arXiv:2305.03190v4 [cond-mat.stat-mech] 9 Jan 2024

多个可观测量的量子速度极限：守恒定律、关联与宏观系统

Ryusuke Hamazaki[1]

[1]*Nonequilibrium Quantum Statistical Mechanics RIKEN Hakubi Research Team, RIKEN Cluster for Pioneering Research (CPR), RIKEN iTHEMS, Wako, Saitama 351-0198, Japan*（日期：2024年1月10日）

多个可观测量如何相互影响其动力学，一直是统计力学中的关键问题。本文提出“量子速度极限”这一新概念，为多个可观测量的非平衡量子动力学建立定量且严谨的理论。量子速度极限是关于描述多个可观测量速度的向量的普适不等式。它们阐明，与针对单个可观测量的传统速度极限相比，若掌握其他可观测量的信息（例如实验上可测得的可观测量或守恒量），就能对我们感兴趣的可观测量的速度给出更紧的界。此外，量子速度极限在概念上有别于传统速度极限，因为要得到量子速度极限，我们需要引入速度向量，并求解一个包含多个变量的优化问题。我们首先推导出一个信息论速度界，它由可观测量的广义关联矩阵和量子费舍尔信息给出。该速度极限带来了若干新颖的推论：（i）系统中的守恒定律是量子动力学的基本要素，它可通过可观测量与守恒量之间的关联改善速度极限；（ii）可以根据另一个可观测量的信息，为某个可观测量的速度给出一个非平凡的下界，而以往大多数速度极限只能给出上界；（iii）存在一种显著的非平衡权衡关系，即不相关可观测量（例如反对易可观测量）的速度不能同时很大；（iv）局域相互作用多体系统中的局域可观测量的速度极限由局域哈密顿量的涨落决定，即使在热力学极限下，该涨落仍然收敛，并伴有非平凡的有限尺寸修正。此外，我们还基于概率流局域守恒定律，发现了另一种不同的多个可观测量速度极限；在多个量发生宏观跃迁时，这一极限更具优势。我们新发现的速度极限具有普适性，不仅适用于幺正量子动力学，也适用于经典和量子随机动力学，为建立适用于多个可观测量的远离平衡动力学普适理论迈出了关键一步。

I. 引言

多个可观测量之间的相互影响在统计力学中发挥着至关重要的作用。一个经典的例子是热流与电流之间的关联，这通常被称为热电效应 [1]。另一个著名的例子是，某一特殊类型的可观测量，即守恒量，会导致其他可观测量呈现反常的量子输运性质，这可以通过Mazur-Suzuki 界 [2–4]来理解。如今，对多个可观测量之间这种相互作用的研究已成为不同研究背景下的活跃领域，其范围涵盖了描述具有多个守恒量的孤立系统中稳态的广义吉布斯系综 [5] ，以及针对经典随机系统中稳态动力学、涉及多个可观测量 [9, 10] 的热力学不确定关系 [6–8]。除了具有基础理论研究价值之外，建立多个可观测量的非平衡动力学理论还具有实际优势：借助其他易于通过理论或实验评估的可观测量的信息，可以理解某一可观测量的行为。然而，以往的研究主要集中于接近平衡态或稳态的系统。因此，尽管这一问题十分重要，能够支配多个可观测量的远离平衡态（或稳态）量子动力学的普适理论仍然缺失。仍在很大程度上未得到探索。

近年来，关于非平衡态转变的普适且严谨的理论已在量子速度极限（量子速度极限）的背景下得到发展。首项开创性工作由Mandelstam和Tamm提出于 1945 [11], ，他们推导出，在幺正时间演化下，初态演化为正交态所需的时间以下界为能量涨落的倒数。从那时起，许多研究对这类量子速度极限进行了推广和完善 [12–26] ，并获得了实验验证 [27–29]。事实上，速度极限已推广至开放量子系统 [30–36], 、经典系统 [37–43], ，甚至非线性布居动力学 [44–46]。此外，借助态的几何 [39, 47–51], 、（量子）信息论 [40, 41, 52], 、概率局域守恒定律和最优传输理论 [53–61]，人们还得到了更精细的界。除此之外，速度极限也被证明能够为非平衡系统的控制提供约束 [28, 62–71], ，这对于量子技术所代表的实际应用至关重要。

尽管此前许多研究从希尔伯特空间度量的角度讨论了量子态的量子速度极限，近期研究开始关注物理可观测量 A [40, 41, 52, 58, 72] 的期望值变化速度。事实上，对于某个可观测量而言，这种基于可观测量的速度极限比基于度量的速度极限提供了更好的界，适用于我们所关心的.....

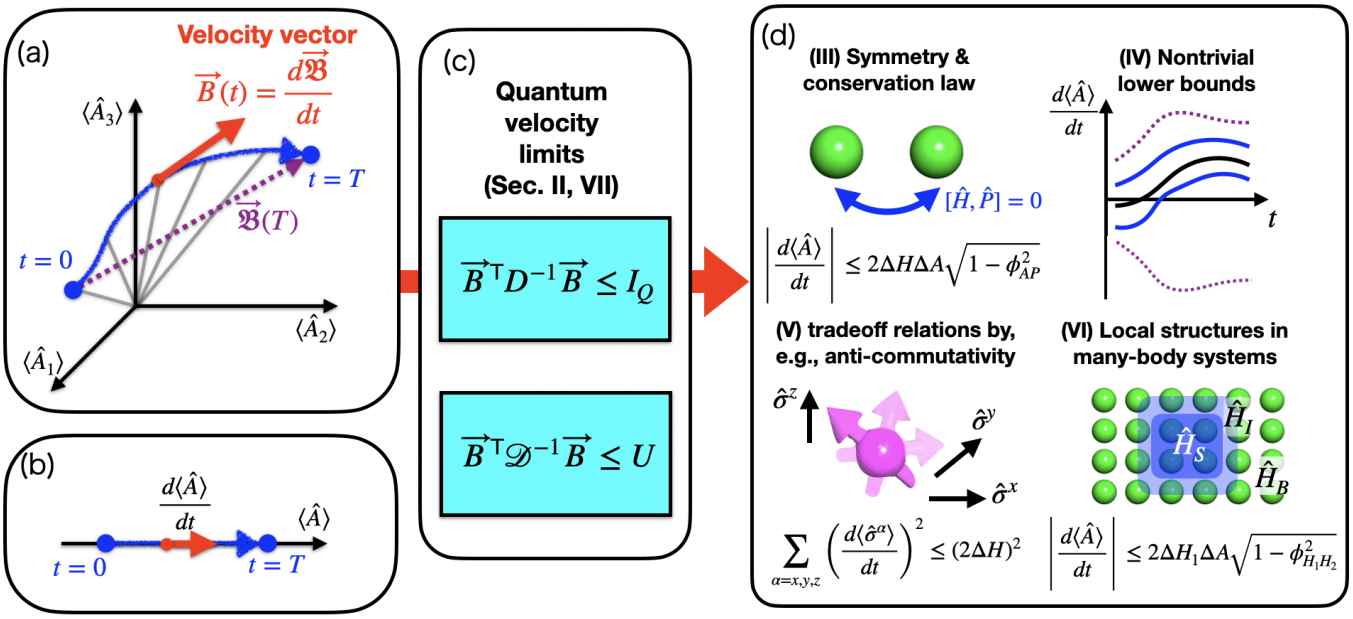

图 1. 我们研究成果的示意图。(a) 我们同时考察多个可观测量组成的集合的时间演化。根据可观测量 $\vec{\mathfrak{B}}$ 的期望值轨迹，我们引入速度向量 $\vec{B}$。与 (b) 针对单个可观测量的传统量子速度极限处理不同，这种方法使我们能够理解各可观测量之间的相互影响。(c) 速度向量满足两个不同的量子速度极限（QVL）：一个基于量子信息论（第二节），另一个源自概率的连续性方程（第七节）。(d) 我们的量子速度极限带来了许多传统速度极限无法处理的新应用。在第三节中，我们阐明了动力学的对称性和守恒定律 $\hat{P}$ 如何提高我们评估跃迁速率的能力。在第四节中，我们展示了量子速度极限能够给出速度非平凡的下界。这是因为，与传统速度极限（紫色虚线）不同，我们对实际速度（黑色）的界（蓝色）是不对称的。在第五节中，我们发现了新的非平衡权衡关系，其中一些是量子系统所独有的。例如，我们证明反对易可观测量无法同时快速变化。在第六节中，我们还阐明了量子多体系统中的局域相互作用结构对于评估子系统 S 上局域可观测量 $\hat{A}$ 的速度至关重要。例如，考虑由 $\hat{H} = H_S + H_I + H_B$ 给出的局域哈密顿量，其中 H_S、H_I 和 H_B 分别表示子系统、相互作用和热浴的哈密顿量。此时，我们通常可以在图中取 $\hat{H}_1 = \hat{H}_S + \hat{H}_I$ 和 $\hat{H}_2 = \hat{H}_B$。此外，当 $[\hat{A}, \hat{H}_I] = 0$ 时，我们甚至可以取 $\hat{H}_1 = \hat{H}_S$ 和 $\hat{H}_2 = \hat{H}_B + \hat{H}_I$。(d) 中给出的不等式是我们针对幺正动力学所得发现的代表性示例，其中 $\phi_{AB} = \mathrm{cov}(\hat{A}, \hat{B})/\Delta A \Delta B$。不过，正文中还讨论了这些不等式的更一般形式以及其他有益的应用。

相关性，这比量子态本身更直接地与实验相关 [52]。有趣的是，首个基于可观测量的量子速度极限早已在 Mandelstam-Tamm 论文中得到 [11]：他们推导出，对于时间 t 处的量子态 $\hat{\rho}(t)$，$\langle \hat{A}(t) \rangle := \mathrm{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}(t)]$ 的瞬时速度为 $\left|\frac{d\langle \hat{A}(t) \rangle}{dt}\right| \le \frac{2}{\hbar}\Delta A \Delta H$；此处系统遵循哈密顿量为 H 的幺正动力学，其中 $\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}$ 是 $\hat{A}$ 的量子涨落。正如文献 [52]，最近所讨论的，这一量子速度极限可推广至一般动力学，并使其界限更紧 $\left|\frac{d\langle \hat{A}(t) \rangle}{dt}\right| \le \Delta A \sqrt{I_Q}$，其中 I_Q 是量子费舍尔信息。

尽管基于可观测量的量子速度极限日益受到关注，但相关讨论仅针对单个可观测量。然而，如果我们已经了解其他可观测量的动力学行为，或许就能更好地评估我们关注的可观测量的演化速度。例如，如果我们了解动力学的一些基本结构，例如守恒量以及哈密顿量相互作用的局域性，就会预期演化速度会减慢。发现一种能够论证这一预期的定量且严谨的理论，对于我们理解远离平衡的量子动力学至关重要。

A. 成果总结

在本文中，我们通过引入量子速度极限（QVL）的概念，首次迈出了构建多个可观测量的远离平衡量子动力学理论的步伐。量子速度极限是关于多个可观测量期望值的非平衡动力学的普适不等式。如

一个与传统量子速度极限截然不同且至关重要的显著发现是，我们注意到，可观测量集合的动力学定义了速度向量，而非单个可观测量对应的（标量）速率。事实上，只有在引入这样的速度向量并求解多变量优化问题之后，才能得到量子速度极限（见附录 A）；在本文中，我们首次运用这一方法来理解量子动力学。我们的基本量子速度极限见式（10）、（12）和（102），并且随着可观测量数量的增加而变得更优。特别是，对于单个可观测量而言，我们的界比传统量子速度极限的界更紧 [52]。此外，量子速度极限与以往的速度极限在概念上具有不同的影响：它们使我们能够在了解系统基本结构（例如守恒定律和算符关联）的基础上评估动力学速率。因此，量子速度极限不仅具有实际优势，也是在实现对多个可观测量的远离平衡量子动力学普适理解方面一种新颖且基础性的概念。我们的成果如图 1 所示，下面对此进行总结。

1. *Information-theoretical quantum velocity limit*

我们首先在第 II 节介绍信息论量子速度极限。关键观察有三点：i）为一组时间无关可观测量定义速度向量 $\vec{B} = \left(\frac{d\langle \hat{A}_1\rangle}{dt}, \cdots, \frac{d\langle \hat{A}_K\rangle}{dt}\right)$（图 1(a)）；ii）定义一组特殊可观测量，称为不变量可观测量，这是与守恒量密切相关的概念；iii）构造广义关联矩阵 D，它是对 $\{A_k\}$ 移除不变量分量的影响后得到的关联矩阵。随后，我们将信息论量子速度极限表述为一个新型矩阵不等式（式 (10)）及其等价的标量不等式（式 (12)），后者写作（图 1(c)）

$$\vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1} \vec{B} \leq I_Q. \tag{1}$$

该不等式证明的核心是，考虑速度向量与某个辅助向量之间内积的柯西-施瓦茨不等式，并针对该辅助向量求解一个优化问题。事实上，引入速度向量并求解优化问题，对于推导量子速度极限至关重要，而且我们在论文中首次运用这些方法来理解量子动力学。对于幺正动力学，我们还有 $I_Q \leq 4\Delta H^2$（设置为 $\hbar = 1$）。我们认为，量子速度极限是许多传统速度极限的改进版本，并且随着可观测量数量增加（K 和 M），其效果会进一步提升。此外，通过考虑不变量可观测量的影响，我们的量子速度极限还对量子 Cram´er-Rao 界作出了迄今未知的推广；该界是量子信息论中的基本不等式。

尽管简洁，我们的量子速度极限却能带来许多截然不同的应用（图1(d)），而传统的量子速度极限方法无法解决这些问题。事实上，如下文所总结的，我们的工作揭示了远离平衡动力学与支配其演化的关键结构之间基本且严格的关系，例如对称性和守恒定律、算符关联及其与量子非对易性的联系，以及多体哈密顿量中的局域相互作用。此外，与大多数只能给出上界的传统量子速度极限不同，量子速度极限还能给出非平凡的速度下界 。

虽然本文中的大多数具体示例针对幺正量子动力学，但我们强调，我们的量子速度极限也可直接应用于量子随机系统。此外，速度极限也适用于经典随机系统，甚至非线性种群动力学 [44]。因此，本文提出的速度极限为理解涉及多个可观测量的非平衡动力学提供了一个通用框架。

2. *Symmetry and conservation law*

我们的界首次阐明了可观测量的速度与系统守恒定律之间一种基本而新颖的关系（第 III 节）。我们表明，与动力学守恒量相关的不变量可观测量会使速度界和速度极限变得更紧（速度极限见式 (27)）。我们的结果以严格且定量的方式展示了守恒定律如何减缓动力学过程，这与我们的直观预期一致。

对于幺正动力学，一个对称算符 P 满足 $[H, P] = 0$ 便成为不变量可观测量，并可得到以下普适界：

$$\left|\frac{d\langle \hat{A}\rangle}{dt}\right| \leq \Delta A\sqrt{I_Q}\sqrt{1-\phi_{AP}^2} \leq 2\Delta H\Delta A\sqrt{1-\phi_{AP}^2}, \tag{2}$$

其中 $\phi_{AB} = \mathrm{cov}(\hat{A}, \hat{B})\,\Delta A\Delta B$，$\mathrm{cov}(\hat{A}, \hat{B}) = \langle \hat{A}\hat{B}\rangle + \langle \hat{B}\hat{A}\rangle - \hat{A}\hat{B}\langle A\rangle\langle B\rangle$ 表示对称化协方差。因此，可观测量与对称性之间的关联会使界相较于先前讨论的界 [52]缩小因子 $\sqrt{1-\phi_{AP}^2}$。请注意，我们可以将该不等式推广到含有多个守恒量的更复杂情形。

值得注意的是，哈密顿量本身总会成为幺正动力学的不变量可观测量，而在随机系统中（例如）则并非如此。特别是，取 $P = H$ 为上述不等式，我们总能得到比之前的 [11, 52] 更强的速度极限，适用于任意 幺正量子动力学。重要的是，新发现的界不仅在定量上有所提升，在定性上也有所改善，因为它使我们能够在广泛得多的情形下达到等号条件。事实上，我们证明了

与此前已知的界不同，我们的界在单个自旋 1/2 系统中，对于任意纯初始态和哈密顿量，均满足等号条件 [11, 52]。

3. Nontrivial lower bounds

如第四节所示，针对两个可观测量的量子速度极限会给出一个唯一的非对称上下界：已知一个可观测量的速度 A，即可确定另一个可观测量的速度 B。由此可以得到非平凡的速度下界。这与许多传统速度极限形成鲜明对比，后者只能提供上界。更具体地说，我们的界具有如下形式（一般表达式见（45）），例如，

$$v_B\phi_{AB} - f\sqrt{1-\phi_{AB}^2} \le v_A \le v_B\phi_{AB} + f\sqrt{1-\phi_{AB}^2}, \tag{3}$$

其中 $v_X = \frac{1}{\Delta X}\frac{d\langle \hat{X}\rangle}{dt}$ 和 $f = \sqrt{I_Q - \left(\frac{1}{\Delta B}\frac{d\langle \hat{B}\rangle}{dt}\right)^2}$。因此，当 $v_B\phi_{AB} > f\sqrt{1-\phi_{AB}^2}$ 时，我们的下界给出了一个非平凡的速度下界，$\left|\frac{d\langle \hat{A}\rangle}{dt}\right|$。

我们的界依赖于对另一个参考可观测量 $\frac{d\langle \hat{B}\rangle}{dt}$ 的速度以及两个可观测量之间的相关性 ϕ_{AB}。值得注意的是，我们的不等式表明，如果我们知道参考可观测量 $\left|\frac{d\langle \hat{B}\rangle}{dt}\right| \le \sqrt{I_Q}\Delta B$ 的量子速度极限（QSL）是紧的，就能够精确确定所关注可观测量的速度 $v_A \simeq v_B\phi_{AB}$。我们证明，这种情况实际上会出现在单个自旋 1/2 系统中。

4. Non-equilibrium tradeoff relations

我们的量子速度极限揭示了不相关可观测量的一种新的非平衡权衡关系；也就是说，不相关可观测量的变化速度不能同时很快（见第 V 节中的（52））。更具体地说，我们证明了可加性原理：可观测量归一化速度的平方和受量子费舍尔信息的上界限制。

作为一个引人注目的例子，我们发现，这种权衡关系是由反对易性引起的；反对易性是某些算符所具有的一种非平凡量子性质。特别是，如果我们选取一组满足反对易关系 $\hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_K$（$\hat{A}_i\hat{A}_j + \hat{A}_j\hat{A}_i = 2\delta_{ij}$）的可观测量，就能得到一个普适的界

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\frac{d\langle \hat{A}_k\rangle}{dt}\right|^2 \le I_Q \tag{4}$$

对于任意 量子态和动力学。作为具有重要物理意义的实例，我们讨论一组反对易泡利串以及马约拉纳费米子对应的算符 $\{A_k\}$ 的情形。

我们的结果揭示了此前未知的、源于反对易性的权衡关系，让人联想到量子力学中著名的不确定性关系。标准不确定性关系指出，两个不对易可观测量的量子涨落不可能同时很小；而我们的权衡关系指出，多个反对易可观测量的变化速率不可能同时很大。因此，这一权衡关系表明，可观测量非平凡的对易性质甚至会影响其动力学和涨落。我们强调，在经典系统中不存在此类关系的对应形式。

5. Locally interacting many-body systems

我们还发现了一些不等式，能够显著改进对量子多体系统中局部可观测量速度（或速率）的估算（见第 VI 节中的式 (77)）。许多传统速度极限，例如 Mandelstam-Tamm界 [11] 和 Margolous-Levitin 界 [16], ，在大型量子多体系统 [28, 58, 66]中通常会变得毫无意义。相比之下，使用 $\hat{}$ 我们的方法可以证明，幺正动力学下局部子系统中可观测量 A的速度受到仅取决于该子系统内能量涨落的界定，例如，

$$\left|\frac{d\langle \hat{A}\rangle}{dt}\right| \le 2\Delta A\Delta H_{SI}\sqrt{1-\phi^2_{H_{SI}H_B}}. \tag{5}$$

这里，我们将总哈密顿量分解为 $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_I + \hat{H}_B$，并定义了 $\hat{H}_{SI} = \hat{H}_S + \hat{H}_I$，其中 $\hat{H}_S$、$\hat{H}_I$ 和 $\hat{H}_B$ 分别表示子系统、相互作用和热浴的哈密顿量。请注意，如果可观测量与哈密顿量之间存在非平凡的对易结构，我们可以得到不同于（5）的新不等式。例如，当 $[\hat{A}, \hat{H}_I] = 0$时，我们可以分别用 $\hat{\Delta H}_S$和 $\phi_{H_SH_{IB}}$替换（5）中的 ΔH_{SI}和 $\phi_{H_{SI}H_B}$，其中 $H_{IB} = H_I + H_B$。

重要的是，我们的界阐明了系统的局部结构与可观测量速度之间的基本关系。事实上，由于 ΔH_{SI} 对于局域相互作用系统是收敛的，右侧不会随系统总规模增大；这与总能量涨落 ΔH形成对比。与许多先前的方法 [28, 58, 61, 66]不同，我们的结果为局部子系统中的任意可观测量提供了严格且有价值的界。我们指出，尽管文献 [73]基于 ΔH_{SI}，针对局部子系统讨论了基于度量的速度极限，但我们基于可观测量得出的结果带来了许多非平凡特征，无法通过文献 [73] 中的方法直接获得（见第 VI C 节）。

此外，考虑量子速度极限（QVL）还有另一项值得注意的结果：式（5）中的界表明，作用于子系统的哈密顿量与其余部分之间的关联 $\phi_{H_{SI}H_B}$ 能够显著改善该界。我们认为，当热浴规模较小时，这一因素尤为

关键，这与人工量子系统（例如囚禁离子）的实验相关。此外，这一修正确保式（5）中的界始终优于传统的界 $2\Delta A\Delta H$，详见第 VIC 节。

6. Bound based on the conservation law of probability

除了上述基于量子费舍尔信息的量子速度极限外，我们还利用概率局域守恒定律推导出不同的速度极限（见第 VII 节中的式（102））。对于多个可观测量的宏观跃迁，这种方法具有优势，并改进了近期针对单个可观测量得到的界 [58]。这种速度极限依赖于可观测量梯度与局域概率流的（广义）关联矩阵。我们认为，这种速度极限会带来基于量子费舍尔信息的速度极限无法得出的不同结果。作为单粒子输运的一个显著例子，我们展示了粒子的位置速度与其奇偶概率密度速度之间存在非平凡的权衡关系。

