arXiv:2305.03166v1 [math.GN] 4 May 2023

C拓扑空间上的 C-开集

Mesfer H. Alqahtani*

2023年5月8日

摘要

拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）的开（分别为闭）子集 A 若 $cl(A) \setminus A$（分别为 $A \setminus int(A)$）是可数集，则称为C-开 （分别为 C-闭）集。本文旨在介绍 C-开集和 C-闭集的概念。我们首先探究它们的基本性质。随后，我们利用 C-开集和C-闭集定义了一些算子，例如内部、闭包、极限、边界和前沿，并阐明和讨论它们之间的关系。最后，我们展示利用 C-开集和 C-闭集定义的连续映射与紧空间，并考察它们的主要性质。

2020年数学主题分类: 54A05, 54C10, 54D30**关键词和短语**: C-开集, C-内部点, C-闭包点, C-连续性, C-紧致性。

1 引言

在拓扑空间 X 中，若空间 X 的子集 B 等于其自身闭包 [1] 的内部，则称其为正则开集，也称开域。若子集 B 等于其自身内部的闭包，或其补集为开域，则称其为正则闭集，也称闭域。拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的开（分别为闭）子集 A，若 $clA \setminus A$ （分别为 $A \setminus intA$）是有限集 [4]，则称为 F-开（分别为 F-闭）集。本文旨在引入并研究拓扑空间中的 C-开集和 C-闭集的概念，它们独立于正则开集和正则闭集。第二节中，我们定义了 C-开集和 C-闭集，并研究其基本性质。随后，我们说明了它们与拓扑空间中其他类型集合之间的关系，例如开域、闭域、 F-开集、 F-闭集、闭集和开集。第三节中，我们利用 C-开集和 C-闭集建立了若干算子，例如 C-内部、 C-闭包、 C-极限、 C-边界和 $C-$前沿，并阐明和讨论了这些算子之间的关系。第四节中，我们展示了利用 C-开集和 C-闭集定义的 C-连续函数和 C-紧集，并考察其基本性质。此外，我还证明了 C-连续、 C-开且为满射的 C-紧空间的像是 C-紧空间。全文中，对于空间 X 的子集 B，我用 $X \setminus B$ 表示 B 在 X 中的补集；正

*乌姆卢季大学学院，数学系，塔布克大学，塔布克，沙特阿拉伯，电子邮件：m-halqahtani@ut.edu.sa

整数集记为 $\mathbb{N}$，整数集记为 $\mathbb{Z}$，有理数集记为 $\mathbb{Q}$，无理数集记为 $\mathbb{I}$，实数集记为 $\mathbb{R}$， $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑记为 $\mathcal{U}$ [3]。除非另有说明， X 表示拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$。在紧致性和可数紧致性的定义中，我们不假设 T_2。在 F–Lindelöf 的定义中，我们也不假设正则性。

C-开集的主要性质

定义 1. 拓扑空间 X 的开子集 A 称为 C-开集，如果 $cl(A)\setminus A$ 是可数集。也就是说， A 是开集，且 A 的前沿是可数集。

定义 2. 拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）的闭子集 A 称为 C-闭集，如果 $A\setminus int(A)$是可数集。也就是说， A 是闭集，且A 的前沿是可数集。

我们将拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）中所有 C-开（分别为 C-闭）子集组成的集族记为 $CO(X)$（分别为 $CC(X)$）。

定理 3. 拓扑空间$(X,\mathcal{T})$ 中任意 C-开（分别为 C-闭）子集的补集都是 C-闭（分别为 C-开）集。

证明。设 A是拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）中的任意C-开子集。那么 $X\setminus A$是闭集，并且（$X\setminus A$）$\setminus int$（$X\setminus A$）$=$（$X\setminus A$）$\setminus$（$X\setminus cl$（A））$=$（$X\setminus A$）$\cap cl$（A）$=cl$（A）$\setminus A$是可数集，因为 A 是 C-开集。因此， $X\setminus A$ 是 C-闭集。另一方面，设 A 是拓扑空间（X, $\mathcal{T}$）中的任意 C-闭子集。那么 $X\setminus A$是开集，并且 cl（$X\setminus A$）$\setminus$（$X\setminus A$）$=$（$X\setminus X\setminus A$）$\cap cl$（$X\setminus A$）$=A\cap cl$（$X\setminus A$）$=A\setminus$（$X\setminus cl$（$X\setminus A$））$=A\setminus int$（A）是可数集，因为 A 是C-闭集。因此， $X\setminus A$ 是 C-开集。

