阵给出方程（1.1）的通解。我们区分两种情况：1）方程组（1.1）的矩阵可对角化；2）该矩阵不可对角化。

本节中，我们假设 m $= (m(p))_{p\geq 0}$ 是由广义可求和性的广义求和核构造出的矩序列。更确切地说，设 $\mathbb{M} = (M_p)_{p\geq 0}$ 是一个具有非零邻近阶的强正则序列。对于广义可求和性的一对伴随核 e 和 E，序列 m 由（2.3）确定。给定一个 (lc) 序列 $\mathbb{M}$（特别是强正则序列），通过凸性论证可以直接验证，序列 $(M_p^{1/p})_{p\geq 0}$ 单调递增。$\sup_{p\geq 0} M_p^{1/p} < \infty$ 等价于相应的超可微函数类包含于解析函数空间 [5], 这一事实会导致平凡情形。因此，我们假设 $\lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = +\infty$。根据 [20],命题 5.8，可以保证存在 A、B > 0 使得

$$A^p M_p \leq m(p) \leq B^p m_p, \quad p \geq 0,$$

这意味着（2.8）成立。从现在起，我们也将假设这一条件成立。特别地，任意 Gevrey 序列都满足这一条件。

为完整起见，我们还回顾 [9] 中的以下结果。

引理 3.1(引理 2,[9])。 方程组 (*1.1*) 的解集是 $(O(\mathbb{C})^n$ 的一个 n 维子空间。

引理 3.2 (引理 5, [9])。 对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及 h ≥ 0， $\Delta_h E(\lambda, z) \in O(\mathbb{C})$，其中 $\Delta_h E(\lambda, z)$ 定义见定义 *2.14*。

3.1. 可对角化矩阵。若 A 是一个可对角化矩阵，则存在 D（对角矩阵）和 P（可逆矩阵），使得

$$A = PDP^{-1}.$$

然后，

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix},$$

其中 λ_i 是对应特征向量 v_i（列向量）的一个特征值，i $\in$ {1,....., n}。请注意，这些 λ_i 不一定彼此不同。

由于 $E(A) = \sum_{p\geq 0} A^p\, m(p)$，根据式（2.5），我们有

$$E(A) = PE(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} E(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & E(\lambda_{n-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & E(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Theo注 3.3。 设 A $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个可对角化矩阵，则 (1.1) 的通解为

$$y(z) = E(Az)v^c, \tag{3.4}$$

其中，v^c 是一个 n 维常数列向量。

证明。 设 $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq n}$ 为 A 的特征值集合，其对应的特征向量为 $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$。 然后，展开（3.4），我们有

$$E(Az)v^c = \begin{pmatrix} E(\lambda_1 z)v_1 & \cdots & E(\lambda_n z)v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^c \\ \vdots \\ v_n^c \end{pmatrix},$$

其中，$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix}$ 是一个列向量矩阵，满足这样的条件。

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^c \\ \vdots \\ v_n^c \end{pmatrix} = \widetilde{v}_1 v_1^c + \cdots + \widetilde{v}_n v_n^c,$$

其中请记住，$\widetilde{v}1$、 $\cdots$、 $\widetilde{v}_n$ 是 n 个线性无关列向量。

那么，若定义

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \widetilde{v}_1 v_1^c + \cdots + \widetilde{v}_n v_n^c,$$

我们有

$$E(Az)v^c = \begin{pmatrix} E(\lambda_1 z)v_1 & \cdots & E(\lambda_n z)v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i E(\lambda_i z)v_i.$$

此外，请注意，对于任意选取的 v^c，向量 $\begin{pmatrix} c^1 \\ \\ _n \end{pmatrix}$ ... c 是唯一确定的，因为

$$\det\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

因此，只需应用 [9,定理 1] 即可完成证明。

□

3.2. A不可对角化。假设A是一个不可对角化矩阵，则存在 λ_i、 $1 \le i \le k$，它们是A的特征值，其代数重数为m_i、 $1 \le i \le k$（$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$）。考虑与每个 λ_i相关联的广义特征向量 $\{v_{i,j}\}_{1 \le j \le m_i}$。那么，存在一个Jordan矩阵J，以及一个可逆矩阵P，其列由与 λ_i 相关联的广义特征向量确定，使得

$$A = PJP^{-1},$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,l_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & J_{\lambda_1,l_{1,q_1}} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & J_{\lambda_k,l_{k,1}} & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & J_{\lambda_k,l_{k,q_k}} \end{pmatrix}$$