正如两种不同类型量子速度极限的发现所展示的那样，我们的方法提供了一个通用框架，可将不同类型的速度极限推广为多种速度极限。事实上，证明依赖于柯西-施瓦茨不等式的速度极限，例如针对经典混沌系统的速度极限 [74], ，都可以通过我们的通用方法推广为速度极限。

B. 本文结构

本文其余部分安排如下。第二节中，我们基于量子费舍尔信息和广义关联矩阵，给出适用于多个可观测量的信息论速度界。我们还说明，我们的界可视为对许多已有不等式的推广。第三节中，我们通过展示若干重要应用，讨论系统的不变量可观测量如何收紧速度极限。第四节中，我们推导可观测量速度的不对称上界和下界，并解释其含义。第五节中，我们展示不相关可观测量（尤其是反对易可观测量）的速度之间的非平衡权衡关系。第六节中，我们论证速度界可用于推导量子多体系统中的有用不等式。第七节中，我们讨论基于概率局域守恒定律的另一类速度界。在对单个可观测量的情形进行表述（这略微推广了文献 [58], 中的处理方法）之后，我们讨论多个可观测量的情形及其应用。第八节中，我们总结全文并展望未来。

II. 多个可观测量的信息论速度极限

A. 设置

我们考虑一般的量子动力学，其中，时间 t 的密度矩阵$\hat{\rho}(t)$遵循运动方程$d\hat{\rho}(t)/dt = \mathcal{L}[\hat{\rho}(t)]$，其中 $\mathcal{L}$为某个（通常随时间变化的）超算符。对于幺正动力学，有 $\mathcal{L}[\hat{\rho}] = -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}]$，其中下文将 $\hbar$ 设为1。对于量子随机动力学，我们可以考虑例如 Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad 方程 [75, 76] 的李维尔算符 $\mathcal{L}$。采用我们的方法，也可以处理经典随机系统：只需关注$\hat{\rho}(t)$的对角元素及其跃迁。

现在，动力学可重写为 [77]

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{2}\{\hat{\rho}, \hat{L}\}, \tag{6}$$

其中，$\hat{L}$ 是对称对数导数（SLD），而 $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ 是反对易子。

我们关注一组线性无关的可观测量 $\hat{A}_k (k = 1, \cdots, K)$，并定义速度向量 $\vec{B}$ 为

$$\vec{B}(\{\hat{A}_k\}) = \left(\frac{d\langle \hat{A}_1 \rangle}{dt}, \cdots, \frac{d\langle \hat{A}_K \rangle}{dt} \right)^{\mathsf{T}}. \tag{7}$$

为简单起见，我们假设这些可观测量不显含时间，$dA_k/dt = 0$，尽管可通过类似于文献 [41, 52] 的方式直接推广到时间依赖情形。在这种情况下，式 (6) 得出

$$\frac{d\langle \hat{A}_k \rangle}{dt} = \langle \hat{A}_k, \hat{L} \rangle, \tag{8}$$

其中 $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t)\{\hat{A}, \hat{B}\}\right]$ 是对称化关联函数。

此外，我们还确定了一组（通常随时间变化的）可观测量 $\Lambda_\mu (1 \le \mu \le M)$，它们满足

$$\frac{d\langle \hat{\Lambda}_\mu \rangle}{dt} - \left\langle \frac{d\hat{\Lambda}_\mu}{dt} \right\rangle = \langle \hat{\Lambda}_\mu, \hat{L} \rangle = 0 \tag{9}$$

对所有 μ 均成立。我们称 Λ_μ 为不变量可观测量。例如，在时间演化过程中守恒的定时算符可视为 Λ_μ。不失一般性，我们可以进行 Gram–Schmidt 正交归一化，并假设 $\langle \Lambda_\nu, \Lambda_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$。我们还假设 $A_1, \cdots, A_K, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_M$线性无关。

如下所示，通过将不变可观测量 $\{\Lambda_\mu\}$ 与其他可观测量 $\{A_k\}$ 区分开来，我们可以得到简洁的不等式 B，其中不变可观测量的作用显而易见。

B. 量子速度极限

在上述设置下，我们将以下量子速度极限（QVL）以矩阵不等式的形式给出，作为我们的主要结果：

$$\vec{B}\vec{B}^{\mathsf{T}} \preceq I_Q D, \tag{10}$$

其中，$A \preceq B$ 表示算符 $B - A$ 是半正定的。这里，我们定义 SLD 量子 Fisher 信息 $I_Q = \langle L,\ L\rangle$ 以及一个 $K\times K$ 广义相关矩阵 $D = D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})$，其矩阵元素定义为

$$\begin{aligned} &D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})_{kl} \\ &= \left\langle \hat{A}_k - \sum_{\mu=1}^{M} \langle \hat{A}_k, \hat{\Lambda}_\mu\rangle\, \hat{\Lambda}_\mu, \hat{A}_l - \sum_{\mu=1}^{M} \langle \hat{A}_l, \hat{\Lambda}_\mu\rangle\, \hat{\Lambda}_\mu \right\rangle \\ &= \langle \hat{A}_k, \hat{A}_l\rangle - \sum_{\mu=1}^{M} \langle \hat{A}_k, \hat{\Lambda}_\mu\rangle \langle \hat{\Lambda}_\mu, \hat{A}_l\rangle . \end{aligned} \tag{11}$$

注意，D 通常是半正定的。下文中，我们假设 D 也是正定的，且存在逆矩阵 [78]。

基于这一假设，式（10）可导出等价的量子速度极限，其形式为以下标量不等式：

$$\mathcal{K}(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\}) := \vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1} \vec{B} \le I_Q. \tag{12}$$

重要的是，对于幺正量子动力学，我们有$I_Q \le 4\Delta H^2$，其中等号条件例如在纯态下成立。因此，我们得到基于系统能量涨落的界：

$$\vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1} \vec{B} \le I_Q \le 4\Delta H^2.$$

式（10）和式（12）的证明见附录 A；其要点是对速度向量与某个辅助向量之间的内积应用柯西-施瓦茨不等式，并据此求解一个优化问题。我们还将在附录中讨论，在以下意义下，式（10）和式（12）对于已知不变量可观测量 $\{\hat{}\Lambda_\mu\}$是最优的：若考虑一个矩阵 D^f，其矩阵元素为

$$D^f_{kl} = \left\langle \hat{A}_k - \sum_{\mu=1}^{M} f_{k\mu}\hat{\Lambda}_\mu, \hat{A}_l - \sum_{\mu=1}^{M} f_{l\mu}\hat{\Lambda}_\mu \right\rangle \tag{13}$$

对于一组实变量 $\{f_{k\mu}\}$，我们有

$$D \preceq D^f \quad \text{and} \quad \vec{B}^{\mathsf{T}}(D^f)^{-1}\vec{B} \le \vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1}\vec{B}, \tag{14}$$

其中，等号条件由 $f_{k\mu} = \langle \hat{}A_k,\ \hat{}\Lambda_\mu\rangle$ 给出，对所有 k 和 μ 均成立。此外，我们证明，通过适当的优化技术，可以得到适用于多个可观测量和多个参数（即不仅限于单一时间参数 t）的广义不等式。

我们强调，我们的速度极限针对的是多个可观测量的期望值的速度向量，不应与态矢量 $\vec{p}$ 和密度矩阵 $\hat{}\rho$ [25, 26] 的标准速度极限相混淆。

正如论文中一直讨论的那样，与以往的速度极限不同，我们的速度极限使我们能够根据对其他可观测量的了解，更好地评估某个可观测量的动力学。

我们还会讨论如何通过实验获取不变量可观测量和可观测量的关联，它们在我们的量子速度极限中发挥着重要作用。对于不变量可观测量，我们可以证明，在许多我们感兴趣的情形下，不变量可观测量与时间无关（见第 III A 节）。我们还可以指出，即使不变量可观测量随时间变化，对其进行评估在实验上也比评估整个密度矩阵更容易，而后者通常需要完整的量子态层析。对于可观测量的关联，我们可以展示一些情形，在这些情形下，对其进行评估会变得更简单，也更便于实验实现（见第 III B 2 节和第 V B 2 节）。此外，即使直接评估可观测量的速度比评估关联更容易，我们的不等式仍然有意义。事实上，我们的不等式反过来提供了一种途径，可以根据可观测量的速度来评估那些难以直接测量的关联（见第 III B 2 节）。

C. 与既有文献的联系

让我们来讨论与既有文献的联系和区别。首先，过去大多数信息论速度极限都考虑$\hat{}\hat{}M = 1$ 与 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$的情形。相比之下，正如下一小节所示，如果存在更多不变量可观测量，将它们纳入考量后，我们的界会变得更紧。

$\hat{}\hat{}$即使考虑 $M = 1$ 与 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$的情形，我们的结果也带来了新的推论。在这种情况下，D 可化为协方差矩阵 C，其矩阵元为

$$C_{kl} = \langle \hat{A}_k, \hat{A}_l\rangle - \langle \hat{A}_k\rangle \langle \hat{A}_l\rangle . \tag{15}$$

因此，我们的界可视为推广到任意可观测量的多维量子 Cramér-Rao 不等式（即不局限于无偏估计量 [77]）。此前从未讨论过将一般多维量子 Cramér-Rao 不等式应用于动力学。

值得注意的是，向量值可观测量的经典多维 Cramér-Rao 界最近已被用于理解经典随机动力学 [9, 10, 40]。然而，我们的量子速度极限 (12) 更具一般性，因为它甚至适用于量子系统，其中非对易性会发挥作用。如果我们假设动力学过程中不会出现 $\hat{}\rho$ 和 A_k 的 $\hat{}$非对角矩阵元，那么式 (12) 就会退化为向量值可观测量的经典多维 Cramér-Rao 界，$\vec{B}^{\mathsf{T}} C_C^{-1}\vec{B} \le I_C$，其中 $C_C = \langle A_k A_l\rangle - \langle A_k\rangle\langle A_l\rangle$是经典协方差矩阵，$I_C$ 是经典费舍尔信息。正如后文将详细说明的，通过在量子动力学中考察式 (12)，我们可以得到许多在概念上不同于先前文献的结论。

例如，不等式 (32) 成立，是因为生成元（即哈密顿量）本身的动力学演化会使其成为孤立系统中的守恒量，而文献 [9, 10, 40] 中讨论的随机系统并非如此。另一个例子是，第 V 节讨论的反对易可观测量的权衡关系，在经典系统中没有直接对应物。我们还指出，由于量子非对易性，算符的关联函数和费舍尔信息并非唯一，因此将经典速度极限推广到量子情形并非易事。本文重点讨论基于对称化关联函数和对称对数导数量子 Fisher 信息的量子速度极限。

为了得到此前推导出的单个可观测量的量子速度极限，我们再次取 $M=1$、$\Lambda_1=\mathbb{I}$ 和 $K=1$。于是，我们有

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|\leq\Delta A\sqrt{I_Q}, \tag{16}$$

当 A 不随时间变化时，这与参考文献 [52] 中得到的量子速度极限等价。对于幺正动力学，我们有 $I_Q\leq 4\Delta H^2$，因此

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|\leq\mathcal{B}_{\rm MT}:=2\Delta A\Delta H, \tag{17}$$

这就是可观测量 A 的 Mandelstam-Tamm界。正如下一小节将要提到的，随着可观测量 K（以及不变量可观测量 M）数量的增加，多个可观测量对应的量子速度极限（12）会比单个可观测量对应的式（16）更紧。

最后，如果我们考虑 $M\geq 2$，那么（10）中的量子速度极限可以视为此前未知的一种广义量子 Cramér-Rao界，其中考虑了守恒量（或者更一般地说，不变量可观测量）。

D. 通过更多可观测量获得更好的界

若纳入更多可观测量，方程（10）和（12）中的速度极限会更加紧。当$\{A_k\}\subset\{A'_k\}$时，尤其有

$$\mathcal{K}(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})\leq\mathcal{K}(\{A'_k\};\{\Lambda_\mu\})\leq I_Q. \tag{18}$$

同样，当 $\{\Lambda_\mu\}\subset\{\Lambda'_\mu\}$ 时，有矩阵不等式

$$D(\{A_k\};\{\Lambda'_\mu\})\preceq D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\}) \tag{19}$$

因此

$$\mathcal{K}(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})\leq\mathcal{K}(\{A_k\};\{\Lambda'_\mu\})\leq I_Q. \tag{20}$$

我们略去式 (18) 的证明，因为它实质上等同于文献 [10] 中的式 (7)–(12)。我们不再讨论经典协方差矩阵，而是可以对量子广义关联矩阵 D 进行类似的讨论。

要证明 $D(\{A_k\};\{\Lambda'_\mu\})\preceq D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})$，只需证明 $\{\Lambda'_\mu\}_{\mu=1}^{M+1}=\{\Lambda_\mu\}_{\mu=1}^{M}\cup\{\Lambda_{M+1}\}$ 的情形。在这种情况下，有

$$\begin{aligned}&\sum_{kk'}a_ka_{k'}\left[D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})_{kk'}-D(\{A_k\};\{\Lambda'_\mu\})_{kk'}\right]\\&\qquad=\left|\sum_k a_k\langle\hat{A}_k,\hat{\Lambda}_{M+1}\rangle\right|^2\geq 0.\end{aligned} \tag{21}$$

对任意非零向量 $\{a_k\}$ 均成立。因此，我们有$D(\{A_k\};\{\Lambda'_\mu\})\preceq D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})$，这已知可推出 $D(\{A_k\};\{\Lambda'_\mu\})^{-1}\succeq D(\{A_k\};\{\Lambda_\mu\})^{-1}$。由此，不等式（20）得证。

E. 有限时间间隔的界

虽然本文主要考虑多个可观测量的期望值的瞬时变化速度，但我们也可以找到有限时间区间内相应的不等式。为此，我们关注时间区间 $t\in[0,T]$，并定义我们感兴趣的可观测量的位移向量（见图 1(a)），

$$\vec{\mathfrak{B}}=\left(\langle\hat{A}_1(T)\rangle-\langle\hat{A}_1(0)\rangle,\cdots,\langle\hat{A}_K(T)\rangle-\langle\hat{A}_K(0)\rangle\right). \tag{22}$$

在这种情况下，我们有一个矩阵不等式（证明见附录 B）。

$$\vec{\mathfrak{B}}\vec{\mathfrak{B}}^{\intercal}\preceq T^2\overline{DI_Q}, \tag{23}$$

其中，$\overline{X}:=\frac{1}{T}\int_0^T dtX(t)$ 表示时间平均值。假设对于所有 $t\in[0,T]$，D 都是正定的，我们可以得出 D 也是正定的。于是，我们得到以下标量不等式，该不等式将多个可观测量的位移与时间间隔联系起来：

$$\sqrt{\vec{\mathfrak{B}}^{\intercal}\overline{\frac{D}{I_Q}}^{-1}\vec{\mathfrak{B}}}\leq T \tag{24}$$

对于时间无关幺正演化，我们进一步有

$$\frac{\sqrt{\vec{\mathfrak{B}}^{\intercal}\overline{D}^{-1}\vec{\mathfrak{B}}}}{2\Delta H}\leq T. \tag{25}$$

我们将在第 VB 节中讨论这一结果的一些具体应用。

当 $K=M=1$ 且 $\Lambda_1=\mathbb{I}$ 时，它简化为

$$\frac{|\langle\hat{A}(T)\rangle-\langle\hat{A}(0)\rangle|}{2\overline{\Delta A}\Delta H}\leq T. \tag{26}$$

再次强调，对于多个可观测量，我们的不等式（例如式（25））优于针对单个可观测量的不等式（例如式（26））。

表 I. 各节所述速度极限应用及对应可观测量数量 K 和 M 的汇总。注意，针对该可观测量的传统量子速度极限对应于 $K = M = 1$。

章节	应用	K	M
III	不变量可观测量下的速度极限	1	任意的
IV	非对称上界和下界	2	任意的
V	不相关可观测量的权衡关系	任意的	任意的
VI	多体系统	任意的	任意
	（传统速度极限）	1	1

III. 速度极限与不变量可观测量

在以下各节中，我们将证明，上一节得到的 QVL 不仅仅是一种理论上的推广，还具有多种值得注意的推论。表 I 总结了各节中的应用及其对应的可观测量数量 K and$M$。当 $K = 1$ 时，我们可以将该界称为速度极限（或 QSL），而非速度界（或 QVL）。

A. 不变量可观测量下的速度极限及其含义

作为第一个应用，我们讨论不变量下改进的量子速度极限，这些不变量也与系统的对称性和守恒定律相关。我们聚焦于式（12）中的 $K = 1$，由此得到

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \sum_{\mu=1}^{M}\langle\hat{A},\hat{\Lambda}_\mu\rangle^2}\sqrt{I_Q}. \tag{27}$$

这个不等式也可以如下理解。由于 $\langle\Lambda_\mu, L\rangle = 0$，对于任意 $f_\mu \in \mathbb{R}$，我们有 $d\langle A\rangle/dt = \langle A - \sum_\mu f_\mu\Lambda_\mu, L\rangle$。利用柯西-施瓦茨不等式，并对 $\left\langle A - \sum_\mu f_\mu\hat{\Lambda}_\mu, \hat{A} - \sum_\mu f_\mu\hat{\Lambda}_\mu\right\rangle$ 的值进行优化，可得 $f_\mu = \langle\hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu\rangle$，进而得到上述不等式。从几何上看，从 $\hat{A}$ 中减去 $\sum_\mu\langle\hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu$，意味着我们只需关注投影到与 $\{\Lambda_\nu\}$ 正交的算符空间 $\hat{}$ 上的可观测量。实际上，我们有

$$\left\langle \hat{A} - \sum_\mu \langle\hat{A},\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{\Lambda}_\nu \right\rangle = 0 \tag{28}$$

对于任意 ν（$M = 1$的情况见图 2）。通过对 A作此正交分解，我们可以在已知 $\{\Lambda_\nu\}$ 的情况下优化柯西-施瓦茨不等式，从而收紧速度极限。

有趣的是，式中因子 $-\sum_{\mu=1}^{M}\langle\hat{A},\hat{\Lambda}_\mu\rangle^2$ 也出现在 Mazur 界 [2] 中，前提是我们考虑随时间变化且在所有时间都守恒的 Λ_μ。Mazur 界是对平衡态附近时间自关联函数长时间平均值的界。我们的

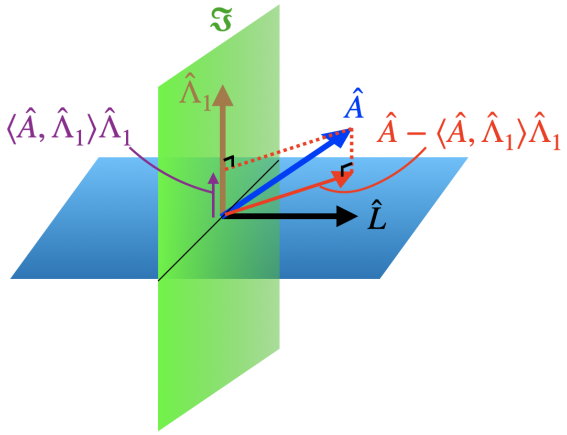

图 2. 对式 (27) 作几何直观说明的示意图。算符以向量表示，其内积描述对称关联$\langle\hat{X}, \hat{Y}\rangle = \langle\hat{X}\hat{Y}\rangle + \langle\hat{Y}\hat{X}\rangle$。我们希望利用 $\{\hat{\Lambda}_\mu\}_{\mu=1}^M$ 的信息，优化 $\langle\hat{A}, \hat{L}\rangle$ 的上界（为简单起见，此处展示 $M = 1$）。这可通过将 A 正交分解为投影到 $\{\Lambda_\mu\}$ 上的可观测量、$\sum_\mu\langle\hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu$，以及其余部分 $\hat{A} - \sum_\mu\langle\hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu$ 来实现。注意，绿色表面表示所有可能的不变可观测量 $\mathfrak{I} := \{\hat{X} | \langle\hat{X}, \hat{L}\rangle = 0\}$ 的集合，其中 $\{\hat{\Lambda}_\mu\}_{\mu=1}^M \subseteq \mathfrak{I}$ 成立。

速度极限 (27)（或者更一般地，式 (12) 中的速度极限）表明，可观测量与守恒量的重叠甚至会影响远离平衡态时的瞬态动力学。不过请注意，我们的界中的 Λ_μ 未必在所有时间都是守恒量。相反，只要 Λ_μ（它本身可能依赖于 t）在每个 t 都满足式 (9) 即可。我们还注意到，最近在不同背景下也发展出了类似的正交分解，例如，在量子计量学中改进某些约束条件下参数估计的界 [79]，以及评估局域守恒量对本征态热化假设的影响 [80]。

当我们增大 M时，不等式（27）会变得更好。相应地，对于较大的 M，满足等号条件的可观测量集合也会变大。事实上，考虑一组 $\mathcal{A}_M^{\rm eq}$ 满足（27）在固定时间 M下的等号

在固定时间 t 下满足条件 (27)。于是，我们有

$$\mathcal{A}^{\mathrm{eq}}_{M+M'} \supseteq \left\{ \hat{A} + \sum_{\mu=M+1}^{M'} f_\mu \hat{\Lambda}_\mu | \hat{A} \in \mathcal{A}_M, f_\mu \in \mathbb{R} \right\} \supset \mathcal{A}^{\mathrm{eq}}_M, \tag{29}$$

其中 $M' \geq 1$。如下例所示，式 (27) 的等号条件对单个自旋 1/2 系统普遍成立。

我们讨论不变量可观测量 $\{\Lambda_\mu\}$ 的时间依赖性。一般而言，不变量可观测量的选取方式是使其对于每个 t 都经过正交归一化，即 $\langle \Lambda_\mu, \Lambda_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$。然而，在许多重要情形下，$\{\Lambda_\mu\}$ 与时间无关。作为其中一类相关情形，我们考虑（可能随时间变化的）幺正量子动力学，其哈密顿量 $H(t')$ 与不随时间变化的算符 $P_1, P_2, \cdots, P_M$ 对易（详见以下各节），适用于时间 $t' \in [0,t]$。正交归一化之后，每个 Λ_μ 都可表示为 $P_1, P_2, \cdots, P_M$ 的线性组合，其系数由时间 t 的对称化关联表示，

$$\langle \hat{P}_\mu, \hat{P}_{\mu'} \rangle (t) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[\hat{\rho}(t)(\hat{P}_\mu \hat{P}_{\mu'} + \hat{P}_{\mu'} \hat{P}_\mu)]. \tag{30}$$

然而，由于 $\hat{\rho}(t) = U(t)\hat{\rho}(0)U(t)^\dagger$ 且 $[\hat{P}_\mu, U(t)] = 0$ 对所有 μ 均成立，显然式 (30) 不依赖于时间。事实上，在这一重要的动力学类别中，正交归一化因子完全由初态信息决定。