□

显然，根据定义，拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）中的任意 F-开（分别地， F-闭）子集都是 C-开（分别地， C-闭）集。然而，反之通常并不成立。例如，子集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$是通常拓扑空间（$\mathbb{R}$,$\mathcal{U}$）中的一个 C-开子集，但它不是 F-开集。此外，根据定理 3，任意 C-开集的补集都是 C-闭集，因此 $\mathbb{Z}$ 是通常拓扑空间（$\mathbb{R}$,$\mathcal{U}$）中的一个 C-闭子集，但它不是 F-闭集，因为 $\mathbb{Z}\setminus int(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\setminus\emptyset=\mathbb{Z}$不是有限集。根据定义显然，拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）中的任意既开又闭（闭且开）子集都是 C-既开又闭集。此外，任何可数闭集都是 C-闭集。然而，任意可数开集未必是 C-开集。例如， $\mathbb{R}$ 在 1 处赋予特殊点拓扑。我们有， $\mathbb{N}$ 是一个可数开集，但 $cl(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ 是不可数集。

在（$\mathbb{R}$,$\mathcal{U}$）中，任意开区间都是 C-开集。此外，任意闭区间都是C-闭集。根据定义1和定义2可知，所有 C-开集和 C-闭集分别都是开集和闭集。然而，反过来并不总是成立。下面给出一个开集（分别为闭集）的例子，它不是 C-开集（分别为C-闭集）。

例4。设（$\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{I}}$）是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{I}$. 排除集拓扑空间。那么$\mathbb{Q}$ 是（$\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{I}}$）中的开集。但是，$cl$（$\mathbb{Q}$）$\setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ 是不可数集。因此，$\mathbb{Q}$ 不是 C-开集。此外，$\mathbb{I}$ 是一个不是 C-闭集的闭集例子。

存在一个 C-开集（分别地，C-闭集）不是开域（分别地，闭域）的例子。

例5。令 $A = (2, 5) \cup (5, 9)$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 中的一个 C-开子集。然而，A不是开域。此外，$\mathbb{R} \setminus A$ 是一个 C-闭集，但 $\mathbb{R} \setminus A$ 不是闭域。

我们给出一个开（分别为闭）域集不是 C-开（分别为 C-闭）集的例子。

例6. 根据例4，设 $H = \{1, 2, 3\}$，则 $int(cl(H)) = int(cl(\{1, 2, 3\})) = int(\{1, 2, 3\} \cup \mathbb{I}) = \{1, 2, 3\} = H$ 是开域。但 $cl(H) \setminus H = cl(\{1, 2, 3\}) \setminus \{1, 2, 3\} = (\{1, 2, 3\} \cup \mathbb{I}) \setminus \{1, 2, 3\} = \mathbb{I}$ 是不可数集，因此 H 不是 C-开集。此外，设 $K = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$，则 $cl(int(K)) = cl(int(\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\})) = cl(\mathbb{Q} \setminus \{1, 2, 3\}) = \mathbb{I} \cup (\mathbb{Q} \setminus \{1, 2, 3\}) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\} = K$ 是闭域。但$K \setminus int(K) = (\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}) \setminus int(\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}) = (\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}) \setminus (\mathbb{Q} \setminus \{1, 2, 3\}) = \mathbb{I}$是不可数集，因此 K 不是 C-闭集。

对于拓扑空间 $(X, \mathbb{T})$，我们总有：

$$F\text{-open set} \Longrightarrow C\text{-open set} \Longrightarrow \text{open set}$$
$$F\text{-closed set} \Longrightarrow C\text{-closed set} \Longrightarrow \text{closed set}$$

上述蕴含关系均不可逆。

定理 7. *C 开集的有限并是 C 开集。*

证明。假设对于所有 $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$，$K_i$ 是一个 C-开集。那么 K_i 是一个开集，并且对于所有 i，$cl(K_i) \setminus K_i$ 是可数的。由于 $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ 是开集，因此我们需要证明 C-开集的另一个条件。现在，我们有，

$$cl(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i = \bigcup_{i=1}^{n} (cl(K_i) \setminus K_i),$$

由于可数集的有限并是可数集。因此，$cl(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i$是可数集。所以，$\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ 是 C-开集。

□

由定理 7、定理 3 以及摩根定律可得以下推论：

推论 8。*C 闭集的有限交是 C 闭集。*

3 通过 C 开集和 C 闭集定义的一些算子

我们回顾 [4] 中的一些符号。设 K 为拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的任意子集，并通过 F-开集的概念，将内部记作 $\mathrm{int}^{\mathrm{F}}(K)$，闭包记作 $\mathrm{cl}^{\mathrm{F}}(K)$，边界记作 $\mathrm{Bd}^{\mathrm{F}}(K)$，前沿记作 $\mathrm{Fr}^{\mathrm{F}}(K)$，外部记作 $\mathrm{Ext}^{\mathrm{F}}(K)$，导集记作 $\mathrm{D}^{\mathrm{F}}(K)$。

定义9. 设 K 是拓扑空间 $(X\mathcal{T})$ 的一个子集。那么，

i) K 的-内部 定义为所有包含于 K中的 C-开子集的并，记作 $int^C(K)$，也就是包含于 K.中的最大 C-开集。ii) K 的-闭包 定义为所有包含 K的 C-闭集的交，记作 $cl^C(K)$。