其中，每个 $J_{\lambda_i,\ l_{i,\ s}}, 1 \le i \le k,\ 1 \le s \le q_i\ (\sum_{s=1}^{q_i} l_{i,\ s} = m_i)$ 均为大小为 $l_{i,\ s}$ 的 Jordan块。

定理 3.5。 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个不可对角化矩阵。方程 (1.1) 的通解为

$$y(z) = E(Az)v^c, \tag{3.6}$$

其中，v^c 是一个 n 维常数列向量。

证明。设 $\lambda_i, 1 \le i \le k$ 是 A 的特征值，其代数重数为 $m_i, \sum_{i=1}^{k} m_i = n$。对于每个特征值 λ_i，我们考虑其对应的特征向量 $\{v_{ji,\ l_{i,\ s}}\}_{1 \le s \le q_i}, 1 \le j \le l_{i,\ s}$。

展开 E(Az)，可得

$$E(Az) = \begin{pmatrix} \Delta_0 E(\lambda_1,z)v^1_{1,l_{1,1}} & \cdots & \sum_{h=1}^{l_{1,1}} \Delta_{l_{1,1}-h} E(\lambda_1,z)v^{l_{1,1}}_{1,l_{1,1}} & \cdots & \Delta_0 E(\lambda_k,z)v^1_{k,l_{k,q_k}} & \cdots & \sum_{h=1}^{l_{k,q_k}} \Delta_{l_{k,q_k}-h} E(\lambda_k,z)v^{l_{k,q_k}}_{k,l_{k,q_k}} \end{pmatrix} P^{-1},$$

其中

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} v^1_{1,l_{1,1}} & \cdots & v^{l_{1,1}}_{1,l_{1,1}} & \cdots & v^1_{k,l_{k,q_k}} & \cdots & v^{l_{k,q_k}}_{k,lk,q_k} \end{pmatrix}^{-1} =: \begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix}$ 是一个列向量矩阵。

此外

$$P^{-1} \begin{pmatrix} v^c_1 \\ \vdots \\ v^c_n \end{pmatrix} = \widetilde{v}_1 v^c_1 + \cdots + \widetilde{v}_n v^c_n,$$

其中请记住， ˜v1、 · · · 、 ˜v$_n$ 是 n 个线性无关列向量。于是，对于任意选取的 v^c，向量

$$\begin{pmatrix} c^1_{1,l_{1,1}} \\ \vdots \\ c^{l_{1,1}}_{1,l_{1,1}} \\ \vdots \\ c^1_{k,l_{k,q_k}} \\ \vdots \\ c^{l_{k,q_k}}_{k,l_{k,q_k}} \end{pmatrix} := \widetilde{v}_1 v_1^c + \cdots + \widetilde{v}_n v_n^c,$$

由于.....，故唯一确定

$$\det \begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 & \cdots & \widetilde{v}_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

此外，回想一下 $\sum^k{}_{i=1} \sum^{q_i}_{s=1} l_{i,\ s} = \sum^k{}_{i=1} m_i = n$。

综合以上估计，可得 y(z) = E(Az)v^c 与.....重合

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 E(\lambda_1, z) v^1_{1,l_{1,1}} & \cdots & \sum_{h=1}^{l_{1,1}} \Delta_{l_{1,1}-h} E(\lambda_1, z) v^{l_{1,1}}_{1,l_{1,1}} & \cdots \\ \cdots & \Delta_0 E(\lambda_k, z) v^1_{k,l_{k,q_k}} & \cdots & \sum_{h=1}^{l_{k,q_k}} \Delta_{l_{k,q_k}-h} E(\lambda_k, z) v^{l_{k,q_k}}_{k,l_{k,q_k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1_{1,l_{1,1}} \\ \vdots \\ c^{l_{1,1}}_{1,l_{1,1}} \\ \vdots \\ c^1_{k,l_{k,q_k}} \\ \vdots \\ c^{l_{k,q_k}}_{k,l_{k,q_k}} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{q_i} \sum_{j=1}^{l_{i,s}} c^j_{i,l_{i,s}} \sum_{h=1}^{j} \Delta_{j-h} E(\lambda_i, z) v^j_{i,l_{i,s}}.$$

因此，应用 [9, 定理 2] 我们得出证明。 □

定义 3.7。 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 并考虑矩量微分方程线性系统微分方程 (1.1)。矩阵 $X = X(z) \in (\mathcal{O}(\mathbb{C}))^{n\times n}$ 称为与 (1.1) 相关的基本矩阵，当且仅当 X 的各列确定了 (1.1) 的一组线性无关解。

