具有一个奇维的环面超簇

ERIC JANKOWSKI

Abstract. 本文阐述环面超簇的概念，将经典情形中的环面簇概念推广至此。我们利用带装饰的多面扇，对具有一个奇维的拟正规环面超簇范畴作出组合诠释。随后，我们运用这种诠释计算这些超簇的一些不变量，并从中提取几何信息。

arXiv:2305.03213v1 [math.AG] 5 May 2023

1. Introduction

环面簇是代数几何中一类丰富而有趣、性质良好的例子。许多重要的簇都是环面簇：仿射空间、射影空间、希策布鲁赫曲面，以及不计其数的其他例子。环面簇（尤其是正规环面簇）可以用纯粹的组合数据来描述，这一特点使我们无需大量计算，就能迅速了解给定簇的重要信息。因此，环面簇为代数几何与多面组合学搭建了一本简明的词典。

自然地，我们可以问这种理论在多大程度上能够推广到超情形。当然，首先需要定义代数超环面的概念。 [5], 中提出了一种合适的思路：若李超代数 $\mathfrak{t}$ 满足 $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_0] = 0$, 则称其为准环面。极大准环面子代数在李超代数理论中的作用，与极大环面子代数在通常情形中的作用相同。遵循这一类比，代数超环面将是一个底层簇为环面且其李超代数为准环面的超群。

这个定义使我们能够考虑具有超环面开稠密轨道的超簇，我们发现它们与经典环面簇具有许多相似之处。经典理论中最重要的结果之一，给出了正规环面簇与多面扇之间的范畴等价。本文表明，在具有一个奇维的超情形中，可以利用带装饰扇构造出类似的范畴等价。

1.1. 论文结构。在第2节中，我们描述环面簇的组合方法，主要遵循 [2]。在第3节中，我们概述代数超几何的基础，遵循 [1]。在第4节中，我们研究代数超环面及其分类数据。

在第5节和第6节中，我们将环面簇的大部分经典理论推广到具有一个奇维的超几何情形。这一处理包括具有一个奇维的仿射环面超簇的若干等价构造，以及对具有一个奇维的准正规环面超簇范畴的组合描述。此外，利用 [3] 的Duflo-Serganova函子，为这些环面超簇提供了一个有趣的不变量。

作为这些组合学的应用，在第7节中，我们给出了环面超簇的分裂性和光滑性的判据。我们还刻画了环面超簇中点的轨道和稳定子，并确定了在具有一个奇维的拟正规环面超簇范畴中纤维积存在的条件。

2020年数学主题分类。14A22、14L30、14M25、14M30。关键词和短语。代数超簇、代数超群作用、环面簇。

1.2. 致谢。作者感谢他的导师 Vera Serganova，感谢她激发了作者对代数超几何的兴趣，并就环面超簇开展了许多有益的讨论。本材料基于美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划在资助编号 2146752 项下支持的研究工作。

2. Toric varieties

我们的基域是 $\mathbb{C}$，不过同样也可以在任意特征零代数闭域上进行研究。

2.1. 代数环面。

定义 2.1. 代数环面是一种代数群 T，它与某个 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 同构，其中 $\mathbb{C}^\times \cong \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是复数乘法群。

环面 T 既有特征格 $M = \operatorname{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$，也有余特征格 $N = \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$。这两个格互为对偶，并存在非退化完美配对

$$\langle , \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$$

由复合代数群态射 $\mathbb{C}^\times \to T \to \mathbb{C}^\times$ 给出。给定任意格 N，可以定义环面 $T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$，并注意到 T_N 的余特征格为 N，特征格为 $M = N^*$。特征格 M 自然构成 T_N 上正则函数的一组基，也就是说，坐标环满足 $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$。

如果我们固定一个识别 $N \cong \mathbb{Z}^n$，则同样得到 $M \cong \mathbb{Z}^n$ 和 $T_N \cong (\mathbb{C}^\times)^n$，因此 $\mathbb{C}[T_N] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$。

2.2. 仿射环面簇。

定义 2.2. 环面簇是一个（不可约）代数簇 X，其中包含环面 T 作为扎里斯基开子集，并且 T 对自身的作用可以扩展为 T 在整个代数簇上的代数作用。

仿射环面簇可以通过多种等价方式构造。首先，给定格 M' 中的有限集 $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_r\}$，可以定义 $N' = (M')^*$，随后定义一个簇态射

$$\Phi_{\mathscr{A}} : T_{N'} \to \mathbb{C}^r$$

由 $\Phi_{\mathscr{A}}(t) = (t^{m_1}, ..., t^{m_r})$ 给出。像 $\Phi_{\mathscr{A}}(T_{N'}) \subseteq \mathbb{C}^r$ 的扎里斯基闭包成为一个仿射环面簇 $Y_{\mathscr{A}}$，其环面为 $\Phi_{\mathscr{A}}(T_{N'}) \cong T_{(\mathbb{Z}\mathscr{A})^*}$。

这类 $\mathbb{C}^r$ 子簇也可以通过其环面理想来刻画；这些理想是如下形式的素理想：

$$(x^{\ell_+} - x^{\ell_-} \mid \ell_+, \ell_- \in \mathbb{N}^s \text{ and } \ell_+ - \ell_- \in L)$$

对于某个子格 $L \subseteq \mathbb{Z}^r$。将 $\Phi_{\mathscr{A}}$ 视为映射 $T_{N'} \to (\mathbb{C}^\times)^r$，并将 L 定义为由此诱导的映射 $\Phi_{\mathscr{A}}^* : \mathbb{Z}^r \to M$ 在特征格上的核，即可确立其与先前构造的等价性。

等价地，也可以从一个仿射半群开始，即一个可以嵌入格中的有限生成半群 S。半群代数 $\mathbb{C}[S]$ 随后成为环面簇 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[S]$ 的坐标环，其环面为 $T_{(\mathbb{Z}S)^*}$。如果 $S = \mathbb{N}\mathscr{A}$，那么 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[S] \cong Y_{\mathscr{A}}$。

我们注意到，T_N 通过相应的特征 $m \in M$ 作用于其坐标环 $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$ 中的单项式 x^m。此外，若 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[S]$ 是一个环面为 T_N 的仿射环面簇，则 $\mathbb{C}[S]$ 是 $\mathbb{C}[M]$ 的 T_N-不变子代数。

环面簇之间的环面态射，是指其在底层代数环面上的限制为群同态的态射。仿射环面簇之间的环面态射 ϕ: Spec $\mathbb{C}[S] \to$ Spec $\mathbb{C}[S']$ 的特征在于，其对偶映射 ϕ^*: $\mathbb{C}[S'] \to \mathbb{C}[S]$源自半群映射 $S' \to S$。

2.3. 正规环面簇。

定义 2.3. 如果每一点处的局部环都是整闭定义域，则称代数簇是正规的。

正规环面簇可以用组合数据特别容易地描述。为了得到正规仿射环面簇 Spec $\mathbb{C}[S]$，需要半群S 是饱和的，也就是说，如果 $km \in S$ 对于 $m \in \mathbb{Z}S$ 和 $k \geq 0$ 成立，那么 $s \in S$。

这类半群也可以用锥来刻画。设 N 是实向量空间 $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 中的一个格。σ 中的锥 σ 是一个非空子集，并且在加法和非负数乘法下封闭。若 σ 可以由有限个点（在上述运算下）生成，则称其为多面体的；若这些点可以取自 N，则称其为有理的。最后，若 σ 不包含 $N_{\mathbb{R}}$ 的任何正维子空间，则称其为强凸的。

令 $M = N^*$ 为 N 的对偶格，因此 $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 的对偶向量空间。σ 的对偶锥是锥 $\check{}\sigma = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u\rangle \geq 0$ ，其中所有 $u \in \sigma\}$ 都属于 $M_{\mathbb{R}}$。若 σ 是一个强凸的有理多面体锥，那么 $\check{}\sigma$ 中的格点 $\check{}\sigma \cap M$ 构成一个饱和仿射半群，称为 S_σ。这一构造导出了正规仿射环面簇的经典刻画。

命题 2.4. 设 X 为一个仿射环面簇，其环面为 T_N。那么，以下条件等价:

(a) X 是正规。 (b) $X \cong$谱 $\mathbb{C}[S]$，其中 $S \subseteq M = N^*$ 是饱和仿射半群，且 $\mathbb{Z}S = M$。(c) $X \cong X_\sigma :=$ 谱 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ ，其中 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 是强凸的有理多面体锥。

锥的语言非常强大，因为它让我们能够将有关环面簇的结果转化为有关凸几何的结果，反之亦然。此外，它还通过多面扇对任意正规环面簇给出了简洁的刻画:

锥 σ 的一个面是 σ的子锥 $H_m \cap \sigma$ ，其中 $H_m :=$ ker $m \cap \sigma = \{u \in \sigma \mid \langle m, u\rangle = 0\}$ ，对某个 $m \in \check{}\sigma$成立。 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个扇 Σ 是由强凸有理多面体锥 σ 组成的有限集合，满足 Σ在取面运算下封闭，并且 Σ 中任意两个锥的交集都是它们各自的一个面。

可以通过沿着交集（对应于锥的交）粘合扇 Σ 中各个 $\sigma \in \Sigma$ 的开仿射子集 X_σ ，从而构造出一个环面簇 X_Σ 。Sumihiro 的定理 [13] 断言，所有正规环面簇都可以由此构造。

正规环面簇之间的环面态射同样可以完全用其对应的扇来描述。特别地，态射 ϕ : $X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ 是环面态射，当且仅当它来自格映射 ϕ : $N \to N'$ ，且该映射与 $\bar{}$ 中的扇相容；也就是说，对于每个 $\sigma \in \Sigma$，都存在 $\sigma' \in \Sigma'$ ，使得 $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma) \subseteq \sigma'$。从这个意义上说，正规环面簇的范畴等价于扇的范畴。

3. Algebraic supergeometry

我们简要介绍与本文相关的复数域代数超几何的基本概念。

3.1. 超代数。

定义 3.1. 超代数是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次、含幺、结合的 $\mathbb{C}$-代数 $A = A_0 \oplus A_1$。

若 $a \in A$ 是齐次元素，我们用 $|a| \in \{0, 1\}$ 表示 a的宇称。本文中，所有超代数 A 均为交换超代数，其乘法对齐次元素 $a \in A_{|a|}$ 和 $b \in A_{|b|}$满足 $a \cdot b = (-1)^{|a|\cdot|b|} b \cdot a$。通常我们用罗马字母表示偶元素，用希腊字母表示奇元素；例如，$\mathbb{C}[x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3]$ 是一个具有两个偶生成元和三个奇生成元的超代数。

超代数的态射总是保持宇称。注意，若 A和 B 是超代数，则 $A \otimes_{\mathbb{C}} B$也是超代数:

$$(A \otimes_{\mathbb{C}} B)_0 = (A_0 \otimes_{\mathbb{C}} B_0) \oplus (A_1 \otimes_{\mathbb{C}} B_1)$$
$$(A \otimes_{\mathbb{C}} B)_1 = (A_0 \otimes_{\mathbb{C}} B_1) \oplus (A_1 \otimes_{\mathbb{C}} B_0)$$

设 A 是一个交换超代数。若由 A_1 生成的理想（A_1）是一个包含 A所有零因子的素理想，则称 A 为整超域。若它只有一个极大理想，则称它为局部的。与通常情形一样，在素理想处对超代数进行局部化所得的超代数是局部的。

AHopf超代数是一个超代数 A，它同时也是超余代数，并配有一个称为反 antipode 的映射，满足所有通常的图表条件。

3.2. 超空间。

定义 3.2. 超空间 $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$ 是由一个拓扑空间$|X|$ 和一个超代数层 $\mathscr{O}_X$ 组成的对，其中每个茎 $\mathscr{O}_{X,x}$ 都是局部超代数。超空间的态射是一个对 $\phi = (|\phi|, \phi^{\#}) : X \to Y$，其中包含一个连续映射$|\phi| : |X| \to |Y|$ 以及一个层态射 $\phi^{\#} : \mathscr{O}_Y \to |\phi|_* \mathscr{O}_X$；该态射在 $|Y|$ 上的每个茎处都成为局部超代数之间的局部态射。

若结构层的奇部$\mathscr{O}_{X,1}$ 是一个 $\mathscr{O}_{X,0}$-模的拟凝聚层，则称 X 为超概形。X 的开子概形由将$\mathscr{O}_X$ 限制到开集 $U \subseteq |X|$得到，而闭子概形则按通常意义定义为闭浸入的等价类。若 $|X|$ 是诺特且不可约的，我们用 $\mathbb{C}(X)$ 表示 $\mathscr{O}_X$ 在一般点处的茎。

令$(\mathscr{O}_{X,1})$为 $\mathscr{O}_X$ 中由每个开集上的奇元素生成的理想层。令$\mathscr{O}_{\overline{X}}$为由 $\mathscr{O}_{\overline{X}}(U) = (\mathscr{O}_X / (\mathscr{O}_{X,1}))(U)$定义的普通代数层。我们称 $\overline{X} := (|X|, \mathscr{O}_X^r)$为 X的玻色约化。

给定一个超代数 $A = A_0 \oplus A_1$，我们注意到 A 通过左$\widetilde{\ }$乘法成为一个 A_0-模，从而允许我们构造仿射超概形 $\operatorname{Spec} A = (|\operatorname{Spec} A_0|, A)\widetilde{\ }$，其中 A 是与模 A 相关联的层。令 $\overline{A} = A/(A_1)$，我们注意到$|\operatorname{Spec} A_0| = |\operatorname{Spec} \overline{A}|$，因为这两个代数仅相差幂零元。因此，$\operatorname{Spec} A \cong \operatorname{Spec} \overline{A}$。可以证明，仿射超概形是任意超概形的局部模型（[1], 命题 10.1.3）。

以下定义出自 Sherman [12]。

定义 3.3. 代数超簇是满足以下所有条件的 X 上的超概形 $\mathbb{C}$:

(i) X 是不可约的（即 $|X|$ 是不可约拓扑空间）。(ii) X 是分离的（即对角态射 $X \to X \times_{\mathbb{C}} X$ 是闭嵌入）。(iii) X 是有限型的（即 X 存在一个由有限个开仿射子概形 $\operatorname{Spec} A$ 构成的覆盖，其中 A 是 $\mathbb{C}$上的有限生成超代数）。

(iv) 对任意开子概形 $U \subseteq X$，限制映射 $\mathscr{O}_X(U) \to \mathbb{C}(X)$ 是单射。(v) $\mathbb{C}(X)$ 是整超域。

后两个条件为普通代数簇通常的整性条件提供了一个弱化版本。此外，如果将条件 (v) 加强为以下条件，则代数超簇也是整的。

(v′) 对于任意开子概形 $U \subseteq X$，$\mathscr{O}_X(U)$ 是一个整超域。

除非超簇 X 是整的，否则其玻色约化 $\overline{X}$ 并不一定是代数簇（因为整性将不再成立）。然而，仍然可以从任意超簇中提取一个普通代数簇：定义 $\mathscr{O}_X$ 中的理想层 $\mathscr{I}$，令 $\mathscr{I}(U)$ 等于 $(\mathbb{C}(X)_1)$ 在限制映射 $\mathscr{O}_X(U) \to \mathbb{C}(X)$ 下的原像。于是，根据上述定义的第 (iv) 部分，$\mathscr{I}$ 包含 $(\mathscr{O}_{X,1})$，因此我们可以定义底层簇 $X_0 := (|X|, \mathscr{O}_X/\mathscr{I})$。为了证明它是一个簇，我们注意到，根据上述定义的第 (v) 部分，该商消去了 $\mathscr{O}_X(U)$ 中的所有零因子。另一种构造 X_0 的方法是将其定义为 $\overline{X}$ 的约化诱导闭子概形，并使其具有相同的拓扑空间 $|X|$。

例 3.4。考虑子代数 $A = \mathbb{C}[x, \xi_1, x\xi_2, \xi_1\xi_2] \subseteq \mathbb{C}[x, \xi_1, \xi_2]$。可以验证，$X = \operatorname{Spec} A$ 是一个非整超簇，且 $\overline{X} \cong \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, \xi_1\xi_2]$ 和 $X_0 \cong \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$。

命题 3.5。设 X 是一个超簇。以下各项等价：

(a) X 是仿射的。
(b) $\overline{X}$ 是仿射的。
(c) X_0 是仿射的。

证明。关于 (a) $\Rightarrow$ (b)，参见 [14]；关于 (b) $\Rightarrow$ (c)，参见 [7], 练习 III.3.1。 □

命题 3.6。设 X 是一个超簇。以下各项等价：

(a) X 是整的。
(b) $\overline{X}$ 是整的。
(c) $\overline{X} = X_0$。

证明。对于 (a) $\Longrightarrow$ (c)，设 X 是整的。只需证明 $\mathscr{I} = (\mathscr{O}_{X,1})$。包含关系 $(\mathscr{O}_{X,1}) \subseteq \mathscr{I}$ 已知。令 $\xi \in \mathscr{I}(U)$，则 $\xi^2 = 0$。由于 $\mathscr{O}_X(U)$ 是整的，我们有 $\xi \in (\mathscr{O}_{X,1})(U)$，因此 $\overline{X} = X_0$。反之，若 $\overline{X} = X_0$（二者都是 X 的闭子概形），则根据闭子概形与理想层之间的对应关系，我们得到 $\mathscr{I} = (\mathscr{O}_{X,1})$，从而 X 是整的。因此 (a) $\iff$ (c)。