定义10。 </style} $x \in int^C(K)$当且仅当存在一个 C-开集，包含 x 且包含于 K。

定理11。 设 K 是拓扑空间$(X, \mathcal{T})$中的子集。那么，

i) $int^C(K) \subseteq int(K) \subseteq K.$

ii) $K \subseteq cl(K) \subseteq cl^C(K).$

证明。 i) 设 U 是包含于 K中的最大 C-开集，即 $int^C(K) = U$。由于任何 C-开集都是开集，因此 $U \subseteq int(K)$。于是 $int^C(K) \subseteq int(K)$。根据 K的内部定义，我们有 $int(K) \subseteq K$. 因此，$int^C(K) \subseteq int(K) \subseteq K$.

ii) 根据闭包的定义，我们知道 $K \subseteq cl(K)$。现在，令 $cl(K) = F$为包含 K 的最小闭集，则 $F \subseteq cl^C(K)$。反设不然，$F \nsubseteq cl^C(K)$，那么存在 C-闭集 E，使得 $cl^C(K) = E$ 且 $K \subseteq E$。但 E 是闭集，因为任何 C- 闭集都是闭集。因此矛盾。故 $K \subseteq cl(K) \subseteq cl^C(K)$。

□

一般而言， $int(K) \nsubseteq int^C(K)$ 且 $cl^C(K) \nsubseteq cl(K)$。例如：

例12. 由例4可知，开集 $\mathbb{Q}$ 既不是 F-开集，也不是 C-开集。于是 $int(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, 但 $int^C(\mathbb{Q}) \subsetneq \mathbb{Q}$。因此， $int(K) \nsubseteq int^C(K)$。由例4可知， $\mathbb{I}$ 不是 C-闭集，且 $cl^C(\mathbb{I}) = \mathbb{R}$，但 $cl(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$.。因此， $cl^C(K) \nsubseteq cl(K)$。

定义13。 设 K 是拓扑空间（$X,\mathcal{T}$）的子集。点$x \in X$ 称为 C-极限点 （或 C-聚点，或 C-簇点）当且仅当每个包含 x的 C-开集 V 都至少包含 K 中一个不同于 x的点。 K 的所有 C-极限点构成的集合称为 K 的导集，记作 $D^C(K)$。

定理14。 设 K 和 H 是拓扑空间（$X\mathcal{T}$）。 那么我们有以下拓扑性质：

(i) $D（K）\subset D^C（K）$，其中 $D（K）$ 是 K.的导集

(ii) 若 $K \subseteq H$， 则 $D^C（K）\subseteq D^C（H）$。

(iii) $D^C(K) \cup D^C(H) = D^C(K \cup H)$ 和 $D^C(K \cap H) \subset D^C(K) \cap D^C(H)$。

证明。 对于（i），只需注意到每个 C-开集都是开集。对于（ii），结论由定义13得出。对于（iii），这是对 D 的标准证明稍作修改而来，其中将开集替换为 C-开集。

□

一般而言， $D^C(K) \nsubseteq D(K)$。例如：

例 15。设 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\frac{1}{2}})$ 是一个拓扑空间，其中 $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$是 $1\,2$处的特殊点拓扑。设 $K = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$，则$-D(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}) = \emptyset$，因为对于任意 $x \in \mathbb{R}$， $\{\frac{1}{2}, x\}$都是开集，且 $(\{\frac{1}{2}, x\} \setminus \{x\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}) = \emptyset.$。由于 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\frac{1}{2}})$ 中任何非空的C-开集都具有 $\mathbb{R} \setminus H$ 的形式，其中 H是任意可数集，且$\frac{1}{2} \notin H.$，令 $x \in \mathbb{R}$为任意元素，则任何包含 x的 C-开集都包含 $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$中另一个不同于 x的点。因此 $D^C(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}) = \mathbb{R}.$。于是 $D^C(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}) \nsubseteq D(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\})$。因此， $D^C(K) \nsubseteq D(K)$。

In general $D^C(K \cap H) \not\supseteq D^C(K) \cap D^C(H)$. For example:

例 16. 设 $K = (1,2)$ 和 $H = (2,3)$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 中的子集。由于 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 中的任意 C-开集都是开区间或 $\mathbb{R} \setminus F$，其中 F 是任意可数闭集，因此 $D^C(K \cap H) = D^C((1,2) \cap (2,3)) = D^C(\emptyset) = \emptyset$以及 $D^C(K) \cap D^C H = D^C\ 1,2\ \cap D^C\ 2,3\ = [1,2] \cap [2,3] = \{2\}$ $D^C\ K \cap H\ \not\supseteq ( )\ (( ))$ $D^C\ K\ \cap D^C\ H\ .$ (( ))。那么 ( ) ( ) ( )