由定理 3.3 和定理 3.5 ，我们可以推导出以下结果。

推论 3.8。 设 A $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ 并考虑矩量微分方程线性系统（*1.1*）。那么，矩阵 E(Az) 是与（*1.1*）相关联的基本矩阵。

推论 3.9。 设 X(z) $\in (\mathcal{O}(\mathbb{C}))^{n\times n}$ 是与（*1.1*）相关的基本矩阵。则有

$$E(Az) = X(z)X(0)^{-1}.$$

证明。设 X(z)、Y(z) $\in (\mathcal{O}(\mathbb{C}))^{n\times n}$ 是方程 (1.1) 的两个基本解，则显然存在可逆矩阵 C, $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 Y(z) = X(z)C。这是因为 X 的列和 Y 的列分别构成方程 (1.1) 的解向量空间的一组基，因此 C 表示坐标变换矩阵。由此可得 E(Az) = X(z)C。令 z = 0，得到 E(0) = I = X(0)C。因此， C = X(0)$^{-1}$。回顾一下，X(0) 是一个可逆矩阵，它表示，

按列排列的一组 n个在原点处线性无关的初始条件，它们属于方程 (1.1，由一组基给出 $\mathbb{C}^n$。 □

与经典情形一样，\(E(Az)\) 的计算比线性组合（参见定理 2 [9] 的证明）更容易处理，并且能够以紧凑的表达式提供全部信息。

例 3.10。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 给定为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

并且令 m为满足 (2.8) 的正实数序列。我们考虑矩分阶微分方程的线性系统 $\partial_m y = Ay$。不难验证，与 A 相关的特征多项式有 $r_1 = 1$作为二重根，且 $r_2 = 2$ 作为单根。与 A 相关的 Jordan 标准形为 J 和矩阵 P

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $P^{-1}AP = J$。$\partial_m y = Ay$ 的通解为 $y(z) = E(Az)$。一方面，可以通过归纳法证明，

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 2^p - 1 & 2^p & 2^p - p - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

这意味着 $E(Az) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} A^p z^p$ 与之重合。

$$\begin{pmatrix} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} z^p & 0 & \sum_{p\geq 0} \frac{p}{m(p)} z^p \\ \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} (2z)^p - \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} z^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} (2z)^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} (2z)^p - \sum_{p\geq 0} \frac{p}{m(p)} z^p - \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} z^p \\ 0 & 0 & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{m(p)} z^p \end{pmatrix}.$$

另一方面，可得 $E(Az) = PE(J_1(z))P^{-1}$，其中 $J_1(z) \in (O(\mathbb{C}))^{3\times 3}$ 是分块矩阵

$$E(J_1(z)) = \begin{pmatrix} J_{11}(z) & 0 \\ 0 & J_{22} \end{pmatrix},$$

with

$$J_{11}(z) = \begin{pmatrix} \Delta_0 E(1,1) & \Delta_1 E(1,1) \\ 0 & \Delta_0 E(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(z) & \sum_{p\geq 0} \frac{p}{m(p)} z^p \\ 0 & E(z) \end{pmatrix}, \qquad J_{22}(z) = (\Delta_0 E(2,1)) = (E(2z)).$$

可以直接验证，$PE(J_1(z))P^{-1}$ 与上文计算得到的 $E(Az)$ 相同。

注 3.11。$m_k = (\Gamma(1 + p\,k))_{p\geq 0}$ 对于某个固定的正整数 k 的特殊情形此前已有研究。对于初始情形 $k = 1$，矩导数退化为经典导数。如果 $k \geq 2$，则该矩导数与 Caputo分数阶导数密切相关，如上文所述，其中 $e(z) = kz^k \exp(-z^k)$，且 $E(z)$ 为 Mittag-Leffler函数，$E^{1/k}(z) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{\Gamma(1+p/k)} z^p$。在 [3], 中，作者给出了该问题在 Riemann-Liouville 导数和 Caputo 导数下的解，并用分数阶指数矩阵描述该解。从这个意义上说，当选择 m_k 为矩序列时，我们的结果便特化为 [3] 中的定理 4。