我们还有 (b) $\iff$ (c)，因为 X_0 是 $\overline{X}$ 上约化诱导的闭子概形结构。□

以下定义见于 [12], 第 3.3.2 节。

定义 3.7. 给定一个代数超簇 X，我们可以找到一个稠密开子概形$U \subseteq X$，使得其玻色约化 $\overline{U}$ 是光滑的。余正规层 $(\mathscr{O}_{X,1})/(\mathscr{O}_{X,1})^2$在 U上是凝聚的，因此它在一个稠密开子概形 $\overline{U}' \subseteq \overline{U}$上是平凡的。于是，我们将 X 的维数定义为对于任意选择的 $x \in \overline{U}'$，$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ 作为超向量空间的维数。特别地，如果 $\dim \overline{U} = n$且 $\overline{U}'$上的向量丛的秩为 r，那么 $\dim X = (n|r)$。

以下结果表明，就本文的目的而言，$\overline{X}$ 与 X_0 之间的区别并不重要。

命题 3.8. $(n|1)$ 维超簇是整的。

证明. 只需证明仿射超簇 X 的情形。我们有一个单射 $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}(X)$，其中 $\mathbb{C}(X)_1^2 = 0$。因此 $(\mathbb{C}(X)_1)_1 = \mathbb{C}(X)_1$，，所以 $\mathbb{C}(X)$ 中的所有零因子（因而 $\mathbb{C}[X]$ 中的所有零因子）都是奇的。因此 $\mathbb{C}[X]$ 是整的，证毕。□

我们将在第 7.1–7.2 节中遇到分次、分裂和光滑超簇的定义。

3.3. 代数超群。

定义 3.9. 仿射代数超群是以下等价概念中的任意一种：

(a) 一个有限生成的 Hopf超代数 R 的谱，该超代数是一个整超域 (b) 仿射超簇范畴中的群对象 G (c) 一个仿射超簇 $G = \mathrm{Spec}\ R$，其点函子 $G(A) := \mathrm{Hom}(R, A)$ 取值于群 (d) 一对 $G = (G_0, \mathfrak{g})$，其中 G_0 是一个普通的（不可约）仿射代数群，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 是一个有限维李超代数，满足 $\mathrm{Lie}\, G_0 = \mathfrak{g}_0$，并且 $\mathfrak{g}$带有一个 G_0-模结构，使得相应的 $\mathfrak{g}_0$-模是伴随的（称为 Harish-Chandra 对）

本文中我们交替使用这些概念（见 [1], 第 7 节和第 11 节）。要求 (a) 部分中的 Hopf 超代数 R 是整的，仅仅是为了保证超群的不可约性。若放宽超簇必须是整的这一假设（并相应考虑存在多个一般点的可能性），则可以去掉这一要求，定义 (a)–(d) 仍然等价。

Harish-Chandra 对的定义中采用这样的记号是有意为之的，因为 $G_0 = \overline{G}$ 是 G 的底层代数群，而 $\mathfrak{g}$ 是 G的李超代数（即单位元处的切空间）。为说明定义 (a) 与定义 (b) 和 (c) 等价，我们注意到以下内容：

命题 3.10. 仿射代数超群是一个整超簇。

证明. 根据定义 (b)，考虑玻色约化 $\overline{G}$，它是一个仿射群概形，满足代数簇的所有性质，唯独可能不约化。然而，特征零域上的任意群概形都是约化的（[10], I，定理 1.1；I，推论 3.9；以及 II，定理 2.4），因此 $\overline{G}$ 确实是整的。由命题 3.6 即可得证。□

超群在超簇上的作用定义为一个态射

$$\rho : G \times X \to X$$

满足通常的性质。

4. Algebraic supertori

定义 4.1. 代数超环面是一个代数超群 $T = (T_0, \mathfrak{t})$，满足 $T_0 \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ 是一个位于 T 中心的普通代数环面。

这个定义受到 [11] 中拟约化李超代数的嘉当子代数理论的启发。拟约化李超代数 $\mathfrak{g}$ 是指其偶部 $\mathfrak{g}_0$ 为约化的李超代数。在此情形下，选取 $\mathfrak{g}_0$ 的嘉当子代数 $\mathfrak{h}_0$，并将 $\mathfrak{h}$ 定义为 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{h}_0$ 的中心化子。因此，代数超环面是一个代数超群 T，满足 T_0 是环面，且 $\mathrm{Lie}\, T$ 是拟约化李超代数的嘉当子代数。

这些超代数（因而也包括代数超环面）的表示论已在 [5]中得到研究。

例 4.2。定义 $Q(1)$ 为一个超群，其 A-点由以下矩阵组成

$$\begin{pmatrix} a & \xi \\ \xi & a \end{pmatrix}$$

对于 $a \in A_0^\times$ 和 $\xi \in A_1$，赋予通常的矩阵乘法。于是 $Q(1)$ 是一个 $(1|1)$ 维超环面。

4.1. 超群结构。若 $\dim T = (n|1)$，则 $\mathfrak{t}$ 是一个 $(n|1)$ 维李超代数，具有 $\mathfrak{t}_0 \subset Z(\mathfrak{t})$ 和一个奇生成元 θ，使得 $\theta^2 := \frac{1}{2}[\theta, \theta] \in \mathfrak{t}_0$。因此，一个 $(n|1)$ 维超环面由一点 $c \in \mathfrak{t}_0 \cong N_{\mathbb{C}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ 参数化，其中 N 是 T_0的余特征格。

定义 4.3。记 T_N 为特征格为 N 的普通代数环面，且$T_{N,\ c} = (T_N, \mathfrak{t})$ 为对应于参数 $c = \theta^2 \in N_{\mathbb{C}}$的具有一个奇维的超环面。

令 $M = N^*$ 为 T_N 的特征格。超环面 $T_{N,c}$ 的坐标环为 $\mathbb{C}[T_{N,c}] = \mathbb{C}[M, \xi]$，并带有Hopf超代数结构

$$\begin{array}{ccc} \Delta x^m = x^m \otimes x^m (1 + \langle m, c \rangle \xi \otimes \xi) & Sx^m = x^{-m} & \varepsilon x^m = 1 \\ \Delta \xi = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi & S\xi = -\xi & \varepsilon \xi = 0 \end{array}$$

其中 $\langle , \rangle$ 是完美配对 $M \otimes N \to \mathbb{Z}$，并将其按 $\mathbb{C}$-线性延拓至 $M \otimes N \quad _{\mathbb{C}}$.

固定一个识别 $N \cong \mathbb{Z}^n$，使得 $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n$，记 $T_{N,c}(A) = \mathrm{Hom}($谱 A, $T_{N,c})$ 为 T 在超代数 A 上取值的点函子。那么，$T_{N,c}(A)$ 的群运算由下式给出

$$(t_1, ..., t_n \mid \xi) \cdot (u_1, ..., u_n \mid \eta) = (t_1 u_1 (1 + c_1 \xi \eta), ..., t_n u_n (1 + c_n \xi \eta) \mid \xi + \eta)$$

对于 $t_i, u_i \in (A_0)^\times$ 和 $\xi, \eta \in A_1$。

4.2. 表示论。坐标环 $\mathbb{C}[T_{N,c}]$ 具有 $\mathfrak{t}$ 的作用，其中偶部按通常方式作用（固定 ξ），而奇生成元的作用为 $x^m \xi \mapsto x^m$ 和 $x^m \mapsto \langle m, c \rangle x^m \xi$。利用上述识别 $T_0 \cong \mathbb{Z}^n$，我们可以将 $\mathfrak{t}$ 写作子代数

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left(\xi \left(c_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + c_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$\mathbb{C}[T_{N,c}] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}, \xi]$上导子李超代数的。因此，作为$T_{N,c}$的表示，$\mathbb{C}[T_{N,c}]$ 分裂为$L(m) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(x^m, x^m \xi)$的直和，其中每个表示的维数为$1|1$，对 $m \in M$成立。

引理 4.4. 若 $T = T_{N,c}$，则 $L(m)$ 不可约当且仅当 $\langle m, c \rangle \neq 0$。若 $\langle m, c \rangle = 0$，则 $L(m)$ 不可分解，但有一个 $(1|0)$ 维子表示 $\langle x^m \rangle$。

证明。偶部保持每个单项式张成的空间不变，而奇部的作用如上。□

4.3. 可分解性。在如上所述的同一化 $T_N \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ 下，我们得到 $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n$。不失一般性，排列指标使得

$$c = (c_{1,1}, ..., c_{1,k_1}, ..., c_{r,1}, ..., c_{r,k_r}, 0, ..., 0)$$

其中，对于每个 i，$\{c_{i,1}, ..., c_{i,k_i}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中某个元素的非零有理数倍数组成的极大集合。也就是说，我们可以假设 $c_{i,j} = \ell_{i,j} c_i$，其中 $c_i \in \mathbb{C}$ 且 $\ell_{i,j} \in \mathbb{Z}$。

由于 $\mathbb{Z}^n$ 中一点的 GL$(n, \mathbb{Z})$-轨道由所有最小公倍数相同的 n-元组组成，因此存在 $g_i \in GL(k_i, \mathbb{Z})$，使得 $g(\ell_{i,1}, ..., \ell_{i,k_i}) = (\ell_i, 0, ..., 0)$，其中 $\ell_i \in \mathbb{Z}$。若 $g = (g_1, ..., g_r) \in$ GL$(k_1, \mathbb{Z}) \times ... \times$ GL$(k_r, \mathbb{Z}) \subseteq$ GL$(n, \mathbb{Z})$，则（对各项重新排序后）可得

$$gc = (c_1, ..., c_r, 0, ..., 0)$$

其中 $\mathbb{Q}$-线性无关元素为 $c_1, ..., c_r \in \mathbb{C}$。由此可得

$$T_{N,c} \cong T_{\mathbb{Z}^r, (c_1, ..., c_r)} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-r}.$$

定义 4.5. 若一个超环面 T （维数任意）不能写成两个较低维超环面的乘积 $T' \times T''$，则称其为不可分解的。

我们已经看到，如果 $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n$ 的各项存在线性相关（系数属于 $\mathbb{Q}$），那么 $T_{\mathbb{Z}^n, c}$ 就是可分解的。下面的命题表明，这个条件恰好刻画了奇维为一的超环面的不可分解性。

命题 4.6. 设 $T = T_{\mathbb{Z}^n, c}$ 是一个超环面，且 $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ 线性无关（系数属于 $\mathbb{Q}$）。那么 T 是不可分解的。

证明. 假设 $T = T' \times T''$。由于 T 只有一个奇维，我们不妨设 T'' 是一个维数非零的纯偶环面。因此，对于某个 $c' \in \mathbb{C}^r$，有 $T' = T_{\mathbb{Z}^r, c'}$，并且 $T'' = (\mathbb{C}^\times)^{n-r}$。那么 $c = (c'_1, ..., c'_r, 0, ..., 0)$ 矛盾，从而证明了结论。□

4.4. Mo 态射。我们将需要以下关于超环面之间态射的引理。 i.

引理 4.7. 设 $\phi\colon T \to T'$ 是一个超群态射，其中 T 和 T' 都是超环面。则 ϕ 的像是一个超环面，并且在 T' 中是闭的。

证明。我们可以将该态射视为定义在 Harish-Chandra 对上的态射，因此有一个代数群态射 $\phi_0 : T_0 \to T'_0$，以及一个相容的李超代数态射 $d\phi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}'$。根据经典结论（[2], 命题 1.1.1），$\phi_0(T_0)$ 是 T'_0 的闭子环面。此外，$d\phi(\mathfrak{t})$ 是一个李超代数，其偶部是 $\phi_0(T_0)$ 的李代数。由于 t'_0 位于 t' 的中心，同样的结论也适用于 Lie $\phi_0(T_0) \subseteq \mathfrak{t}'_0$ 在 $d\phi(\mathfrak{t}) \subseteq \mathfrak{t}'$ 中，因此引理得证。□

引理 4.8. 设 $\phi\colon T_{N, c} \to T_{N', c'}$ 是一个超簇态射。当且仅当满足以下所有条件时，ϕ 是超群态射。

(i) 存在一个格映射 $\phi : N \to N'$，使得 $\phi|_{T_N} = \phi \otimes 1_{\mathbb{C}^\times}$。(ii) 对偶映射 $\phi^* : \mathbb{C}[M', \xi'] \to \mathbb{C}[M, \xi]$ 满足 $\phi^*(\xi') = a\xi$，其中某个 $a \in \mathbb{C}$。(iii) $\bar{\phi}_{\mathbb{C}} = \bar{\phi} \otimes 1_{\mathbb{C}} : N_{\mathbb{C}} \to N'_{\mathbb{C}}$ 满足 $\bar{\phi}(c) = a^2 c'$。

证明。（i）条件与通常情形一样是必需的。为了使 ϕ 成为超群态射，我们要求 ϕ^* 是 Hopf超代数的态射。特别地，我们要求 $(\phi^* \otimes \phi^*) \circ \Delta' = \Delta \circ \phi^*$。由于这些映射中的每一个都是超代数态射，

it 只需在生成元 $x^{m'}$ 和 ξ' 上验证该恒等式即可。首先，注意到的是。 t

$$
\begin{aligned}
&(\phi^* \otimes \phi^*) \circ \Delta'(\xi') && \Delta \circ \phi^*(\xi') \\
&= (\phi^* \otimes \phi^*)(\xi' \otimes 1 + 1 \otimes \xi') && = \Delta(\phi^*(\xi')) \\
&= \phi^*(\xi') \otimes 1 + 1 \otimes \phi^*(\xi') && = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \Delta(x^{k_i}\xi) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i x^{k_i}\xi\right) \otimes 1 + 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i x^{k_i}\xi\right) && = \sum_{i=1}^{\ell} a_i x^{k_i} \otimes x^{k_i}(\xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi)
\end{aligned}
$$

其中我们写作 $\phi^*(\xi') = \sum_{i=1}^{\ell} a_i x^{k_i}\xi$，其中 $a_i \in \mathbb{C}$ 和 $k_i \in M$。由于两边相等，可得所有 $k_i = 0$，从而 $\phi^*(\xi') = a\xi$，其中 $a \in \mathbb{C}$。此外，对于$m' \in M$，我们有

$$
\begin{aligned}
&(\phi^* \otimes \phi^*) \circ \Delta'(x^{m'}) && \Delta \circ \phi^*(x^{m'}) \\
&= (\phi^* \otimes \phi^*)(x^{m'} \otimes x^{m'}(1 + \langle m', c'\rangle)\xi' \otimes \xi') && = \Delta(x^{\bar{\phi}^*(m')}) \\
&= x^{\bar{\phi}^*(m')} \otimes x^{\bar{\phi}^*(m')}(1 + \langle m', c'\rangle\phi^*(\xi') \otimes \phi^*(\xi')) && = x^{\bar{\phi}^*(m')} \otimes x^{\bar{\phi}^*(m')}(1 + \langle \bar{\phi}^*(m'), c\rangle\xi \otimes \xi)
\end{aligned}
$$

因此，对所有 $m' \in M'$， $a^2\langle m', c'\rangle = \langle \bar{\phi}^*(m')\ c\rangle$。由于 $\langle , \rangle$是一个非退化完美配对，我们知道 $\langle \bar{\phi}^*(m')\ c\rangle = \langle m', \bar{\phi}_{\mathbb{C}}(c)\rangle$，从而 $\bar{\phi}_{\mathbb{C}}(c) = a^2c'$。Hopf 代数态射的其他公理很容易验证，也不会产生额外要求。□

4.5. 模空间。可以验证，对于 $c \neq 0$，$(n|1)$ 维超环面的同构类仅取决于穿过 $c \in N_{\mathbb{C}}$ 的直线，模去环面 T_N 的自同构 $\mathrm{GL}(T_N)$。也就是说，$(n|1)$ 维超环面的模空间是不交并 $\mathbb{P}(N_{\mathbb{C}})/\mathrm{GL}(T_N) \cong \mathbb{P}^{n-1}/\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 与一个点（代表 $c = 0$ 情形）。

4.6. 具有更高奇维的超环面。如果 $T = (T_N, \mathfrak{t})$ 是一个超环面，其中 $\mathfrak{t} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(x_1, ..., x_n) \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\theta_1, ..., \theta_s)$，那么其超群结构完全由参数 $c_{ij} \in N_{\mathbb{C}}$ 决定，这些参数表示 $\frac{1}{2}[\theta_i, \theta_j] = (c_{ij})_1 x_1 + ... + (c_{ij})_n x_n$ 的系数。由于 $[\cdot, \cdot]$ 在 $\mathfrak{t}_1$ 上是对称的， c_{ij} 会排列成一个对称的 $s \times s$ 矩阵（其元素属于 $N_{\mathbb{C}}$）。

定义 4.9. 设 N 是一个格，且 (c_{ij}) 是一个元素属于 $N_{\mathbb{C}}$ 的对称方阵。将具有给定参数的超环面记作 $T_{N,(c_{ij})}$。

超环面 $T_{N,(c_{ij})}$ 的坐标 Hopf 超代数为 $\mathbb{C}[M, \xi_1, ..., \xi_s]$，其中 $M = N^*$，而 s 是矩阵 (c_{ij}) 的阶数。Hopf 代数结构由下式给出

$$
\Delta x^m = x^m \otimes x^m \left(1 + \sum_{i,j=1}^{s} \langle m, c_{ij}\rangle \xi_i \otimes \xi_j\right) \qquad Sx^m = x^{-m} \qquad \varepsilon x^m = 1
$$

$$
\Delta\xi_i = \xi_i \otimes 1 + 1 \otimes \xi_i \qquad S\xi_i = -\xi_i \qquad \varepsilon\xi_i = 0
$$