定理 17. 设 K 和 H 是拓扑空间 $(X\mathcal{T})$ 中的子集。然后有以下拓扑性质：

(i) $int^C(X) = X.$

(ii) $int^C(K) \subseteq K.$

(iii) 若 $K \subseteq H$，则 $int^C(K) \subseteq int^C(H)$。

(iv) $int^C(int^C(K)) = int^C(K)$。

(v) $int^C(K \cap H) = int^C(K) \cap int^C(H)$。

(vi) $int^C(K) \cup int^C(H) \subseteq int^C(K \cup H)$。

证明。性质（i）、（ii）、（iii）和（iv）由定义 1 和定义 9 得出。为证明（v），由性质（ii）可得 $int^C(K) \subseteq K$ 且 $int^C(H) \subseteq H$，于是 $int^C(K) \cap int^C(H) \subseteq K \cap H.$由于 $int^C(K) \cap int^C(H)$ 是开集，因此我们有 $int^C(K) \cap int^C(H) \subseteq int^C(K \cap H)$，因为 $int^C(K) \cap int^C(H)$ 是 C-开集，且 $int^C(K \cap H)$ 是包含于 $K \cap H.$ 中的最大 C-开集。反过来，（$K \cap H$） $\subseteq K$ 且（$K \cap H$） $\subseteq H$，由性质（iii）可得 $int^C(K \cap H) \subseteq int^C(K)$，并且 $int^C(K \cap H) \subseteq int^C(H)$，因此 $int^C(K \cap H) \subseteq int^C(K) \cap int^C(H)$。因此，$int^C(K \cap H) = int^C(K) \cap int^C(H)$。为证明（$vi$），由于 $K \subseteq (K \cup H)$ 且 $H \subseteq (K \cup H)$，由性质（iii）可得 $int^C(K) \subseteq int^C(K \cup H)$ 和$int^C(H) \subseteq int^C(K \cup H)$。因此， $int^C(K) \cup int^C(H) \subseteq int^C(K \cup H)$。 □

In general, $int^C(K \cup H) \nsubseteq int^C(K) \cup int^C(H)$. For example:

例18. 设 $K = \mathbb{Q}$ 和 $H = \mathbb{I}$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 中的子集，则 $int^C(K \cup H) = \mathbb{R}$。但 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{I}$ 不是 C-开集，因此 $int^C(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ 且 $int^C(\mathbb{I}) \subset \mathbb{I}$。所以， $int^C(K \cup H) \nsubseteq int^C(K) \cup int^C(H)$ 。

定理19。设 K 和 H 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$。则有以下拓扑性质：

(i) $cl^C(\emptyset) = \emptyset.$

(ii) $K \subseteq cl^C(K).$

(iii) *If* $K \subseteq H$, *then* $cl^C(K) \subseteq cl^C(H)$.

(iv) $cl^C(K \cup H) = cl^C(K) \cup cl^C(H)$.

(v) $cl^C(cl^C(K)) = cl^C(K)$.

证明。 性质（i）、（ii）和（iii）以及（v）由定义2和定义9得出。性质（iv）由性质（iii）、定义1、定义9以及集合论性质得出。

□

定理20。 设 K 是拓扑空间$(X\mathcal{T})$中的一个子集。 则有以下拓扑性质：

(i) $int^C(K) = X \setminus cl^C(X \setminus K)$.

(ii) $cl^C(K) = X \setminus int^C(X \setminus K)$.

证明。 (i) 我们有 $int^C(K) = X \setminus cl^C(X \setminus K)$，于是 $X \setminus K \subseteq cl^C(X \setminus K)$，因此 $X \setminus cl^C(X \setminus K) \subseteq K$. 由于 $X \setminus cl^C(X \setminus K)$是 C-开集，因此 $X \setminus cl^C(X \setminus K) \subseteq int^C(K)$...(1)。现在，设 V是包含于K中的任意 C-开集，即 $V \subseteq K$ 且 V是 C-开集，则 $X \setminus K \subseteq X \setminus V = cl^C(X \setminus V)$。于是 $cl^C(X \setminus K) \subseteq X \setminus V$，因此 $V \subseteq X \setminus cl^C(X \setminus K)$。也就是说，包含于 K 中的任意C-开集都包含于 $X \setminus cl^C(X \setminus K)$中，这意味着 $int^C(K) \subseteq X \setminus cl^C(X \setminus K)$ ...(2)。由(1)和(2)可知等式成立。

(ii) 可通过分别将 (*i*) 中的 K 和 $X \setminus K$ 替换为 $X \setminus K$ 和 K，并利用集合论性质来证明。

□

定义 21. 设 K 是拓扑空间 $(X\mathcal{T})$ 的子集。那么 K 的 C-边界定义为 $Bd^C(K) = K \setminus int^C(K)$。

定理 22。 设 K 是拓扑空间 $(X\mathcal{T})$。 那么我们有以下性质：

(i) $Bd(K) \subset Bd^C(K)$，其中 $Bd(K)$ 表示 K. 的边界***(ii)*** $K = int^C(K) \cup Bd^C(K)$。***(iii)*** $int^C(K) \cap Bd^C(K) = \emptyset$.***(iv)*** K 是一个 C-开集，当且仅当 $Bd^C(K) = \emptyset$.***(v)*** $int^C(Bd^C(K)) = \emptyset$.***(vi)*** $Bd^C(Bd^C(K)) = Bd^C(K)$。***(vii)*** $Bd^C(K) = K \cap cl^C(X \setminus K)$。