在更一般的情况下，不变量可观测量可能依赖于时间。然而，即使如此，我们的不等式从实验角度来看仍然具有优势。为此，我们强调，从 $\{P_\mu\}$ 获取不变量可观测量只需要 $\{P_\mu\}$ 的期望值和关联，而不需要密度矩阵的完整信息。与完整密度矩阵相比，这些期望值在实验中更容易评估；获取完整密度矩阵通常需要进行完整的量子层析。因此，尽管在某些情况下我们需要在所有时刻评估不变量可观测量的归一化常数，但无需获知密度矩阵，这在实验上更有利。

B. 幺正动力学的示例

1. *Single spin system*

首先，考虑一个在哈密顿量 $H = g\hat{\sigma}^x$ 作用下经历幺正时间演化的单自旋系统。我们通常可以将初始量子态参数化为 $|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi)$，其中 $|\uparrow\rangle / |\downarrow\rangle$ 是 $\hat{\sigma}^z$ 的本征态，对应本征值 $+1/-1$。在这种情况下，我们有 $\langle \hat{\sigma}^x(t) \rangle = \sin\theta\cos\phi$, $\langle \hat{\sigma}^y(t) \rangle = \cos 2gt \sin\theta \sin\phi - \sin 2gt \cos\theta$, $\langle \hat{\sigma}^z(t) \rangle = \sin 2gt \sin\theta \sin\phi + \cos 2gt \cos\theta$,

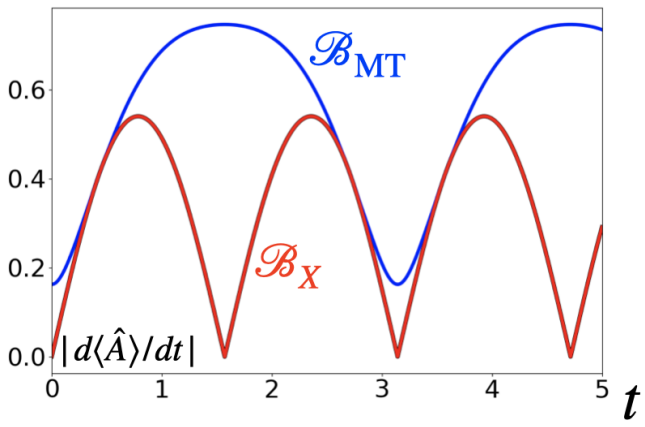

图3. $\hat{A} = \hat{\sigma}^x + \hat{\sigma}^z$ （黑色）期望值的速度随时间的变化，以及单自旋系统 $\hat{H} = g\hat{\sigma}^x$ 的速度极限。图中展示了式（17）中的 Mandelstam-Tamm界 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ （蓝色），以及基于 $\hat{\sigma}^x$-守恒 $\mathcal{B}_X$ （红色）得到的界。我们的界满足等式条件 $\mathcal{B}_X = \left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right|$，而 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ 不满足。我们采用 $g = 1.0$ 和初态 $|\psi(0)\rangle = \cos 0.5\,|\uparrow\rangle + \sin 0.5\,|\downarrow\rangle$，其中 $|\uparrow\rangle / |\downarrow\rangle$ 是 $\hat{\sigma}^z$ 的本征态，对应本征值为 $+1/-1$。

以及 $\Delta H = g\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi}$。于是，对于任意较晚的时间，只要满足 $\theta = 0,\ \pi$，$\hat{A} = c_I\hat{\mathbb{I}} + c_y\hat{\sigma}^y + c_z\hat{\sigma}^z$ (c_I, c_y, $c_z \in \mathbb{R}$)就满足先前速度极限（17）的等号条件（$M = 1$ 且 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$）。然而，即使在 $\theta = 0,\ \pi$ 的情况下，对于更一般的可观测量 $A = c_I\mathbb{I} + c_x\hat{\sigma}^x + c_y\hat{\sigma}^y + c_z\hat{\sigma}^z$，等式（17）的等号条件也不成立。

相比之下，由于 $\hat{\sigma}^x$ 是守恒量，我们可以使用上述一般方法得到一个更紧的界。事实上，我们的具有 $M = 2$、$\Lambda_1 = \mathbb{I}$，以及 $\hat{\Lambda}_2 = \frac{\hat{\sigma}^x - \langle \hat{\sigma}^x \rangle}{\sqrt{\langle (\hat{\sigma}^x - \langle \hat{\sigma}^x \rangle)^2 \rangle}}$ 的不等式 (27) 仍满足等号条件，与式 (29) 一致。值得注意的是，在这种情况下，对于任意 θ 和 ϕ，等号条件均成立。

图 3 展示了一个例子：上文讨论的我们的界 $\mathcal{B}_X = 2\Delta H \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \sum_{\mu=1}^{2} \langle \hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu \rangle^2}$ 满足等号条件，而式 (17) 中的 Mandelstam-Tamm界 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ 则不满足。

更一般地，对于单个自旋 1/2 系统（或两能级系统），我们得到以下显著结论：对于任意 哈密顿量、可观测量和初始纯态，我们的速度极限 (27)，其中 $M = 2$, $\Lambda_1 = \mathbb{I}$, 以及 $\Lambda_2 = \frac{H - \langle H \rangle}{\sqrt{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}}$（对应于后文给出的（33）），均满足等号条件（证明见附录 C）。因此，与此前针对可观测量 [11, 52] 的量子速度极限相比，我们的不等式在更广泛的情形下满足等号条件。鉴于等号条件能否达到是速度极限研究中的一个关键议题 [18]，我们认为，我们的不等式在评估可观测量的变化速度方面带来了定性改进（更不必说定量改进）。

2. Hamiltonian and symmetry as invariant observables

在下文中，我们将展示单自旋系统之外更复杂的例子。作为方程（27）的主要例子之一，我们来考虑一个由哈密顿量 $H(t)$ 驱动的一般系统，即 $\mathcal{L}[\hat{\rho}(t)] = -i[H(t), \hat{\rho}(t)]$。在这种情况下，我们可以找到一些不变算子，例如 $\hat{H}(t)$ 的幂或 $\hat{\rho}(t)$、对 $\hat{H}(t)$ 或 $\hat{\rho}(t)$ 的本征态的投影，以及与 $H(t)$ 对易的非平凡对称性。

我们首先考虑移位哈密顿量的幂，$\hat{\mathbb{I}}, \delta\hat{H}, \delta\hat{H}^2, \cdots$，其中 $\delta\hat{H} := \hat{H} - \langle\hat{H}\rangle$（$t$ 为简洁起见省略）。根据格拉姆-施密特正交归一化，例如可得 $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\mathbb{I}}$，$\hat{\Lambda}_2 = \delta\hat{H}/\sqrt{m_2}$，以及

$$\hat{\Lambda}_3 = \frac{\delta\hat{H}^2 - \frac{m_3}{m_2}\delta\hat{H} - m_2}{\sqrt{m_4 - \frac{m_3^2}{m_2} - m_2^2}}, \tag{31}$$

其中 $m_z = \langle\delta\hat{H}^z\rangle$ 是哈密顿量的第 z 阶中心矩。应用式 (27)，我们得到 $M = 1$的常规速度极限 $|d\langle\hat{A}\rangle/dt| \le \Delta A\sqrt{I_Q}$，正如上一节所见。此外，令 $M = 2$，可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| &\le \sqrt{\Delta A^2 - \frac{\mathrm{cov}(\hat{A},\hat{H})^2}{\Delta H^2}}\sqrt{I_Q} \\ &= \Delta A\sqrt{I_Q}\sqrt{1-\phi_{AH}^2},\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $\mathrm{cov}(\hat{X},\hat{Y}) = \langle\hat{X},\hat{Y}\rangle - \langle\hat{X}\rangle\langle\hat{Y}\rangle$ 是对称化协方差，$\phi_{XY} = \mathrm{cov}(\hat{X},\hat{Y})/\Delta X\Delta Y$ 是皮尔逊相关系数的量子版本，并且我们使用了$m_2 = \Delta H^2$。不等式 (32) 表明，关于可观测量与哈密顿量之间关联的知识能够改进速度极限。我们强调，对于任意 幺正量子动力学，该不等式普遍成立，无需额外假设。

当 $\hat{\rho}$ 为纯态时，不等式（32）变为

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \mathcal{B}_H := 2\Delta A\Delta H\sqrt{1-\phi_{AH}^2}. \tag{33}$$

请注意，这也可以直接由薛定谔不确定性关系 [81]，得出，该关系指出$\left|\langle[\hat{X},\hat{Y}]\rangle/2i\right|^2 + |\mathrm{cov}(\hat{X},\hat{Y})|^2 \le \Delta X^2\Delta Y^2$，适用于两个厄米算符 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$。不过，我们强调，对于一般的混合态，$I_Q \le 4\Delta H^2$，因此式（32）通常比这一不确定性关系更一般。此外，即使对于纯态，纳入更高阶的不变量可观测量 $\hat{\Lambda}_3, \cdots$ 也可以得到更紧的不等式。

我们的不等式还适用于另一种情况：系统具有某种额外的对称性 $\hat{P}$ 或守恒定律，该对称性或守恒定律与哈密顿量 $\hat{H}$ $[H,P] = 0$ 对易。如果我们选择 $M = 2$，使得 $\hat{\Lambda}_1 = \mathbb{I}$ 并且 $\hat{\Lambda}_2 = \frac{\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle}{\Delta P}$，we obtain

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \Delta A\sqrt{I_Q}\sqrt{1-\phi_{AP}^2}, \tag{34}$$

这就变成了

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \mathcal{B}_P := 2\Delta A\Delta H\sqrt{1-\phi_{AP}^2} \tag{35}$$

对于纯态。

为了确认式（33）和式（35）中的不等式的优势，我们考虑定义在 $L = 2$ 个晶格位点上的自旋 1/2 系统，其哈密顿量为

$$\hat{H} = J\hat{\sigma}_1^z\hat{\sigma}_2^z + J'(\hat{\sigma}_1^x\hat{\sigma}_2^x + \hat{\sigma}_1^y\hat{\sigma}_2^y) + g(\hat{\sigma}_1^x + \hat{\sigma}_2^x) + h(\hat{\sigma}_1^z + \hat{\sigma}_2^z). \tag{36}$$

该哈密顿量具有如下置换对称性

$$\hat{P} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=x,y,z}\hat{\sigma}_1^\alpha\hat{\sigma}_2^\alpha + \frac{1}{2}\hat{\mathbb{I}}. \tag{37}$$

图 4 展示了 $A = \hat{\sigma}_1^z$ 的速度及其速度极限。假设初始量子态为纯态，我们将速度与式（17）中的 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$、式（33）中的 $\mathcal{B}_H$ 以及式（35）中的 $\mathcal{B}_P$ 进行比较。可以看出，$\mathcal{B}_H$ 和 $\mathcal{B}_P$ 优于 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$，而 $\mathcal{B}_H$ 与 $\mathcal{B}_P$ 之间不存在层级关系。

请注意，尽管界 $\mathcal{B}_P$ 涉及 A 之间的关联，但在实验中很容易测得。

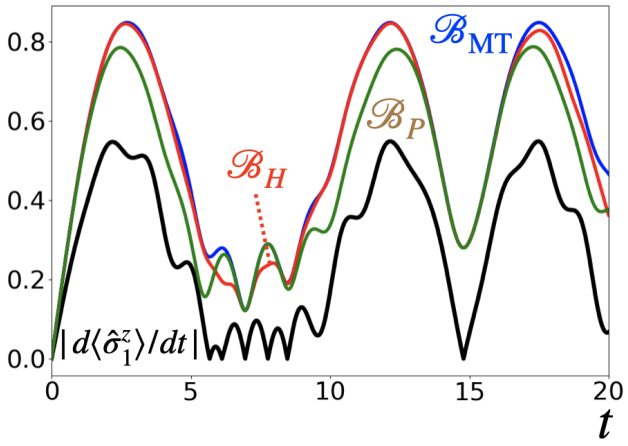

图 4. 式（36）中 $\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle$ 的速度（黑色）及自旋系统速度极限随时间的变化。图中展示了 Mandelstam-Tamm 界 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$（蓝色）、基于哈密顿量守恒的界 $\mathcal{B}_H$（红色），以及基于置换守恒的界 $\mathcal{B}_P$（绿色）。我们的界 $\mathcal{B}_H$ 和 $\mathcal{B}_P$ 比 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ 给出了更好的界。我们取 $J = 1$，$J' = 0$，$g = 0.3$、$h = 1$，以及初态 $|\uparrow\downarrow\rangle$，其中 $|\uparrow\rangle/|\downarrow\rangle$ 是 $\hat{\sigma}^z$ 的本征态，其本征值为 $+1/-1$。

ˆand P。事实上，由于显式计算得出的是

$$\mathcal{B}_P = 2\Delta H\sqrt{1-\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle^2 - \frac{(\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle + \langle\hat{\sigma}_2^z\rangle - \langle\hat{\sigma}_1^z\rangle\langle\hat{P}\rangle)^2}{\Delta P}}, \tag{38}$$

该界仅通过测量时间 t 的单点期望值和守恒量 ΔH、$\langle$ ˆ$P\rangle$及 ΔP 得出，这些量均由初态获得。当我们无法直接测量 $d\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle/dt$ 时，例如由于时间分辨率不足，或因ˆσ_1^z 上存在时间噪声而无法求时间导数时，这一点对实验尤为重要且有利。

即使在直接计算可观测量速度比计算关联更容易的情况下，我们的不等式 (33) 和 (35) 仍有其优势。事实上，我们的不等式反过来提供了一种方法，可以根据可观测量的速度来评估难以直接测量的关联。更具体地说，当我们能够测量 $|d\langle A\rangle/dt|$、ΔA 和守恒量时，便可得到协方差的上界，即:

$$\begin{aligned}|\mathrm{cov}(\hat{A},\hat{H})| &\le \sqrt{\Delta A^2\Delta H^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right)^2},\\ |\mathrm{cov}(\hat{A},\hat{P})| &\le \Delta P\sqrt{\Delta A^2 - \frac{1}{4\Delta H^2}\left(\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right)^2},\end{aligned} \tag{39}$$

通常可能难以直接测量。请注意，这些不等式严格优于通常的柯西–施瓦茨不等式，例如，$|\mathrm{cov}(\hat{A},\hat{P})| \le \Delta P\Delta A$。

3. *Tighter bounds due to the purity conservation*

作为式（27）的又一个有趣例子，我们考虑幺正动力学下密度矩阵ˆ$\rho,\hat{\rho}^2,\hat{\rho}^3,\cdots$的任意幂的守恒定律。这种纯度守恒也被视为对ˆ$\rho$的基的投影的守恒。因此，我们可以取

$$\hat{\Lambda}_\mu = \frac{|\rho_\mu\rangle\langle\rho_\mu|}{\sqrt{\rho_\mu}} \tag{40}$$

对于一般的混合态ˆρ，其对角化形式为ˆ$\rho = \sum_\mu \rho_\mu |\rho_\mu\rangle\langle\rho_\mu|$。在这种情况下，式（27）给出

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \sqrt{\sum_\mu \rho_\mu \Delta A_\mu^2}\sqrt{I_Q} = \sqrt{\sum_{\mu\neq\nu}\rho_\mu|\langle\rho_\mu|\hat{A}|\rho_\nu\rangle|^2}\sqrt{I_Q}, \tag{41}$$

其中

$$\Delta A_\mu^2 = \langle\rho_\mu|\hat{A}^2|\rho_\mu\rangle - \langle\rho_\mu|\hat{A}|\rho_\mu\rangle^2 \tag{42}$$

是每个基 $|\rho_\mu\rangle$的涨落。请注意，此界比传统的界$|d\langle$ ˆ$A\rangle/dt| \le \Delta A\sqrt{I_Q}$更紧，因为 $\left(\sum_\mu \rho_\mu\langle\rho_\mu|$ ˆ$A|\rho_\mu\rangle\right)^2 \le \sum_\mu \rho_\mu\langle\rho_\mu|$ ˆ$A|\rho_\mu\rangle^2$，因此

$$\sum_\mu \rho_\mu \Delta A_\mu^2 \le \Delta A^2. \tag{43}$$

我们强调，对于任何幺正量子动力学，该不等式都普遍成立，无需作进一步假设，与式（32）一样。

作为一个能体现我们所得界的优势的简单例子，考虑这样一个量子态：其对角基ˆ与 $A = \sum_\mu a_\mu|a_\mu\rangle\langle a_\mu|$的对角基相同，即ˆ $\hat{\rho} = \sum_\mu \rho_\mu|a_\mu\rangle\langle a_\mu|$。于是，我们有 $|d\langle A\rangle/dt| =$ ˆ$|\mathbf{Tr}[[\hat{\rho},A]H]| = 0$。在这种情况下，式（41）的右侧如预期般为零（即满足等号条件）。相比之下，先前的界 $\Delta A\sqrt{I_Q}$通常不为零。

最后，我们指出，其他不变量可观测量的选择也是可能的。在附录 D 中，我们展示了公式（27）的另外几种应用。

IV. 非对称上下界

不等式（12）给出了关于多个可观测量的一般关系。作为一个应用，我们取 K =2 个可观测量。在这种情况下，我们明确得到

$$\frac{D_{22}\left|\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt}\right|^2 - 2D_{12}\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt}\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt} + D_{11}\left|\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt}\right|^2}{D_{11}D_{22}-|D_{12}|^2} \le I_Q, \tag{44}$$

其中，右侧在幺正演化下被 $4\Delta H^2$ 所界定。注意，当我们取 $M=1$ 和ˆ $\Lambda_1 =$ ˆ$\mathbb{I}$ 时，有 $D=C$，而公式（44）给出了文献 [40] 中结果的量子推广。

通过对该不等式进行直接计算，我们得到速度的非平凡非对称下界和上界，

$$\begin{aligned}\chi V_2 - \sqrt{(1-\chi^2)(I_Q-V_2^2)} \le V_1 \\ \le \chi V_2 + \sqrt{(1-\chi^2)(I_Q-V_2^2)}.\end{aligned} \tag{45}$$

这里，我们引入了归一化速度

$$V_k := \frac{1}{\sqrt{D_{kk}}}\frac{d\langle\hat{A}_k\rangle}{dt} \tag{46}$$

以及广义皮尔逊相关系数

$$\chi := \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \le 1, \tag{47}$$

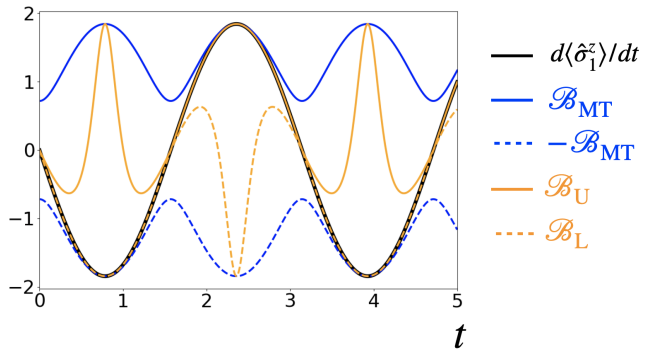

图 5. 速度 $d\langle\hat{A}_1\rangle/dt = d\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle/dt$的时间演化，以及其下界（虚线）和上界（实线），对应于哈密顿量为 $H = g\sigma^x$ 的单自旋动力学。我们展示了方程（）中的（蓝色）和（橙色）$\pm\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ $\mathcal{B}_{\mathrm{L/U}}$ 45 ^ 的单自旋动力学。我们展示了方程（）中的（蓝色）和（橙色）^，其中 $A_2 = \hat{\sigma}^y$, $V_k = (d\langle A_k\rangle/dt)/\Delta A_k$, 以及 $\chi = \phi_{A_1A_2}$ =cov(^A_1, ^A_2)/$\Delta A_1 \Delta A_2$。界 $\mathcal{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathrm{U}}$ 可比 $\pm\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$给出更好的界。我们采用 $g = 1.0$ 和初态 $|\psi(0)\rangle = \cos 0.2\,|\uparrow\rangle + \sin 0.2\,|\downarrow\rangle$，其中 $|\uparrow\rangle/|\downarrow\rangle$ 是^σ^z 对应本征值 $+1/-1$的本征态。

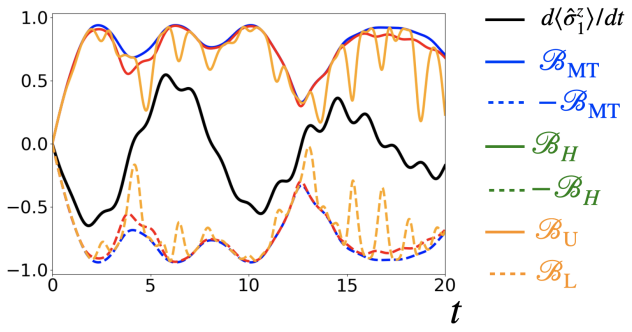

图 6. 哈密顿量由式 (36) 给出的动力学中，速度 $d\langle\hat{A}_1\rangle/dt = d\langle$^$\sigma_1^z\rangle/dt$ 随时间的演化，以及其下界（虚线）和上界（实线）。我们展示了式 (45) 中的 $\pm\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ （蓝色）、$\pm\mathcal{B}_H$ （红色）和 $\mathcal{B}_{\mathrm{L/U}}$ （橙色），其中 $A_2 = \hat{\sigma}_1^x$、$V_k = (d\langle A_k\rangle/dt)/\Delta A_k$ 和 $\chi = \phi_{A_1A_2}$ =cov(^A_1, ^A_2)/$\Delta A_1 \Delta A_2$。界 $\mathcal{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathrm{U}}$ 可比其他界提供更好的界。我们取 $J = 1.0$ $J' = ,,,$ 以 0.1 $g = 0.3$ $h = 1.0$ $|\uparrow\downarrow\rangle$ $|\uparrow\rangle/|\downarrow\rangle$ 及初态，其中 是$\hat{\sigma}^z$ 的本征态，其本征值为 $+1/-1$。

对于 $D = C$，该式化简为 $\phi_{A_1A_2}$。请注意，由于 ^A_2 的单观测量速度极限，$V_2^2 \le I_Q$ 得以保证。我们还注意到，对于幺正演化，$|V_1 - \chi V_2|$ 的上界为$\sqrt{(1-\chi^2)(4\Delta H^2 - V_2^2)}$（$\le 2\Delta H\sqrt{1-\chi^2}$）。