同样， A 点上的群运算由下式给出

$$
\begin{aligned}
&(t_1, ..., t_n \mid \xi_1, ..., \xi_s) \cdot (u_1, ..., u_n \mid \eta_1, ..., \eta_s) \\
&= \left(t_1u_1\left(1 + \sum_{i,j=1}^{s} (c_{ij})_1 \xi_i\eta_j\right), ..., t_nu_n\left(1 + \sum_{i,j=1}^{s} (c_{ij})_n \xi_i\eta_j\right) \;\middle|\; \xi_1 + \eta_1, ..., \xi_s + \eta_s\right)
\end{aligned}
$$

对于 t_i、 $u_i \in (A_0)^\times$ 和 $\xi,\ \eta_i \in A_1$。

以下引理推广了引理 4.8，可以用几乎相同的方法证明。

引理 4.10. 设 $\phi: T_{N,(c_{ij})} \to T_{N',(c'_{ij})}$ 是一个超簇态射。那么，ϕ 是一个超群态射，当且仅当以下所有条件均成立。

(i) 存在一个格映射 $\phi: N \to N'$ 使得 $\phi|_{T_N} = \phi \otimes 1_{\mathbb{C}^\times}$。

(ii) 对偶映射 $\phi^*: \mathbb{C}[M', \xi'_1, ..., \xi'_{s'}] \to \mathbb{C}[M, \xi_1, ..., \xi_s]$ 满足 $\phi^*(\xi'_i) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\xi_j$，其中存在某个 $a_{ij} \in \mathbb{C}$。(iii) $\bar{\phi}_{\mathbb{C}} = \bar{\phi} \otimes 1_{\mathbb{C}}: N_{\mathbb{C}} \to N'_{\mathbb{C}}$ 满足 $\bar{\phi}(c_{k\ell}) = \sum_{i,j=1}^{s'} a_{ik}a_{j\ell}c'_{ij}$，对所有 $k, \ell = 1, ..., s$ 均成立。

如果我们将超环面数据定义为一个元组 $(N, (c_{ij})_{i,j=1,...,s})$，那么我们可以用上述对象以及态射 $(\phi, (a_{ij})_{i=1,...,s';\, j=1,...,s}) : (N, (c_{ij})) \to (N', (c'_{ij}))$ 来构造一个超环面数据范畴，如上面的引理所述。于是，该引理得出以下结果：

命题 4.11。代数超环面范畴等价于超环面数据范畴。

5. Affine toric supervarieties

定义 5.1。环面超簇是一种超簇 X，其中包含一个超环面 T 作为开子概形，并且 T 在自身上的作用可延拓为 T 在整个超簇上的作用。

引理 5.2。设 X 是一个具有环面 T 的环面超簇。则底层簇 X_0 是一个具有环面 T_0 的环面簇。

证明。T_0 在 X 上的作用保持 X_0 的定义理想 $\mathscr{I}$ 不变。 □

在本文中，我们将假设 X 是 $(n|1)$ 维的，因此根据命题 3.8，我们可以交替使用 X_0 和 $\overline{X}$。我们首先假设 X 是仿射的，根据命题 3.5，这等价于假设 X_0 是仿射的。

5.1. 从幺半群中的有限集出发。给定一个超环面 $T' = T_{N',\, c'}$，令 $M' = (N')^*$ 为 $T'_0 = T_{N'}$ 的特征格，并令 $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_r\}$ 为 M' 中的有限集。我们希望构造第 2.2 节所述簇的一个超类比。定义

$$\mathscr{A}' = \mathscr{B}' = \{m_i \in \mathscr{A} \mid \langle m_i, c' \rangle \neq 0\} = \{m_1, ..., m_q\}$$
$$\mathscr{A}'' = \{m_i \in \mathscr{A} \mid \langle m_i, c' \rangle = 0\} = \{m_{q+1}, ..., m_r\}$$

使得 $\mathscr{A} = \mathscr{A}' \sqcup \mathscr{A}''$。此外，令 $\mathscr{B}'' = \{n_{q+1}, ..., n_s\}$ 为幺半群 $\mathbb{N}\mathscr{A}''$ 中的一个有限集，并设 $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \sqcup \mathscr{B}''$。（以下假设 $\mathscr{B}$ 非空，以免退化为经典的纯偶情形。）我们将 $n_j = m_j$ 记作 $j = 1$、……、q，使得 $\mathscr{B} = \{n_1, ..., n_s\}$；并将 $n_j = \sum_{i=q+1}^{r} p_i^j m_i$ 记作 $j = q+1$、……、s，其中某个 $p_i^j \in \mathbb{N}$。对于 $j = 1$、……、q，我们也可以作同样处理；此时，若 $i = j$，则有 $p_i^j = 1$，否则有 $p_i^j = 0$。

现在定义一个超簇态射

$$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : T' \to \mathbb{C}^{r|s}$$

在 A-点层面上（对于 A 超代数），定义为

$$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(t \mid \xi) = (t^{m_1}, ..., t^{m_r} \mid t^{n_1}\xi, ..., t^{n_s}\xi) \in \mathbb{C}^{r|s}(A)$$

对于 $t \in ((A_0)^\times)^{\dim N'}$ 以及 $\xi \in A_1$。记 $J \subseteq \mathbb{C}[x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s]$ 为在 $\Phi_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}$ 的像上取值为零的函数所构成的理想。那么，该像的扎里斯基闭包定义为闭子簇 $V(J) :=$ 谱 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s]/J$ 的 $\mathbb{C}^{r|s}$，下文称为 $Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}$。

命题 5.3. 给定上述 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq M$，$Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}$ 是一个仿射环面超簇，其超环面为 $\Phi_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}(T') = T_{(\mathbb{Z}\mathscr{A})^*,\ \bar{\Phi}_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}(c')}$，其中 $\Phi_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}(c')$ 按引理 4.8 中的方式定义。

证明. 令 $T'' = (\mathbb{C}^\times)^r \times \mathbb{C}^{0|s} \subset \mathbb{C}^{r|s}$ 为一个未假设具有超群结构的超簇。我们可以如下将 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 视为超群的映射 $T' \to T''$：我们可以自由改变陪域的底层经典簇为 $(\mathbb{C}^\times)^r$。现在只需在 T'' 上赋予超环面结构，因此令 A 为一个超代数，并令 $t, u \in ((A_0)^\times)^{\dim N'}$ 和 $\xi, \eta \in A_1$。若 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 是群同态，则必须有

$$
\begin{aligned}
&(t^{m_1}, ..., t^{m_r} \mid t^{n_1}\xi, ..., t^{n_s}\xi) \cdot (u^{m_1}, ..., u^{m_r} \mid u^{n_1}\eta, ..., u^{n_s}\eta) \\
&= \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(t \mid \xi) \cdot \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(u \mid \eta) \\
&= \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}((t \mid \xi) \cdot (u \mid \eta)) \\
&= \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(t_1u_1(1 + c_1'\xi\eta), ..., t_nu_n(1 + c_n'\xi\eta) \mid \xi + \eta) \\
&= (t^{m_1}u^{m_1}(1 + \langle m_1, c'\rangle\xi\eta), ..., t^{m_r}u^{m_r}(1 + \langle m_r, c'\rangle\xi\eta) \mid t^{n_1}u^{n_1}(\xi + \eta), ..., t^{n_s}u^{n_s}(\xi + \eta))
\end{aligned}
$$

其中，我们将 T_0' 识别为 $(\mathbb{C}^\times)^n$，将 M' 识别为 $\mathbb{Z}^n$。因此，$T''(A)$ 上一个潜在的群运算为

$$(a_1, ..., a_r \mid \alpha_1, ..., \alpha_s) \cdot (b_1, ..., b_r \mid \beta_1, ..., \beta_s) = (d_1, ..., d_r \mid \delta_1, ..., \delta_s)$$

其中

$$
\begin{aligned}
d_i &= a_ib_i + \langle m_i, c'\rangle\alpha_i\beta_i && \text{for } i = 1, ..., q \\
d_i &= a_ib_i && \text{for } i = q + 1, ..., r \\
\delta_j &= b^{p^j}\alpha_j + a^{p^j}\beta_j && \text{for } j = 1, ..., s.
\end{aligned}
$$

对于 $j = 1, ..., q$，后者可简化为

$$\delta_j = b_j\alpha_j + a_j\beta_j.$$

不难验证，该运算使 $T''(A)$ 成为一个群，其单位元为 $(1, ..., 1 \mid 0, ..., 0)$，并且进一步使 T'' 成为一个 $(r|s)$ 维超环面，它分解为 $Q(1)^q \times T'''$，其中 T''' 是一个 $(r - q|s - q)$ 维超环面。

由引理 4.7 可知，$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$ 是 T'' 中闭的超环面，因此 $Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}} \cap T'' = \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$，因为 $Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 是 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$ 的闭包。与经典情形一样，$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$ 在 $Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 中是开且不可约的，因此 $Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 也不可约。

现在我们通过点函子验证，$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$作用于$Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$。由于$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T') \subset T''$，该作用是同胚的，因此将超簇映射为超簇。对于超代数 A，可知$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')(A) = (t, \xi) \cdot \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')(A) \subseteq (t, \xi) \cdot Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(A)$，其中 $t \in (A_0^*)^{\dim N'}, \xi \in A_1$。因此，$(t, \xi) \cdot Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(A)$是一个超簇的点函子，且该超簇包含$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$，这意味着根据扎里斯基闭包的定义，$Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(A) \subseteq (t, \xi) \cdot Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(A)$。将 (t, ξ) 替换为其逆 $(t^{-1}, -\xi)$ 可得反向包含关系，因此实际上 $Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(A) = (t, \xi)Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(A)$。因此，$Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$是一个以$\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$为环面的仿射环面超簇。

与通常情形一样，环面的偶部 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')_0$具有特征格$\mathbb{Z}\mathscr{A}$。由于我们假设 $s > 0$，因此还存在一维奇函数（由ξ生成）。将 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 视为态射 $T' \to \Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(T')$，可知 $\Phi^*_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\xi) = \xi$，因此由引理 4.8 可知，附加参数 c 为 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(c')$。□

5.2. 仿射环面超簇的理想。与通常情形一样，我们希望描述在 $Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 上消失的函数所构成的理想 $J(Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}})$。映射 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 可视为到一个 $(r|s)$ 维环面的映射，并由此诱导出格之间的态射

$$\hat{\Phi}_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : \mathbb{Z}^{r|s} \to M' \oplus \mathbb{Z}^{0|1}$$

将定义域的坐标向量映射为

$$\begin{aligned} e_i &\mapsto (m_i \mid 0) && i = 1, ..., r \\ e'_j &\mapsto (n_j \mid 1) && j = 1, ..., s. \end{aligned}$$

该态射的核 L 记录了 m_i 与 n_j之间的关系，因此若 $(\ell \mid \ell') \in L$，则 $\sum_{i=1}^{r} \ell_i (m_i \mid 0) + \sum_{j=1}^{s} \ell'_j (n_j \mid 1) = 0$。注意，由于这个“奇”坐标，$\sum_{j=1}^{s} \ell'_j = 0$。

对于 $\ell = (\ell_1, ..., \ell_r \mid \ell'_1, ..., \ell'_s) \in L$，令

$$\ell_+ = \sum_{\ell_i > 0} \ell_i e_i \qquad \ell_- = -\sum_{\ell_i < 0} \ell_i e_i \qquad \ell'_+ = \sum_{\ell'_j > 0} \ell'_j e'_j \qquad \ell'_- = -\sum_{\ell'_j < 0} \ell'_j e'_j$$

使得 $\ell = (\ell_+ - \ell_-) + (\ell'_+ - \ell'_-)$ 且 $\ell_\pm \in \mathbb{N}^r, \ell'_\pm \in \mathbb{N}^s$。由此立即可得二项式

$$x^{\ell_+} \xi^{\ell'_+} - x^{\ell_-} \xi^{\ell'_-}$$

在 $\Phi_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}(T')$ 上为零，因此在其闭包 $Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}$ 上也为零。由于每个 ξ_i 都被映射为 ξ 的倍数，单项式 $\xi_i \xi_j$ 也在 $Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}$ 上为零。因此，只需考虑这样的二项式：每一项中均不含 ξ_j，或每一项中恰好含有一个 ξ_j。

命题 5.4。仿射环面超簇 $Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}} \subseteq \mathbb{C}^{r|s}$ 的理想是

$$\begin{aligned} J(Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}) &= (x^{\ell_+} \xi^{\ell'_+} - x^{\ell_-} \xi^{\ell'_-} \mid \ell \in L) + (\xi_i \xi_j) \\ &= (x^{k_+} \xi^{k'_+} - x^{k_-} \xi^{k'_-} \mid k_\pm \in \mathbb{N}^r, k'_\pm \in \mathbb{N}^s \text{ and } k_+ - k_- + k'_+ - k'_- \in L) + (\xi_i \xi_j) \end{aligned}$$

证明。证明与经典情形大体相同：首先，通过相同的证明可知右侧的两个理想相等，我们用 $J_L \subseteq J(Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}})$ 表示这个理想。固定同构识别 $T'_0 \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ 和 $M' \cong \mathbb{Z}^n$ 后，映射 $\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}\colon T' \to \mathbb{C}^{r|s}$ 由变量 $t_1, ..., t_n, \xi$ 中的单项式 t^{m_i}（对应 $i = 1, ..., r$）和 $t^{n_j}\xi$（对应 $j = 1, ..., s$）给出。

现在选取 $\geq$ 在 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s]$上的一个单项式序，例如取满足 $x_1 > ... > x_r > \xi_1 > ... > \xi_s$的字典序。虽然由于奇变量的存在，这并不完全符合传统意义上的单项式序，但我们不会使用在这种情况下不成立的任何性质。如果 $J_L \neq J(Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}})$，我们可以选取一个 $f \in J(Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}) \backslash J_L$，使其首项单项式 $x^a = \prod_{i=1}^{r} x_i^{a_i}$或 $x^a \xi_j = (\prod_{i=1}^{r} x_i^{a_i})\ \xi_j$ 达到最小。我们不妨假设 f 的首项系数为 1，并且 f 不包含 $(\xi_i \xi_j)$中的任何项。

由于 $f(t^{m_1}, ..., t^{m_r}, t^{n_1}\xi, ..., t^{n_s}\xi) \equiv 0$作为关于 $t_1, ..., t_n, \xi$的多项式，且 f不包含关于 $(\xi_i \xi_j)$ 的任何项，因此必然存在涉及首项的抵消。因此，$f(x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s)$ 分别包含一个单项式 $x^b < x^a$ 或 $x^b \xi_k < x^a \xi_j$，使得

$$\prod_{i=1}^{r} (t^{m_i})^{a_i} = \prod_{i=1}^{r} (t^{m_i})^{b_i} \qquad \text{or} \qquad \left(\prod_{i=1}^{r} (t^{m_i})^{a_i} \right) t^{n_j} \xi = \left(\prod_{i=1}^{r} (t^{m_i})^{b_i} \right) t^{n_k} \xi,$$

意味着

$$\sum_{i=1}^{r} a_i m_i = \sum_{i=1}^{r} b_i m_i \qquad \text{or} \qquad \sum_{i=1}^{r} a_i m_i + n_j = \sum_{i=1}^{r} b_i m_i + n_k.$$

因此 $a - b \in L$或 $(a + e'_j) - (b + e'_k) \in L$，所以根据 J_L的第二种描述可知，$f - x^a + x^b$或 $f - x^a \xi_j + x^b \xi_k$也属于 $J(Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}) \backslash J_L$，但其首项严格更小。由此矛盾，我们便完成了证明。□

注 5.5. 在经典情形中，可以通过环面理想（即由如上所述的格导出的二项式生成的素理想）对仿射环面簇进行漂亮的分类。这个结果的超类比也是可能的，但趣味性要小得多，因为它无法描述相应超簇上的环面作用，尤其无法描述参数$c \in N_{\mathbb{C}}$。此外，我们关于只有一个奇维的限制使得描述相当繁琐。

5.3. 从仿射半群出发。回顾第 2.2 节，仿射环面簇同构于 Spec $\mathbb{C}[S]$，其中 $\mathbb{C}[S]$ 是某个仿射半群 S，并且每个 Spec$\mathbb{C}[S]$ 都具有仿射环面簇的结构。推广到具有一个奇维的超情形时，需要相同的数据，只需略作补充。

设 T_N 为特征格为 $N^* = M = \mathbb{Z}S$ 的普通环面。对于 $c \in N_{\mathbb{C}}$，令 J_c 为 $\mathbb{C}[S]$ 的 T_N-不变理想（$S - \ker\ c$）$= (x^m \in \mathbb{C}[S] \mid \langle m, c\rangle \neq 0)$，其中 $S - \ker\ c$ 表示集合差。注意，除非 $c = 0$，否则 $J_c \neq 0$。

引理 5.6. (a) 设 S 是一个仿射半群，并设 $J \subseteq \mathbb{C}[S]$ 是一个非零的 T_N-不变理想，且包含 J_c。那么 Spec$(\mathbb{C}[S] \oplus \xi J)$ 是一个仿射托里克超簇，其环面为 $T_{N,c}$。(b) 理想 J 有一个由首一单项式组成的有限生成集。此外，存在一个此类极小生成集，且在 $\mathbb{C}[S]$ 中可逆单项式的乘法意义下唯一。特别地，如果 S 是一个尖半群（即唯一的单位元是 1），那么极小生成集是唯一的。(c) 假设 $S = \mathbb{N}\mathscr{A}$ 对于格 M' $(\supset M = \mathbb{Z}S)$ 中的一个有限集 $\mathscr{A}$，满足上述条件 $\mathscr{A} = \mathscr{A}' \sqcup \mathscr{A}''$，其中 $\mathscr{A}'' = \{m \in \mathscr{A} \mid \langle m, c\rangle_{M\times N_{\mathbb{C}}} = 0\}$。设 $\mathscr{B}''$ 是 $\mathbb{N}\mathscr{A}''$ 中的一个有限集，满足 $J = (x^{n_j} \mid n_j \in \mathscr{A}' \sqcup \mathscr{B}'')$。那么 Spec$(\mathbb{C}[S] \oplus \xi J) \cong Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$。