证明。要证明 (*i*)，任取 $x \in Bd(K)$，则 $x \in K \setminus int(K)$，于是$x \notin int(K)$。根据定理11第 (*i*) 部分，我们有 $int^C(K) \subseteq int(K) \subseteq K$，于是 $x \notin int^C(K)$。因此 $x \in (K \setminus int^C(K)) = Bd^C(K)$。所以， $Bd(K) \subseteq Bd^C(K)$。性质 (*ii*)、(*iii*) 和 (*iv*) 由定义21得出。要证明 (*v*)，任取$x \in int^C(Bd^C(K))$，则 $x \in Bd^C(K)$。由于 $Bd^C(K) \subseteq K$，于是 $x \in int^C(Bd^C(K)) \subseteq int^C(K)$，从而 $x \in int^C(K) \cap Bd^C(K)$，这与 (*iii*) 矛盾。对于 (*vi*)，由定义21和性质 (*v*)，我们有 $Bd^C(Bd^C(K)) = Bd^C(K) \setminus int^C(Bd^C(K)) = Bd^C(K) \setminus \emptyset = Bd^C(K)$。性质 (*vii*) 由定理20第 (*i*) 部分和定义21得出。

□

一般而言， $Bd^C(K) \nsubseteq Bd(K)$。例如：

例23. 由例4，存在 $K = \mathbb{Q}$ 是一个开集，但不是C-开集。于是 $Bd(K) = \emptyset$。由于 $\mathbb{Q}$不是 C-开集，因此 $int^C(\mathbb{Q}) \subsetneqq \mathbb{Q}$.因此， $Bd^C(K) = \mathbb{Q} \setminus int^C(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.因此， $Bd^C(K) \nsubseteq Bd(K)$。

定义24。 设 K 是拓扑空间（$X\mathcal{T}$）的一个子集。那么， K的 C前沿定义为 $Fr^C(K) = cl^C(K) \setminus int^C(K)$。

定理25。 设 K 是拓扑空间$(X\mathcal{T})$的一个子集。 则有以下性质：

(i) $Fr(K) \subset Fr^C(K)$, *where* $Fr(K)$ *denotes the frontier of* K.

(ii) $cl^C(K) = int^C(K) \cup Fr^C(K)$.

(iii) $int^C(K) \cap Fr^C(K) = \emptyset$.

(iv) $Bd^C(K) \subset Fr^C(K)$.

(v) $Fr^C(K) = cl^C(K) \cap cl^C(X \setminus K)$.

(vi) $Fr^C(K) = Fr^C(X \setminus K)$.

(viii) $int^C(K) = K \setminus Fr^C(K)$.

证明。由定理11和定义24，性质（i）可得 $int^C(K) \subseteq int(K)$以及 $cl(K) \subseteq cl^C(K)$，从而 $Fr(C) = (cl(K) \setminus int(K)) \subseteq cl^C(K) \setminus int^C(K) = Fr^C(K)$。性质（$ii$）和（$iii$）由定义24可得。对于（$iv$），由于 $K \subseteq cl^C(K)$，因此 $Bd^C(K) = (K \setminus int^C(K)) \subseteq (cl^C(K) \setminus int^C(K)) = Fr^C(K)$。性质（ v ）由定理 20 和定义24可得。性质（vi）由性质（v）和定义24可得。性质（vii）由定义24可得。

□

In general $Fr^C K \nsubseteq Fr(K)$ and $Fr^C(K) \nsubseteq Bd^C(K)$. For example:

例26. 根据例4，存在 $K = \mathbb{Q}$ 使得 $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{I}$。由于$\mathbb{Q}$不是 C-开集，因此 $int^C(\mathbb{Q}) \subsetneqq \mathbb{Q}$，所以 $Fr^C\mathbb{Q} = (cl^C(\mathbb{Q}) \setminus int^C(\mathbb{Q}))$ $= \mathbb{R} \setminus int^C\ \mathbb{Q} = \mathbb{I} \cup H$ H $\mathbb{Q}$. $Fr^C\ K \nsubseteq ()$，其中是的非空子集。因此，$()\ Fr(K)$。对于 $Fr^C(K) \nsubseteq Bd^C(K)$，设 $K = (1,2]$是$(\mathbb{R},\mathcal{U})$中的子集，则$Bd^C(K) = \{2\}$且 $Fr^C(K) = \{1,2\}$。因此， $Fr^C(K) \nsubseteq Bd^C(K)$。

定义27. 设 K 是拓扑空间$(X\mathcal{T})$的一个子集。那么， K 的 C-外部定义为 $Ext^C(K) = int^C(X \setminus K)$。

定理28. 设 K 是拓扑空间$(X\mathcal{T})$的一个子集。我们有以下性质：

(i) $Ext^C(K) \subset Ext(K)$，其中 $Ext(K)$ 表示 K. 的外部

(ii) $Ext^C(K)$ 是开集。

(iii) $Ext^C(K) = X \setminus cl^C(K)$.*(iv)* $Ext^C(Ext^C(K)) = int^C(cl^C(K))$.