不等式（44）在给定关联 χ 和另一可观测量 A_2的速度 V_2 的情况下，为 A_1 （即 V_1）的速度提供了非平凡的上界和下界。以往文献中很少得到这种速度的不对称界。特别是，当$\chi V_2 - \sqrt{(1-\chi^2)(I_Q - V_2^2)} > 0$时，我们的不等式给出了速度 $|V_1|$的非平凡下界，而许多以往的速度极限只给出上界。

此外，当^ A_2 的单观测量速度极限变得更紧时（即 $|V_2^2 - I_Q|$ 较小），（44）也会变紧，并且 V_1 会接近 χV_2。有趣的是，^如果我们知道可观测量 A_2 满足单观测量速度极限的等号条件，即 $V_2 = \sqrt{I_Q}$ A_1 ，那么另一个任意可观测量^的速度就能被精确确定为

$$\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt} = \frac{D_{12}}{D_{22}}\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt}. \tag{48}$$

^ ^在以下示例中，我们取 $M = 1$ 和 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$，由此得到 $V_k = (d\langle$^$A_k\rangle/dt)/\Delta A_k$ 以及 $\chi = \phi_{A_1A_2}$ =^ ^cov(A_1, A_2) $/\Delta A_1 \Delta A_2$。首先，以第 III B 1 节中的单自旋系统为例。为简便起见，这里取 $A_2 = $^$\sigma^y$。在这种情况下，当 $\theta = 0$ 或 π时，^式（48）成立。例如，若取 $A_1 = $^$\sigma^z$，式（48）可化为 $\frac{d\langle\hat{\sigma}^z\rangle}{dt} = \frac{-\langle\hat{\sigma}^z\rangle\langle\sigma^y\rangle\, d\langle\hat{\sigma}^y\rangle/dt}{1-\langle\sigma^y\rangle^2}$，这确实成立。即使 θ 并非恰好等于 $\theta = 0$ 或 π，当 $I_Q - V_2^2$接近这些值时，也会变得很小——当 θ 接近这些值时会变小，而不等式（45）则能为其他可观测量提供良好的估计。图5展示了这一事实：由式（45）给出的 $\frac{d\langle\hat{\sigma}^z\rangle}{dt}$ 的上界和下界（分别为$\mathcal{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathrm{U}}$）比针对^σ^z的标准单观测量速度极限更紧，即 $-2\Delta H\Delta\sigma^z \le \frac{d\langle\hat{\sigma}^z\rangle}{dt} \le 2\Delta H\Delta\sigma^z$。

为了在更复杂的设置中展示我们的界，接下来考虑由式 (36) 给出哈密顿量的耦合双自旋系统。作为可观测量，我们选择 $A_1 = $^$\sigma_1^z$ 和 $A_2 = $^$\sigma_1^x$。图 6 展示了式 (45) 中标示的 $d\langle$^$A_1\rangle/dt$ 的下界和上界 $\mathcal{B}_{\mathrm{L}}$ 与 $\mathcal{B}_{\mathrm{U}}$，即 $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \le d\langle A_1\rangle/dt \le \mathcal{B}_{\mathrm{U}}$、曼德尔施塔姆–塔姆界 $-\mathcal{B}_{\mathrm{MT}} \le d\langle A_1\rangle/dt \le \mathcal{B}_{\mathrm{MT}} = 2\Delta A\Delta H$，以及基于式 (33) 中哈密顿量守恒的界 $-\mathcal{B}_H \le d\langle$^$A_1\rangle/dt \le \mathcal{B}_H = 2\Delta A\Delta H\sqrt{1-\phi_{AH}^2}$。界 $\mathcal{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathrm{U}}$ 可能优于其他界，但 $\mathcal{B}_{\mathrm{L}}/\mathcal{B}_{\mathrm{U}}$ 和 $\mathcal{B}_H$ 之间不存在绝对的优劣层级。

最后，我们指出，如果在实验中后两者更容易直接观测，那么（44）也可用于根据涨落和可观测量的速度来评估（广义）关联。为此，我们注意到，（44）可以用 χ 表示为

$$\frac{1}{I_Q}\left(V_1V_2 - \sqrt{(I_Q - V_1^2)(I_Q - V_2^2)}\right) \le \chi \le \frac{1}{I_Q}\left(V_1V_2 + \sqrt{(I_Q - V_1^2)(I_Q - V_2^2)}\right). \tag{49}$$

ˆ ˆ 对于孤立系统以及 $M=1$ 与 $\Lambda_1=\mathbb{I}$，我们有

$$\frac{v_1v_2}{4\Delta H^2}-\sqrt{\left[1-\left(\frac{v_1}{2\Delta H}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{v_2}{2\Delta H}\right)^2\right]} \leq \phi_{A_1A_2}\leq \frac{v_1v_2}{4\Delta H^2}+\sqrt{\left[1-\left(\frac{v_1}{2\Delta H}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{v_2}{2\Delta H}\right)^2\right]}, \tag{50}$$

其中 $v_k=\frac{1}{\Delta A_k}\frac{d\langle A_k\rangle}{dt}$。这可能比通过柯西–施瓦茨不等式得到的朴素界 $|\phi_{A_1A_2}|\leq 1$ 更紧。

V. 不相关可观测量的权衡关系

A. 可加性原理

接下来，我们将展示不相关可观测量的速度之间一种新的非平衡权衡关系。我们假设，我们感兴趣的 K 可观测量彼此不相关，其广义意义上的定义为

$$D_{kl}=0\,(k\neq l). \tag{51}$$

然后，利用式（12），我们得到一个比单个可观测量情形更强的不等式:

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{kk}}\left|\frac{d\langle\hat{A}_k\rangle}{dt}\right|^2=\sum_{k=1}^{K}V_k^2\leq I_Q. \tag{52}$$

也就是说，我们得到一个简单的可加性原理：归一化速度的平方和成为量子费舍尔信息的下界。

若式 (52) 在我们关注的有限时间区间$t\in[0,T]$内成立，我们可以通过应用式 (24) 来讨论位移 $\vec{\mathfrak{B}}$ 的可加性原理。事实上，我们得到

$$\sum_{k}\frac{|\langle\hat{A}_k(T)\rangle-\langle\hat{A}_k(0)\rangle|^2}{\overline{D_{kk}I_Q}}\leq T^2. \tag{53}$$

作为式 (52) 的第一个应用，若我们假设 $M=1$ˆ ˆ和 $\Lambda_1=\mathbb{I}$，则有

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\Delta A_k^2}\left|\frac{d\langle\hat{A}_k\rangle}{dt}\right|^2\leq I_Q, \tag{54}$$

鉴于对于 $k\neq l$，$C_{kl}=\mathrm{cov}(\hat{}A_k,\hat{}A_l)=0$。将 A_k 的特征速度定义为 $v_k=|V_k|=|d\langle\hat{}A_k\rangle/dt|/\Delta A_k$ [41]，这可简写为 $\sum_k v_k^2\leq I_Q$，它被视为参考文献 [82] 所得结果的量子扩展。

B. 反对易可观测量的可加性

上述可加性原理所必需的不相关结构，自然会在某些情形下出现。作为一个值得注意的情形，设我们选择 $M=0$ ˆ ˆ，考察满足 $\langle A_k,A_l\rangle=0$ for $k\neq l$ 的可观测量。当可观测量反对易，即 $\{A_k,A_l\}=0$ for $k\neq l$ 时，对于任意量子态 ˆρ，这一点都成立。在这种情况下，我们得到权衡不等式

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\langle\hat{A}_k^2\rangle}\left|\frac{d\langle\hat{A}_k\rangle}{dt}\right|^2\leq I_Q \tag{55}$$

对于任意 量子态和动力学。我们还得到其有限时间版本

$$\sum_{k}\frac{|\langle\hat{A}_k(T)\rangle-\langle\hat{A}_k(0)\rangle|^2}{\overline{\langle\hat{A}_k^2\rangle I_Q}}\leq T^2, \tag{56}$$

因为反对易条件在任意时刻都成立。

这些非平衡权衡关系表明，两个（或两个以上）反对易可观测量不可能同时具有较大的速度，这令人联想到标准的不确定性关系：两个不对易可观测量不可能同时具有较小的方差。因此，我们的不等式为由非平凡对易性 [83]导致的非平衡动力学提供了一条基本且有用的原理。请注意，将此结果应用于幺正量子动力学时，我们得到

$$\sum_{k}\frac{\langle i[\hat{X}_k,\hat{Y}]\rangle^2}{\langle\hat{X}_k^2\rangle}\leq 4\Delta Y^2, \tag{57}$$

ˆ 对于算符 Y 以及满足反对易关系 $\{\hat{}X_k,\hat{}X_l\}=2\delta_{kl}\hat{}X_k^2$ 的任意一组算符。

1. *Majorana fermions*

反对易条件与量子粒子统计有着深刻的联系。例如，我们先考虑一个由多个马约拉纳费米子组成的系统，这些粒子以 k 标记。此类马约拉纳费米子算符的集合 $\{\hat{}\gamma_k\}$ 满足 $\hat{}\gamma_k^\dagger=\hat{}\gamma_k$，并且 $\{\hat{}\gamma_k,\hat{}\gamma_l\}=2\delta_{kl}$。于是，我们可以直接得到

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\frac{d\langle\hat{\gamma}_k\rangle}{dt}\right|^2\leq I_Q \tag{58}$$

and

$$\sum_{k=1}^{K}|\langle\hat{\gamma}_k(T)\rangle-\langle\hat{\gamma}_k(0)\rangle|^2\leq T^2\overline{I_Q}, \tag{59}$$

对于马约拉纳费米子的任意动力学。如果我们考虑含时幺正动力学，例如 Sachdev-Ye-Kitaev 模型所描述的动力学 [84],

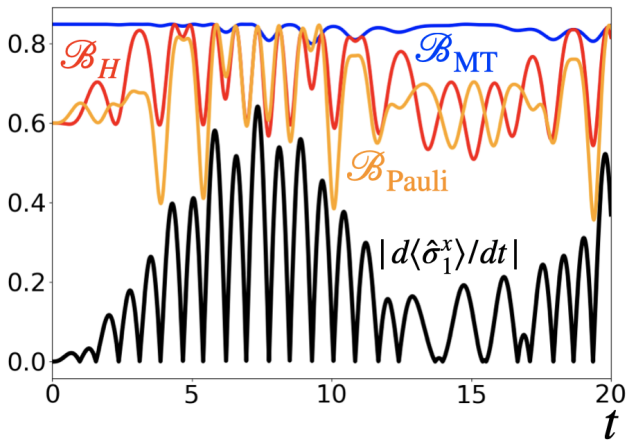

图7. 式（36）中双自旋系统的 $\langle\hat{\sigma}_1^x\rangle$（黑色）的速度及速度极限随时间的变化。我们展示了 $\mathcal{B}_{\rm MT}$（蓝色）、 $\mathcal{B}_H$（红色），以及基于反对易泡利矩阵 $\mathcal{B}_{\rm Pauli}$（橙色）的界。我们的界 $\mathcal{B}_H$和 $\mathcal{B}_{\rm Pauli}$可以比 $\mathcal{B}_{\rm MT}$提供更好的界。我们使用 $J=1$， $J'=0$， $g=0.3$、$h=1$以及初态 $|\uparrow\downarrow\rangle$，其中 $|\uparrow\rangle/|\downarrow\rangle$ 是 $\hat{\sigma}^z$ 的本征态，其本征值为 $+1/-1$。

我们进一步得到

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{K}|\langle\hat{\gamma}_k(T)\rangle-\langle\hat{\gamma}_k(0)\rangle|^2}\le T\sqrt{I_Q}\le 2T\Delta H. \quad (60)$$

2. *Anti-commuting Pauli strings*

作为另一个值得注意的例子，接下来我们考虑任意的 $\hat{}$ 自旋 1/2 系统和泡利串 $\{\Sigma_q\}$，其中 $\Sigma_q=\prod_l\hat{}\sigma_l^{\alpha_l}$，且 $\alpha_l=0,\ x,\ y,\ z$（$\hat{}\sigma_l^0=\hat{}\mathbb{I}_l$）。取一组 $\mathcal{P}_A(|\mathcal{P}_A|=K)$ 相互反对易的泡利串，我们得到

$$\sum_{\hat{\Sigma}_q\in\mathcal{P}_A}\left|\frac{d\langle\hat{\Sigma}_q\rangle}{dt}\right|^2\le I_Q \quad (61)$$

对于任意动力学。

作为不等式（61）的第一个应用，我们考虑单个自旋 1/2 系统（或两能级系统）中的幺正动力学。值得注意的是，在这种情况下，对于任意哈密顿量、可观测量和初始纯态，采用 $\hat{}\sigma^x$，$\hat{}\sigma^y$ 和 $\hat{}\sigma^z$ 的速度极限（61）满足等号条件。也就是说，

$$\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}^x\rangle}{dt}\right|^2+\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}^y\rangle}{dt}\right|^2+\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}^z\rangle}{dt}\right|^2=4\Delta H^2=I_Q, \quad (62)$$

（参见附录E）始终成立。

为了在更复杂的设置中展示我们的不等式，接下来我们考虑双自旋系统中纯态的幺正动力学，其哈密顿量由式（36）给出。我们特别关注 $\langle\hat{}\sigma_1^x\rangle$ 这一可观测量，并将式（17）中的 Mandelstam-Tamm界 $\mathcal{B}_{\rm MT}$、式（33）中的 $\mathcal{B}_H$ 以及由式（61）得到的新界与 $\mathcal{P}_A=\{\hat{}\sigma_1^x,\ \hat{}\sigma_1^y,\ \hat{}\sigma_1^z\}$ 进行比较，

$$\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}_1^x\rangle}{dt}\right|\le\mathcal{B}_{\rm Pauli}=\sqrt{4\Delta H^2-\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}_1^y\rangle}{dt}\right|^2-\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle}{dt}\right|^2} \quad (63)$$

图 7 显示， $\mathcal{B}_{\rm Pauli}$ 可以提供比 $\mathcal{B}_{\rm MT}$ 和 $\mathcal{B}_H$更好的界。

最后，我们注意到，与公式（59）和（60）一样，我们还有（61）的有限时间版本，即

$$\sum_{\hat{\Sigma}_q\in\mathcal{P}_A}|\langle\hat{\Sigma}_q(T)\rangle-\langle\hat{\Sigma}_q(0)\rangle|^2\le T^2\overline{I_Q} \quad (64)$$

对于一般动力学，以及

$$\sqrt{\sum_{\hat{\Sigma}_q\in\mathcal{P}_A}^{K}|\langle\hat{\Sigma}_q(T)\rangle-\langle\hat{\Sigma}_q(0)\rangle|^2}\le T\sqrt{I_Q}\le 2T\Delta H \quad (65)$$

对于时间无关幺正演化。

值得注意的是，反对易可观测量的权衡关系很容易通过实验验证，因为它们不涉及有时难以测量的可观测量关联。此外，例如（60）、（63）和（65）中的不等式涉及 ΔH 和 I_Q等与时间无关的量，因此评估起来更加容易。例如，只需测量 ΔH（或 I_Q）的初始值，就可以利用（65）轻松评估跃迁时间 T 的下界；在该跃迁过程中，$\{\langle\Sigma_q\rangle\}$ 从$\{\langle\hat{}\Sigma_q(0)\rangle\}=\{\Sigma_q^{\rm ini}\}$变为 $\{\langle\hat{}\Sigma_q(T)\rangle\}=\{\Sigma_q^{\rm fin}\}$。

3. *Comparison with the previous speed limit based on the metric*

有趣的是，仅凭初始和最终时刻的信息，就能验证不等式（60）和（65）。此外，如果纳入足够多的反对易可观测量，这些不等式会优于基于量子态度量的传统速度极限。为说明这一点，我们回顾单个可观测量的一般不等式（请注意，类似的不等式也有讨论将其用于经典随机热力学 [85]）

$$\begin{aligned}|\langle\hat{A}(T)\rangle-\langle\hat{A}(0)\rangle|^2&\le\frac{\Delta_A^2}{4}\|\hat{\rho}(T)-\hat{\rho}(0)\|_1^2\\&\le\Delta_A^2(1-F(T)),\end{aligned} \quad (66)$$

其中 $\Delta_A=\max_{|v\rangle}\frac{\langle v|\hat{}A|v\rangle}{\langle v|v\rangle}-\min_{|v\rangle}\frac{\langle v|\hat{}A|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$ 是 $\hat{}A$ 的谱宽， $\|X\|_1=\mathrm{Tr}\sqrt{X^\dagger X}$ 是迹-1范数，

且 $F(T) = \left(\mathrm{Tr}\left\{\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}(0)}\hat{\rho}(T)\sqrt{\hat{\rho}(0)}}\right\}\right)^2$ 是混合量子态保真度。这里，我们使用了 Fuchs-van de Graaf不等式 [86]。对于时间无关的幺正动力学，我们有一个基于量子态度量 [25], $\arccos(\sqrt{F(T)}) \leq T\Delta H$ for $0 \leq T\Delta H \leq \frac{\pi}{2}$ 的著名速度极限。于是我们有

$$|\langle \hat{A}(T)\rangle - \langle \hat{A}(0)\rangle|^2 \leq \Delta_A^2 \sin^2(T\Delta H). \tag{67}$$

将这个不等式应用 K 次，可得

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{K} |\langle \hat{A}_k(T)\rangle - \langle \hat{A}_k(0)\rangle|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \Delta_{A_k}^2}\,|\sin(T\Delta H)| \tag{68}$$

对于 $0 \leq T\Delta H \leq \frac{\pi}{2}$。

虽然式（68）适用于一般可观测量，但对于反对易可观测量，例如（60）和（65），当 K 较大时，我们的界可能更紧。比如，若考虑反对易泡利串，则有 $\Delta_{\Sigma_q} = 2$，此时式（68）变为

$$\sqrt{\sum_{\hat{\Sigma}_q \in \mathcal{P}_A}^{K} |\langle \hat{\Sigma}_q(T)\rangle - \langle \hat{\Sigma}_q(0)\rangle|^2} \leq 2\sqrt{K}\,|\sin(T\Delta H)|. \tag{69}$$

因此，当满足以下条件时，不等式（65）给出了更好的界

$$K > \min\left\{\left(\frac{T\Delta H}{\sin(T\Delta H)}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}. \tag{70}$$

特别地，若取 $K \geq 3$，（65）总能给出比（69）更好的界（后者定义于 $0 \leq T\Delta H \leq \frac{\pi}{2}$）。对于马约拉纳费米子情形，我们也有类似的结果。

C. 关于相干速度极限和非相干速度极限的评注

在结束本节之前，我们简要评论一下参考文献 [52] 中讨论的相干速度极限和非相干速度极限。为在本文的背景下解释这些速度极限，我们将固定时间 t 的密度矩阵对角化，写作 $\hat{\rho} = \sum_\mu \rho_\mu |\rho_\mu\rangle\langle\rho_\mu|$。接着，我们可以将一个可观测量 $\hat{A}$ 分解为 $A = A_C + A_I$，其中 $A_C = \sum_{\mu\neq\nu} \langle\rho_\mu|A|\rho_\nu\rangle |\rho_\mu\rangle\langle\rho_\nu|$ 和 $\hat{A}_I = \sum_\mu \langle\rho_\mu|\hat{A}|\rho_\mu\rangle |\rho_\mu\rangle\langle\rho_\mu|$。这里，我们假设 $\hat{A}_C$ 和 A_I 固定且与时间无关。于是，在时间 t，我们可以分别为 A_C 和 $\hat{A}_I$ 推导速度极限。事实上，我们有 $\left|\frac{d\langle \hat{A}_C\rangle}{dt}\right| \leq \Delta A_C \sqrt{I_{QC}}$ 和 $\left|\frac{d\langle \hat{A}_I\rangle}{dt}\right| \leq \Delta A_I \sqrt{I_{QI}}$，其中 I_{QC} 和 I_{QI} 分别是量子费舍尔信息的相干部分和非相干部分（其显式表达式见参考文献 [52]）。重要的是，$I_Q = I_{QC} + I_{QI}$。

现在，不难看出 $\mathrm{cov}(\hat{A}_C, \hat{A}_I) = 0$。因此，我们可以运用式（54）中的一般讨论，得到

$$\frac{1}{\Delta A_C^2}\left|\frac{d\langle \hat{A}_C\rangle}{dt}\right|^2 + \frac{1}{\Delta A_Q^2}\left|\frac{d\langle \hat{A}_Q\rangle}{dt}\right|^2 \leq I_Q, \tag{71}$$

这与相干和非相干速度极限一致。虽然不等式 (71) 所包含的信息不如分别给出的速度极限多，但我们强调，如果能找到其他互不关联的可观测量，并将它们纳入 (54) 左侧，就能进一步改进该不等式。

VI. 量子多体系统中的应用

本节将展示，对于多体系统，可以推导出实用的量子速度极限，并得到比先前结果更紧的不等式。如下文所示，即使对于大型系统，我们的结果也能给出有意义的收敛界；相比之下，直接套用先前的速度极限会导致界发散，例如由于 ΔH 发散。尽管这一点此前已有论述 [28, 58, 66, 73], ，但先前的结果在以下方面并不令人满意：文献 [28, 66] 依赖于一个未经证明的猜想，而该猜想仅适用于量子系统受外部参数变化控制的有限情形；文献 [28] 提到了这一问题，却未明确考察多体情形；[73] 中的结果基于态度量，无法充分考虑可观测量的性质（详情见第 VI C 节）；文献 [58, 61] 中的结果仅适用于有限类型的可观测量 [87]。与此形成鲜明对比的是，我们严格证明了一组适用于一般多体动力学的局域可观测量量子速度极限。一个值得注意的例子是，我们证明，一般局域可观测量的变化速度受局域能量涨落所界定（对于幺正动力学情形）；即使在热力学极限下，该涨落也不会发散，并能给出更紧的界。此外，我们还阐明了当系统的“浴”有限时，如何利用关联改进该界。

我们还注意到，尽管已有若干其他方法可用于界定多体动力学的速度，例如 Lieb-Robinson界及其应用 [88–97]，但我们的界具有信息论意义，因此更具优势。此外，对于幺正动力学，我们的界包含可观测量的量子涨落以及部分哈密顿量的能量涨落，这与 Mandelstam-Tamm界针对可观测量的初衷一致。