证明。(a) 由 (c) 和命题 5.3 得出。

（b）由于 J 对 T_N 不变，它有一个由首一单项式构成的生成集。关于有限性，注意到 $\mathbb{C}[S]$ 是某个 $\mathbb{C}[y_1, ..., y_k]$ 的商，而后者是诺特的。因此，只需证明唯一性。

设 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 是两个由首一单项式构成的生成集，并令 $x^{m_1} \in \mathscr{S}_1 \backslash \mathscr{S}_2$。由于 $x^{m_1} \in J$，对于某个单项式 $a \in \mathbb{C}[S]$ 和 $m_2 \in \mathscr{S}_2$，必有 $x^{m_1} = ax^{m_2}$。由于 $x^{m_2} \in J$，对于某个单项式$b \in \mathbb{C}[S]$ 和 $m_3 \in \mathscr{S}_1$，必有 $x^{m_2} = bx^{m_3}$。因此 $x^{m_1} = abx^{m_3}$，所以 $m_1 = m_3$ 或 x^{m_1} 在 S_1 中是冗余的。若 $m_1 = m_3$，则有 $a = b^{-1}$，因此 $x^{m_1} \in \mathscr{S}_1$ 和 $x^{m_2} \in \mathscr{S}_2$ 仅相差一个可逆单项式。

(c) 我们首先注意到，$\langle m、 c\rangle_{M\times N_{\mathbb{C}}} = 0$ $\mathscr{A}''$ 的定义条件¯等价于 $\langle m、 c'\rangle_{M'\times N'_{\mathbb{C}}} = 0$，因为 $M = \mathbb{Z}\mathscr{A}$通过 ϕ^* 是 M'的子格： $M \to M'$，同样地， N通过 ϕ是 N'的商： $N' \to N$。

态射 $\Phi_{\mathscr{A},\ \mathscr{B}}$： $T_{(M')^*,\ c'} \to \mathbb{C}^{r|s}$ 对应于一个映射

$$\pi : \mathbb{C}[x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s] \to \mathbb{C}[M', \xi]$$

由 $x_i \mapsto x^{m_i}$ 和 $\xi_j \mapsto x^{n_j}\xi$给出。 π 的像恰好是 $\mathbb{C}[S] \oplus \xi J$，因为$J$是由 x^{n_j}生成的理想。因此，如果我们能证明 ker π 是理想$J(Y_{\mathscr{A},\ \mathscr{B}})$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[S] \oplus \xi J &= \operatorname{Im}\pi \\ &\cong \mathbb{C}[x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s]/\ker\pi \\ &= \mathbb{C}[x_1, ..., x_r, \xi_1, ..., \xi_s]/J(Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}) \\ &= \mathbb{C}[Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}]\end{aligned}$$

因此，(c) 将成立。但这可由命题 5.4 推出。 □

要求 J 非零的条件仅适用于 $c=0$ 的情况，以确保所得超簇不是纯偶的。

例5.7. 如果 $S=\mathbb{N}$ 和 $c=1$，那么我们得到超环面 $T_{\mathbb{Z},\,1}\cong Q(1)$ 和普通环面簇 谱 $\mathbb{C}[\mathbb{N}]\cong\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]\cong\mathbb{A}^1$。我们注意到 $J_c=(x)$，因此 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,x\xi]$ 和 谱 $\mathbb{C}[x,\xi]$ 是两个具有环面 $Q(1)$ 的环面超簇。虽然这两个空间作为超簇是同构的，但它们具有不同的环面作用，事实上并不同构于环面超簇。关于环面超簇的态射，详见第5.5节。

理想 J 的数据等价于其由单项式构成的极小生成集的数据，后者可如下刻画。

定义 5.8. 设 S 为仿射半群，$T_{(\mathbb{Z}S)^*,\,c}$ 为超环面。对于 $m,m'\in S$，若存在 $m''\in S$ 使得 $m'+m''=m$，则记作 $m'\leq_S m$。非空有限集$\mathscr{B}\subset S$ 称为 c-可容许的，当且仅当：

(i) 对于所有的 $m\in S-\ker c$，存在 $b\in\mathscr{B}$ 使得 $b\leq_S m$。

此外，当满足以下条件时，它是极小的：

(ii) If $a,b\in\mathscr{B}$ satisfy $a\leq_S b$, then $a=b$.

引理5.9。非空有限集 $\mathscr{B}\subset S$ 是（极小的） c-可容许的，当且仅当它是包含 J_c 的非零理想 $J\subseteq\mathbb{C}[S]$ 的（极小）生成集。

证明。条件 (1) 等价于所生成的理想包含 J_c，而条件 (2) 等价于极小性。□

命题5.10. 设 X 为一个仿射超簇。那么以下条件等价：

(a) X 是一个仿射环面超簇，其环面为 $T=T_{N,c}$. (b) $X=Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$，其中 $\mathscr{A}=\mathscr{A}'\sqcup\mathscr{A}''$ 是格中的有限集，且 $\mathscr{B}=\mathscr{A}'\sqcup\mathscr{B}''$ 非空，其中 $\mathscr{B}''$ 是 $\mathbb{N}\mathscr{A}''$ 中的有限集，且 $\mathscr{A}''=\{m\in\mathscr{A}\mid\langle m,c\rangle=0\}$。(c) $X=\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S]\oplus\xi J)$，其中 S 是仿射半群，且 T_N 是包含 J_c 的非零不变理想$J\subseteq\mathbb{C}[S]$ 。(d) $X=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[S,\xi\mathscr{B}]$，其中 S 是仿射半群，且 $\mathscr{B}\subset S$ 是 c-可容许集。

证明。我们已经看到 (d) $\iff$ (c) $\iff$ (b) $\implies$ (a)。现在假设 (a) 成立，因此 X 是一个包含超环面 T的仿射环面超簇。包含映射$T\hookrightarrow X$ 诱导出一个坐标环映射

$$\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}[T]$$

根据定义 3.3 的 (iv)，该映射是单射，因为 T 是超簇 X的一个开子概形。因此，我们可以将 $\mathbb{C}[X]$ 视为 $\mathbb{C}[T]$ 的子代数，特别地，将$\mathbb{C}[X_0]$ 视为 $\mathbb{C}[T_0]$的子代数。根据我们对通常情形的了解，这意味着$\mathbb{C}[X_0]=\mathbb{C}[X]_0=\mathbb{C}[S]$，其中 S是一个仿射半群。

由于 T 作用于 X，它也作用于 $\mathbb{C}[X]$，因此 $\mathbb{C}[X]$ 是 $\mathbb{C}[T]$的子表示。对于每个单项式 $x^m\xi\in\mathbb{C}[X]$，同样有 $x^m\in\mathbb{C}[X]$，因此对于某个T_N-不变理想 $J\subset\mathbb{C}[S]$，有 $\mathbb{C}[X]_1=\xi J$。如果 $L(m)$ 是不可约的（即，如果 $\langle m,c\rangle\neq0$），那么 $x^m\in\mathbb{C}[X]$意味着 $x^m\xi\in\mathbb{C}[X]$，也就是说， J 必须包含 J_c。因此 (c) 可由 (a) 推出。□

注5.11。 c-可容许集 $\mathscr{B}$ 可以取为$Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$中出现的有限集 $\mathscr{B}$，但通常并非极小：考虑超环面 $Q(1)\cong T_{\mathbb{Z},1}\cong$谱 $\mathbb{C}[x^{\pm1},\xi]$，将其自身视为环面超簇。此处，我们可以取 $S=\mathbb{Z}$，使得$X\cong Y_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ 对于$\mathscr{A}=\mathscr{B}=\{\pm1\}$ 成立，因为 $\mathscr{B}$ 必须包含 $\mathscr{A}=\mathscr{A}-\ker c$。然而，这样的 $\mathscr{B}$ 不可能是极小的，因为1和 -1 生成了 $\mathbb{C}[x^{\pm1}]$的同一个理想。

例5.12。对于每个仿射环面簇 $X_0 = \text{谱}\,\mathbb{C}[S] \supset T_N$ 和超环面$T_{N,c} \supset T_N$，都存在一个由 $J = \mathbb{C}[S]$给出的平凡环面超簇结构。

例5.13. 假设 $T = T_{N,c}$ 是一个不可分解超环面。那么对于给定的带有环面 T_N 的仿射环面簇 $X_0 = \text{Spec}\ \mathbb{C}[S]$， J_c 由 $\mathbb{C}[S]$ 中所有非恒定单项式生成。如果 S 不是尖的（即它包含两个互为逆元的不同元素），那么 $J_c = (1)$，并且唯一一个底层簇为 X_0、环面为 T 的环面超簇是平凡的。

如果 S 是尖的，那么 J_c 是一个极大理想，因此存在唯一的非平凡环面超簇结构，在该结构中 $J = J_c$。

5.4. 一些进一步的计算。我们从命题5.10中已经看到，一个具有一个奇维的仿射环面超簇 $X = \text{Spec}A \supset T_{N,c}$ 由一个普通仿射环面簇 $X_0 = \text{Spec}\,A_0 \supset T_N$ 以及一个包含 J_c 的非零 T_N-不变理想 $J \subset A_0$ 的附加数据构成。在这种情况下，有$A = A_0 \oplus A_1$，其中 $A_1 = \xi J$。在本节中，我们将提供有关费米理想 J 的一些进一步信息。

推论 5.14. 设 $X_0 = \text{Spec}\ A_0$是一个底层簇为 X_0、环面为 $T_0 = T_N$的仿射环面簇。仿射环面超簇对应于满足 $J_c \subseteq J \subseteq A_0$的非零 $A_0 \times T_0$双模 J。等价地，若 $c \neq 0$，它们对应于 A_0/J_c的 T_N不变子模（或商模）。

例5.15. 设 $T = T_{\mathbb{Z}^2,\ (1,\ 0)} \cong Q(1) \times \mathbb{C}^\times$ 和 $X_0 = \text{Spec}\,A_0$，其中$A_0 = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}x_2, x_2]$。这里，我们有 $J_{(1,0)} = (x_1^{\pm 1}x_2)$，所以 $A_0/J_{(1,0)} = \mathbb{C}[x_2]/(x_2^2)$。这个模有三个环面不变理想，分别是 (0)、(x_2) 和其自身。这些理想分别导出坐标环为 $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}x_2, x_2, x_1^{\pm 1}x_2\xi]$、$\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}x_2, x_2, x_1^{\pm 1}x_2\xi, x_2\xi]$和 $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}x_2, x_2, \xi]$的环面超簇。

让我们更详细地考察环面超簇 $X = \text{Spec}\ A \text{ for } A = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}x_2, x_2, x_1^{\pm 1}x_2\xi]$。为了将其视为某个 $\mathbb{C}^{r|s}$ 的子簇，我们取A_0 的三个生成元和 A_1的两个生成元，并将它们整理成如下有限集：

$$\begin{aligned}\mathscr{A}' = \mathscr{B}' &= \{(1,1),(-1,1)\}\\ \mathscr{A}'' &= \{(0,1)\}\\ \mathscr{B}'' &= \varnothing\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : T_{\mathbb{Z}^2,(1,0)} \to \mathbb{C}^{3|2}\\ &\Phi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(t_1,t_2,\xi) = (t_1t_2, t_1^{-1}t_2, t_2 \mid t_1t_2\xi, t_1^{-1}t_2\xi)\end{aligned}$$

并且确实有 $X \cong Y_{\mathscr{A},\ \mathscr{B}}$。

为了说明费米理想数据的自然性，我们可以验证 Duflo-Serganova函子

$$DS_Q : \mathbb{C}[X] \mapsto \frac{\ker Q|_{\mathbb{C}[X]^{Q^2}}}{Q(\mathbb{C}[X]^{Q^2})}$$

[3] 的输出是 J的数据，其中 $Q = \xi\left(c_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + c_nx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}$是由 $\mathfrak{t}_1$ 在 $\mathbb{C}[X]$上的作用所产生的奇向量场。

命题 5.16。在上述记号下， $DS_Q\mathbb{C}[X] \cong A_0/J$。

证明。我们不妨假设 $\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}, \xi]$。由于 $Q^2 = c_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + c_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$，有 $Q^2(f(x) + g(x)\xi) = Q^2(f(x)) + Q^2(g(x))\xi$。对于单项式 x^m，我们得到$Q^2(x^m) = \langle m, c\rangle x^m$ 从而

$$\mathbb{C}[X]^{Q^2} = (H \cap \mathbb{C}[X]_0) \oplus (\xi H \cap \mathbb{C}[X]_1)$$

其中

$$H = \bigoplus_{m \in \ker c} \mathbb{C} x^m$$

是与 c 正交的“超平面”。

我们注意到 $Q(H) = 0$ 和 $Q(g(x)\xi) = g(x)$，因此

$$\begin{aligned} Q(\mathbb{C}[X]^{Q^2}) &= Q(H \cap \mathbb{C}[X]_0) + Q(\xi H \cap \xi J) \\ &= H \cap J \end{aligned}$$

且 $\ker Q|_{\mathbb{C}[X]^{Q^2}} = H \cap \mathbb{C}[X]_0$。因此

$$\begin{aligned} DS_Q \mathbb{C}[X] &= \frac{H \cap \mathbb{C}[X]_0}{H \cap J} \\ &\cong \mathbb{C}[X]_0 / J, \end{aligned}$$

其中最后一个同构源于这样一个事实： $J \supseteq J_c$ 和 $H + J_c = \mathbb{C}[X]_0$。 □

5.5. 态射。设 $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S] \oplus \xi J)$ 和 $X' = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S'] \oplus \xi' J')$ 分别是具有超环面 $T = T_{N,c}$ 和 $T' = T_{N',c'}$ 的仿射环面超簇。回忆一下，超群态射 $\bar{} \; T \to T'$ 由一个格态射 $\phi\colon N \to N'$ 以及一个数 $a \in \mathbb{C}$ 构成，使得 $\bar{\phi}_{\mathbb{C}}(c) = a^2 c'$。

定义 5.17。超簇态射 $\phi\colon X \to X'$ 称为环面态射，如果 $\phi(T) \subseteq T'$，且 $\phi|_T\colon T \to T'$ 是一个超群态射。

在刻画环面态射之前，我们先建立一些记号。相应的坐标超代数映射为

$$\begin{aligned} \phi^* &: \mathbb{C}[S'] \oplus \xi' J' \to \mathbb{C}[S] \oplus \xi J \\ \phi|_T^* &: \mathbb{C}[M', \xi'] \to \mathbb{C}[M, \xi] \end{aligned}$$

其中 $M = \mathbb{Z}S$ 且 $M' = \mathbb{Z}S'$。由于上述定义中的条件蕴含 $\phi_0\colon X_0 \to X_0'$ 是一个环面态射，因此 $\phi_0^*\colon \mathbb{C}[S'] \to \mathbb{C}[S]$ 可由一个半群的 $\hat{} \; \bar{}$ 态射 $\phi^*\colon S' \to S$ 导出，该态射可扩张为一个格的态射 $\phi^*\colon M' \to M$ $\bar{}$。我们将 $\phi\colon N \to N'$ 记作 ϕ^* 的对偶映射。

命题 5.18. 设 T 和 T' 分别是上述仿射环面超簇 X 和 X' 的超环面。

(a) 超簇态射 $X \to X'$ 是环面的，当且仅当 ϕ_0^* 源自半群态射 $\hat{} \; \phi^*\colon S' \to S$，且 $\bar{\phi}_{\mathbb{C}}(c) = a^2 c'$，其中 $a \in \mathbb{C}$ 是 $\phi^*(\xi')$ 的 ξ-系数。 $\bar{}$ (b) 超群态射 $\phi = (\phi, a)\colon T \to T'$ 可延拓为环面超簇的态射 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[S] \to \bar{} \; \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[S']$，当且仅当 $\phi^*(S') \subseteq S$，且 $a = 0$ 或 $\phi^*(J') \subseteq J$。(c) 环面态射是等变的，即对于任意超代数 A，均有 $\phi(t \cdot x) = \phi(t) \cdot \phi(x)$，对所有 $t \in T(A)$ 和 $x \in X(A)$ 成立。

证明。证明过程与通常情形相同（[2], 命题 1.3.14），只是我们使用引理 4.8 来确定 $\phi|_T$ 何时是一个超群态射。注意，条件 $a = 0$ 或 $\phi^*(J') \subseteq J$ 等价于条件 $\phi^*(\xi' J') \subseteq \xi J$，因为 $\phi^*(\xi') = a\xi$。□

6. Quasinormal toric supervarieties

如果其底层簇是正规的，则称该超簇为准正规；等价地，如果每个点处的局部环都是整超域 A，且 $A/(A_1)$ 是整闭的。

6.1. 仿射情形。此后假设 $X_\sigma \supset T_N$ 是与锥 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$对应的正规仿射环面簇，因此 $X_\sigma = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[S_\sigma]$，其中 S_σ 是对偶锥$\check{}\sigma$的半群。若 τ是 σ的一个面，则 X_σ包含 $X_\tau = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[S_\tau]$ 作为开子簇，并且$\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{x^{m_{\sigma,\ \tau}}}$其中$m_{\sigma,\ \tau} \in S_\sigma$满足 $\tau = \{u \in \sigma \mid \langle m_{\sigma,\tau}, u\rangle = 0\}$。