3.3. 超越中等增长。在本节最后几段中，我们想简要讨论先前结果在 q–Gevrey 框架下的应用，即当序列 m 具有 $m_q = ([p]_q!)_{p\geq 0}$ 的形式时。我们回顾一下，给定 $q \in \mathbb{R}$ with q , 0, 1，q–阶乘数定义为$[0]_q! = 1$，并且 $[p]_q! = [p]_q \cdot [p-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q$，对每个正整数 p，其中 $[k]_q$ 表示 q–数 $[k]_q = 1 + q + \ldots + q^{k-1}$。

由于不满足 (mg) 条件，该序列不再是强正则序列，因此之前的结果不再适用。然而，与该序列相关的矩导数非常重要，因为 q–导数与这种矩导数一致。事实上，

$$\partial_{m_q} f(z) = D_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{qz - z},$$

当 $q \to 1$ 时，该式收敛于通常的导数。

设 $q > 1$。序列 m_q 与序列 $(q^{p(p-1)/2})_{p\geq 0}$ 作为可比较序列有着相当密切的关系。后者是与核 $e(z)\ln(q)\exp\left(\frac{qz}{\ln(q)}\right)$ 相关的矩序列（按 (2.3) 的含义），也与核 $e(z)\ln(q)(z)$ 相关，其中 表示 Jacobi theta函数 $(z)\ p\in\mathbb{Z}\ \ q^{\frac{p(p-1)}{2}} z^p$，它在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯，并在原点处有一个本性奇点。事实上，请注意，这个矩序列不满足 Stieltjes 矩问题确定性的 Carleman 条件（见 [4]）。

接下来[17], 我们考虑函数 $\exp_q(z) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[\,]_q p!} z^p$，结果表明它是一个整函数。序列 m_q 满足性质（2.8），第 2.2 节和第 2.3 节中得到的形式和解析结果对于 $E(z) = \exp_q(z)$同样成立。此外，求解以下方程的解时，

$$D_q y = Ay$$

定理 2 和定理 3 [9] 的结果均适用。因此，$y(z) = \exp_q(Az)$ 是与前述问题对应的基本矩阵。

例 3.12。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

我们考虑矩微分方程线性系统 $D_q y = Ay$。容易验证，与 A 相关的特征多项式有一个三重根 $r_1 = 1$。与 A 相关的 Jordan标准形为 J，矩阵 P 为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $P^{-1}AP = J$。$D_q y = Ay$ 的通解为 $y(z) = \exp_q(Az)$。有

$$A^p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p^2 - 3p + 2 & -(p-3)p & 2p \\ (p-3)p & -p^2 + 3p + 2 & 2p \\ 2p & -2p & 2 \end{pmatrix},$$

这意味着 $\exp_q(Az) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[\,]_q p!} A^p z^p$ 由.....给出

$$\begin{pmatrix} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!}\frac{1}{2}(p^2-3p+2)z^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!}\frac{-1}{2}(p-3)pz^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!} pz^p \\ \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!}\frac{1}{2}(p-3)pz^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!}\frac{1}{2}(-p^2+3p+2)z^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!} pz^p \\ \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!} pz^p & \sum_{p\geq 0} \frac{-1}{[p]_q!} pz^p & \sum_{p\geq 0} \frac{1}{[p]_q!} z^p \end{pmatrix}.$$

注意，$P(\exp_q(Jz))P^{-1}$ 与$\exp_q(Az)$相同，

$$\exp_q(Jz) = \begin{pmatrix} \Delta_0E(1,1) & \Delta_1E(1,1) & \Delta_2E(1,1) \\ 0 & \Delta_0E(1,1) & \Delta_1E(1,1) \\ 0 & 0 & \Delta_0E(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp_q(z) & \sum_{p\geq 0}\frac{p}{[p]_q!}z^p & \sum_{p\geq 0}\binom{p}{2}\frac{1}{[p]_q!}z^p \\ 0 & \exp_q(z) & \sum_{p\geq 0}\frac{p}{[p]_q!}z^p \\ 0 & 0 & \exp_q(z) \end{pmatrix}.$$