A. 分解动力学的 Quantum 速度界

为此，我们首先说明一个一般不等式，它是式 (12) 中讨论的量子速度极限的一种变体。

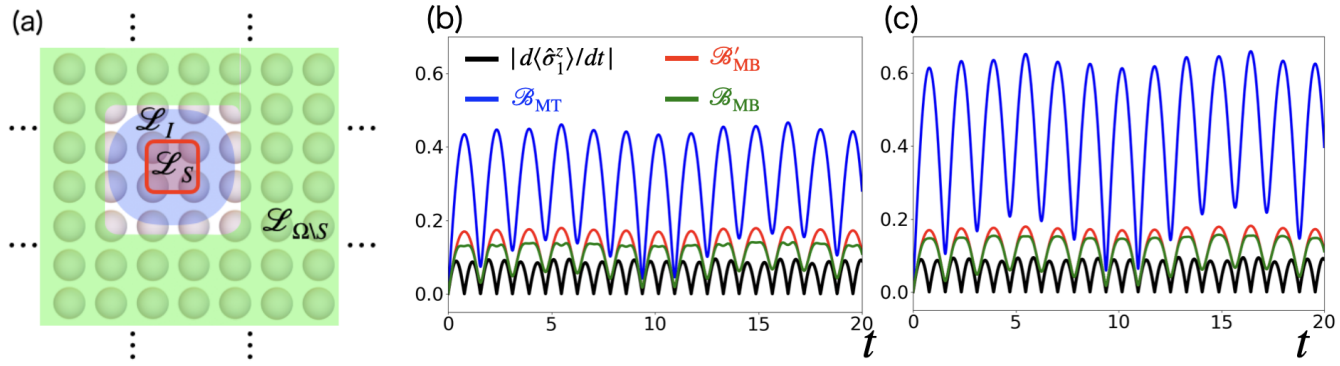

图 8. (a) 多体系统的示意图，其动力学分解为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\Omega\setminus S}$，其中 $\mathcal{L}_S$ ($\mathcal{L}_{\Omega\setminus S}$) 仅在 S ($\Omega\setminus S$) 上产生非平凡作用，而 $\mathcal{L}_I$ 表示 S 与 $\Omega\setminus S$之间的相互作用。(b,c) 式 (80) 中自旋系统的可观测量速度和速度极限随时间的变化，其中 (b) $L = 6$，(c) $L = 12$。我们展示了 $\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle$ 的速度（黑色）、Mandelstam-Tamm界 $\mathcal{B}_{\rm MT}$ （蓝色）、多体系统的界 $\mathcal{B}'_{\rm MB}$ （红色）和 $\mathcal{B}_{\rm MB}$ （绿色）。即使 L 增大，我们的界 $\mathcal{B}'_{\rm MB}$ 和 $\mathcal{B}_{\rm MB}$ 仍能给出良好的界，这与 $\mathcal{B}_{\rm MT}$形成对比。我们还发现，尤其是在 L 相对较小时，$\mathcal{B}_{\rm MB}$ 优于 $\mathcal{B}'_{\rm MB}$，这表明关联因子能够捕捉速度极限的有限尺寸修正。我们采用 $J = 1$, $g = 0.3$、$h = 1$，以及初态 $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\cdots\rangle$。

将 $\mathcal{L}$ 分解为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$，其中 $\mathcal{L}_2[\hat{}\rho]$ 不会改变我们感兴趣的投影可观测量 $K\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\ A_k - \sum_\mu \langle A_k,\ \Lambda_\mu\rangle \Lambda_\mu$的期望值。也就是说，定义 $L_1\hat{}$ 的 SLD，$_2$ 对于 $\mathcal{L}_{1,\ 2}$，我们假设

$$\left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu \langle \hat{A}_k, \hat{\Lambda}_\mu\rangle \hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_2 \right\rangle = 0 \tag{72}$$

对所有 $1 \le k \le K$。在此条件下，我们可以证明（证明见附录 F）

$$\vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1} \vec{B} \le \mathcal{F}_{11} - \frac{\mathcal{F}_{12}^2}{\mathcal{F}_{22}} = \frac{\mathrm{Det}[\mathcal{F}]}{\mathcal{F}_{22}}. \tag{73}$$

这里，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{zz'} &= \left\langle \hat{L}_z - \sum_{\mu=1}^{M} \langle \hat{L}_z, \hat{\Lambda}_\mu\rangle \hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_{z'} - \sum_{\mu=1}^{M} \langle \hat{L}_{z'}, \hat{\Lambda}_\mu\rangle \hat{\Lambda}_\mu \right\rangle \\ &= \mathcal{I}_{zz'} - \sum_{\mu=1}^{M} \langle \hat{L}_z, \hat{\Lambda}_\mu\rangle \langle \hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_{z'}\rangle \end{aligned} \tag{74}$$

是修正后的量子费舍尔信息矩阵，其中 $\hat{}\hat{}\mathcal{I}_{zz'} = \langle L_z,\ L_{z'}\rangle$ 为标准量子费舍尔信息矩阵（另见附录 A）。如附录 F 所述，（73）右侧的界可以简单地替换为 $\mathcal{I}$：

$$\vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1} \vec{B} \le \mathcal{I}_{11} - \frac{\mathcal{I}_{12}^2}{\mathcal{I}_{22}} = \frac{\mathrm{Det}[\mathcal{I}]}{\mathcal{I}_{22}}. \tag{75}$$

作为一个主要示例，我们考虑哈密顿量 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 动力学 $H = H_1 + H_2$和一个纯态。在这种情况下，我们有 $\mathcal{I}_{11} = 4\Delta H_1^2$, $\mathcal{I}_{22} = 4\Delta H_2^2$和 $\mathcal{I}_{12} = 4\mathrm{cov}(\hat{}H_1,\ \hat{}H_2)$。

特别地，对于 $M = 1$ 且满足 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$，我们得到以下量子速度极限：

$$\vec{B}^{\mathsf{T}} C^{-1} \vec{B} \le 4\Delta H_1^2 (1 - \phi^2_{H_1 H_2}), \tag{76}$$

只要对所有 k，$\langle[\hat{}A_k,\ \hat{}H_2]\rangle = 0$。此外，对于单个可观测量 $\hat{}\ A$ ($K = 1$)，我们有

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \mathcal{B}_{\rm MB} := 2\Delta A \Delta H_1 \sqrt{1 - \phi^2_{H_1 H_2}}, \tag{77}$$

when $\langle[\hat{A}, \hat{H}_2]\rangle = 0$.

B. 多体动力学的界

作为一项重要应用，我们考虑定义在晶格位点 Ω 上、具有局域相互作用所致动力学的量子多体自旋系统。我们聚焦于一组 $\hat{}$ 可观测量 A_k，它们作用于子系统 $S \subset \Omega$。此时，动力学可分解为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\Omega\setminus S}$，其中 $\mathcal{L}_S$ ($\mathcal{L}_{\Omega\setminus S}$) 仅在 S ($\Omega\setminus S$) 上非平凡地作用，而 $\mathcal{L}_I$ 表示 S 与 $\Omega\setminus S$ 之间的相互作用（见图 8(a)）。注意，我们也可以将 $\Omega\setminus S$ 视为该子系统的“浴”。

如果取 $M = 0$，其中 $D_{kl} = \langle\hat{}A_k,\ \hat{}A_l\rangle$，或者取 $M = 1$ $\hat{}\hat{}$且 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$，其中 $D = C$，我们可以看到，不等式（73）成立，例如，令 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I$ 和 $\hat{}\hat{}\hat{}\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{\Omega\setminus S}$，因为 $\langle A_k,\ L_2\rangle = \mathrm{cov}(A_k,\ L_2) = 0$。对于小子系统 S，式（73）[或（77）] 中的界比式（12）[或 $\mathcal{B}_{\rm MT}$] 紧得多，因为一般而言 $\mathcal{I}_{11} \ll I_Q$。此外，式（73）右侧的第二项 [或（76）和（77）] 还表明了一个非平凡的结果，即该子系统与

其余部分之间的关联会抑制速度极限。下面让我们展示一些具体示例。

作为第一个示例，我们考虑一种幺正 $H = H_S + H_I + \hat{}\hat{}\hat{}$ 动力学，其哈密顿量由 $H = H_S + H_I + \hat{}\hat{}\hat{}\hat{}H_B = H_{SI} + H_B$ 给出（注意 $\mathcal{L}_{\Omega\setminus S} = -i[H_B, \cdots]$）。在这种情况下，我们有

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \leq 2\Delta A \Delta H_{SI}\sqrt{1-\phi^2_{H_{SI}H_B}}, \tag{78}$$

即使在热力学极限下，对 $\Delta H \to \infty$ 该式仍然收敛，因为 ΔH_{SI} 收敛。注意，如果子系统与其余部分之间的关联长度有限，那么随着系统尺寸减小，$|\phi_{H_{SI}H_B}|$ 可能会增大。这意味着，我们可以利用关联因子 $\sqrt{1-\phi^2_{H_{SI}H_B}}$ 进一步收紧界，使其优于朴素界 $2\Delta A\Delta H_{SI}$，尤其是在系统的热浴有限时。使用人工量子系统（例如囚禁离子）进行实际实验时，便可能出现这种情况。此外，正如下一小节所详述的，这一修正确保式（78）中的界始终优于式（17）中的传统界。

作为第二个例子，考虑 $[H_I, H_S] = 0$ 的可观测量 $\hat{}$，在这种情况下，我们可以取 $H_1 = H_S\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 和 $H_2 = H_{IB} = H_I + H_B$，得到

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \leq 2\Delta A \Delta H_S\sqrt{1-\phi^2_{H_S H_{IB}}}, \tag{79}$$

$\hat{}\hat{}$ 其中出现的是 H_S 的涨落，而非 H_{SI}。

作为第三个例子，我们取一个具有 L 个晶格位点的特定自旋-1/2 多体系统，以展示界 (77)。我们考虑哈密顿量如下的幺正动力学

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{L-1} J\hat{\sigma}^z_j\hat{\sigma}^z_{j+1} + \sum_{j=1}^{L} g\hat{\sigma}^x_j + h\hat{\sigma}^z_j. \tag{80}$$

对于纯态。我们关注第一个位点的局域磁化 $\hat{}$，$A = \hat{}\sigma^z_1$。在这种情况下，我们可以设定 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}H_1 = g\hat{}\sigma^x_1$ 和 $H_2 = H - H_1$，因为 $[A, H_2] = 0$（这一选择与前几段讨论的分解为 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}H_{SI}$ (H_S) 和 H_B(H_{IB}) 略有不同）。图 8(b,c) 展示了式 (77) 中的界 $\mathcal{B}_{\rm MB}$、忽略关联的略松界，即 $\mathcal{B}'_{\rm MB} = 2\Delta A\Delta H_1$，以及式 (17) 中的 Mandelstam-Tamm界$\mathcal{B}_{\rm MT}$。图 8(b,c) 表明，$\mathcal{B}_{\rm MB}$ 和 $\mathcal{B}'_{\rm MB}$ 变得比 $\mathcal{B}_{\rm MT}$ 好得多；对于较大的 L，后者往往较松。我们还发现，尤其当 L 相对较小时，$\mathcal{B}_{\rm MB}$ 比 $\mathcal{B}'_{\rm MB}$ 更好，这表明关联因子能够捕捉速度极限的有限尺寸修正。

最后，让我们讨论多体系统中反对易可观测量的权衡关系。我们考虑一组作用于 S 上的可观测量 $A_1, \cdots, A_K$，并假设它们满足 $\{A_k, A_l\} = 0$，其中 $k \neq l$。然后，取 $M = 0$，并假设（75）中的孤立系统处于初始纯态，我们得到

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\langle\hat{A}_k^2\rangle}\left|\frac{d\langle\hat{A}_k\rangle}{dt}\right|^2 \leq 4\Delta H^2_{SI}(1-\phi^2_{H_{SI}H_B}), \tag{81}$$

这是式（55）在多体情形下的对应形式。例如，若我们在一个局部子系统上取一组相互反对易的泡利串 $\{\Sigma_k\}$（例如 $\{\hat{}\sigma^x_i,\ \hat{}\sigma^y_i,\ \hat{}\sigma^z_i\}$，其中 $i \in S$），则有

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\frac{d\langle\hat{\Sigma}_q\rangle}{dt}\right|^2 \leq 4\Delta H^2_{SI}(1-\phi^2_{H_{SI}H_B}) \tag{82}$$

这是式（61）在多体情形下的对应形式。这意味着，决定反对易局域可观测量之间权衡关系的能量尺度是局部能量涨落 ΔH_{SI}，而非整体能量涨落 ΔH。

C. 与参考文献 [73]的区别

在本小节中，我们讨论我们的结果与参考文献 [73] 中结果的不同之处。参考文献 [73], 考虑了局部子系统 S 的约化密度矩阵 $\hat{}\rho_S(t)$（对应于 $\hat{}\rho(t)$），并证明了

$$\arccos(\sqrt{F_S(t_1,t_2)}) \leq \int_{t_1}^{t_2}\Delta H_{SI}dt, \tag{83}$$

where $F_S(t_1,t_2) = \left(\mathrm{Tr}\left\{\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_S(t_1)}\hat{\rho}_S(t_2)\sqrt{\hat{\rho}_S(t_1)}}\right\}\right)^2$ is the mixed-state fidelity for the reduced density matrix.

然而，我们的结果与参考文献 [73]中的结果相比有一些显著优势。首先，我们注意到，式（78）中的界（其中 ΔH_{SI} 像参考文献 [73],中那样出现）只是式（77）的一个特例。特别是，对于孤立系统，如果我们关注的可观测量 A与 H_2 对易，则式（77）成立。因此，除了式（78）之外，如果可观测量与部分哈密顿量之间存在某种对易结构，我们还可以利用式（77）得到基于不同能量涨落ΔH_1（例如 ΔH_S）的非平凡界。第二和第三个例子（分别见不等式（79）和图 8(b,c)）已展示了这一点。此外，在第三个例子的设置中，我们发现，基于 $\Delta H_1 = |g|\Delta\sigma^x_1$ 的 $\mathcal{B}_{\rm MB}$ 实际上可能比基于 ΔH_{SI} 的界（78）紧得多（见图9）。请注意，能量尺度 ΔH_1 只有在考虑可观测量的对易性质后才能得到；而参考文献 [73], 中的讨论从一开始就将子系统与其余部分区分开来，因此必然包含 ΔH_{SI}，无法推导出这一能量尺度。

其次，文献 [73] 并未讨论基于可观测量的不等式。相比之下，我们的方法聚焦于基于可观测量的不等式，从而得出非平凡的推论。一个值得注意的推论是，我们的不等式表明，H_{SI} 之间的关联（或者，更一般地，

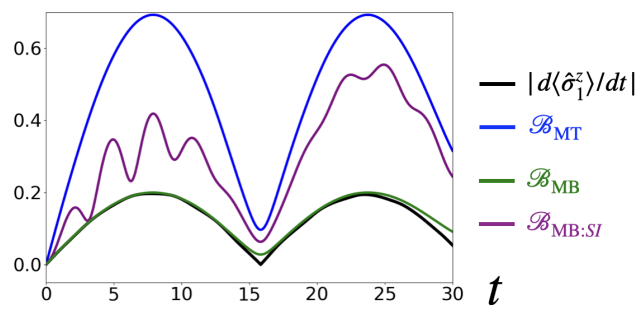

图9. 含有 $L = 12$ 的式（80）中自旋系统的可观测量速度及速度极限的时间依赖性。我们展示了 $\langle\hat{\sigma}_1^z\rangle$（黑色）、Mandelstam-Tamm界 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$（蓝色）、基于 $\Delta H_1 = |g|\Delta\sigma_1^x$ 的界 $\mathcal{B}_{\mathrm{MB}}$（绿色），以及式（78）中基于 ΔH_{SI} 的界 $\mathcal{B}_{\mathrm{MB}:SI}$（紫色），其中 $\hat{H}_{SI} = g\hat{\sigma}_1^x + h\hat{\sigma}_1^z + J\hat{\sigma}_1^z\hat{\sigma}_2^z$。与 $\mathcal{B}_{\mathrm{MT}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathrm{MB}:SI}$ 相比，$J = 1$ 界 $g = 0.1$ $h = 1$ 提供了紧得多的界。我们使用 $|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\cdots\rangle$，以及初态。

$\hat{H}_1$）和 $\hat{H}_B$（$\hat{H}_2$）首次改进了界。这一改进无法直接从文献 [73] 的结果中得到理解。此外，我们发现，这一修正具有重要的定性作用：尽管一般而言 ΔH_{SI} 可能大于 ΔH（例如，当量子态是 $\hat{H}$ 的本征态、但不是 $\hat{H}_{SI}$ 的本征态时），$\Delta H_{SI}\sqrt{1-\phi^2_{H_{SI}H_B}}$ 却不可能超过 ΔH。事实上，我们有

$$\begin{aligned}&\Delta H^2 - \Delta H_{SI}^2(1-\phi^2_{H_{SI}H_B})\\ &= \left(\Delta H_B + \frac{\mathrm{cov}(\hat{H}_{SI},\hat{H}_B)}{\Delta H_B}\right)^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{84}$$

这意味着，我们在式 (78) [或更一般地，在式 (77)] 中的不等式始终优于传统的 Mandelstam-Tamm不等式，而文献 [73] 中的结果则并非如此。

作为另一个重要结果，我们阐明了适用于多个可观测量的一般量子速度极限，即使在多体系统中也具有实用价值（见（75））。这在上一小节的第四个示例中得到了展示，即（81）和（82）中给出的反对易可观测量（例如某些泡利串）之间的权衡关系。由于我们需要考虑不同可观测量之间的相互关系，这些界无法直接通过参考文献 [73] 中基于度量的方法获得。

VII. 基于局域概率守恒定律的速度极限

虽然到目前为止我们讨论的都是基于费舍尔信息的量子速度极限，但我们还可以基于多个可观测量的概率局域守恒定律，得到一种不同类型的速度极限。这些速度极限，与近期为每个单独可观测量发现的速度极限 [58] 一样，在讨论宏观跃迁时尤其有利。与式 (10) 和 (12) 中的界类似，我们的多可观测量速度极限可以给出比先前获得的速度极限 [58, 61]更好的界。

A. 单个可观测量的速度极限综述

我们首先根据参考文献 [58] 综述单个可观测量的速度极限（见公式（88）），并进行了轻微修改，以避免显式引入图结构。得益于这一修改，本文中的结果可以应用于更广泛的宏观系统，而这些系统此前难以处理 [58, 61]（见本小节最后一段）。

首先，我们考虑一个离散系统，其状态空间由基组 $\{i\}$ 描述，并在其上定义概率分布 $\{p_i\}$。我们假设满足概率局域守恒定律，由此得到概率连续性方程，

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j(\neq i)} J_{ji}, \tag{85}$$

其中 $J_{ji} = -J_{ij}$ 是从 i 到j的概率流。请注意，该方程及下文的形式体系适用于各种系统。例如，对于时间演化由 $dp_i/dt = \sum_j R_{ij}p_j$ 给出、跃迁率矩阵为R的经典随机系统，$J_{ij} = R_{ij}p_j - R_{ji}p_i$。对于满足 $d\hat{\rho}/dt = -i[H,\hat{\rho}]$的幺正量子动力学，我们可以选取一组固定基组 $\{|i\rangle\langle i|\}$，并定义 $p_i = \langle i|\hat{\rho}|i\rangle$。于是我们得到 $J_{ij} = -iH_{ij}\rho_{ji} + \mathrm{c.c.}$，其中 $H_{ij} = \langle i|H|j\rangle$ 且$\rho_{ji} = \langle j|\hat{\rho}|i\rangle$。我们还可以考虑开放量子系统，正如参考文献 [58]中所讨论的那样。

考虑一个写成$\{i\}$函数的可观测量。我们首先关注量子系统和由$\hat{A} = \sum_i a_i|i\rangle\langle i|$ 给出的单个可观测量（例如，当 $|i\rangle$ 表示福克基时，我们可以取粒子位置之和与位点相互作用之和作为 A）。然后，我们有 $\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = -\sum_{i\neq j} a_i J_{ji} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(a_i - a_j)J_{ji}$，其中使用了 $J_{ij} = -J_{ji}$。现在，我们引入$r_{ij} \geq 0$，它满足：若 $J_{ij} \neq 0$，则 $r_{ij} > 0$（等价地，若 $r_{ij} = 0$，则$J_{ij} = 0$）。然后

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j, r_{ij}>0} r_{ij}(a_j - a_i)\frac{J_{ij}}{r_{ji}} = \langle\nabla A, \mathbf{u}\rangle_r, \tag{86}$$

其中

$$\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle_r = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j, r_{ij}>0} r_{ij}Y_{ij}Z_{ij}, \tag{87}$$

$(\nabla A)_{ij} = a_i - a_j$, and $(\mathbf{u})_{ij} = \frac{J_{ij}}{r_{ij}}$.