命题 6.1. 使用上述记号，设$X_{\sigma,\ J^\sigma} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma] \oplus \xi J^\sigma)$是底层簇为 X_σ、费米理想为 J^σ的仿射环面超簇。

(a) 局部化

$$(\mathbb{C}[S_\sigma] \oplus \xi J^\sigma)_{x^{m_{\sigma,\tau}}} = \mathbb{C}[S_\tau] \oplus \xi J^\tau$$

是开子簇 X_{τ,J^τ} 的坐标环，该子簇由限制到开仿射子集 X_τ得到。特别地，有 $J^\sigma_{x^{m_{\sigma,\ \tau}}} = J^\tau$。

(b) 令 $J^\sigma_c = (x^m \in \mathbb{C}[S_\sigma] \mid \langle m, c\rangle \neq 0)$，$\tau$也同理。则有 $(J^\sigma_c)_{x^{m_{\sigma,\tau}}} = J^\tau_c$。(c) 如 (a) 部分所定义，$X_{\tau,J^\tau}$ 是一个仿射环面超簇，其环面为 $T_{N,c}$。

证明。(a) $\mathbb{C}[S_\sigma]_{x^{m_{\sigma,\tau}}} = \mathbb{C}[S_\tau]$ 这一事实是标准的，因此只需证明$J^\sigma_{x^{m_{\sigma,\tau}}} = J^\tau$。只需计算在由 $x^{m_{\sigma,\tau}}$定义的基本开集上的截面，即可立即得到这一结论。

(b) 令 x^m为 J^σ_c和 $k \in \mathbb{N}$的一个生成元，因此 $\langle m, c\rangle \neq 0$且 $x^{m-km_{\sigma,\tau}} \in (J^\sigma_c)_{x^{m_{\sigma,\tau}}}$。现在考虑量$\langle m - km_{\sigma,\ \tau}, c\rangle$. 若 $\langle m_{\sigma,\tau}, c\rangle = 0$，则确有 $x^{m-km_{\sigma,\tau}} \in J^\tau_c$。否则$\langle m_{\sigma,\tau}, c\rangle \neq 0$，因此 $x^{\pm m_{\sigma,\tau}} \in J^\tau_c$，从而得到 $J^\tau_c = (1)$。

为证明 $(J^\sigma_c)_{x^{m_\sigma},\tau} \supseteq J^\tau_c$，令 x^m为 J^τ_c的一个生成元，于是 $x^m \in \mathbb{C}[S_\tau]$满足 $\langle m, c\rangle \neq 0$。由 (a) 部分可知，$m = m' - km_{\sigma,\tau}$，其中 $x^{m'} \in S_\sigma$和 $k \in \mathbb{N}$。若$\langle m_{\sigma,\tau}, c\rangle = 0$，则 $\langle m', c\rangle \neq 0$，从而 $x^{m'} \in J^\sigma_c$，因此 $x^m \in (J^\sigma_c)_{x^{m_\sigma},\tau}$。否则$\langle m_{\sigma,\tau}, c\rangle \neq 0$，于是 $x^{\pm m_{\sigma,\ \tau}} \in (J^\sigma_c)_{x^{m_\sigma},\tau}$，因此 $(J^\sigma_c)_{x^{m_\sigma},\tau} = (1)$。(c) 这由 (b) 部分立即得到，因为 $(J^\sigma_c)_{x^{m_\sigma},\tau} = J^\tau_c$。□

也就是说，为了确定环面T_N上的c一个准正规仿射环面超簇，需要给出一个由非零 T_N-不变理想 $J^\sigma \supset J_c$装饰的强凸有理多面体锥 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$，其中理想取自 $\mathbb{C}[S_\sigma]$。将其限制到 σ的面上时，可以发现，我们可以用 J^σ的某个局部化 J^τ来装饰每个面。这些装饰将在后文描述非仿射情形时发挥重要作用。

首先，我们将命题 5.18 转化为锥的语言。

命题 6.2. 假设我们有强凸有理多面体锥 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 和$\sigma' \subset N'_{\mathbb{R}}$，一个超群的态射 $\phi = (\phi, a) : T_{N,c} \to T_{N',c'}$，以及非零的 T_N-、$T_{N'}$-不变理想 $J \supseteq J^\sigma_c$和 $J' \supseteq J^{\sigma'}_{c'}$，它们分别属于 $\mathbb{C}[S_\sigma]$和 $\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$。那么，ϕ可以延拓为仿射环面超簇之间的映射 $\phi : X_{\sigma,J} \to X_{\sigma',J'}$，当且仅当 $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma) \subseteq \sigma'$，并且 $a = 0$ 或 $\phi^*(J') \subseteq J$。

以下引理将在第7节第5小节中派上用场，其本身也颇有趣。

引理 6.3. 设 $(\phi, a) : X_{\sigma,J} \to X_{\sigma',J'}$ 是环面超簇之间的一个映射，并设

$$\phi^* : \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \oplus \xi' J' \to \mathbb{C}[S_\sigma] \oplus \xi J$$

为对偶映射。则 $\phi^*(\xi' J_{c'}) \subseteq \xi J_c$。

证明。设 $m' \in S_{\sigma'} - \ker c'$。则

$$\begin{aligned}\langle \bar{\phi}^*(m'), c\rangle &= \langle m', \bar{\phi}_{\mathbb{C}}(c)\rangle \\ &= a^2\langle m', c'\rangle,\end{aligned}$$

当 $a \neq 0$ 时，该值非零。在此情形下，我们有 $\phi^*(J'_c) \subseteq J_c$。如果 $a = 0$，那么 $\phi^*(\xi') = 0$，引理仍然成立。□

6.2. 一般情形。设 X 是一个准正规环面超簇，其环面为 $T = T_{N,\,c}$。则 $X_0 = X_\Sigma$，其中扇 Σ 位于 $N_{\mathbb{R}}$ 中。根据上一节的结果，每个锥 $\sigma \in \Sigma$ 都由 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 的一个适当理想 $J^\sigma \supset J^\sigma_c$ 装饰；若 τ 是 σ 的一个面，则 J^τ 是 J^σ 的特定局部化。我们证明，对于给定的环面 T，这些数据给出了准正规环面超簇的完整分类。

命题 6.4。设 Σ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个扇，$c \in N_{\mathbb{C}}$，并设 $\{J^\sigma \subseteq \mathbb{C}[S_\sigma] \mid \sigma \in \Sigma\}$ 是非零理想的一个集合，使得每个 $J^\sigma \supseteq J^\sigma_c$。如果当 τ 是 Σ 中 σ 的一个面时，$(J^\sigma)_{x^{m_{\sigma,\,\tau}}} = J^\tau$，则仿射环面超簇 $U_\sigma = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma] \oplus \xi J^\sigma)$ 可以沿其交集粘合起来，从而得到一个环面超簇；其底层簇为 X_Σ，环面为 $T_{N,\,c}$。

证明。由命题 6.1(a) 和该命题的经典版本可得。□

因此，拟正规环面超簇可以由一个扇 Σ 及其上装饰的适当理想来描述。这些理想自然地构成一个凝聚理想层 $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{O}_{X_\Sigma}$，称为~费米子层，它是通过将每个由锥 $\sigma \in \Sigma$ 描述的开仿射子集上的凝聚层 J^σ 粘合而得到的。拟正规环面超簇的费米子层具有以下预期性质：

命题 6.5. 设 $\mathscr{J}$ 是一个拟正规环面超簇的费米子层，其底层簇为 X_Σ，环面为 $T = T_{N,\,c}$.

(a) $\mathscr{J}$ 包含最小费米子层 $\mathscr{J}_c$，该层通过粘合所有 $\sigma \in \Sigma$ 对应的层 J^σ_c 获得。~

(b) $\mathscr{J}$ 是 T_N-等变的。

证明。(a) 注意到根据命题 6.1(b)，$\mathscr{J}_c$ 定义良好。由于每个 $J^\sigma \supseteq J^\sigma_c$，结论得证。

(b) 我们知道该结论对 $U = U_\sigma$ 成立。其余部分是标准的；例如参见 [9]。□

因此我们已经证明：

命题 6.6. 设 X 是准正规超簇，且 $T = T_{N,\,c}$。那么 X 是具有超环面 T 的环面超簇，当且仅当存在 $X \cong X_{\Sigma,\,\mathscr{J}} := (X_\Sigma, \mathscr{O}_{X_\Sigma} \oplus \xi\mathscr{J})$，其中 Σ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个扇，且 $\mathscr{J} \supseteq \mathscr{J}_c$ 是 $\mathscr{O}_{X_\Sigma}$ 中一个非零的 T_N-等变理想层。

6.3. 组合方法。上面的分类数据 $(\Sigma, \mathscr{J})$ 只是半组合性的，因为 $\mathscr{J}$ 是一个代数对象。在本节中，我们用更具组合性的数据来表示 $\mathscr{J}$；具体而言，我们用一组 $\mathscr{B}$ 来替代 $\mathscr{J}$，它们是 $\mathscr{J}$ 的局部生成元。

定义 6.7. 与定义 5.8 中一样，对于 m、$m' \in S_\sigma$，若存在 $m'' \in S_\sigma$ 使得 $m = m' + m''$，则记作 $m' \leq_\sigma m$。

定义 6.8. 设 $T_{N,c}$ 是一个超环面，Σ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个扇。对于每个 $\sigma \in \Sigma$，令 $\mathscr{B}_\sigma$ 为 S_σ 中的一个非空有限集。若对所有锥 σ、$\sigma' \in \Sigma$ 均满足以下条件，则称 $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ 是扇 Σ 的一组 c-可容许装饰：

(i) 对所有 $m \in S_\sigma - \ker c$，存在 $b \in \mathscr{B}_\sigma$ 使得 $b \leq_\sigma m$。

(ii) 对所有 $b \in \mathscr{B}_\sigma$，存在 $b' \in \mathscr{B}_{\sigma'}$ 使得 $b' \leq_{\sigma\cap\sigma'} b$。

(iii) 若 a、$b \in \mathscr{B}_\sigma$ 满足 $a \leq_\sigma b$，则 $a = b$。

请注意，与定义 5.8 不同，这里我们要求极小性 (iii) 作为容许性的一部分。分类并非严格依赖这一要求，但它简化了第 7.3 节中的一些问题。

引理 6.9. 定义 6.8 的条件 (ii) 对所有 σ、$\sigma' \in \Sigma$ 成立，当且仅当对所有满足其中一个是另一个的面的 σ、σ' 成立。

证明。假设它对所有面都成立，并设 $\tau = \sigma \cap \sigma'$。现在设 $b \in \mathscr{B}_\sigma$。那么存在 $a \in \mathscr{B}_\tau$ 使得 $a \leq_\tau b$，同理，存在 $b' \in \mathscr{B}_{\sigma'}$ 使得 $b' \leq_\tau a$，因为 τ 是 σ 和 σ'的面。但于是 $b' \leq_\tau a \leq_\tau b$，所以我们完成了。□

也就是说，我们可以用 (ii′) 代替条件

(ii)：令 τ 为 σ 的一个面。那么

- 对于所有 $b \in \mathscr{B}_\sigma$，存在 $a \in \mathscr{B}_\tau$ 使得 $b \leq_\tau a$。
- 对于所有 $a \in \mathscr{B}_\tau$，存在 $b \in \mathscr{B}_\sigma$ 使得 $a \leq_\tau b$。下面的引理表明，$\mathscr{B}$ 由层的局部生成集组成。 af $\mathscr{J}$。

引理 6.10. 对每个 $\sigma \in \Sigma$，令 J^σ 为 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 中的单项式理想，且 $\mathscr{B}_\sigma \subset S_\sigma$ 为 J^σ 的有限生成集。那么

(a) $J^\sigma \supseteq J^\sigma_c$当且仅当满足定义 6.8 的条件 (i)。(b) $J^\sigma_{x^{m_{\sigma,\,\tau}}} = J^\tau$当且仅当满足定义 6.8 的条件 (ii) ≈(ii′)。(c) $\mathscr{B}_\sigma$ 当且仅当满足定义 6.8 的条件 (iii) 时是极小的。

证明。首先注意，对于 $m \in S_\sigma$，$x^m \in J^\sigma$ 当且仅当存在一个生成元 $b \in \mathscr{B}_\sigma$ 和一个元素 $f \in \mathbb{C}[S]_\sigma$，使得 $fx^b = x^m$。特别地，f 总是一个单项式，因此这等价于 $b \leq_\sigma m$。

(a) 理想 J^σ_c 由 $S_\sigma - \ker c$ 生成，因此条件 (i) 恰好说明 J^σ_c 的所有生成元都属于 J^σ。(b) 注意，J^τ 和 $J^\sigma_{x^{m_{\sigma,\,\tau}}}$ 都是 $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{x^{m_{\sigma,\,\tau}}}$ 的理想，分别由 $\mathscr{B}_\tau$ 和 $\mathscr{B}_\sigma$ 生成。令 $a \in \mathscr{B}_\tau$。由 (ii')，存在 $b \in \mathscr{B}_\sigma$ 使得 $b \leq_\tau a$，即 $x^a \in J^\sigma_{x^{m_{\sigma,\,\tau}}}$。类似地，令 $b \in \mathscr{B}_\sigma$，则存在 $a \in \mathscr{B}_\tau$ 使得 $a \leq_\tau b$，即 $b \in J^\tau$。因此 $J^\sigma_{x^{m_{\sigma,\,\tau}}} = J^\tau$。反向追溯相同的推理即可得到逆命题。(c) 若 $a \leq_\sigma b$ 且 $a \neq b$，则 b 仍属于由 $\mathscr{B}_\sigma - \{b\}$ 生成的理想，因此 $\mathscr{B}_\sigma$ 不是极小的。反过来，若 B_σ 不是极小的，则可找到满足 $a \leq_\sigma b$ 的 a、$b \in \mathscr{B}_\sigma$。□

我们将 $X_{\Sigma,\mathscr{B}}$ 记为通过沿着交集粘合仿射环面超簇 $X_{\sigma,\mathscr{B}_\sigma}$（对应于 $\sigma \in \Sigma$）而定义的环面超簇，与前文相同。由引理 5.6(b) 可知，每个 $\mathscr{B}_\sigma$ 在 S_σ 的可逆元素意义下都是唯一的。

推论 6.11. 设 X 是一个准正规超簇，且 $T = T_{N,c}$。那么，X 是一个超环面为 T 的环面超簇，当且仅当 $X \cong X_{\Sigma,\mathscr{B}}$，其中扇 Σ 带有 c-可容许的装饰 $\mathscr{B}$。

例 6.12。将 $(n|1)$ 维射影超空间视为超簇；即$\mathbb{P}^{n|1} = (\mathbb{P}^n, \Lambda^\bullet\mathscr{O}(-1)) = \mathrm{Proj}\ \mathbb{C}[x_0, ..., x_n, \xi]$。其底层簇 $\mathbb{P}^n$ 可视为环面簇 X_Σ，其中 Σ 是一个扇，其锥为 $\{e_1, ..., e_n, -(e_1 + ... + e_n)\}$ 的真子集的正张成。

利用 Proj 构造，$\mathbb{P}^{n|1}$ 的仿射图的坐标环为 $\mathbb{C}[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}, \frac{\xi}{x_i}]$，其中 $i = 0$、.....、n。令 $z_i = \frac{x_i}{x_0}$ 为 $i = 1$、.....、n 和 $\eta = \frac{\xi}{x_0}$，我们可以将这些环写成

$\mathbb{C}[z_1,...,z_n,\eta]$ 和 $\mathbb{C}[z_i^{-1},z_i^{-1}z_1,...,z_i^{-1}z_n,z_i^{-1}\eta]$ 对应于 $i=1$、.....、 n。值得注意的是， $\mathbb{C}[z_1,...,z_n]$ 是 $\mathbb{R}_+$ 维张成的 $\{e_1,...,e_n\}$的对偶锥的半群代数，而 $\mathbb{C}[z_i^{-1},z_i^{-1}z_1,...,z_i^{-1}z_n]$则是 $\{e_1,...,\hat{}e_i$、.....、 e_n、 $-($ $e_1+...+e_n)\}$ 的半群代数，其中$\hat{}e_i$ 表示排除 e_i。 分别将这些锥记为 σ_0 和 σ_i，对应于 $i=1$、.....、 n。

该环面簇的环面 $T_{\mathbb{Z}^n}$ 通过以下方式作用于坐标环：

$$(t_1,...,t_n)\cdot x_0^{m_0}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}=x_0^{m_0}(t_1x_1)^{m_1}\cdots(t_nx_n)^{m_n}.$$

由此可知， $\mathbb{P}^{n|1}$ 可以表示为一个带装饰的扇，其中 σ_0 由 $\{1\}$ 装饰， σ_i由 $\{x_i^{-1}\}$ 装饰（它们是 $T_{\mathbb{Z}^n}$ 在坐标环中分别作用于奇生成元的特征）。那么，如果 $\mathbb{P}^{n|1}$ 是一个环面超簇，则环面必定为 $T_{\mathbb{Z}^n,\ c}$ 其中$\langle m$，对于所有形如 $z_i^{-1}z_j$（其中 i、 $j>0$）的特征 x^m，都有 $c\rangle=0$。但是 $z_i^{-1}z_j=x_i^{-1}x_j$，因此特别地，除相差一个比例因子外，我们必须有 $c=0$ 或 $c=$(1, ..., 1)。

6.4. 态射。于是，具有一个奇维的准正规环面超簇范畴可描述为：其对象为上述对象 $X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}$，其中允许 T 变化；态射则如定义 5.17 所述，具体刻画如下。首先，回顾第 2.3 节，格映射 $\phi\colon N\to N'$称为与 $N_{\mathbb{R}}$、 $N'_{\mathbb{R}}$中的扇 Σ、 Σ'相容，如果对于每个 $\sigma\in\Sigma$, 都存在 $\sigma'\in\Sigma'$，使得 $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma)\subseteq\sigma'$。