(v) 若 $K \subseteq H$，则 $Ext^C(H) \subseteq Ext^C($
$K)$。*(vi)* $Ext^C(X \setminus Ext^C(K)) = Ext^C(K)$。
(vii) $int^C(K) \subset Ext^C(Ext^C(K))$。*(viii)*
$Ext^C(K \cup H) \subset Ext^C(K) \cup Ext^C(H)$。
(ix) $Ext^C(K \cap H) \supset Ext^C(K) \cap Ext^C(H)$。
(x) $X = int^C(K) \cup Ext^C(K) \cup Fr^C(K)$。

证明。性质（i）由定义27和定理11得出。性质（ii）由定义9得出。性质（iii）由定理20和定义27得出。要证明（iv） Ext^C（Ext^C（K））$= Ext^C$（int^C（$X \setminus K$））$= Ext^C$（$X \setminus cl^C$（K））$= int^C$（$X \setminus$（$X \setminus cl^C$（K）））$= int^C$（cl^C（K））。要证明（v），由于$K \subseteq H$，于是$X \setminus H \subseteq X \setminus K$，进而 int^C（$X \setminus H$）$\subseteq int^C$（$X \setminus K$），因此 Ext^C（H）$\subseteq Ext^C$（K）。对于（vi） Ext^C（$X \setminus Ext^C$（K））$= Ext^C$（$X \setminus int^C$（$X \setminus K$））$= int^C$（$X \setminus$（$X \setminus int^C$（$X \setminus K$）））$= int^C$（int^C（$X \setminus K$））$= int^C$（$X \setminus K$）$= Ext^C$（K）。对于（vii），int^C（K）$\subseteq int^C$（cl^C（K））$\subseteq int^C$（$X \setminus int^C$（$X \setminus K$））$= int^C$（$X \setminus Ext^C$（K））$= Ext^C$（Ext^C（K））。性质（$viii$） Ext^C（$K \cup H$）$= int^C$（$X \setminus$（$K \cup H$））$=$（$X \setminus cl^C$（$K \cup H$））$=$（$X \setminus$（cl^C（K）$\cup cl^C$（H））$\subset X \setminus cl^C$（K）$\cup X \setminus cl^C$（H）$=$（$X \setminus cl^C$（K））$\cap$（$X \setminus cl^C$（H））$= Ext^C$（K）$\cap Ext^C$（H）$\subset Ext^C$（K）$\cup Ext^C$（H）。性质（ix）： Ext^C（$K \cap H$）$= int^C$（$X \setminus$（$K \cap H$））$=$（$X \setminus cl^C$（$K \cap H$））$\supset$（$X \setminus$（cl^C（K）$\cap cl^C$（H））） $=$（$X \setminus cl^C$（K））$\cup$（$X \setminus cl^C$（H））$= Ext^C$（K）$\cup Ext^C$（H）$\supset Ext^C$（K）$\cap Ext^C$（H）。性质（x）由定义24和定义27得出。

□

一般而言， $Ext(K) \nsubseteq Ext^C(K)$ $Ext^C(K \cup H) \nsupseteq Ext^C(K) \cup Ext^C(H)$，并且$Ext^C(K \cap H) \nsubseteq Ext^C(K) \cap Ext^C(H)$。例如：

例29。由例4可知，存在 $K = \mathbb{I}$，使得 $Ext(K) = int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}) = int(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$。但是 $Ext^C(K)$ $= int^C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}) = int^C(\mathbb{Q}) \subsetneq \mathbb{Q}$，因为 $\mathbb{Q}$不是 C-开集。因此， $Ext(K) \nsubseteq Ext^C(K)$。对于 $Ext^C($ $K \cup H) \nsupseteq Ext^C(K) \cup Ext^C(H)$，令 $K =(-\infty, 2)$和 $H =(0, \infty)$，则 $Ext^C(K \cup H) = Ext^C(\mathbb{R}) = \emptyset$ 以及 $Ext^C\ K \cup Ext^C\ H = 2\ \infty \cup -\infty\ 0\ .$ $Ext^C\ K \cup H \nsupseteq Ext^C\ K \cup ( )\ ( )\ (\ ,\ )\ (\ ,\ )$。 $Ext^C\ H$ $Ext^C\ K \cap H$ $K \cap Ext^C\ H$ $K = -\infty$ 因此，$(\ )\ (\ )\ (\ )$。对于$(\ )$

$\nsubseteq Ext^C$ $2]$ $H =(\ )\ (\ )$，令$(\ ,$ 并且$\ )$，$[2, \infty\ ,$ $Ext^C\ K \cap H = Ext^C\ \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $Ext^C\ K \cap Ext^C\ H =$ 则$(\ )\ (\ )$以及$(\ )\ (\ )\ (2, \infty) \cap (-\infty, 2) = \emptyset$，所以， $Ext^C(K \cap H) \nsubseteq Ext^C(K) \cap Ext^C(H)$。