参考文献

[1] W. Balser，《形式幂级数与亚纯常微分方程线性系统》。Universitext。美国纽约州纽约：Springer（2000 7）W. Balser、M. Yoshino，常系数非齐次偏微分方程形式幂级数解的Gevrey阶。[2] Funkcial. Ekvac. 53 411–434（2010）2, 4[3] B. Bonilla、M. Rivero、J. J. Trujillo，关于常系数线性分数阶微分方程系统，Appl. Math. Comput. *187 1* 68 78 2007 13 ( ), – ( ) T. Carleman，《拟解析函数》。[4] Gautiers Villars，巴黎（1926 14）H. Cartan、S. Mandelbrojt，[5] 可无限次微分函数类等价问题的解答，Acta Math. *72*, 31 49 1940 9 – ( ) T. Dreyfus、A. Lastra、S. Malek，关于若干具有全纯系数的线性偏q-差分与微分方程的多尺度分析。Adv. Differ. Equ. 2019，论文编号326。https://doi.org/10.1186/s13662- 019-2263-5，（2019）2[6][7] J. Jim´enez-Garrido、J. Sanz、G. Schindl，对数凸序列与非零邻近阶。J. Math. Anal. Appl. *448 2* 1572 1599 2017 4 ( ), – ( ) J. Jimenez-Garrido、J. Sanz、G. Schindl，权函数和权序列的O-正则变差指标。[8] RACSAM *113* 10 1007 13398 019 00724 2, 3659 3697 2019 7 . https://doi.org/ . /s - - - – ( ) A. Lastra，矩[9] 微分方程线性系统的整函数解及其相关的无穷远处渐近增长。Differential Equations and Dynamical Systems. https://doi.org/10.1007/s12591-022-00601-2，（2022）2, 9, 10, 12, 13, 14[10] A. Lastra、S. Malek，关于若干线性q-差分微分方程的参数多层q-Gevrey渐近性。Adv. Difference Equ. *2015, 2015 344* 10 1186 13662 015 0678 1，2015 2 : . https://doi.org/ . /s - - - ( ) [11] A. Lastra 、 S. Malek 、 J. Sanz，一般 Carleman 超全纯类中的可求和性。J. Math. Anal. Appl. 430, 1175 1206 2015 4 – ( ) A. Lastra、S. Michalik、M. Suwi´nska，若干广义矩偏微分方程形式解的估计。J. Math. [12] Anal. Appl. *500 1* 18 2021 2 ( ), ( ) A. Lastra、S. Michalik、M. Suwinska，若干广义矩偏微分方程[13]形式解的可求和性。Result. Math. *76, 1,* 22 2021 2 No. Paper No. ( ). A. Lastra、S. Michalik、M. Suwinska[14]，一族广义奇异摄动矩微分方程形式解的多重可求和性。Result. Math. *78, 2,* 49 2023 2 No. Paper No. ( ). S. Michalik[15]，常数非齐次线性偏微分方程形式解的多重可求和性。J. Dyn. Control Syst. *18*, 103 133 2012 4 – ( ) S. Michalik、B. Tkacz，若干矩偏微分方程的Stokes现[16] 象。J. Dyn. Control Syst. *25 4* 573 598 2019 2 ( ) – ( ) J.-P. Ramis，关于线性代数q-差分方程整函数解的增长。[17] Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. S´ér., Math. 1, No. 1, 53–94（1992）。14[18] J.-P. Ramis、C. Zhang，q-Gevrey渐近展开与Jacobi theta函数。C. R. Math. Acad. Sci. Paris *335, 11* 899 902 2002 2 No. – ( ). M. R. Rodrigo，关于分数阶矩阵指数及其显式计算。J. Differ. Equations 261, No. 7, 4223–4243（2016）2[19][20] J. Sanz，通过邻近阶研究Carleman超全纯类中的平坦函数。J. Math. Anal. Appl. 415(2), 623–643（2014）3, 9[21] J. Sanz，形式幂级数的渐近分析与可求和性。《微分方程的解析、代数与几何方面》。Trends Math. 199 262 ¨ 2017 2 – . Birkauser/Springer，瑞士沙姆[22] （） M. Suwinska，具有变系数的若干矩偏微分方程形式解的Gevrey估计。J. Dyn. Control Syst. *27 2* 355 370 2021 2 ( ) – ( ) V. Thilliez，平坦超可微函数的除法与扇形延拓。[23] Result. Math. 44, 169–188（2003）3[24] R. Zhang，关于q-Gamma函数的渐近性。J. Math. Anal. Appl. 339, No. 2 1313–1321（2008）。2

Alberto Lastra，阿尔卡拉大学，物理与数学系，大学校园，E-28805 阿尔卡拉-德埃纳雷斯（马德里），西班牙
电子邮箱：alberto.lastra@uah.es

Cruz Prisuelos-Arribas，阿尔卡拉大学，物理与数学系，大学校园，E-28805 埃纳雷斯河畔阿尔卡拉（马德里），西班牙
电子邮箱：cruz.prisuelos@uah.es