定义 6.13. 设 $\phi_0:X_\Sigma\to X'_\Sigma$ 是由格映射 $\phi\colon N\to N'$ 诱导的环面簇态射，该映射与 $N_{\mathbb{R}}$ 中的扇 Σ 以及 N' 中的扇 $\Sigma'_{\mathbb{R}}$ 相容。设 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 分别是其对应扇的 $\_c$-可容许装饰和 c'-可容许装饰。我们称 ϕ 与这些装饰相容，如果每当 $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma)\subseteq\sigma'$ 且 $b'\in\mathscr{B}'_{\sigma'}$时，都存在 $b\in\mathscr{B}_\sigma$ 使得 $\_b\le_\sigma\phi^*(b')$。

命题 6.14。沿用前面的记号，设 $\phi^\#:\mathscr{O}_{X_{\Sigma'}}\to\phi_*\mathscr{O}_{X_\Sigma}$ 是 $X_{\Sigma'}$ 上层的相应态射，并设 $Z\subset X_\Sigma$ 和 $Z'\subset X_{\Sigma'}$ 分别是由装饰 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 得到的理想层 $\mathscr{J}$ 和 $\mathscr{J}'$ 所对应的闭子概形。则以下各项等价：

¯(a) ϕ 与装饰相容。(b) 对于每个 $\sigma\in\Sigma$和 $\sigma'\in\Sigma'$，使得 $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma)\subseteq\sigma'$，均有 $\phi_0|^*_{U_\sigma}(J^{\sigma'})\subseteq J^\sigma$。(c) $\phi^\#|_{\mathscr{J}'}$将 $\mathscr{J}'$映到 $\phi_*\mathscr{J}$。(d) $\phi|_Z$ 是概形态射 $Z\to Z'$。

证明。对于 (a) $\iff$(b)，注意到 $\bar{\phi}^*(\mathscr{B}'_{\sigma'})$ 生成 $\phi_0|^*_{U_\sigma}(J^{\sigma'})$。因此， $\phi_0|^*_{U_\sigma}(J^{\sigma'})\subseteq_J^\sigma$等价于以下条件：对于所有 $b'\in\mathscr{B}'_{\sigma'}$，存在 $b\in\mathscr{B}_\sigma$ 使得$b\le_\sigma\phi^*(b')$。该 ma

p $\phi_0|^{*\ \sigma}_{U}:\mathbb{C}[S_{\sigma'}]\to\mathbb{C}[S_\sigma]$ 与.....相同

$$\mathrm{Res}^{\phi^{-1}(U_{\sigma'})}_{U_\sigma}\circ\phi^\#(U_{\sigma'}):\mathscr{O}_{X_{\Sigma'}}(U_{\sigma'})\to\mathscr{O}_{X_\Sigma}(U_\sigma),$$

因此，若我们进一步限制到 $J^{\sigma'}\subseteq\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$and $\mathscr{J}'(U_{\sigma'})\subseteq\mathscr{O}_{X_{\Sigma'}}(U_{\sigma'})$，便立即得到 (b) $\iff$ (c)。(c) $\iff$ (d) 这一事实是标准的。□

因此，若 $X_{\sigma,J}$ and $X_{\sigma',J'}$ 是仿射的，则与装饰相容恰好就是如下条件： $\phi^*(J')\subseteq J$，如命题 6.2 所示。以下条件等价于 $\phi^*(\xi'J')\subseteq\xi J$ 这一条件。

定义 6.15. 设 $X_{\Sigma,\mathscr{B}}$ and $X_{\Sigma',\mathscr{B}'}$ 是环面超簇，其超环面分别为 $T_{N,c}$ and $\_T_{N',c'}$。若 $(\phi,a):T_{N,\ c}\to T_{N'c,}$ 是超群态射，则称¯ ¯(ϕ,a) 与带装饰扇相容，如果 $\phi\colon N\to N'$ 与¯扇相容，并且要么 $a=0$，要么 ϕ 与装饰相容。

命题 6.16. 设 N,N' 是格， Σ,Σ' 是 $N_{\mathbb{R}},N'_{\mathbb{R}}$ 中分别带有 c-、c'-容许装饰 $\mathscr{B}$,$\mathscr{B}'$ 的扇。假设 $\phi=(\phi,a):T_{N,\ c}\to T_{N',\ c'}$ 是一个

超群态射。那么 ϕ 可延拓为环面超簇的态射 $X_{\Sigma,\mathscr{B}} \to X_{\Sigma',\mathscr{B}'}$，当且仅当 $\bar{}(\phi, a)$ 与带装饰扇相容。

证明。首先假设 ϕ 可延拓。根据纯偶情形中的类似结果，$\bar{}\phi$ 与扇相容。令 $\sigma \in \Sigma$，则延拓 ϕ 限制为一个映射

$$\phi|_{U_{\sigma,J^\sigma}} : U_{\sigma,J^\sigma} \to U_{\sigma',J^{\sigma'}}$$

$\bar{}$对于任意满足 $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma) \subseteq \sigma'$ 的 $\sigma' \in \Sigma'$。由命题 6.2 可知，$a = 0$ 或 $\phi_0|^*_{U_\sigma}(J^{\sigma'}) \subseteq J^\sigma$，这由命题 6.14 即可得证。

反过来，假设这些相容条件成立。根据命题 6.2，这些条件保证，对于每个开仿射托里克子簇 $U_{\sigma,\mathscr{B}_\sigma} \subseteq X_{\Sigma,\mathscr{B}}$，都存在一个开仿射托里克子簇 $U_{\sigma',\mathscr{B}'_{\sigma'}} \subseteq X_{\Sigma',\mathscr{B}'}$，使得 ϕ 可扩张为一个环面态射$U_{\sigma,\mathscr{B}_\sigma} \to U_{\sigma',\mathscr{B}'_{\sigma'}}$。此外，这些局部扩张在交上彼此相容，因为交也是开仿射托里克子簇。因此，可以将这些局部扩张粘合起来，得到一个整体扩张，从而完成证明。□

定义 6.17. 我们如下定义带装饰扇的范畴：对象是四元组 $(N, c, \Sigma, \mathscr{B})$，其中 N是一个格，$c \in N_{\mathbb{C}}$, Σ是 $N_{\mathbb{R}}$中的一个扇，而 $\mathscr{B}$是 Σ的一个 c-$\bar{}$容许装饰族。态射是形如 $(\phi, a) : (N, c, \Sigma, \mathscr{B}) \to (N', c', \Sigma', \mathscr{B}')$ 的元组，其中 $\bar{\phi} : N \to N'$是一个格映射，$a \in \mathbb{C}$满足 $\bar{\phi}_{\mathbb{C}}(c) = a^2 c'$,$\bar{}$，且 (ϕ, a) 与带装饰扇相容。态射的复合定义为$\bar{}\ \bar{}\ \bar{}\ \bar{}(\phi', a') \circ (\phi, a) = (\phi' \circ \phi, aa')$。

定理 1. 具有一个奇维的准正规环面超簇范畴等价于带装饰扇范畴。

7. The geometry of quasinormal toric supervarieties

既然我们已经描述了一个奇维拟正规环面超簇的范畴，现在我们希望了解它们的几何性质。

7.1. 分裂环面超簇。

粗略地说，如果一个超簇在奇方向上是光滑的，那么它就是分裂的。

定义 7.1. 超簇 X 是分次的，如果存在一个 $\mathscr{O}_{X_0}$-模的凝聚层 $\mathscr{F}$，使得 $\mathscr{O}_X \cong \Lambda^\bullet \mathscr{F}$。如果 $\mathscr{F}$ 可以选为局部自由的（即一个向量丛），则称其为分裂的。

正如我们所见，每个 $n|1$ 维准正规环面超簇都是分次的，其费米子层为 $\mathscr{F} = \mathscr{J}$，且 $\Lambda^2 \mathscr{J} = 0$。

命题 7.2. 令 $X = X_{\Sigma,\mathscr{B}} = X_{\Sigma,\mathscr{J}}$ 为一个准正规环面簇，其环面为 $T_{N,c}$。以下条件等价：

(a) X 是分裂的。(b) 每个 $\mathscr{B}_\sigma$
都是单元素集。(c) 每个 J^σ 都是
主理想。(d) $\mathscr{J}$ 是 X_Σ上的线丛。

证明。根据分裂的定义，(a) $\iff$ (d)；根据主理想的定义，(b) $\iff$ (c)。现在，若(d)成立，则 $\mathscr{J}|_{U_\sigma}$ 是仿射环面簇 U_σ上的线丛。Gubeladze 的一个结果 [6] 表明，仿射$\tilde{}$环面簇上的任意向量丛都是平凡的，因此 $\mathscr{J}|_{U_\sigma} = J^\sigma$，其中 $J^\sigma \cong \mathbb{C}[S_\sigma]$作为一个 $\mathbb{C}[S^\sigma]$-模。也就是说，对每个 $\sigma \in \Sigma$，J^σ都是主理想。

$\tilde{}$反之，如果每个理想都是主理想，那么每个 J^σ 都是平凡线丛，因此 $\mathscr{J}$在 U_σ对 X_Σ 的覆盖下是平凡的。□

定义 7.3. 今后，若一族 $\mathscr{B}$ 装饰中每个$\mathscr{B}_\sigma$ 都是单元素集，我们就称其为分裂。

7.2. 光滑环面超簇。我们旨在建立光滑环面超簇的刻画。首先，回顾光滑超簇和光滑锥的定义。

定义 7.4. 设 $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$ 是一个超簇，且 $\mathfrak{p} \in X(\mathbb{C}) = |X|$ 是一个闭点。记 B 为 $\mathscr{O}_{X,\ \mathfrak{p}}$ 的茎。若 $\overline{B} := B/(B_1)$ 是一个正则局部环，且 $B \cong \overline{B}[\xi_1, ..., \xi_n]$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，则称 X 在 $\mathfrak{p}$ 处光滑。若 X 在所有点 $\mathfrak{p}$ 处都光滑，则称 X 光滑。

命题 3.7.4 表明，若 X 在 $\mathfrak{p}$ 处光滑，则 $B = \mathscr{O}_{X,\ \mathfrak{p}}$ 是一个整超域。因此，只有整超簇才可能光滑；而 $\overline{B}$ 是正则局部环这一条件，等价于 $X_0 = \overline{X}$ 在 $\mathfrak{p}$ 处光滑这一条件。

定义 7.5. 设 N 是一个格，$\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个强凸有理多面体锥。若 σ 的极小生成元构成 N 的一组基的一部分，则称其为光滑的。若一个扇 Σ 中的所有锥都是光滑的，则称该扇为光滑的。

我们先从仿射情形开始。

命题 7.6. 设 X 是一个仿射环面超簇，其环面为 $T_{N,\ c}$。当且仅当 $X \cong X_{\sigma,\ \mathscr{B}_\sigma}$ 对某个光滑锥 σ 和某个单元素集 $\mathscr{B}_\sigma$ 成立时，X 才是光滑的。

证明. 若 X 光滑，则 X_0 也光滑。但光滑簇是正规簇，因此 $X = X_{\sigma,\ \mathscr{B}_\sigma}$，其中 σ 是一个光滑锥，$\mathscr{B}_\sigma = \{m_1, ..., m_s\} \subset S_\sigma$ 是一个 c-容许有限集。于是，底层簇为 $X_0 \cong \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x_1, ..., x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^\times)^{n-r}$，其环面为 $T_0 \cong (\mathbb{C}^\times)^n$。在 $\mathfrak{p} = (0^r, 1^{n-r})$ 处局部化，令 $B = \mathbb{C}[S]_{\mathfrak{p}}$，可得 $B \cong \overline{B}[x^{m_1}\xi, ..., x^{m_s}\xi]$，其中对于 $i \neq j$，有 $x^{m_i}\xi \notin \overline{B}[x^{m_j}\xi]$。根据光滑性的定义，可知 $s = 1$。

另一方面，如果 σ 是一个光滑锥，而 $\mathscr{B}_\sigma$ 是一个单元素集，那么根据上述推理，我们有 $B \cong \overline{B}[x^m\xi] \cong \overline{B}[\xi]$，其中 $\overline{B}$ 是一个正则局部环。因此 $X_{\sigma,\ \mathscr{B}_\sigma}$ 是光滑的。□

一般情形可由命题 7.2 和 7.6 立即得出。

定理 2. 设 X 是带有环面 $T_{N,c}$ 的环面超簇。那么，当且仅当 $X \cong X_{\Sigma,\mathscr{B}}$ 对应于光滑扇 Σ 和分裂装饰 $\mathscr{B}$ 时，X 光滑。

例 7.7。在本例中，我们证明每个 $(1|1)$ 维环面超簇都是光滑的。注意，3 个 1 维普通环面簇（在同构意义下）是环面 $\mathbb{C}^\times$ 以及仿射直线和射影直线 $\mathbb{A}^1$ 和 $\mathbb{P}^1$，它们都是光滑的。此外，两个 $(1|1)$ 维超环面（在同构意义下）是 $T_{\mathbb{Z},0}$ 和 $T_{\mathbb{Z},1} \cong Q(1)$。

注意，在 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^\times] \cong \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 中唯一的非零单项式理想是整个环 (1)。然而，在 $\mathbb{C}[\mathbb{A}^1] \cong \mathbb{C}[x]$ 中，对于任意非负整数 n，我们都有 (x^n)。由于所有这些理想都是主理想，且光滑性是仿射局部的，因此确实可以推出每个 $(1|1)$ 维的环面超簇都是光滑的。

我们现在考虑 $\mathbb{P}^1$ 上的可能性。设 m、$n \geq 0$。如果将仿射环面超簇谱 $\mathbb{C}[x, x^m\xi]$ 和谱 $\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-n}\xi]$ 沿其交集谱 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, \xi]$ 粘合在一起，那么我们得到一个环面超簇，其底层簇为 $\mathbb{P}^1$，其费米子层同构于线丛 $\mathscr{O}(-m-n)$。特别地，如果超环面为 $Q(1)$，那么 m、$n \leq 1$，因此费米子层有三种可能；即 $\mathscr{O}(0)$ $\mathscr{O}(-1)$，以及 $\mathscr{O}(-2)$。

例 7.8。考虑 Π-对称的超格拉斯曼簇 $\mathbf{Gr}(1|1,2|2)^{\Pi}$，它由 $\mathbb{C}^{2|2}$ 中在宇称切换 Π 下保持不变的 $(1|1)$ 维子空间组成。对于 A 一个超代数，其 A-点由满秩矩阵组成

$$\begin{pmatrix} x_1 & \xi_1 \\ x_2 & \xi_2 \\ \xi_1 & x_1 \\ \xi_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

模去 $Q(1)$ 的右作用，其中，如果一个矩阵具有可逆的 $(1|1)\times(1|1)$ 子矩阵（即 x_1 或 x_2 在 A_0 中可逆），则称该矩阵为满秩矩阵。

例如，参见 [8], 第 6 节，$\mathbf{Gr}(1|1,2|2)^{\Pi}$ 由两个坐标图覆盖，坐标为

$$\begin{pmatrix} y & \eta \\ 1 & 0 \\ \eta & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & \zeta \\ 0 & 1 \\ \zeta & z \end{pmatrix}$$

分别地，其转移函数由 $z = y^{-1}$ 和 $\eta = -\zeta/z^2$给出。根据前面的例子，我们发现 $\mathbf{Gr}(1|1,2|2)^{\Pi}$ 的底层簇为 $\mathbb{P}^1$，其费米子层为$\mathscr{O}(-2)$。

该空间允许一般线性超群 $\mathbf{GL}(2|2,\mathbb{C})$ 中保持 Π 不变的子群对其施加一个自然的左作用；该子群是

$$Q(2) = \left\{ \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix} \right\}$$

其中 B 和 C 分别是由偶元素和奇元素组成的 2×2 矩阵。我们观察到，$Q(2)$ 包含一个嵌入的 $Q(1)$ 副本，作为

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使得在第一个坐标图上的作用

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \eta \\ 1 & 0 \\ \eta & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应于乘法

$$\begin{pmatrix} a & \tau \\ \tau & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \eta \\ \eta & y \end{pmatrix}$$

在 $Q(1)$ 中。因此，$\mathbf{Gr}(1|1,2|2)^{\Pi}$ 自然地是一个光滑的环面超簇，其超环面为$Q(1)$。

7.3. $\mathscr{J}$ 的纤维。获取费米子层 $\mathscr{J}$ 信息的一种方法是计算其纤维，这最终将提取出扇的装饰 $\mathscr{B}$。

在具有环面 T_N 的正规环面簇 X_Σ 的经典情形中，环面轨道与锥 $\sigma\in\Sigma$ 一一对应（参见[2], 定理 3.2.6）。我们将对应于锥 $\sigma\in\Sigma$ 的T_N-轨道记为 $\mathbf{Orb}(\sigma)$，其属于 X_Σ。

引理 7.9。设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathbf{Orb}(\sigma)$ 中的一个闭点。那么，将 $\mathscr{B}_\sigma$ 视为 $\mathbf{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p})$ 的特征格的子集时，它是唯一的。

证明。由引理 5.6(b)，$\mathscr{B}_\sigma$ 在相差 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 中可逆单项式的乘法意义下唯一。$\mathbb{C}[S_\sigma]$ 中的可逆单项式恰为 x^m 对应于 $m \in \sigma^\perp \cap M$ 的那些，因为 $S_\sigma = \check{}\sigma \cap M$。注意，$\sigma^\perp \cap M$ 是轨道 $T_N\mathfrak{p}$ 的特征格，其中 $T_N\mathfrak{p}$ 被视为一个代数环面。