4 C-连续性与 C-紧致性

本节将通过 C-开空间和 C-闭空间的概念，定义 C-连续函数和 C-紧致集，并探究它们的主要性质。

定义 30. 若函数 $h : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{P})$ 满足：对于 Y.中的所有开集 U，$h^{-1}(U)$ 在 X 中是 C-开集，则称其为 C-连续

定义 31. 令 $(X, \mathcal{T})$ 和 $(Y, \mathcal{P})$ 为拓扑空间，且 $h : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{P})$ 为一个 C-连续函数。当且仅当对于所有开集$U \subseteq X$， $h(U)$ 都是 C中的开集时， h 是 C-开的；当且仅当对于所有闭集$V \subseteq X$， $h(V)$ 都是 C中的闭集时， Y.是 C-闭的。

定义 32。双射函数 $h:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{P})$ 被称为 C- 同胚 当且仅当 h 和 h^{-1} 是 C-连续的。

定理 33。任意 C-连续函数都是连续函数。

证明。令 $h:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{P})$ 为一个 C-连续函数。令 U 为 Y 中的任意开集，则根据 C-连续性，$h^{-1}(U)\in CO(X)$。由于任何 C-开集都是开集，因此 $h^{-1}(U)\in\mathcal{T}$。 □

定理 34。任何 F-连续函数都是 C-连续函数。

证明。显然，因为任何 F-开集都是 C-开集。 □

显然，对于任意拓扑空间（X，$\mathcal{T}$），我们都有。

F-连续函数 $\Longrightarrow$ C-连续函数 $\Longrightarrow$ 连续函数。

上述蕴含关系都不可逆。

这里给出一个既不是 C-连续也不是 F-连续的连续函数的例子。

例 35. 设 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{I}})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的排除集拓扑空间，其中 $\mathbb{I}$. 那么，恒等函数 $id:(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{I}})\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{I}})$ 是连续函数，但既不是 C-连续也不是 F-连续，因为 $\mathbb{Q}\in\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ 是开集，而 $id^{-1}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ 既不是 C-开集，也不是 F-开集，因为 $cl(\mathbb{Q})\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{I}$ 是不可数集。

此外，还有一个 C-连续但不是 F-连续函数的例子。

例 36. 设 $(\mathbb{R},\mathcal{C})$ 是余可数拓扑空间（见 [3]）。令id 为恒等函数，使得 $id:(\mathbb{R},\mathcal{C})\to(\mathbb{R},\mathcal{C})$，并设 K 是 $(\mathbb{R},\mathcal{C})$ 中任意一个开集，则 K 是 C-开集，因为 $cl(K)\setminus K=\mathbb{R}\setminus K$ 是可数集。因此，$id:(\mathbb{R},\mathcal{C})\to(\mathbb{R},\mathcal{C})$ 是 C-连续函数。然而，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 是一个开集，使得 $id^{-1}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 不是 F-开集，因为 $cl(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})=\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 不是有限集。

定义 37. 设 X 是一个拓扑空间，则 X 是 C-紧的（分别为 C-林德勒夫），当且仅当 X 的任意开覆盖都有一个由有限个（分别为可数个）C-开集构成的子覆盖。

定义 38. 设 X 是一个拓扑空间，则 X 是 C-可数紧的，当且仅当 X 的任意可数开覆盖都有一个由有限个 C-开集构成的子覆盖。

定理 39. 任意 C-紧空间都是紧空间。

证明. 显然，因为任意 C-开集都是开集。 □

推论 40. 任意 C-林德勒夫（分别为 C-可数紧）空间都是林德勒夫（分别为可数紧）空间。

定理 41. 任意 F-紧空间都是 C-紧空间。

证明。显然，因为任意 F-开集都是 C-开集。 □

推论 42。 任何 F-*Lindelöf* 空间（分别地， F-可数紧空间）都是 C-*Lindelöf* 空间（分别地， C-可数紧空间）。

定理 43. 设 $h:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{P})$ 是 C-连续、满射且为 C-开映射的函数，并且 $(X,\mathcal{T})$ 是 C-紧致的，那么 Y 是 C-紧致的。

证明。设 $\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 Y的任意开覆盖。由于 h 是 C-连续的，因此对每个 $\alpha \in \Lambda$, $h^{-1}(V_\alpha)$ 在 X 中是 C-开集。由于 $Y \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$，因此 $X = h^{-1}(Y) \subseteq h^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} h^{-1}(V_\alpha)$)，也就是说 $\{h^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的开覆盖（因为任意 C-开集都是开集）。于是，由于 X的 C-紧致性，存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in \Lambda$ 使得 $h^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup h^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \cdots \cup h^{-1}(V_{\alpha_n}) = X$，则 $h[h^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup h^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \cdots \cup h^{-1}(V_{\alpha_n})] = h(X)$，则$h(h^{-1}(V_{\alpha_1})) \cup h(h^{-1}(V_{\alpha_2})) \cup \cdots \cup h(h^{-1}(V_{\alpha_n})) = Y$，则 $V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} = Y$。由于 h是 C-开集，因此 $\{V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}\}$是 C-开集的有限子覆盖，覆盖 Y。因此，$(Y,\mathcal{P})$ 是一个 C-紧空间。 □