现在，我们可以使用柯西-施瓦茨不等式求得

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \leq \sqrt{\langle\nabla A,\nabla A\rangle_r}\sqrt{U}, \tag{88}$$

其中，我们定义

$$U=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_r. \tag{89}$$

这个不等式会带来重要的后果。首先，$\hat{}$ 因子 $\langle\nabla A,\nabla A\rangle_r$ 即使在 $\|A\|_\infty$ 或 ΔA 可能很大时也可以很小（见下方示例）。其次， U 通常受一个具有物理意义的量所界定。例如，对于幺正动力学，取 $r_{ij}=|H_{ij}\rho_{ji}|$，我们得到 [58]

$$U\leq 2\sum_{i\neq j}r_{ij}-\frac{2E_{\rm trans}^2}{\sum_{i\neq j}r_{ij}}\leq 2C_H-\frac{2E_{\rm trans}^2}{C_H}, \tag{90}$$

其中

$$E_{\rm trans}:=\sum_{i\neq j}H_{ij}=\langle\hat{H}\rangle-\sum_i H_{ii} \tag{91}$$

是能量的跃迁部分，并且

$$C_H:=\max_i\sum_{j(\neq i)}|H_{ij}| \tag{92}$$

是跃迁强度，这可以很容易地从哈密顿量中得知。

相反，如果我们考虑一个经典随机系统，U可能受熵产生率 Σ的界限制（请注意，在这种情况下，我们考虑经典可观测量 $A=\{a_i\}$ 而非 A ）。例如，如果系统连接到一个满足细致平衡条件的单一热浴，我们取 $r_{ij}=R_{ij}p_j+R_{ji}p_i$ 并得到 [42]

$$U\leq\frac{\dot{\Sigma}}{2}, \tag{93}$$

其中 $\dot{\Sigma}:=\sum_{i\neq j}R_{ij}p_j\ln\frac{R_{ij}p_j}{R_{ji}p_i}$。我们注意到，最近发现这一热力学不等式与最优传输问题 [98], 有关，其中熵产生由二阶瓦瑟斯坦距离的平方 [55, 60]所界定。

作为一个简单的例子，我们考虑一维量子粒子的远离平衡态输运，其哈密顿量为

$$\hat{H}=\hat{V}_{\rm pot}+\sum_i J_h\hat{b}_{i+1}^\dagger\hat{b}_i+\text{h.c.}, \tag{94}$$

$\hat{}$其中，b_i 是位于格点 i 处粒子的湮灭算符， $V_{\rm pot}$ 则确定一个任意的格点势。注意，基 $|i\rangle$被选作单粒子位置的基。我们关注的位置算符为 $\hat{x}=\sum_i i\,|i\rangle\langle i|$。对于无限大的系统， Δx 会随时间无界发散（例如，由于扩散），这使得不等式 $|d\langle\hat{x}\rangle/dt|\leq 2\Delta x\Delta H$ 失去意义（注意， $|d\langle\hat{x}\rangle/dt|$ 是收敛的）。

相比之下，如果应用（88），我们会得到一个收敛的界。取 $r_{ij}=|H_{ij}\rho_{ji}|=J_h(\delta_{i+1,\ j}+\delta_{i-1,\ j})|\rho_{ji}|$，可得 $\langle\nabla A,\nabla A\rangle_r=J_h\sum_i|\rho_{i,\ i+1}|\leq\sqrt{p_ip_{i+1}}\leq(p_i+p_{i+1})/2$。在式（92）中，我们还有$C_H=2J_h$。然后，利用（90），我们得到

$$\left|\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt}\right|\leq\sqrt{J_hU}\leq\sqrt{4J_h^2-E_{\rm trans}^2}, \tag{95}$$

即使对于宏观系统，也能给出一个收敛的界。正如文献 [58], 所讨论的，我们可以推导出类似的速度极限，即使在（可能存在相互作用的）多粒子系统中，也适用于宏观跃迁。

我们来说明，式（88）中的速度极限可应用于更广泛的一类宏观系统，而这些系统此前 [58, 61]难以处理。这是因为我们可以避免显式引入图结构，而文献 [58, 61] 中采用了这种做法。在文献 [58, 61], 中，可观测量的速度极限由例如其利普希茨常数的图类比来描述（$\max_{(i,j)\in\mathcal{E}}|a_i-a_j|$，其中$\mathcal{E}$ 表示图的边）。如果改变图结构，这一因子就会显著变化。然而，对于弱扰动系统而言，这种变化在物理上并不理想。例如，文献 [58, 61] 中粒子的量子速度极限会变宽，即使只加入极小的长程跃迁，因为这会大幅改变图结构（尤其是 $\mathcal{E}$）。然而，我们在式（88）中的界不存在这个问题，也就是说，这类微小的长程跃迁不会显著改变该界。这是因为我们使用 $\langle\nabla A,\nabla A\rangle_r$ ，而不是 A的利普希茨常数；扰动较弱这一事实通过 r体现出来。例如，考虑一个具有微小长程跃迁振幅的单粒子量子系统，其中 $|H_{ij}|$ 对于$|i-j|\gg 1$变为非零但很小。于是，对于 $|i-j|\gg 1$， $r_{ij}=|H_{ij}\rho_{ji}|$ 会自动变小，因此式（88）右侧不会有太大变化。

最后，我们提到，上述速度极限也可以在连续系统中进行讨论。假设空间坐标由 $\mathbf{x}$ 表示，并且我们可以在其上定义一个概率分布 $P(\mathbf{x},t)$，该概率分布满足连续性方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{96}$$

对于概率流$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$。我们考虑一个可观测量 $A(\mathbf{x})$，其期望值为

$$\langle A(t)\rangle=\int d\mathbf{x}P(\mathbf{x},t)A(\mathbf{x}), \tag{97}$$

假设 $P\to 0$ 对于 $|\mathbf{x}|\to\infty$，我们得到 [58]

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt}=-\langle\nabla A,\mathbf{u}\rangle_r^c. \tag{98}$$

在这里,

$$\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle_r^c:=\int_{r(\mathbf{x})>0}d\mathbf{x}r(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \tag{99}$$

以及 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})/r(\mathbf{x})$，其中我们假设 $r(\mathbf{x}) > 0$ if $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \neq 0$。于是，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\left|\frac{d\langle A\rangle}{dt}\right| \leq \sqrt{\langle \nabla A, \nabla A\rangle_r^c}\sqrt{U_c}, \tag{100}$$

其中 $U_c = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_r^c$，与式（88）类似。由于 $\langle \nabla A, \nabla A\rangle_r^c$ 相较于 ΔA 的值较小，因此式（100）适用于连续系统中的宏观跃迁，与式（88）中的情形相同。

重要的是，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_r^c$ 通常受某些物理量的约束。例如，对于可描述玻色气体平均场动力学的非线性薛定谔方程，[99]，通过取 $r = P(\mathbf{x})$ [58]，我们得到 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_r^c \leq 2E_{\rm kin}$。这里，$E_{\rm kin} = \int d\mathbf{x} P|\nabla\theta|^2\hbar^2/(2m^2)$ 是玻色气体的单粒子动能，其中（归一化的）波函数表示为 $\psi(\mathbf{x}) = \sqrt{P(\mathbf{x})}e^{i\theta(\mathbf{x})}$，并具有量子相位 $\theta(\mathbf{x})$。另一个例子是热力学福克-普朗克方程，[53, 100]，通过取 $r = P(\mathbf{x})$，我们得到 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_r^c \leq \mu T\dot{\Sigma}$。这里，$\mu$是粒子的迁移率，$T$ 是温度，而 $\dot{\Sigma} = \overline{\langle \mathbf{J}^2/P^2\rangle}/\mu T$ 是福克-普朗克系统的熵产生率。

B. 多个可观测量的速度极限

现在，我们讨论一种基于概率局域守恒定律、适用于多个可观测量的新速度极限。类似于式（10）和（12）的推导，我们得到矩阵不等式（见附录 G）

$$\vec{B}\vec{B}^{\mathsf{T}} \preceq U\mathcal{D} \tag{101}$$

以及等价的标量不等式

$$\vec{B}^{\mathsf{T}}\mathcal{D}^{-1}\vec{B} \leq U \tag{102}$$

对于一组由 $\hat{}\{\hat{A}_k\}$ 给出的可观测量，$\hat{A}_k = \sum_i (a_k)_i |i\rangle\langle i|$ 对所有 k 均成立。这里，我们定义一个 $K \times K$ 矩阵 $\mathcal{D}$，其分量为

$$\mathcal{D}_{kl} = \langle \nabla A_k, \nabla A_l\rangle_r - \sum_\mu \langle \nabla A_k, \nabla \Lambda_\mu\rangle_r \langle \nabla \Lambda_\mu, \nabla A_l\rangle_r, \tag{103}$$

其中 $\hat{\Lambda}_\mu$ 是不变量可观测量，假定其形式为 $\hat{\Lambda}_\nu = \sum_i (\lambda_\nu)_i |i\rangle\langle i|$，并满足正交归一条件 $\langle \nabla\Lambda_\mu, \nabla\Lambda_{\mu'}\rangle_r = \delta_{\mu\mu'}$。我们还假定 $\mathcal{D}$ 存在逆矩阵。对于 $K = 1$ 和 $M = 0$，我们得到式（88）。

基于概率流的速度极限具有许多基于费舍尔信息的速度极限所无法得到的非平凡推论。下面，我们将详细介绍非对称下界和上界的示例，以及针对梯度之间不相关的可观测量的权衡关系。

我们首先讨论非对称上下界。将 $K = 2$ 代入式（102），可得

$$\frac{\mathcal{D}_{22}\left|\frac{d\langle \hat{A}_1\rangle}{dt}\right|^2 - 2\mathcal{D}_{12}\frac{d\langle \hat{A}_1\rangle}{dt}\frac{d\langle \hat{A}_2\rangle}{dt} + \mathcal{D}_{11}\left|\frac{d\langle \hat{A}_2\rangle}{dt}\right|^2}{\mathcal{D}_{11}\mathcal{D}_{22} - |\mathcal{D}_{12}|^2} \leq U. \tag{104}$$

为获得物理直观，我们在此聚焦于扩展的一维晶格上单粒子的输运动力学，同时也可以推广到多粒子系统和高维情形（与单可观测量的情形一样）。我们首先考虑哈密顿量由式（94）给出的幺正动力学。我们关注两个可观测量 $A_{1,2} = \sum_i (a_{1,2})_i |i\rangle\langle i|$。经过一些计算，我们得到一个非对称的下界和上界，分别用 A_2 的速度表示 A_1 的速度（见附录 G2），

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}\mathcal{V}_2 - \sqrt{(1-\tilde{\chi}^2)(J_hU - \mathcal{V}_2^2)} \leq \mathcal{V}_1 \\ \leq \chi\mathcal{V}_2 + \sqrt{(1-\tilde{\chi}^2)(J_hU - \mathcal{V}_2^2)},\end{aligned} \tag{105}$$

其中 U 可替换为 $4J_h - 2E_{\rm trans}^2/J_h$（见式（90））。这里，$\mathcal{V}_k := \overline{\langle d\hat{A}_k/dt\rangle}/\sqrt{\mathcal{C}_{kk}}$，且 $\tilde{\chi} := \mathcal{C}_{12}/\sqrt{\mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22}} \leq 1$，其中

$$\mathcal{C}_{kl} = \sum_i \frac{p_i}{2}\{(\nabla A_k)_{i,i+1}(\nabla A_{k'})_{i,i+1} + (\nabla A_k)_{i,i-1}(\nabla A_{k'})_{i,i-1}\}. \tag{106}$$

鉴于已知另一可观测量的情况，这个不等式为单个可观测量提供了比参考文献 [58] 中更紧的不等式。

我们不讨论幺正时间演化，而是讨论单粒子输运的经典随机动力学。若假设跃迁率矩阵为 $R_{ij} = R(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1})$ $(i \neq j)$，则有

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}\mathcal{V}_2 - \sqrt{(1-\tilde{\chi}^2)(2RU - \mathcal{V}_2^2)} \leq \mathcal{V}_1 \\ \leq \chi\mathcal{V}_2 + \sqrt{(1-\tilde{\chi}^2)(2RU - \mathcal{V}_2^2)},\end{aligned} \tag{107}$$

其中 U 可以替换为 $\dot{\Sigma}/2$。

注意，(106) 通常很容易计算。例如，对于 $\hat{A}_1 = \hat{x} = \sum_i i|i\rangle\langle i|$ 和 $\hat{A}_2 = \hat{x}^2 = \sum_i i^2|i\rangle\langle i|$，我们得到 $\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{21} = 2\langle \hat{x}\rangle$，$\mathcal{C}_{11} = 1$，以及 $\mathcal{C}_{22} = 4\langle \hat{x}^2\rangle + 1$。

作为上述论证的一个特例，我们可以得到两个梯度不相关的可观测量的可加性原理。例如，若考虑粒子的位置 $A_1 = \hat{x} = \sum_i i|i\rangle\langle i|$ 以及密度的奇偶不平衡度 $\hat{A}_2 = \hat{s} = \sum_i (4\lfloor i/2\rfloor - 2i + 1)|i\rangle\langle i|$，则有 $\mathcal{C}_{11} = 1, \mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{21} = 0$，$\mathcal{C}_{22} = 4$，并且 $\tilde{\chi} = 0$。然后，将它们代入（105）可得

$$\left|\frac{d\langle \hat{x}\rangle}{dt}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\frac{d\langle \hat{s}\rangle}{dt}\right|^2 \leq J_hU \leq 4J_h^2 - E_{\rm trans}^2 \tag{108}$$

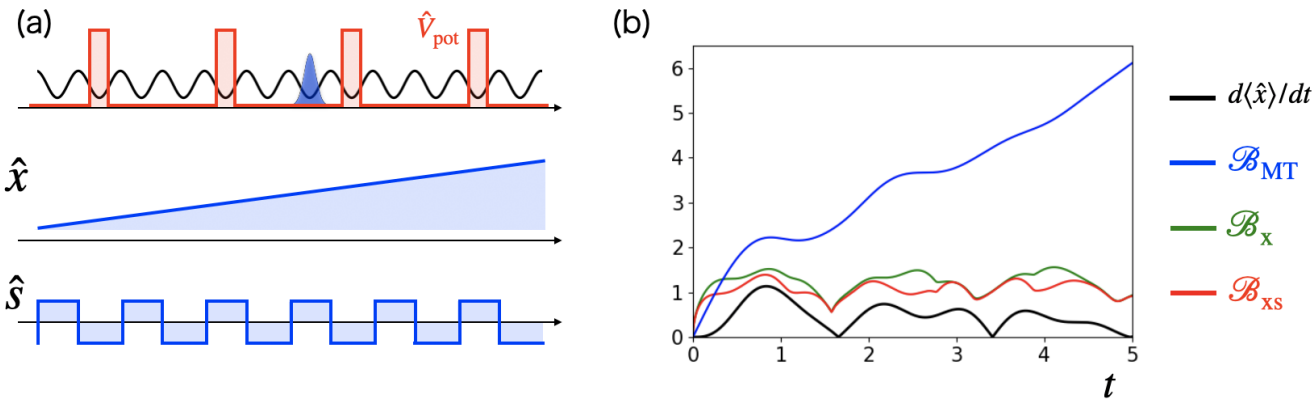

图 10. (a) 由式 (94) 中的哈密顿量描述的单粒子量子输运。势 $\hat{V}_{\rm pot}$ 取为 $\hat{V}_{\rm pot} = \sum_i V^{i}_{\text{势}} |i\rangle\langle i|$，其中 $V^{i}_{\text{势}} = 5.0$，适用于 $i \equiv 2\,(\mathrm{mod}3)$；其他情况下则为 $V^{i}_{\text{势}} = 0$。初态为 $|\psi(0)\rangle = |i = 100\rangle$。我们观测粒子的位置 $\hat{x}$ 以及奇数格点和偶数格点之间的不平衡度 $\hat{s}$；对于扩展系统（数值模拟中取 $L = 200$），二者的梯度互不相关。(b) $\hat{x}$ 的速度（黑色）、由式 (108) 得到的界，即 $\mathcal{B}_{\rm xs} = \sqrt{J_h U} - |d\langle\hat{s}\rangle/dt|^2/4$（红色）、~~式 (95) 中的界 $\mathcal{B}_{\rm x} = \sqrt{J_h U}$~~（绿色），以及~~式 (17)~~ 中的界 $\mathcal{B}_{\rm MT}$（蓝色）。我们发现，$\mathcal{B}_{\rm xs}$ 给出的界优于 $\mathcal{B}_{\rm x}$，这意味着已知不平衡度的速度可以收紧位置速度的界。我们还发现，对于较大的 t，$\mathcal{B}_{\rm MT}$ 会发散。我们取 $J_h = 1$。

对于幺正动力学，该结果比式（95）更强。类似地，经典随机过程对应的界为

$$\left|\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\frac{d\langle\hat{s}\rangle}{dt}\right|^2 \le 2RU \le R\dot{\Sigma}. \tag{109}$$

图 10 验证了由式（108）得到的界，即式（94）中单粒子量子系统的 $|d\langle\hat{x}\rangle/dt| \le \mathcal{B}_{\rm xs} = \sqrt{J_h U} - |d\langle\hat{s}\rangle/dt|^2/4$。我们还将其与式（~~95~~）中的界 $\mathcal{B}_{\rm x} = \sqrt{J_h U}$ 以及式（17）中的界 $\mathcal{B}_{\rm MT}$ 进行了比较。我们发现，$\mathcal{B}_{\rm xs}$ 给出的界优于 $\mathcal{B}_{\rm x}$，这意味着，了解不平衡度的速度可以收紧位置速度的界。我们还发现，当 t 很大时，$\mathcal{B}_{\rm MT}$ 会发散。

我们可以为连续系统中的多个可观测量得到类似的速度极限。为此，我们引入速度向量 $\vec{B}_c = \{B_k\}_{k=1}^K$，其中 $B_k = d\langle A_k\rangle/dt$ 来自 $A_k(\mathbf{x})$，并引入不变可观测量 $\{\Lambda_\mu(\mathbf{x})\}_{\mu=1}^M$，其满足 $\langle\nabla\Lambda_\mu, \nabla\Lambda_\nu\rangle_r^c = \delta_{\mu\nu}$。于是我们有 $\vec{B}_c\vec{B}_c^{\mathsf{T}} \preceq U_c\mathcal{D}_c$，并且

$$\vec{B}_c\mathcal{D}_c^{-1}\vec{B}_c^{\mathsf{T}} \le U_c, \tag{110}$$

其中，$\mathcal{D}_c$ 可通过将式（103）中的 $\langle\cdots, \cdots\rangle_r$ 替换为 $\langle\cdots, \cdots\rangle_r^c$ 得到。再次提醒，U_c 受物理量的限制，例如非线性薛定谔方程中的动能以及福克-普朗克方程中的熵产生率。

VIII. 结论与展望

本文首次引入了多个可观测量的量子速度极限这一概念。我们表明，相较于针对单个可观测量的传统速度极限，速度极限借助其他可观测量的信息，能够给出更紧的界。作为第一类量子速度极限，我们推导出了可观测量速度向量的普适信息论界（式（10）和式（12））。值得注意的是，这一速度极限带来了多种推论，包括由守恒量收紧的速度极限（式（27））、可观测量速度的非平凡下界（式（45））、不相关可观测量之间的权衡关系（式（52））及其与反对易性的联系，以及一般多体系统中可观测量的收敛速度极限（式（75））。我们还展示了另一类基于概率局域守恒定律的多个可观测量速度极限（式（102））。这些速度极限为建立多个可观测量远离平衡态量子动力学的普适理论，提供了一个迄今未知的概念。

尽管我们讨论了可观测量期望值的速度极限，但将这一概念推广到其他量也颇为有趣。最近，研究人员针对例如关联 [85, 101–103],涨落 [104], 熵 [58, 105–110], 以及算符复杂度 [103, 111]等量研究了速度极限。即使对于这些量，关于其他可观测量（例如守恒量）的知识也可用于收紧界。此外，研究这些独特的量子性质如何影响这些量的动力学也很有意义，例如

本工作中发现的针对非平凡反对易可观测量的非平衡权衡关系。

由于实际的量子速度极限是针对多体系统得到的，我们或许可以用它们来评估量子多体动力学的时间尺度 [112–117]。这与孤立量子系统的热化问题有关 [118], ，而这一问题为量子统计力学奠定了基础。有趣的是，我们考察局域相互作用系统中的局域可观测量，而非整个量子态，这一策略与讨论该问题时采用的标准方法相类似。我们将关于速度界与热化时间尺度之间详细关系的讨论留待未来研究。

尽管我们主要讨论了幺正量子系统中的例子，但速度极限也普遍适用于开放量子系统、经典随机系统，甚至非线性系统，例如种群动力学。未来有待基于我们的界来研究这类系统。此外，还必须探讨如何利用我们的速度极限，在已知守恒量和哈密顿结构等信息的情况下，评估量子系统的可控性。我们或可将本文结果与其他领域发展的优化技术相结合，以实现这一目标 [119]。

最后，正如第二节所述，信息论量子速度极限也可以被视为量子 Cram´er-Rao 界的一种广义形式，而后者是量子信息论中的基本界。与传统的量子 Cram´er-Rao 界不同，我们的界考虑了系统的多个可观测量，例如守恒量。因此，即使在非平衡动力学之外的背景下，我们严格的不等式也具有深远的意义，例如，在已知其他可观测量的情况下进行量子计量学。事实上，最近，多参数量子计量学领域也已认识到类似的研究动机 [79]。因此，我们的形式体系也可能有益于此类应用。

致谢

我们感谢 Francesco Albarelli 告知我们量子计量学领域的相关参考文献。我们也感谢匿名审稿人告知我们附录 A 2 中给出的式 (12) 的另一种证明。数值计算借助 QUSPIN [120, 121] 完成。本研究得到 JST ERATO Grant Number JPMJER2302（日本）的资助。

附录 A：正文中公式(10) 和(12) 的详细内容

1. 式 (10) 和 (12) 的证明及其推广

我们首先给出正文中式 **(10)** 和式 **(12)** 的证明。为使推导尽可能一般，我们同时考虑多个可观测量和多参数的情形。具体而言，我们关注一组 K 可观测量 $A_1, \cdots, A_K$ 以及一组 Z 参数 $y_1, \cdots, y_Z$。最后令 $Z = 1$ 和 $y_1 = t$，即可得到正文中的公式。我们定义

$$B_{kz} := \partial_{y_z} \langle \hat{A}_k \rangle = \langle \hat{A}_k, \hat{L}_z \rangle , \tag{A1}$$

其中，$\hat{} L_z$ 是参数 y_z 的对称对数导数（SLD）。

我们假设 M 不变量可观测量 $\hat{}\hat{}\hat{}\Lambda_\mu$ 存在，并且对所有z满足 $\partial_{y_z} \langle \Lambda_\mu \rangle - \langle \partial_{y_z} \Lambda_\mu \rangle = 0$。如正文所述，我们可以假设正交归一化条件为 $\langle \Lambda_\mu, \ \Lambda_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$。于是， B_{kz} 可表示为

$$B_{kz} = \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu f_{k\mu} \hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_z \right\rangle \tag{A2}$$

对于任意 $f_{k\mu}$，我们假设其为实数。

现在，我们引入两个实向量（$a_1, \cdots, a_K$）和（$b_1, \cdots, b_Z$），并考虑

$$\sum_{kz} a_k b_z B_{kz} = \left\langle \sum_k a_k \left(\hat{A}_k - \sum_\mu f_{k\mu} \hat{\Lambda}_\mu \right), \sum_z b_z \hat{L}_z \right\rangle . \tag{A3}$$

利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\sum_{kzk'z'} a_k a_{k'} b_z b_{z'} B_{kz} B_{k'z'} \leq \sum_{kzk'z'} a_k a_{k'} b_z b_{z'} D^f_{kk'} \mathcal{I}_{zz'}, \tag{A4}$$

其中

$$D^f_{kk'} := \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu f_{k\mu} \hat{\Lambda}_\mu, \hat{A}_{k'} - \sum_\mu f_{k'\mu} \hat{\Lambda}_\mu \right\rangle \tag{A5}$$

and

$$\mathcal{I}_{zz'} := \langle \hat{L}_z, \hat{L}_{z'} \rangle \tag{A6}$$

是 SLD量子费 Fisher信息矩阵。

我们可以将 $f_{k\mu}$ 选为 $\langle \hat{}A_k, \hat{}\Lambda_\mu \rangle$，以优化不等式（A4）右侧的表达式，此时 D^f 就变为正文中引入的 D。事实上，我们可以证明，对于所有 $f_{k\mu}$，矩阵不等式 $D \preceq D^f$ 均成立，因为

$$\sum_{kk'} a_k a'_k (D^f_{kk'} - D_{kk'}) = \sum_\mu \left| \sum_k a_k (\langle \hat{A}_k, \hat{\Lambda}_\mu \rangle - f_{k\mu}) \right|^2 \geq 0. \tag{A7}$$