令 $b \in \mathscr{B}_\sigma$，并令 $m \in \sigma^\perp \cap M$。$x^b$ 和 x^{b+m} 都可以视为特征$T_N \to \mathbb{C}^\times$。只需证明，将它们与映射 $\mathrm{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p}) \to T_N$复合后，它们成为 $\mathrm{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p})$ 的同一特征。根据轨道-稳定子定理，我们有 $T_N\mathfrak{p} \cong T_N/\mathrm{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p})$，因此，$x^m$ 属于 $T_N\mathfrak{p}$的特征格这一陈述，恰好等价于 x^m 在 $\mathrm{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p})$ 上是平凡的，正如所需。□

命题 7.10. 设 $X_{\Sigma,\mathscr{B}}$ 为一个准正规环面超簇，其超环面为 $T_{N,c}$，并设 $\sigma \in \Sigma$。令 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathrm{Orb}(\sigma)$ 中的一个闭点。那么，纤维 $\mathscr{J}(\mathfrak{p})$ 作为 $\mathrm{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p})$ 的一个表示，是 $\mathscr{B}_\sigma$ 中各特征的直和。

证明。在 $\mathfrak{p}$ 处局部化意味着我们将不属于 $\mathfrak{p}$ 的单项式取为可逆元。如果 $\mathfrak{p}$ 属于与 σ 对应的 T_N-轨道，我们就将 $\sigma^\perp$ 中的单项式取为可逆元。因此，当我们用 $\mathfrak{p}J^\sigma_{\mathfrak{p}}$ 对 $J^\sigma_{\mathfrak{p}}$ 取商后，剩下的就是所需特征的直和。□

例 7.11。考虑环面 $T = T_{\mathbb{Z}^3,\ (1,\ 0,\ 0)} \cong Q(1) \times (\mathbb{C}^\times)^2$，以及定义在 T 上的环面超簇，其底层簇为 $X_0 = \mathbb{A}^3$（来自锥 σ，该锥是 $\mathbb{R}^3$ 中的正正交象限），坐标环为

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_1\xi, x_2^{j_1}x_3^{k_1}\xi, ..., x_2^{j_\ell}x_3^{k_\ell}\xi]$$

其中 $\ell \in \mathbb{N}$、$0 \le j_1 \le ... \le j_\ell$ 和 $k_1 \ge ... \ge k_\ell \ge 0$ 为某些固定元素。注意，$\mathscr{B}_\sigma = \{x_1, x_2^{j_i}x_3^{k_i}\}_{i=1,...,\ell}$。根据推论 5.14，每个以 T 为超环面、以 X_0 为底层簇的环面超簇都具有这种形式，因为 $J_{(1,0,0)} = (x_1)$。

记 τ_{ij} 为由 e_i 和 e_j 生成的二维锥，记 ρ_i 为由 e_i 生成的一维锥。可以验证以下计算，其中我们将 $\mathbb{A}^3$ 中的极大理想与经典点等同起来：

- 对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Orb}(\sigma) = \{(0, 0, 0)\}$，纤维是
$$J(\mathfrak{p}) \cong \mathbb{C}x_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{C}x_2^{j_i}x_3^{k_i}$$
- 对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Orb}(\tau_{12}) = 0 \times 0 \times \mathbb{C}^\times$，纤维为
$$J(\mathfrak{p}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2^{j_1} & \text{if } \ell > 0 \text{ and } j_1 > 0 \\ \mathbb{C}1 & \text{if } \ell > 0 \text{ and } j_1 = 0 \\ \mathbb{C}x_1 & \text{if } \ell = 0 \end{cases}$$
- 对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Orb}(\tau_{13}) = 0 \times \mathbb{C}^\times \times 0$，纤维为
$$J(\mathfrak{p}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_3^{k_\ell} & \text{if } \ell > 0 \text{ and } k_\ell > 0 \\ \mathbb{C}1 & \text{if } \ell > 0 \text{ and } k_\ell = 0 \\ \mathbb{C}x_1 & \text{if } \ell = 0 \end{cases}$$
- 对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Orb}(\rho_1) = 0 \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$，纤维为
$$J(\mathfrak{p}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}1 & \text{if } \ell > 0 \\ \mathbb{C}x_1 & \text{if } \ell = 0 \end{cases}$$
- 任意其他闭点处的纤维为 $\mathbb{C}1$，因为 x_1^{-1}存在于局部环中，且 $x_1\xi \in \mathbb{C}[X]$。

7.4. 轨道与稳定子。在通常情形下，环面簇中闭点的轨道和稳定子都可以视为代数环面。特别地，若环面为 T_N且 $\mathfrak{p}\in$Orb(σ)，令 N_σ为由 $\sigma\cap N$中的点张成的 N的子格，并且 N(σ) $= N/N_\sigma$。则 Stab$_{T_N}$($\mathfrak{p}$) $\cong T_{N_\sigma}$且 $T_N\cdot\mathfrak{p}=$Orb(σ) $\cong T_{N(\sigma)}$。此外，轨道 Orb(σ) 的扎里斯基闭包是一个环面簇，其环面为 $T_{N(\sigma)}$。我们将在超情形下证明类似结果。

我们回顾 [4] 稳定子超群的概念。

定义 7.1. 设 G 是一个作用于超簇 X上的仿射代数超群。给定一个闭点 $\mathfrak{p}\in|X|$，稳定子超群函子是在超代数范畴上的取群值函子 Stab$_G$($\mathfrak{p}$)，定义为

$$\mathrm{Stab}_G(\mathfrak{p})(A)=\{g\in G(A)\mid g\cdot\mathfrak{p}_A=\mathfrak{p}_A\}$$

其中 $\mathfrak{p}_A$ 是 $\mathfrak{p}$，视为 A的一个 X点。由 [2], Stab$_G$($\mathfrak{p}$)自然地是一个仿射代数超群。

类似地，我们可以定义轨道函子 $G\cdot\mathfrak{p}$ 为

$$(G\cdot\mathfrak{p})(A)=G(A)\cdot\mathfrak{p}_A$$

因此轨道-稳定子定理成立，即

$$(G\cdot\mathfrak{p})(A)\cong G(A)/\,\mathrm{Stab}_G(\mathfrak{p})(A)$$

在集合层面。

设 $\mathfrak{p}\in|X|$ 是具有一个奇维的环面超簇 X 中的一个闭点。为计算其轨道和稳定子，我们不妨设 $X = Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}}$ 是仿射的，从而根据引理 5.6(c) 有 $X =$Spec $\mathbb{C}[x_1,...,x_r,\xi_1,...,\xi_s]/J(Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}})$。于是，对于某个 $a_i\in\mathbb{C}$，有 $\mathfrak{p}=(a_1,\ ...,\ a_r\mid 0,\ ...,$ 0)，其中 $J(Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}})$ 中的所有普通多项式都在该点处消失。假设 $\mathbb{C}[x_1,...,x_r,\xi_1,...,\xi_s]/J(Y_{\mathscr{A},\,\mathscr{B}})\cong\mathbb{C}[x^{m_1},...,x^{m_r},x^{n_1}\xi,...,x^{n_s}\xi]$，并回忆 $n_j=\sum_{i=1}^r p_i^j m_i$ 对某个 $p_i^j\in\mathbb{N}$ 成立，且对于 $j=1,\ ...,\ q$ 有 $n_j=m_j$。

命题 7.13。使用上述记号，有

$$\mathrm{Stab}_{T_{N,c}}(\mathfrak{p})\cong\begin{cases}T_{N_\sigma,c} & \text{if } a^{p^j}=0 \text{ for all } i=1,...,s\\ T_{N_\sigma} & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 c 属于子空间 $(N_\sigma)_{\mathbb{C}}\subset N_{\mathbb{C}}$，并且

$$T_{N,c}\cdot\mathfrak{p}\cong\begin{cases}T_{N(\sigma)} & \text{if } a^{p^j}=0 \text{ for all } i=1,...,s\\ T_{N(\sigma),\bar{c}} & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 $\bar{c}$ 是 c 在 $N\to N$(σ) 下的像。

证明。对于 $(t\mid\xi)\in T_{N,\,c}(A)$ 和 $(a_1,...,a_r\mid\eta_1,...,\eta_s)\in X(A)$，我们使用命题 5.3 中的群运算来计算

$$\begin{aligned}&(t\mid\xi)\cdot(a_1,...,a_r\mid\eta_1,...,\eta_s)\\&\quad=(t^{m_1}a_1+t^{m_1}\langle m_1,c\rangle\xi\eta_1,...,t^{m_q}a_1+t^{m_q}\langle m_q,c\rangle\xi\eta_q,\\&\qquad t^{m_{q+1}}a_{q+1},...,t^{m_r}a_r\mid\\&\qquad t^{n_1}a_1\xi+t^{n_1}\eta_1,...,t^{n_q}a_q\xi+t^{n_q}\eta_q,\\&\qquad t^{n_{q+1}}a^{p^{q+1}}\xi+t^{n_{q+1}}\eta_{q+1},...,t^{n_{q+1}}a^{p^{q+1}}\xi+t^{n_{q+1}}\eta_{q+1})\end{aligned}$$

因此，特别是，

$$\begin{aligned}(t \mid \xi) \cdot \mathfrak{p}_A &= (t \mid \xi) \cdot (a_1, ..., a_r \mid 0, ..., 0) \\ &= (t^{m_1} a_1, ..., t^{m_r} a_r \mid t^{n_1} a^{p^1} \xi, ..., t^{n_s} a^{p^s} \xi) \\ &= (t^{m_1} a_1, ..., t^{m_r} a_r \mid t^{m_1} a_1 \xi, ..., t^{m_q} a_q \xi, t^{n_{q+1}} a^{p^{q+1}}, ..., t^{n_s} a^{p^s} \xi).\end{aligned}$$

由此可知，$(t|\xi)$ 稳定 $\mathfrak{p}_A$ 当且仅当 $t \in \mathrm{Stab}_{T_N}(\mathfrak{p}) \cong T_{N_\sigma}$，并且满足以下条件之一：对所有 $j = 1, ..., s$，均有 $a^{p^j} = 0$；或 $\xi = 0$。

在前一种情况下，这意味着 $a_j = 0$ 对于 $j = 1, ..., q$。根据 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[S_\sigma]$ 的闭点与半群同态 $S_\sigma \to \mathbb{C}$ ([2], 命题 1.3.1) 之间的对应关系，与 $\mathfrak{p}$ 对应的同态将 $m_1, ..., m_q$ 映射为 0。因此，这些m_j 在 S_σ中不可逆，特别地， $m_j \notin \sigma^\perp$。为了证明 $c \in (N_\sigma)_\mathbb{C}$，我们必须证明 $\langle \sigma^\perp, c \rangle = 0$。然而， $\sigma^\perp$ 必须包含在 $\{m_{q+1}, ..., m_r\}$的张成空间中，因为 $m_1, ..., m_q \notin \sigma^\perp$。由于 $\{m_{q+1}, ..., m_r\} \subseteq$ 是 c的核，因此确实可以推出 $c \in (N_\sigma)_\mathbb{C}$。

现在注意到，在这两种情况下，$\mathrm{Stab}_{T_N,c}(\mathfrak{p})(A)$ 都是 $X(A)$ 的正规子群，因此通过分别取商，轨道恒等式也同样成立。□

例 7.14。令 $T = T_{\mathbb{Z}^2,(1,0)}$。我们考虑环面超簇族 $X^n :=$谱 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_1\xi, x_2^n\xi]$，其中 $n \geq 0$，以及 $X^\infty =$谱 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_1\xi]$。令 $\mathfrak{p} \in |X^n| = \mathbb{A}^2$ 为闭点（a， b）。我们计算这些环面超簇中各类点的稳定子：

$\mathrm{Stab}_{T_{\mathbb{Z}^2,(1,0)}}{}^{(a,\ b)}$			
	X^0	X^n，其中 $n > 0$	X^∞
$a = b = 0$	$T_{\mathbb{Z}^2}$	$T_{\mathbb{Z}^2,(1,0)}$	$T_{\mathbb{Z}^2,(1,0)}$
$a = 0, b \neq 0$	$T_{\mathbb{Z}\times 0}$	$T_{\mathbb{Z}\times 0}$	$T_{\mathbb{Z}\times 0,1}$
$a \neq 0, b = 0$	$T_{0\times\mathbb{Z}}$	$T_{0\times\mathbb{Z}}$	$T_{0\times\mathbb{Z}}$
$a, b \neq 0$	T_{0^2}	T_{0^2}	T_{0^2}

利用这些数据，可以使用轨道-稳定子定理计算轨道 .

若$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}$ 是一个以$T_{N,\ c}$ 为环面的准正规环面超簇，且 $\sigma \in \Sigma$，则我们用 $\mathrm{Orb}_c(\sigma) = T_{N,\ c} \cdot \mathfrak{p}$ 表示闭点 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Orb}(\sigma)$的$T_{N,\ c}$-轨道。回顾一下，$\mathrm{Orb}_c(\sigma)$在$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}$ 中的（扎里斯基）闭包，是包含 $\mathrm{Orb}_c(\sigma)$的$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}$ 的最小闭子簇。我们将此闭包记为$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}(\sigma)$。

命题 7.15. 使用上述记号，$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}(\sigma)$是一个以 $\mathrm{Orb}_c(\sigma)$为环面的环面超簇。分两种情况：

(a) 若 $\mathrm{Orb}_c(\sigma) \cong T_{N(\sigma)}$ 如前一命题的第一种情况，则$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}(\sigma)^-$是具有扇 $\Sigma = \{\bar{\tau} \mid \sigma \leq \tau\}$ 的普通环面簇，其中 $\bar{\tau}$ 表示 τ 在 $N(\sigma)_\mathbb{R} = N_\mathbb{R}/(N_\sigma)_\mathbb{R}$中的像。(b) 若 $\mathrm{Orb}_c(\sigma) \cong T_{N(\sigma),\ \bar{c}}$ 如前一命题的第二种情况，则_$X_{\Sigma,\ \mathscr{B}}(\sigma)$是具有上述扇 Σ 的环面超簇，且其装饰为 $\mathscr{B}_{\bar{\tau}} = \mathscr{B}_\tau \cap \sigma^\perp$，对应于 $\tau \geq \sigma$。

证明。(a) 部分可由经典情形（[2], 命题 3.2.7）立即得出。(b) 部分中的扇也同样可得。根据定义，$X_{\Sigma,\mathscr{B}}(\sigma)$ 是环面超簇这一事实显而易见。因此，接下来只需确定 (b) 部分中的装饰。

由于 $X_{\Sigma,\mathscr{B}}(\sigma)$ 是 $X_{\Sigma,\mathscr{B}}$ 的一个闭子簇，因此它在环的层面上是仿射局部的商。也就是说，如果 $U_{\bar{\tau}} \subseteq X_{\Sigma,\mathscr{B}}(\sigma)$ 是对应于 $\bar{\tau}$ for $\tau \geq \sigma$ 的仿射开集，那么$\mathbb{C}[U_{\bar{\tau},\mathscr{B}_{\bar{\tau}}}]$ 是 $\mathbb{C}[U_{\tau,B_\tau}]$ 的一个商。特别地， $\mathbb{C}[U_{\tau,\mathscr{B}_\tau}] \to \mathbb{C}[U_{\bar{\tau},\mathscr{B}_{\bar{\tau}}}]$ 是满射$\mathbb{C}[S_\tau, \xi\mathscr{B}_\tau] \to \mathbb{C}[S_\tau \cap \sigma^\perp, \xi(\mathscr{B}_\tau \cap \sigma^\perp)]$，它将任意满足 $m \notin \sigma^\perp$ 的 x^m 映射到 0。因此 $\mathscr{B}_{\bar{\tau}}$ 可以被视为 $\mathscr{B}_\tau \cap \sigma^\perp$，所以我们完成了。□

7.5. 纤维积。在本节中，我们将确定在奇维拟正规环面超簇范畴中，纤维积（即拉回）何时存在。考虑如下图表。

$$\begin{array}{ccc} & & (N', c', \Sigma', \mathscr{B}') \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\bar{\phi}', a')} \\ (N'', c', \Sigma'', \mathscr{B}'') & \xrightarrow[(\bar{\phi}'', a'')]{} & (Q, d, \Lambda, \mathscr{C}) \end{array}$$

在带装饰扇的范畴中，并假设 a' 和 a'' 不同时为 0。我们按如下方式构造纤维积:

定义一个格

$$N := N' \times_Q N'' = \{(n', n'') \in N' \times N'' \mid \bar{\phi}'(n') = \bar{\phi}''(n'')\}$$

以及一个扇

$$\Sigma := \Sigma' \times_\Lambda \Sigma'' = \{(\sigma', \sigma'') \in \Sigma' \times \Sigma'' \mid \text{there is } \lambda \in \Lambda \text{ such that } \bar{\phi}'_{\mathbb{R}}(\sigma'), \bar{\phi}''_{\mathbb{R}}(\sigma'') \subseteq \lambda\}$$

使得 (N, Σ) 是.....的纤维积

$$\begin{array}{ccc} & & (N', \Sigma') \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\phi}'} \\ (N'', \Sigma'') & \xrightarrow[\bar{\phi}'']{} & (Q, \Lambda) \end{array}$$

在通常的扇（或等价地，环面簇）范畴中。定义

$$c = c' \times_d c'' := ((a'')^2 c', (a')^2 c'')$$

并注意到

$$\begin{aligned} \bar{\phi}'((a'')^2 c') &= (a' a'')^2 d \\ &= \bar{\phi}''((a')^2 c''), \end{aligned}$$