空间 X 的子集 B 是 C-紧的，当且仅当 B 在子空间拓扑下是一个 C-紧拓扑空间。

定理 44。 设 h：（X， $\mathcal{T}$） $\to$（Y， $\mathcal{P}$） 是 C-连续函数，且（X， $\mathcal{T}$） 是C-紧的，则 Y 是紧的。

证明。 使用定理 43 的相同证明。 □

定理 45。 设 $h:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{P})$ 是 F-连续、 F-开且为满射的函数，并且 $(X,\mathcal{T})$ 是 F-紧空间，则 Y是 C-紧空间。

证明。 证明显而易见。根据定理 41，任意 F-紧空间都是 C-紧空间；而在 [4] 中，定理 13 表明， F-紧空间的任何 F-连续、 F-开满射像都是 F-紧空间。 □

定理 46。 设 $h:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{P})$ 是 C-连续、 C-开且为满射的函数，并且 $(X,\mathcal{T})$ 是 C-*Lindelöf*（分别地， C-可数紧）空间，则 Y是 C-*Lindelöf*（分别地， C-可数紧）空间。

证明。 使用定理 43 的相同证明。 □

定理 47。 设 $h:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{P})$ 是 F-连续、满射且 F-开的函数，并且 $(X,\mathcal{T})$ 是 F-*Lindelöf*（分别地， F-可数紧）空间，则 Y是C-*Lindelöf*（分别地， C-可数紧）空间。

证明。 显然，根据推论 42，任何 F-Lindelöf（分别为 F-可数紧）空间都是 C-Lindelöf（分别为 C-可数紧）空间；根据 [4]中的定理 15，任何 F-连续、 F-开且满射像为 F-Lindelöf（分别为 F-可数紧）空间的空间都是 C-Lindelöf（分别为 C-可数紧）空间。 □

定理 48。 设 $h:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{P})$ 是 C-连续满射，且$(X,\mathcal{T})$ 是 C-*Lindelöf*（分别为 C-可数紧）空间，则 Y是 *Lindelöf*（分别为可数紧）空间。

证明。 使用与定理 43 相同的证明。 □

显然，对于任意拓扑空间（X， $\mathcal{T}$），我们都有。

$$F\text{-compactness} \Longrightarrow C\text{-compactness} \Longrightarrow \text{compactness}.$$

以上蕴含关系均不可逆。下面给出一个既非 C-紧致也非 F-紧致的紧空间示例。

例49. 重叠区间拓扑 [3]。在集合 $X = [-1, 1]$ 上，我们由形如 $[-1, b)$（其中 $b > 0$）和 $(a, 1]$（其中$a < 0.$ ）的集合生成一个拓扑。那么，所有形如 (a, b) 的集合也都是开集。 X 是紧的，因为在任何开覆盖中，包含 1 和 -1 的两个集合就能覆盖 X。空间 X 既不是 C-紧空间，也不是 F-紧空间，因为存在$\{[-1, 0.5)$、$(-0.5, 1]\}$，它们构成 X 的一个开覆盖，但不存在由 C-开集或 F-开集组成的有限子覆盖，因为 $[-1, 0.5)$ 和 $(-0.5, 1]$ 既不是 C-开集，也不是 F-开集（$cl[-1, 0.5)$ $\setminus [-1, 0.5) = [-1, 1] \setminus [-1, 0.5) = [0.5, 1]$ 既不是可数集，也不是有限集，并且 cl $(-0.5, 1] \setminus (-0.5, 1] = [-1, 1] \setminus (-0.5, 1] = [-1, -0.5]$ 既不是可数集，也不是有限集）。

5 结论和其他任务

在本文中，我们展示了 C-开集的概念，并讨论了其主要性质。随后，我们通过 C-开集和 C-闭集定义了一些算子。我们揭示了这些算子之间的关系，并考察了它们的主要特征。此外，我们利用 C-开集和 C-闭集引入了连续函数和紧集，并验证了它们的主要性质。

我们接下来的工作将着重于通过分离公理、连通性和其他拓扑性质中的 C-开集和 C-闭集，进一步研究拓扑概念。

参考文献

[1] C. Kuratowski，拓扑学 *I*，第 4 版，法文版，Hafner，纽约，1958 年。

[2] R. Engelking，《一般拓扑学》。PWN，华沙，1977 年。

[3] L. Steen 和 J. Seebach，《拓扑学中的反例》。Dover Publications, INC. 1995。

[4] M. H. Alqahtani，F-开集和 F拓扑空间中的-闭集。《欧洲纯数学与应用数学杂志》，第16卷，第2期，（2023年），819-832。