由此我们得到

$$\sum_{kzk'z'} a_k a_{k'} b_z b_{z'} B_{kz} B_{k'z'} \leq \sum_{kzk'z'} a_k a_{k'} b_z b_{z'} D_{kk'} \mathcal{I}_{zz'}. \tag{A8}$$

现在，条件 (A8) 可以改写为

$$\min_{\vec{a},\vec{b}} \left\{ (\vec{a}^{\mathsf{T}} D \vec{a})(\vec{b}^{\mathsf{T}} \mathcal{I} \vec{b}) - (\vec{a}^{\mathsf{T}} B \vec{b})^2 \right\} \geq 0, \tag{A9}$$

其中 $B = \{B_{kz}\}$。引入一个辅助实变量 λ 后，我们可以将上式改写为

$$\min_{\lambda,\vec{a},\vec{b}} \left\{ \lambda^2 + 2\lambda(\vec{a}^{\mathsf{T}} B \vec{b}) + (\vec{a}^{\mathsf{T}} D \vec{a})(\vec{b}^{\mathsf{T}} \mathcal{I} \vec{b}) \right\} \geq 0. \tag{A10}$$

对于固定的 λ 和 $\vec{b}$，我们可以发现 $\vec{a} = -\frac{\lambda D^{-1} B \vec{b}}{\vec{b}^{\mathsf{T}} \mathcal{I} \vec{b}}$ 使左侧达到最小值，从而得到一个新的矩阵不等式

$$B^{\mathsf{T}} D^{-1} B \preceq \mathcal{I}. \tag{A11}$$

相反，对于固定的 λ 和 $\vec{a}$，我们发现 $\vec{b} = -\frac{\lambda \mathcal{I}^{-1} B^{\mathsf{T}} \vec{a}}{\vec{a}^{\mathsf{T}} D \vec{a}}$ 使左侧达到最小值，从而得到

$$B \mathcal{I}^{-1} B^{\mathsf{T}} \preceq D, \tag{A12}$$

这里我们假设 $\mathcal{I}$ 可逆。注意，不等式 (A11) 和 (A12) 是等价的，因为它们是一个大矩阵的舒尔补

$$\begin{pmatrix} D & B \\ B^{\mathsf{T}} & \mathcal{I} \end{pmatrix}. \tag{A13}$$

不等式 (A11) 和 (A12) 给出了推广正文中所讨论结果的不等式。这里取 $Z = 1$，由此可得 $\mathcal{I}_{11} = I_Q$。于是，(A12) 化为正文中式 (10) 的矩阵不等式，

$$\vec{B} \vec{B}^{\mathsf{T}} \preceq D I_Q. \tag{A14}$$

作为一个等价的不等式，(A11) 可化简为正文中公式 (12) 的标量不等式，

$$\mathcal{K}(\{A_k\}; \{\Lambda_\mu\}) := \vec{B}^{\mathsf{T}} D^{-1} \vec{B} \leq I_Q. \tag{A15}$$

请注意，如果我们改为考虑 $K = 1$ 和 $Z \neq 1$，则有一个矩阵不等式

$$\vec{\mathsf{B}} \vec{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} \preceq \mathcal{I} \left(\langle \hat{A}^2 \rangle - \sum_\mu \langle \hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu \rangle^2 \right) \tag{A16}$$

以及一个等价的标量不等式

$$\vec{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} \mathcal{I}^{-1} \vec{\mathsf{B}} \leq \left(\langle \hat{A}^2 \rangle - \sum_\mu \langle \hat{A}, \hat{\Lambda}_\mu \rangle^2 \right), \tag{A17}$$

其中 $\vec{\mathsf{B}} = (B_{11}, \cdots, B_{1Z})^{\mathsf{T}}$。

2. $M = 1$ 且 $\Lambda_1 = \mathbb{I}$ 时 (12) 的另一种证明

在本小节中，我们将证明，对于 $M = 1$ with $\Lambda_1 = \mathbb{I}$，通过结合众所周知的不等式 $\left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|^2 \leq \Delta A^2 I_Q$ 以及我们在论文中提出的思路，也可以得到（12），即为多个可观测量引入速度向量并进行适当优化。为此，我们将感兴趣的多个可观测量作线性组合，令 $A = A = \sum_k z_k A_k$。于是有

$$\left| \frac{d \langle \hat{A} \rangle}{dt} \right|^2 = (\vec{z}^{\mathsf{T}} \vec{B})^2 \tag{A18}$$

and

$$\Delta A^2 = \vec{z}^{\mathsf{T}} C \vec{z}. \tag{A19}$$

现在，我们注意到

$$\max_{\vec{z}} \frac{\left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right|^2}{\Delta A^2} = \max_{\vec{z}} \frac{((C^{1/2}\vec{z})^{\mathsf{T}} C^{-1/2} \vec{B})^2}{\vec{z}^{\mathsf{T}} C \vec{z}} = \vec{B}^{\mathsf{T}} C^{-1} \vec{B}, \tag{A20}$$

其中我们使用了柯西-施瓦茨不等式，其等号条件在 $\vec{z} \propto C^{-1}\vec{B}$ 下成立。这便得出 $\vec{B}^{\mathsf{T}} C^{-1} \vec{B} \leq I_Q$，符合预期。我们强调，尽管这一推导似乎源自单个可观测量的速度极限，但我们还需要引入速度向量，并求解适用于多个变量（与多个可观测量相关）的优化问题。因此，针对多个可观测量的量子速度极限不能被视为单个可观测量的量子速度极限的简单推论，它们提供了新颖且实用的不等式。我们还强调，在我们的论文中，引入速度向量并求解优化问题的思路是首次用于理解量子动力学。

附录 B：有限时间区间界的证明

我们在此展示正文中的公式（23）。为此，我们取一个任意的实向量 $\{a_k\}$，并考虑

$$\sum_k a_k \mathfrak{B}_k = \int_0^T \sum_k a_k B_k(t) dt. \tag{B1}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{kk'} a_k a_{k'} \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_{k'} &= \left|\sum_k a_k \mathfrak{B}_k\right|^2 \\ &\le T\int_0^T \left(\sum_k a_k B_k(t)\right)^2 dt \\ &\le T\int_0^T \sum_{kk'} a_k a_{k'} D(t)_{kk'} I_Q dt \\ &\le T^2 \sum_{kk'} a_k a_{k'} \overline{D_{kk'} I_Q}. \end{aligned} \tag{B2}$$

这里，我们在从第一行到第二行的推导中使用了柯西-施瓦茨不等式，在从第二行到第三行的推导中使用了瞬时速度极限。由于该不等式对所有 $\{a_k\}$ 都成立，我们有

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{\mathsf{T}} \preceq T^2 \overline{D I_Q}. \tag{B3}$$

附录 C：单个自旋 1/2 系统等号条件的证明

这里，我们讨论第 III B 1 节中所述等号条件的证明。我们首先考虑 $\hat{H} = g\hat{\sigma}^x$ and $\hat{A} = c_I \hat{\mathbb{I}} + \sum_{\alpha=x,\ y,\ z} c_\alpha \hat{\sigma}^\alpha$ 的情形。经过直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{A}\rangle}{dt} &= 2g(-c_y\langle\hat{\sigma}^z\rangle + c_z\langle\hat{\sigma}^y\rangle) \\ \langle \hat{A}^2\rangle - \sum_{\mu=1,2}\langle \hat{A},\hat{\Lambda}_\mu\rangle^2 &= c_y^2 + c_z^2 - \frac{(c_y\langle\hat{\sigma}^y\rangle + c_z\langle\hat{\sigma}^z\rangle)^2}{1-\langle\hat{\sigma}^x\rangle^2} \\ \Delta H^2 &= g^2(1-\langle\hat{\sigma}^x\rangle^2), \end{aligned} \tag{C1}$$

其中 $\hat{\Lambda}_1 = \mathbb{I}$ 和

$$\hat{\Lambda}_2 = \frac{\hat{H} - \langle\hat{H}\rangle}{\sqrt{\langle(\hat{H}-\langle\hat{H}\rangle)^2\rangle}}. \tag{C2}$$

因此，等式

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| = 2\Delta H \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \sum_{\mu=1,2}\langle\hat{A},\hat{\Lambda}_\mu\rangle^2} \tag{C3}$$

成立，其中我们使用了 $\langle\hat{\sigma}^x\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}^y\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}^z\rangle^2 = 1$。现在，我们考虑更一般的哈密顿量 H。对于二能级系统，哈密顿量总可以表示为

$$\hat{H} = g\hat{V}^\dagger\hat{\sigma}^x\hat{V} + h\hat{\mathbb{I}}, \tag{C4}$$

其中 $\hat{V}$ 是一个幺正算符。于是，对于量子态 $|\psi\rangle$，我们有

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle i[\hat{H},\hat{A}]\rangle = \langle\psi'|i[g\hat{\sigma}^x,\hat{A}']|\psi'\rangle, \tag{C5}$$

其中 $|\psi'\rangle = \hat{V}|\psi\rangle$ 和 $\hat{A}' = \hat{V}\hat{A}\hat{V}^\dagger$。根据上述讨论，我们有

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| = 2\Delta H' \sqrt{\langle\hat{A}'^2\rangle' - \sum_{\mu=1,2}\langle\hat{A}',\hat{\lambda}_\mu\rangle'^2}, \tag{C6}$$

其中 $\langle\cdots\rangle' = \langle\psi'|\cdots|\psi'\rangle$ 和

$$\Delta H'^2 = g^2(1-\langle\hat{\sigma}^x\rangle'^2), \tag{C7}$$

$\lambda_1 = \hat{\mathbb{I}}$, and

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\hat{\sigma}^x - \langle\hat{\sigma}^x\rangle'}{\sqrt{\langle(\hat{\sigma}^x - \langle\hat{\sigma}^x\rangle')^2\rangle}}. \tag{C8}$$

现在，直接计算可得 $\Delta H' = \Delta H$，$\langle\hat{A}'^2\rangle' = \langle\hat{A}^2\rangle$，以及 $\langle\hat{A}',\ \hat{\lambda}_\mu\rangle' = \langle\hat{A},\ \hat{\Lambda}_\mu\rangle$。然后，我们发现等号条件以公式 (C3) 的形式成立，即使在这一一般情形下也是如此。

附录 D：基于不变量可观测量的其他界

这里，我们讨论正文中基于不变量可观测量的界（式 (27)）的另外两种应用，并假设幺正时间演化 $\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -i[\hat{H}(t),\hat{\rho}(t)]$。第一种应用是考虑 $H(t)$ 的（瞬时）能量本征态 $|E_\alpha\rangle$ $(\alpha = 1,2,\cdots)$。我们可以取

$$\hat{\Lambda}_\mu = \frac{|E_\mu\rangle\langle E_\mu|}{\sqrt{\langle E_\mu|\hat{\rho}|E_\mu\rangle}}, \tag{D1}$$

它们满足正交归一化条件。因此我们有

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \sum_\mu \frac{\langle E_\mu|\{\hat{\rho},\hat{A}\}|E_\mu\rangle^2}{4\langle E_\mu|\hat{\rho}|E_\mu\rangle}}\sqrt{I_Q}. \tag{D2}$$

另一个例子是，在混合态下取 $\hat{\rho}(=\hat{\rho}(t))$ 的幂，因为纯度守恒，所以 $d\langle\hat{\rho}^n\rangle/dt = 0$。这里我们考虑最简单的情形 $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\mathbb{I}}$ 和 $\hat{\Lambda}_2 = (\hat{\rho} - \langle\hat{\rho}\rangle)/\sqrt{\langle(\hat{\rho} - \langle\hat{\rho}\rangle)^2\rangle}$。在这种情况下，我们发现

$$\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right| \le \Delta A\sqrt{I_Q}\sqrt{1-\phi_{A\rho}^2}. \tag{D3}$$

附录E：公式（62）的证明

我们将哈密顿量表示为

$$\hat{H} = h_I\hat{\mathbb{I}} + h_x\hat{\sigma}^x + h_y\hat{\sigma}^y + h_z\hat{\sigma}^z. \tag{E1}$$

我们有

$$\Delta H^2 = h_x^2(1-\langle\hat{\sigma}^x\rangle^2)+h_y^2(1-\langle\hat{\sigma}^y\rangle^2)+h_z^2(1-\langle\hat{\sigma}^z\rangle^2) - 2h_xh_y\langle\hat{\sigma}^x\rangle\langle\hat{\sigma}^y\rangle - 2h_xh_z\langle\hat{\sigma}^x\rangle\langle\hat{\sigma}^z\rangle - 2h_zh_y\langle\hat{\sigma}^z\rangle\langle\hat{\sigma}^y\rangle \tag{E2}$$

and

$$\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}^x\rangle}{dt}\right|^2 = 4(h_y\langle\hat{\sigma}^z\rangle - h_z\langle\hat{\sigma}^y\rangle)^2$$
$$\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}^y\rangle}{dt}\right|^2 = 4(h_x\langle\hat{\sigma}^z\rangle - h_z\langle\hat{\sigma}^x\rangle)^2$$
$$\left|\frac{d\langle\hat{\sigma}^z\rangle}{dt}\right|^2 = 4(h_y\langle\hat{\sigma}^x\rangle - h_x\langle\hat{\sigma}^y\rangle)^2. \tag{E3}$$

使用 $\langle\hat{\sigma}^x\rangle^2+\langle\hat{\sigma}^y\rangle^2+\langle\hat{\sigma}^z\rangle^2=1$，我们得到公式 (62)。

附录 F：公式 (73) 的证明

为证明公式 (73)，我们首先注意到

$$\begin{aligned} B_k &= \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu \langle\hat{A}_k,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu \langle\hat{A}_k,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_1\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu \langle\hat{A}_k,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_1 - \sum_\mu \langle\hat{L}_1,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu\right\rangle \end{aligned} \tag{F1}$$

对于 $1\le k\le K$。

接下来考虑 $(K+1)$ 维向量 $\vec{B}'$，其定义为

$$\vec{B}' = \left(\vec{B}, \left\langle \hat{L}_2 - \sum_\mu \langle\hat{L}_2,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_1 - \sum_\mu \langle\hat{L}_1,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu\right\rangle\right)^{\mathsf{T}}. \tag{F2}$$

与附录 A 中类似，我们有

$$(\vec{B}')^{\mathsf{T}}(D')^{-1}\vec{B}' \le \mathcal{F}_{11}, \tag{F3}$$

其中，$\mathcal{F}_{zz'}$ 由公式 (74) 给出，而 D' 经分块对角化后表示为

$$D' = \begin{pmatrix} D & \vec{0} \\ \vec{0}^{\mathsf{T}} & \mathcal{F}_{22}\end{pmatrix}, \tag{F4}$$

其中我们使用了关系式

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu \langle\hat{A}_k,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_2\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{A}_k - \sum_\mu \langle\hat{A}_k,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu, \hat{L}_2 - \sum_\mu \langle\hat{L}_2,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu\right\rangle. \end{aligned} \tag{F5}$$

然后我们有

$$(D')^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^{\mathsf{T}} & \mathcal{F}_{22}^{-1}\end{pmatrix}. \tag{F6}$$

由公式 (F4)，我们立即得到公式 (73)：

$$\vec{B}^{\mathsf{T}}D^{-1}\vec{B} \le \mathcal{F}_{11} - \frac{\mathcal{F}_{12}^2}{\mathcal{F}_{22}} = \frac{\mathrm{Det}[\mathcal{F}]}{\mathcal{F}_{22}}. \tag{F7}$$

虽然我们已从上文的 $\sum_\mu \langle\hat{L}_k,\hat{\Lambda}_\mu\rangle\hat{\Lambda}_\mu\hat{}\ L_k$ 中减去了该项，但不进行这项减法也可以作类似讨论。在这种情况下，我们得到

$$\vec{B}^{\mathsf{T}}D^{-1}\vec{B} \le \mathcal{I}_{11} - \frac{\mathcal{I}_{12}^2}{\mathcal{I}_{22}} = \frac{\mathrm{Det}[\mathcal{I}]}{\mathcal{I}_{22}}. \tag{F8}$$

相反。

附录 G：基于概率局部守恒定律的多个可观测量速度极限

这里，我们将详细讨论基于概率局域守恒律的多个可观测量速度极限。

1. 多个可观测量情形的推导

虽然我们可以考虑经典和量子系统，但为保持一般性，这里采用量子描述。我们假设（不变）可观测量在 i 基下是对角的，即，

$$\hat{A}_k = \sum_i (a_k)_i |i\rangle\langle i| \tag{G1}$$

and

$$\hat{\Lambda}_\nu = \sum_i (\lambda_\nu)_i |i\rangle\langle i|. \tag{G2}$$

我们还假设$\hat{}\nabla\Lambda_\nu$满足正交归一化条件，而不是 Λ_ν。也就是说，

$$\langle\nabla\Lambda_\mu,\nabla\Lambda_\nu\rangle_r = \delta_{\mu\nu}. \tag{G3}$$

多可观测量界的证明与附录 A 中的证明类似。让我们考虑如附录 A 所示、具有多个参数 $y_1,\cdots,y_Z$的一般情形，并假设连续性方程

$$\partial_{y_z}p_i = -\sum_{j(\neq i)} J_{ji}^z, \tag{G4}$$

我们首先注意到，式（A1）中的 B_{kz} 由下式给出。

$$B_{kz} = \langle\nabla A_k, \mathbf{u}_z\rangle_r \tag{G5}$$

其中 $(\mathbf{u}_z)_{ij} = J^z_{ij}/r_{ij}$。由于我们假设不变算符对于所有 z 和 μ 均满足 $\partial_{y_z}\langle\Lambda_\mu\rangle - \langle\partial_{y_z}\Lambda_\mu\rangle = 0$，因此有 $\langle\nabla\Lambda_\mu,\ \mathbf{u}_z\rangle_r = 0$。于是我们有

$$\sum_{kz} a_k b_z B_{kz} = \left\langle \sum_k a_k \left(\nabla A_k - \sum_\mu f'_{k\mu}\nabla\Lambda_\mu\right), \sum_z b_z \mathbf{u}_z \right\rangle_r . \tag{G6}$$

对于实向量 $(a_1,\cdots,a_K)$、$(b_1,\cdots,b_Z)$ 和 $\{f'_{k\mu}\}$。与附录 A 中一样，我们发现，与其他选择相比，$f'_{k\mu} = \langle\nabla A_k, \nabla\Lambda_\mu\rangle_r$ 给出了紧界，因此以下我们假设采用这一选择。

利用柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\sum_{kzk'z'} a_k a_{k'} b_z b_{z'} B_{kz} B_{k'z'} \le \sum_{kzk'z'} a_k a_{k'} b_z b_{z'} \mathcal{D}_{kk'}\mathcal{U}_{zz'}, \tag{G7}$$

其中

$$\mathcal{D}_{kk'} := \langle\nabla A_k, \nabla A_{k'}\rangle_r - \sum_\mu \langle\nabla A_k, \nabla\Lambda_\mu\rangle_r \langle\nabla\Lambda_\mu, \nabla A_{k'}\rangle_r \tag{G8}$$

and

$$\mathcal{U}_{zz'} := \langle\mathbf{u}_z, \mathbf{u}_{z'}\rangle_r . \tag{G9}$$

与附录 A 中一样，我们可以证明两个等价的矩阵不等式。

$$B^\mathsf{T}\mathcal{D}^{-1}B \preceq \mathcal{U} \tag{G10}$$

and

$$B\mathcal{U}^{-1}B^\mathsf{T} \preceq \mathcal{D}. \tag{G11}$$

如果我们取 $Z = 1$，则 (G7) 表明

$$\vec{B}\vec{B}^\mathsf{T} \preceq \mathcal{D}U \tag{G12}$$

and

$$\vec{B}^\mathsf{T}\mathcal{D}^{-1}\vec{B} \le U, \tag{G13}$$

这正是我们在正文中所展示的结果。如果我们改为考虑 $K = 1$ 和 $Z \neq 1$，则可以得到一个矩阵不等式。

$$\vec{\mathsf{B}}\vec{\mathsf{B}}^\mathsf{T} \preceq \mathcal{U}\left(\langle\nabla A,\nabla A\rangle_r - \sum_\mu \langle\nabla A,\nabla\Lambda_\mu\rangle_r^2\right) \tag{G14}$$

以及一个标量不等式

$$\vec{\mathsf{B}}^\mathsf{T}\mathcal{U}^{-1}\vec{\mathsf{B}} \le \left(\langle\nabla A,\nabla A\rangle_r - \sum_\mu \langle\nabla A,\nabla\Lambda_\mu\rangle_r^2\right), \tag{G15}$$

其中我们假设 $\mathcal{U}$ 有逆。

2. 正文中式 (105) 的推导

我们在正文中推导式（105），假设单粒子量子系统的哈密顿量为

见式 (94) 中给出。我们取 $M = 0$，即忽略与 $\nabla\Lambda_\mu$ 有关的项。

我们首先证明，若对于所有 i 和 j，$r_{ij} \le r'_{ij}$，则有一个矩阵不等式 $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$，其中 $\mathcal{D}_{kk'} := \langle\nabla A_k,\ \nabla A_{k'}\rangle_r$ 且 $\mathcal{D}'_{kk'} := \langle\nabla A_k,\ \nabla A_{k'}\rangle_{r'}$。事实上，$\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ 的矩阵元可表示为

$$\mathcal{D}'_{kk'} - \mathcal{D}_{kk'} = \langle\nabla A_k, \nabla A_{k'}\rangle_{r'-r}, \tag{G16}$$

其为半正定。因此，$\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$ 成立，进而

$$\vec{B}^\mathsf{T}\mathcal{D}'^{-1}\vec{B} \le \vec{B}^\mathsf{T}\mathcal{D}^{-1}\vec{B} \le U. \tag{G17}$$

现在我们来考察

$$r_{ij} = |H_{ij}\rho_{ji}| \le r'_{ij} = |H_{ij}|\frac{p_i + p_j}{2} \tag{G18}$$

其中 $H_{ij} = J_h\ (\delta_{i,\ j+1} + \delta_{i,\ j-1})$。在这种情况下，

$$\mathcal{D}'_{kk'} := J_h \sum_i \frac{p_i}{2}\left((\nabla A_k)_{i,i+1}(\nabla A_{k'})_{i,i+1} + (\nabla A_k)_{i,i-1}(\nabla A_{k'})_{i,i-1}\right), \tag{G19}$$