所以 $c \in N_{\mathbb{C}}$。

仍需描述装饰。为此，我们首先描述特征格 $M = N^*$。我们还记作 $M' = (N')^*$、$M'' = (N'')^*$ 以及 $P = Q^*$。

定义 7.16. 设 S 是包含于格 L 中的半群。S 在 L 中的饱和定义为 $\mathrm{Sat}(S) = \{\ell \in L \mid k\ell \in S$，其中 $k \in \mathbb{N}\}$。

我们收集一些关于半群饱和的初等结果:

引理 7.17. (a) 如果 $S \subseteq L$ 是一个半群，那么 $\mathrm{Sat}(S)$ 是 L 中包含 S 的最小饱和半群。(b) 设 L' 是格 L 的一个子格。那么，L/L' 是一个格，当且仅当 L' 在 L 中是饱和的。(c) 仿射半群的饱和仍然是仿射的。

现在我们可以应用这个引理来描述 M。

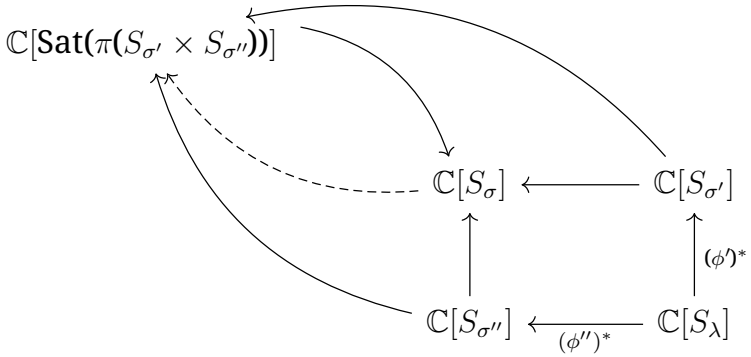
引理 7.18. (a) 自然满射 $\pi\colon M' \times M'' \to M$ 的核为 $\mathrm{Sat}\left((\bar{\phi}')^* \times (-\bar{\phi}'')^*(P)\right)$，因此 $M \cong (M' \times M'')/\mathrm{Sat}\left((\bar{\phi}')^* \times (-\bar{\phi}'')^*(P)\right)$。(b) 若 $\sigma = (\sigma', \sigma'') \in \Sigma$，则 S_σ 是 $\pi(S_{\sigma'} \times S_{\sigma''})$ 的饱和。

证明. (a) 我们有一个满射 $\pi\colon M'\times M''\to M$，由 $\langle\pi(m',m''),(n',n'')\rangle=\langle m',n'\rangle+\langle m'',n''\rangle$ 给出，其中 $(m',m'')\in M'\times M''$ 且 $(n',n'')\in N$。注意到

$$\begin{aligned}&\langle\pi(m'+(\bar\phi')^*(p),m''-(\bar\phi'')^*(p)),(n',n'')\rangle\\&=\langle m',n'\rangle+\langle m'',n''\rangle+\langle(\bar\phi')^*(p),n'\rangle-\langle(\bar\phi')^*(p),n'\rangle\\&=\langle m',n'\rangle+\langle m'',n''\rangle+\langle p,\bar\phi'(n')\rangle-\langle p,\bar\phi''(n'')\rangle\\&=\langle m',n'\rangle+\langle m'',n''\rangle\end{aligned}$$

由于 $\phi'(n')=\phi''(n'')$，所以 $\ker\pi$ 包含 $(\phi')^*\times(-\phi'')^*(P)$。但是 M 是一个格，因此根据引理 7.17(b)，我们知道 $\ker\pi$ 是饱和的，从而根据 (a)，$\ker\pi\supseteq\operatorname{Sat}\left((\bar\phi')^*\times(-\bar\phi'')^*(P)\right)$。通过计算维数即可得出等式。

(b) 我们首先注意到 $S_\sigma\supseteq\pi(S_{\sigma'}\times S_{\sigma''})$，因为如果 $(m',m'')\in S_{\sigma'}\times S_{\sigma''}$，那么对于所有 $(n',n'')\in\sigma$，$\langle\pi(m',m''),(n',n'')\rangle=\langle m',n'\rangle+\langle m'',n''\rangle$ 的两个加项都是非负的。于是 $\operatorname{Sat}(\pi(S_{\sigma'}\times S_{\sigma''}))\subseteq S_\sigma$ 是一个饱和半群，根据引理 7.17(c)，它是仿射的。因此，根据纤维积的泛性质，下图是交换图：



在此图中，虚线箭头来自环面簇的（反）范畴中纤维积的泛性质，而未标记的实线箭头来自半群的自然态射。虚线箭头与反向箭头的复合是满足泛性质的 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 的唯一自态射。由于 $\operatorname{Sat}(\pi(S_{\sigma'}\times S_{\sigma''}))\subseteq S_\sigma$，这些箭头都是同构。因此 $S_\sigma=\operatorname{Sat}(\pi(S_{\sigma'}\times S_{\sigma''}))$。□

现在我们来描述这些装饰。对于每个 $\sigma=(\sigma',\sigma'')\in\Sigma$，令

$$J^\sigma=\begin{cases}J^\sigma_c+((\mathscr{B}'_{\sigma'}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathscr{B}''_{\sigma''})) & \text{if } a',a''\neq0\\ J^\sigma_c+(\mathscr{B}'_{\sigma'}\times\{0\}) & \text{if } a'=0\\ J^\sigma_c+(\{0\}\times\mathscr{B}''_{\sigma''}) & \text{if } a''=0\end{cases}$$

并将 $\mathscr{B}_\sigma=\mathscr{B}'_{\sigma'}\times_{\mathscr{C}}\mathscr{B}''_{\sigma''}$ 定义为 J^σ 的极小生成集。我们用 $\mathscr{B}'\times_{\mathscr{C}}\mathscr{B}''$ 表示装饰 $\{\mathscr{B}'_{\sigma'}\times_{\mathscr{C}}\mathscr{B}''_{\sigma''}\}_{(\sigma',\sigma'')\in\Sigma}$。

引理 7.19. 上文定义的集合 $\mathscr{B}=\mathscr{B}'\times_{\mathscr{C}}\mathscr{B}''$ 是 c-可容许的。

证明. 只需证明条件 (ii′) 成立。设 $\tau=(\tau',\tau'')$ 是 $\sigma=(\sigma',\sigma'')$ 的一个面。设 $m\in J^\sigma$，因此 $m\in J^\sigma_c$ 或 m 属于由 $\mathscr{B}'_{\sigma'}\times\{0\}$ 或 $\{0\}\times\mathscr{B}''_{\sigma''}$ 生成的理想。在前一种情况下，条件 (ii′) 成立，因为 $(J^\sigma_c)_{x^{m_{\sigma,\tau}}}=J^\tau_c$。在后一种情况下，我们应用 $\mathscr{B}'$ 或 $\mathscr{B}''$ 的条件 (ii′) 得出结论。论证的另一半可用同样的方法得出。□

引理 7.20. 设 $\psi'\colon N\to N'$ 和 $\psi''\colon N\to N''$ 为自然映射。那么 (ψ',a'') 和 (ψ'',a') 与带装饰扇相容。

证明. 设 $\sigma = (\sigma', \sigma'') \in \Sigma$。只需证明 $(\psi')^*(\xi' J^{\sigma'}) \subseteq \xi J^{\sigma}$ 以及 $(\psi'')^*(\xi'' J^{\sigma''}) \subseteq \xi J^{\sigma}$。然而，$J^{\sigma'}$ 和 $J^{\sigma''}$ 的像恰好分别是由 $\mathscr{B}'_{\sigma'} \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times \mathscr{B}''_{\sigma''}$ 生成的理想。当且仅当 $a' \neq 0$ 和 $a'' \neq 0$ 分别成立时，这些生成元才出现在 J^{σ} 中，因此引理得证。□

上述引理提供了足以描述纤维积的数据。

命题 7.21. 若 a' 和 a'' 不同时为 0，则纤维积由下式给出

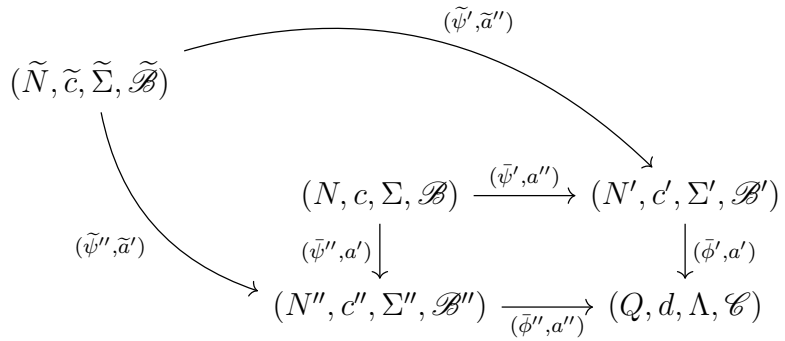
$$\begin{tikzcd}
(N, c, \Sigma, \mathscr{B}) \arrow[r, "(\bar{\psi}', a'')"] \arrow[d, "(\bar{\psi}'', a')"'] & (N', c', \Sigma', \mathscr{B}') \arrow[d, "(\bar{\phi}', a')"] \\
(N'', c'', \Sigma'', \mathscr{B}'') \arrow[r, "(\bar{\phi}'', a'')"'] & (Q, d, \Lambda, \mathscr{C})
\end{tikzcd}$$

其中

$$\begin{aligned}
N &= N' \times_Q N'' \\
c &= c' \times_d c'' \\
\Sigma &= \Sigma' \times_\Lambda \Sigma'' \\
\mathscr{B} &= \mathscr{B}' \times_{\mathscr{C}} \mathscr{B}'' \\
\bar{\psi}' &: N \to N' \ \textit{and}\ \bar{\psi}'' : N \to N'' \ \textit{are the natural maps.}
\end{aligned}$$

证明. 我们已经看到，该图表在带装饰扇范畴中是交换的。设有一个交换图表

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{N}, \widetilde{c}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mathscr{B}}) \arrow[drr, bend left, "(\widetilde{\psi}', \widetilde{a}'')"] \arrow[ddr, bend right, "(\widetilde{\psi}'', \widetilde{a}')"'] & & \\
& (N, c, \Sigma, \mathscr{B}) \arrow[r, "(\bar{\psi}', a'')"] \arrow[d, "(\bar{\psi}'', a')"'] & (N', c', \Sigma', \mathscr{B}') \arrow[d, "(\bar{\phi}', a')"] \\
& (N'', c'', \Sigma'', \mathscr{B}'') \arrow[r, "(\bar{\phi}'', a'')"'] & (Q, d, \Lambda, \mathscr{C})
\end{tikzcd}$$



因此存在唯一的映射 $\widetilde{\varphi}: N \to N$，它与扇 Σ 和 Σ 相容。

如果 $a' \neq 0$，那么定义 $\widetilde{a} = \frac{a''}{a'}$。我们注意到 $\widetilde{a}'\widetilde{a}'' \neq \widetilde{a}'\widetilde{a}''$，因此 $\widetilde{a}$ 是良定义的，并且在满足以下性质的意义下是唯一的：$\widetilde{a}a' = \widetilde{a}'$ 且 $\widetilde{a}a'' = \widetilde{a}''$。因此，如果

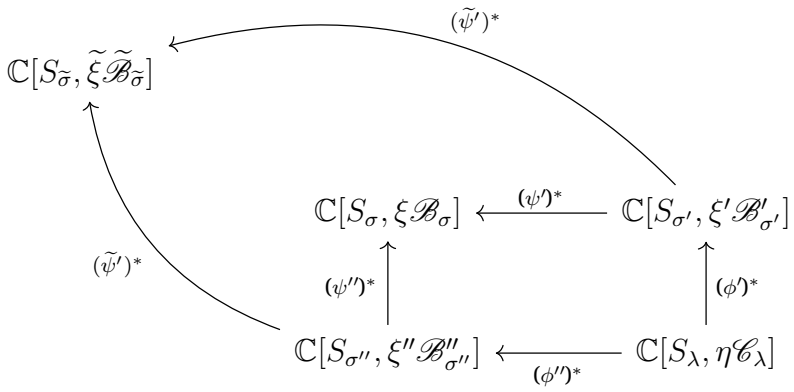
$$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{a}) : (\widetilde{N}, \widetilde{c}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mathscr{B}}) \to (N, c, \Sigma, \mathscr{B})$$

是带装饰扇的态射，它满足上述图中纤维积的泛性质。我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{\mathbb{C}}(\widetilde{c}) &= ((\widetilde{a}'')^2 c', (\widetilde{a}')^2, c'') \\
&= \widetilde{a}^2((a'')^2 c', (a')^2, c'') \\
&= \widetilde{a}^2 c,
\end{aligned}$$

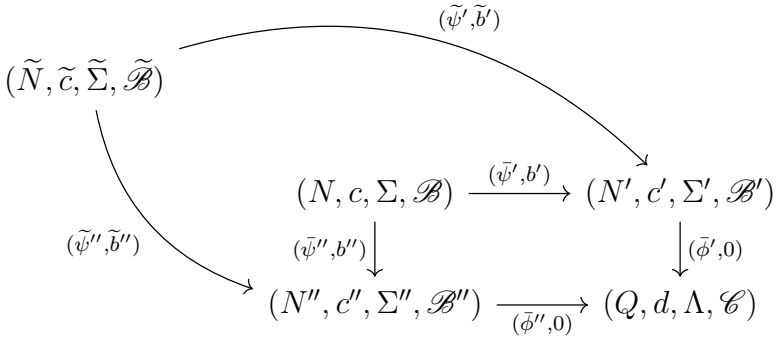
因此，只需证明如果 $\widetilde{a} \neq 0$，那么 $\widetilde{\varphi}$ 与装饰相容 s.

假设 $\widetilde{\varphi}_{\mathbb{R}}(\widetilde{\sigma}) \subseteq \sigma$。考察由 $\widetilde{\sigma}$ 和 $\sigma = (\sigma', \sigma'')$ 定义的仿射开片，我们得到如下图示



设 $m \in J^\sigma$，其中 $\widetilde{\varphi}_{\mathbb{R}}(\widetilde{\sigma}) \subseteq \sigma$。那么，要么 $m \in J^\sigma_c$，要么 $m \in (\mathscr{B}'_{\sigma'} \times \{0\})$ 且 $a'' \neq 0$，要么 $m \in (\{0\} \times \mathscr{B}''_{\sigma''})$ 且 $a' \neq 0$。若 $m \in J^\sigma_c$，则由引理 6.3，$\varphi^*(m) \in J^{\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{c}}$。否则，不失一般性，可假设 $m \in (\mathscr{B}'_{\sigma'} \times \{0\})$ 且 $a'' \neq 0$。那么存在 $\widetilde{b} \in \mathscr{B}'_{\sigma'}$ 使得 $b \leq_\sigma m$。由此可得 $(\psi')^*(x^b\xi') \in \mathbb{C}[S_{\widetilde{\sigma}}, \xi\mathscr{B}_{\widetilde{\sigma}}]$ 中非零，因为 $a'' \neq 0$。因此 $(\psi')^*(b) \leq_{\widetilde{\sigma}} \widetilde{\varphi}^*(m)$，且 $(\psi')^*(b) \in J^{\widetilde{\sigma}}$，所以确实有 $\widetilde{\varphi}^*(m) \in J^{\widetilde{\sigma}}$，如所求。因此，$\widetilde{\varphi}$ 与这些装饰相容，证明完毕。□

注记 7.22. 若 $a' = a'' = 0$，则一般而言纤维积不存在。特别地，图表的交换性



并不能保证存在 b，使得 $b' = bb'$ 且 $b'' = bb''$。

References

[1] C. Carmeli, L. Caston, and R. Fioresi, 《超对称性的数学基础》，《EMS 数学讲座系列》第 15 卷，欧洲数学学会，2011 年。[2] D. Cox, J. Little, and H. Schenck, 《环面簇》，《数学研究生进阶》第 124 卷，美国数学学会，2011 年。[3] M. Duflo and V. Serganova, 李超代数的关联簇。arXiv 预印本，2005 年，math/0507198。[4] R. Fioresi, 代数超簇和超群的光滑性，《太平洋数学杂志》234 卷（2008 年）。[5] M. Gorelik, V. Serganova, and A. Sherman, 拟约化李超代数的 Grothendieck 环。arXiv 预印本，2022 年，2206.07709。[6] I. D. Gubeladze, Anderson 猜想与幺半群代数上的投射模，《格鲁吉亚苏维埃社会主义共和国科学院通报》125 卷（1987 年），第 289–291 页。[7] R. Hartshorne, 《代数几何》，《数学研究生教材》第 52 卷，施普林格出版社，第 8 版，1997 年。[8] A. Onishchik, 与余切丛相关的非分裂超流形，《数学通讯》30 卷（2022 年），第 49–128 页。[9] M. Perling, 环面簇上的分次环与等变层，《数学新闻》263–264 卷（2004 年），第 181–197 页。[10] D. Perrin, 域上的拟紧群概形与 Hensel 群，《奥赛数学出版物》165 卷（1975 年）。

[11] V. Serganova，拟约化超群，载于《李理论及其应用新进展：第七届研讨会论文集》，《当代数学》第 544 卷，美国数学学会，2011 年。[12] A. Sherman，《球面与对称超簇》，博士论文，加州大学伯克利分校，2020 年。[13] H. Sumihiro，等变紧化，《京都大学数学杂志》14 卷（1974 年），第 1–28 页。[14] A. N. Zubkov，诺特超概形的一些性质，《代数与逻辑》57 卷（2018 年），第 130–140 页。