其中我们忽略边界贡献，假设当 $i \to \pm\infty$ 时，p_i 趋于零。

对于 $K = 2$，我们尤其有

$$\frac{\mathcal{D}'_{22}|\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt}|^2 - 2\mathcal{D}'_{12}\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt}\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt} + \mathcal{D}'_{11}|\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt}|^2}{\mathcal{D}'_{11}\mathcal{D}'_{22} - |\mathcal{D}'_{12}|^2} \le U, \tag{G20}$$

其中 $U \le 2C_H - 2E^2_{\rm trans}/C_H$（见（90））。注意到 $C_H = 2J_h$，并引入 $\mathcal{C} = \mathcal{D}'/J_h$，我们得到

$$\frac{\mathcal{C}_{22}|\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt}|^2 - 2\mathcal{C}_{12}\frac{d\langle\hat{A}_1\rangle}{dt}\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt} + \mathcal{C}_{11}|\frac{d\langle\hat{A}_2\rangle}{dt}|^2}{\mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22} - |\mathcal{C}_{12}|^2} \le 4J_h U. \tag{G21}$$

最后，通过直接计算即可得到正文中的式（105）：

$$\begin{aligned}|\mathcal{V}_1 - \tilde{\chi}\mathcal{V}_2| &\le \sqrt{(1-\tilde{\chi}^2)(4J_hU - \mathcal{V}_2^2)} \\ &\le \sqrt{(1-\tilde{\chi}^2)(4J_h^2 - E^2_{\rm trans} - \mathcal{V}_2^2)},\end{aligned} \tag{G22}$$

其中 $\mathcal{V}_k := \frac{d\langle\hat{A}_k\rangle}{dt}/\sqrt{\mathcal{C}_{kk}}$，且 $\tilde{\chi} := \mathcal{C}_{12}/\sqrt{\mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22}} \le 1$。

例如，考虑位置算符 $\hat{A}_1 = \hat{x} = \sum_i i\,|i\rangle\langle i|$ 以及奇偶密度不平衡算符 $\hat{s} = \sum_i (4\lfloor i/2\rfloor - 2i + 1)\,|i\rangle\langle i|$。于是我们有

$$(\nabla x)_{i,i+1} = 1, \quad (\nabla s)_{i,i+1} = -2(-1)^i, \tag{G23}$$

以及 $\mathcal{C}_{11} = 1$，$\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{21} = 0$ 和 $\mathcal{C}_{22} = 4$。因此，$\tilde{\chi} = 0$，并且我们有

$$|\partial_t\langle\hat{x}\rangle|^2 + \frac{|\partial_t\langle\hat{s}\rangle|^2}{4} \le 4J_h^2 - E^2_{\rm trans}. \tag{G24}$$

[1] H. B. Callen, 《热力学与热统计学导论》（1998年）。[2] P. Mazur，某些系统中相函数的非遍历性，《Physica》43卷，533页（1969年）。[3] M. Suzuki，遍历性、运动常数与磁化率的界，《Physica》51卷，277页（1971年）。[4] X. Zotos、F. Naef 和 P. Prelovsek，输运与守恒定律，《物理评论B》55卷，11029页（1997年）。[5] M. Rigol、V. Dunjko、V. Yurovsky 和 M. Olshanii，完全可积多体量子系统中的弛豫：对一维晶格硬核玻色子高激发态动力学的第一性原理研究，《物理评论快报》98卷，050405页（2007年）。[6] A. C. Barato 和 U. Seifert，生物分子过程的热力学不确定性关系，《物理评论快报》114卷，158101页（2015年）。[7] T. R. Gingrich、J. M. Horowitz、N. Perunov 和 J. L. England，耗散限制所有稳态电流涨落，《物理评论快报》116卷，120601页（2016年）。[8] J. M. Horowitz 和 T. R. Gingrich，热力学不确定关系约束非平衡涨落，《Nature Physics》16卷，15页（2020年）。[9] A. Dechant，多维热力学不确定关系，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》52卷，035001页（2018年）。[10] A. Dechant 和 S.-i. Sasa，利用关联改进热力学界，《物理评论X》11卷，041061页（2021年）。[11] L. Mandelstam 和 I. Tamm，非相对论量子力学中的能量—时间不确定性关系，《J. Phys.》9卷，249页（1945年）。[12] G. N. Fleming，非定态演化的幺正性界，《Il Nuovo Cimento A》（1965-1970）16卷，232页（1973年）。[13] K. Bhattacharyya，量子衰变与Mandelstam-Tamm能量不等式，《Journal of Physics A: Mathematical and General》16卷，2993页（1983年）。[14] J. Anandan 和 Y. Aharonov，量子演化几何，《物理评论快报》65卷，1697页（1990年）。[15] P. Pfeifer，量子态随时间变化的速度有多快? 《物理评论快报》70卷，3365页（1993年）。[16] N. Margolus 和 L. B. Levitin，动力学演化的最大速度，《Physica D: Nonlinear Phenomena》120卷，188页（1998年）。[17] V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone，动力学演化的量子极限，《物理评论A》67卷，052109页（2003年）。[18] L. B. Levitin 和 T. Toffoli，量子动力学速率的基本极限：统一界是紧的，《物理评论快报》103卷，160502页（2009年）。[19] D. Mondal、C. Datta 和 S. Sazim，量子相干性决定混合态的量子速度极限，《Physics Letters A》380卷，689页（2016年）。[20] I. Marvian、R. W. Spekkens 和 P. Zanardi，量子速度极限、相干性与非对称性，《物理评论A》93卷，052331页（2016年）。[21] F. Campaioli、F. A. Pollock、F. C. Binder 和 K. Modi，收紧几乎所有态的量子速度极限，《物理评论快报》120卷，060409页（2018年）。[22] N. Il'in 和 O. Lychkovskiy，热态的量子速度极限，《物理评论A》103卷，062204页（2021年）。[23] G. Ness、A. Alberti 和 Y. Sagi，《有界能谱量子态的量子速度极限》，《物理评论快报》**129**，140403（2022年）。[24] E. O'Connor、G. Guarnieri 和 S. Campbell，《作用量量子速度极限》，《物理评论A》**103**，022210（2021年）。[25] S. Deffner 和 S. Campbell，《量子速度极限：从海森堡不确定性原理到最优量子控制》，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》**50**，453001（2017年）。[26] Z. Gong 和 R. Hamazaki，《非平衡量子动力学中的界》，International Journal of Modern Physics B **36**，2230007（2022年）。[27] M. G. Bason、M. Viteau、N. Malossi、P. Huillery、E. Arimondo、D. Ciampini、R. Fazio、V. Giovannetti、R. Mannella 和 O. Morsch，《高保真量子驱动》，《Nature Physics》**8**，147（2012年）。[28] M. R. Lam、N. Peter、T. Groh、W. Alt、C. Robens、D. Meschede、A. Negretti、S. Montangero、T. Calarco 和 A. Alberti，《展示原子远距离量子态之间的量子最短时间路径》，《物理评论X》**11**，011035（2021年）。[29] G. Ness、M. R. Lam、W. Alt、D. Meschede、Y. Sagi 和 A. Alberti，《观测量子速度极限之间的交叉》，Science advances **7**，eabj9119（2021年）。[30] M. M. Taddei、B. M. Escher、L. Davidovich 和 R. L. de Matos Filho，《物理过程的量子速度极限》，《物理评论快报》**110**，050402（2013年）。[31] S. Deffner 和 E. Lutz，《非马尔可夫动力学的量子速度极限》，《物理评论快报》**111**，010402（2013年）。[32] A. del Campo、I. L. Egusquiza、M. B. Plenio 和 S. F. Huelga，《开放系统动力学中的量子速度极限》，《物理评论快报》**110**，050403（2013年）。[33] Z.-Y. Xu、S. Luo、W. L. Yang、C. Liu 和 S. Zhu，《记忆环境中的量子加速》，《物理评论A》**89**，012307（2014年）。[34] Y.-J. Zhang、W. Han、Y.-J. Xia、J.-P. Cao 和 H. Fan，《任意初态的量子速度极限》，Scientific reports **4**，1（2014年）。[35] N. Mirkin、F. Toscano 和 D. A. Wisniacki，《开放量子演化中的量子速度极限界》，《物理评论A》**94**，052125（2016年）。[36] K. Funo、N. Shiraishi 和 K. Saito，《开放量子系统的速度极限》，《新物理学杂志》**21**，013006（2019年）。[37] M. Okuyama 和 M. Ohzeki，《量子速度极限并非量子的》，《物理评论快报》**120**，070402（2018年）。[38] B. Shanahan、A. Chenu、N. Margolus 和 A. del Campo，《跨越量子到经典转变的量子速度极限》，《物理评论快报》**120**，070401（2018年）。[39] S. Ito，《信息几何的随机热力学解释》，《物理评论快报》**121**，030605（2018年）。[40] S. Ito 和 A. Dechant，《随机时间演化、信息几何与克拉美-罗界》，《物理评论X》**10**，021056（2020年）。[41] S. B. Nicholson、L. P. Garcia-Pintos、A. del Campo 和 J. R. Green，《热力学中的时间–信息不确定性关系》，《Nature Physics》**16**，1211（2020年）。[42] N. Shiraishi、K. Funo 和 K. Saito，《经典随机过程的速度极限——

经典随机过程的速度极限》，《物理评论快报》121，070601（2018年）。[43] G. Falasco 和 M. Esposito，《耗散-时间不确定性关系》，《物理评论快报》125，120604（2020年）。[44] K. Adachi、R. Iritani 和 R. Hamazaki，《非线性种群动力学的普适约束》，Communications Physics 5，129（2022年）。[45] L. P. García-Pintos，《多样性和适应度不确定性使进化速率更快》，arXiv 预印本 arXiv:2202.07533（2022年）。[46] M. Hoshino、R. Nagayama、K. Yoshimura、J. F. Yamagishi 和 S. Ito，《进化过程中自然选择加速的几何速度极限》，arXiv 预印本 arXiv:2207.04640 （2022 年）。[47] A. Uhlmann，《能量色散估计》，《Physics Letters A》161，329（1992年）。[48] P. J. Jones 和 P. Kok，《量子速度极限的几何推导》，《物理评论A》82，022107（2010年）。[49] S. Deffner 和 E. Lutz，《受驱动量子系统的能量–时间不确定性关系》，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》46，335302（2013年）。[50] D. P. Pires、L. C. Celeri 和 D. O. Soares-Pinto，《量子相干性度量的几何下界》，《物理评论A》91，042330（2015年）。[51] D. P. Pires、M. Cianciaruso、L. C. Celeri、G. Adesso 和 D. O. Soares-Pinto，《广义几何量子速度极限》，《物理评论X》6，021031（2016年）。[52] L. P. García-Pintos、S. B. Nicholson、J. R. Green、A. del Campo 和 A. V. Gorshkov，《统一可观测量的量子与经典速度极限》，《物理评论X》12，011038（2022年）。[53] A. Dechant 和 S.-i. Sasa，《朗之万系统中电流的熵界》，《物理评论E》97，062101（2018年）。[54] T. Van Vu 和 Y. Hasegawa，《马尔可夫系统不可逆性的几何界》，《物理评论快报》126，010601（2021年）。[55] M. Nakazato 和 S. Ito，《基于瓦瑟斯坦距离的随机热力学熵产生的几何方面》，《物理评论研究》3，043093（2021年）。[56] A. Dechant、S.-i. Sasa 和 S. Ito，《非平衡系统中熵产生的几何分解》，《物理评论研究》4，L012034（2022年）。[57] A. Dechant，《连续时间马尔可夫过程的最小熵产生、细致平衡与瓦瑟斯坦距离》，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》55，094001（2022年）。[58] R. Hamazaki，《宏观跃迁的速度极限》，PRX Quantum 3，020319（2022年）。[59] T. Van Vu 和 K. Saito，《最优输运的热力学统一：热力学不确定性关系、最小耗散与热力学速度极限》，《物理评论X》13，011013（2023年）。[60] K. Yoshimura、A. Kolchinsky、A. Dechant 和 S. Ito，《一般非线性动力学的维持熵产生与超额熵产生》，《物理评论研究》5，013017（2023年）。[61] T. Van Vu 和 K. Saito，《拓扑速度极限》，《物理评论快报》130，010402（2023年）。[62] M.-H. Yung，《一维中完美态传输的量子速度极限》，《物理评论A》74，030303(R)（2006年）。[63] T. Caneva、M. Murphy、T. Calarco、R. Fazio、S. Montangero、V. Giovannetti 和 G. E. Santoro，《量子速度极限下的最优控制

’《物理评论快报》103卷, 240501 (2009年)。[64] M. Murphy, S. Montangero, V. Giovannetti 和 T. Calarco，沿自旋链的量子速度极限通信，《物理评论A》82, 022318 (2010)。[65] S. Ashhab, P. C. de Groot 和 F. Nori，多量子比特系统中量子门的速度极限，《物理评论A》85, 052327 (2012)。[66] M. Bukov, D. Sels 和 A. Polkovnikov，可访问多体态制备的几何速度极限，《物理评论X》9, 011034 (2019)。[67] S. Campbell 和 S. Deffner，绝热捷径中速度与成本之间的权衡，《物理评论快报》118, 100601 (2017)。[68] K. Funo, J.-N. Zhang, C. Chatou, K. Kim, M. Ueda 和 A. del Campo，通过反绝热驱动实现绝热捷径期间的普适功涨落，《物理评论快报》118, 100602 (2017)。[69] V. Giovannetti, S. Lloyd 和 L. Maccone，量子增强的位置测量与时钟同步，《自然》412, 417 (2001)。[70] V. Giovannetti, S. Lloyd 和 L. Maccone，量子增强测量：超越标准量子极限，《科学》306, 1330 (2004)。[71] G. T´oth 和 I. Apellaniz，从量子信息科学视角看量子计量学，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》47, 424006 (2014)。[72] B. Mohan 和 A. K. Pati，可观测量的量子速度极限，《物理评论A》106, 042436 (2022)。[73] N. Shiraishi 和 K. Saito，与一般环境耦合的开放系统的速度极限，《物理评论研究》3, 023074 2021( )。[74] S. Das 和 J. R. Green，确定性混沌与耗散的速度极限，《物理评论研究》5, L012016 (2023)。[75] V. Gorini, A. Kossakowski 和 E. C. G. Sudarshan，n能级系统的完全正动力半群，《数学物理杂志》17, 821 (1976)。[76] G. Lindblad，量子动力半群的生成元，《数学物理通讯》48, 119 (1976)。[77] J. Liu, H. Yuan, X.-M. Lu 和 X. Wang，量子费舍尔信息矩阵与多参数估计，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》53, 023001 (2019)。[78] 如果 D 具有 K 零本征值，我们可以构造一个投影算符 $\mathcal{P}$ ，投影到不含零本征值的子空间。从公式 (10) 中的矩阵不等式可得 $\hat{}\mathcal{P}\vec{B}\vec{B}^{\intercal}\hat{}\mathcal{P} \preceq \hat{}\mathcal{P}D\hat{}\mathcal{P}$。当我们将 $\hat{}\mathcal{P}D\hat{}\mathcal{P}$ 视为一个 $\bar{}\quad\quad\bar{}(K-K)\times(K-K)$矩阵时，它是正定的并且具有逆矩阵。因此，将$D$ 替换为 $\hat{}\mathcal{P}D\hat{}\mathcal{P}$后，公式 (12) 仍然成立。[79] M. Tsang, F. Albarelli 和 A. Datta，量子半参数估计，《物理评论X》10, 031023 (2020)。[80] M. Mierzejewski 和 L. Vidmar，运动积分对本征态热化假说的定量影响，《物理评论快报》124, 040603 (2020)。[81] E. Schr¨odinger，关于海森堡不确定关系，arXiv预印本 quant-ph/9903100 (1999)。[82] S. B. Nicholson 和 J. R. Green，基于信息回归的热力学速度极限，arXiv预印本 arXiv:2105.01588 (2021)。

[83]严格来说，即使在经典情形下，算符也可以反对易$\{\hat{}A_k, \hat{}A_l\} = 0$ ($k \neq l$)，此时它们也会对易 $[\hat{}A_k, \hat{}A_l] = 0$。然而，这类算符仅限于满足 $\hat{}A_k \hat{}A_l = \hat{}A_l \hat{}A_k = 0$($k \neq l$) 的平凡算符。在这种情况下，每个算符 $\hat{}A_k$ 都应作用于不同的希尔伯特子空间 $\mathcal{H}_k$，并据此将总希尔伯特空间作正交分解为 $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$。相比之下，通过允许非对易性，反对易关系可以适用于更为非平凡的算符集合；这些算符作用于同一希尔伯特空间，而无需进行正交分解。[84] J. Maldacena 和 D. Stanford，关于 Sachdev–Ye–Kitaev 模型的评述，《物理评论D》94, 106002 (2016)。[85] Y. Hasegawa，热力学关联不等式，arXiv预印本 arXiv:2301.03060 (2023)。[86] M. A. Nielsen 和 I. Chuang，量子计算与量子信息 (2002)。[87] 事实上，相对于描述该系统的图的顶点基，可观测量应当是对角的。[88] E. H. Lieb 和 D. W. Robinson，量子自旋系统的有限群速度，载于 *Statistical mechanics*（Springer, 1972），第 425–431 页。[89] B. Nachtergaele 和 R. Sims，Lieb-Robinson 界与指数聚集定理，《数学物理通讯》265, 119 (2006)。[90] S. Bravyi, M. B. Hastings 和 F. Verstraete，Lieb-Robinson 界、关联的生成与拓扑量子序，《物理评论快报》97, 050401 (2006)。[91] N. Lashkari, D. Stanford, M. Hastings, T. Osborne 和 P. Hayden，迈向快速扰乱猜想，《高能物理学杂志》2013, 1 (2013)。[92] D. A. Abanin, W. De Roeck 和 F. Huveneers，周期驱动多体系统中的指数缓慢加热，《物理评论快报》115, 256803 (2015)。[93] T. Kuwahara, T. Mori 和 K. Saito，周期驱动多体量子系统中的 Floquet–Magnus 理论与一般瞬态动力学，《物理学年鉴》367, 96 (2016)。[94] D. Abanin, W. De Roeck, W. W. Ho 和 F. Huveneers，周期驱动封闭量子系统中多体预热化的严格理论，《数学物理通讯》354, 809 (2017)。[95] I. Kukuljan, S. Grozdanov 和 T. Prosen，弱量子混沌，《物理评论B》96, 060301(R) (2017)。[96] Z. Gong, N. Yoshioka, N. Shibata 和 R. Hamazaki，受约束量子动力学的普适误差界，《物理评论快报》124, 210606 (2020)。[97] Z. Gong, N. Yoshioka, N. Shibata 和 R. Hamazaki，有能隙量子系统中受约束动力学的误差界：严格结果与推广，《物理评论A》101, 052122 (2020)。[98] C. Villani，*Optimal transport: old and new*，338卷（Springer, 2009）。[99] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii 和 S. Stringari，囚禁气体中玻色–爱因斯坦凝聚理论，《现代物理评论》71, 463 (1999)。[100] A. Dechant 和 S.-i. Sasa，一般朗之万系统中的电流涨落与输运效率，《Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment》2018, 063209 (2018)。

[101] V. Pandey、D. Shrimali、B. Mohan、S. Das 和 A. K. Pati，二体量子系统中关联的速度极限，arXiv 预印本 arXiv:2207.05645（2022年）。[102] N. Carabba、N. H¨ornedal 和 A. del Campo，算符流和关联函数的量子速度极限，《Quantum》6，884（2022年）。[103] N. H¨ornedal、N. Carabba、K. Takahashi 和 A. del Campo，几何算符量子速度极限、Wegner哈密顿流与算符增长，arXiv 预印本 arXiv:2301.04372（2023年）。[104] R. Hamazaki，涨落动力学的极限，arXiv 预印本 arXiv:2309.07301（2023年）。[105] S. Deffner，量子速度极限与信息产生的最大速率，《物理评论研究》2，013161（2020年）。[106] D. P. Pires、K. Modi 和 L. C. C´eleri，广义相对熵的界定：非渐近量子速度极限，《物理评论E》103，032105（2021年）。[107] B. Mohan、S. Das 和 A. K. Pati，信息与相干性的量子速度极限，《新物理学杂志》24，065003（2022年）。[108] F. Campaioli、C.-s. Yu、F. A. Pollock 和 K. Modi，资源速度极限：资源变化的最大速率，《新物理学杂志》24，065001（2022年）。[109] D. P. Pires，非幺正动力学的统一熵与量子速度极限，《物理评论A》106，012403（2022年）。[110] V. Pandey、S. Bhowmick、B. Mohan、U. Sen、 *et al.*，二体量子系统纠缠动力学的基本速度极限，arXiv 预印本 arXiv:2303.07415（2023年）。[111] N. H¨ornedal、N. Carabba、A. S. Matsoukas-Roubeas 和 A. del Campo，算符复杂度增长的终极速度极限，《通信物理》5，207（2022年）。[112] S. Goldstein、T. Hara 和 H. Tasaki，宏观量子系统趋近平衡过程中的时间尺度，《物理评论快报》111，140401（2013年）。[113] S. Goldstein、T. Hara 和 H. Tasaki，典型非平衡子空间中宏观量子系统的极快热化，《新物理学杂志》17，045002（2015年）。[114] P. Reimann，封闭多体系统中的典型快速热化过程，《自然·通讯》7，1（2016年）。[115] T. R. de Oliveira、C. Charalambous、D. Jonathan、M. Lewenstein 和 A. Riera，封闭多体量子系统中的平衡化时间尺度，《新物理学杂志》20，033032（2018年）。[116] M. Schiulaz、E. J. Torres-Herrera 和 L. F. Santos，多体量子系统中的 Thouless 时间尺度与弛豫时间尺度，《物理评论B》99，174313（2019年）。[117] L. P. Garc´ıa-Pintos、N. Linden、A. S. L. Malabarba、A. J. Short 和 A. Winter，物理相关可观测量的平衡化时间尺度，《物理评论X》7，031027（2017年）。[118] J. Eisert、M. Friesdorf 和 C. Gogolin，非平衡态下的量子多体系统，《Nature Physics》11，124（2015年）。[119] F. Albarelli 和 R. Demkowicz-Dobrza´nski，多参数噪声量子计量中的探针不相容性，《物理评论X》12，011039（2022年）。[120] P. Weinberg 和 M. Bukov，QuSpin：用于量子动力学和精确对角化的 Python软件包。

多体系统第一部分：自旋链，SciPost Phys. **2**, 003 (2017)。[121] P. Weinberg 和 M. Bukov，Quspin：用于动力学和量子精确对角化的 Python 包——tum 多体系统。第二部分：玻色子、费米子和高自旋，SciPost Phys **7卷**, 97 (2019).