arXiv:2305.03220v1 [math.CO] 5 May 2023

高维热带覆盖的组合学

ALEJANDRO VARGAS

Abstract. 我们建立了一个组合框架，用于研究某些多面体映射；这些映射是度量图之间热带覆盖的高维类比。在一个较弱的组合假设下，我们证明，当且仅当一个映射是带指标分支覆盖时，它才满足所谓的平衡条件；也就是说，在连通集上局部地，每个纤维中各点按重数计数的总数为常数。特别是，当目标连通时，这就给出了定义良好的全局度数。给定一个平衡映射 $(\Sigma,\ m_\Sigma) \to \Delta$，我们将 Δ 的若干连通性性质提升到 Σ。利用这些提升结果，我们判定一个仅在 Σ 的极大胞腔内部定义的重数 $m_{\mathcal{U}}$，能否以平衡的方式延拓到所有 Σ。这依赖于一个强连通性假设；对于缺少这一假设的情形，我们给出了一个反例。

1. 引言

1.1. 纤维中的点计数。 设 $F\colon\ X \to Y$ 是一个连续映射。回顾一下，如果每个点 $y \in Y$ 都有一个邻域 U，使得其原像是不相交的若干个 U 的副本之并，则称 F 是一个**覆盖**。图2（a）给出了一个例子。纤维 $F^{-1}(y)$ 的基数就是 F 在 $y \in Y$ 处的**度数**。当 Y 连通时，度数是 F 的一个不变量，与 y 无关。作为一个轻微的推广，对我们而言，分歧覆盖是一个映射 $F\colon\ X \to Y$，满足在 Y 的某个稠密开子集上，F 是一个覆盖。该集合的补集称为**分支轨迹** B。见图2（b）。为了将 B 上的度数与 $F^{-1}(Y \setminus B)$ 联系起来并得到一个不变量，考虑一个指标映射 $m_F\colon\ X \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$，并对 X 中的点按重数 m_F 计数。如果对于任意连通开 $U \subset Y$ 以及 $F^{-1}(U)$ 的任意连通分支 V，映射 F 限制为一个具有常数度数的映射，则称 $(F,\ m_F)$ 是一个**带指标分支覆盖**。因此，我们可以讨论局部度数；如果 Y 连通，那么再次得到一个良定义的常数度数 $\deg F$。图2（c）给出了一个例子，详细内容见定义33和34。

这一概念的提出受到黎曼曲面之间的映射、度量图的热带态射以及热带模空间之间的映射的启发。这些对象都具有自然的指标映射，尽管在热带模空间的情形下，这种重数通常仅定义在顶维胞腔内部构成的稠密子集上，这引出了我们的第一个问题。

问题 1. 设 $F\colon\ X \to Y$ 是一个分歧覆盖，且 m_V 是定义在 X 的稠密子集 V 上的映射。何时 m_V 可以扩展为映射 m_F，使得 (F, m_F) 是一个带指标分支覆盖？

鉴于带指标分支覆盖的定义涉及检查所有连通开集 $U \subset Y$ 以及 $F^{-1}(U)$ 的连通分支 V 上的条件，我们希望借助能够简化这项工作的工具。

问题 2. 建立判定标准，以检查一对 (F, m_F) 何时是带指标分支覆盖。

最后，与拓扑覆盖一样，在研究 X 上的变形论证时，以下问题也很重要。

问题 3. 设 $(F\colon X \to Y, m_F)$ 是一个带指标分支覆盖。 Y 的哪些连通性性质可以提升到 X?

1.2. **论文的结果与结构**。 这些问题对于所有拓扑空间而言过于宽泛，因此我们的研究受到热带几何的指导，即研究代数几何现象的分段线性组合阴影。因而，我们研究抽象多面体复形 $|\Sigma|$ 及其面偏序集 Σ。后者是通过将胞腔内部的所有点加以识别而得到的商空间。因此，我们有一个自然投影 $\mathrm{poly}_\Sigma : |\Sigma| \to \Sigma$，它是连续的、满射的，同时也是开映射。我们要求有限 Σ。

这些空间之所以是抽象的，是因为它们通过粘合多面体产生，因此无法保证嵌入到实向量空间中。所有信息都存储在一个函子$\sigma : \Sigma \to \textsc{Poly}$中，而拓扑实现 $|\Sigma|$ 则通过余极限获得。我们要求函子 σ 满足若干提升条件，以确保每个多面体面以及 $|\Sigma|$ 的包含关系，在 Σ中都有相应的对象或态射。我们对多面体空间的定义紧密遵循 [ACP15; CMR16; CCUW20], ，并且能够处理面上的自粘合和自同构。在对一般情形作出一些说明之后，我们假设 Σ作为一个范畴是偏序集，从而得到抽象多面体复形。 Σ 中的闭集和开集分别是向下闭集和向上闭集，并分别由主下集 $\downarrow\alpha$ 和主上集 $\uparrow\alpha$的有限并生成。

本文始终将关于多面体复形 $|\Sigma|$ 的问题转化为关于面偏序集 Σ 的组合问题；这方面的主要结果如下:

定理 A. 设 $\Phi : [\Sigma \to \textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}] \to [\Delta \to \textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}]$ 是多面体复形的一个态射， φ 是诱导的偏序集态射，即 φ 保序； $m_\varphi : \Sigma \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$是一个指标映射。假设 φ将下集同构地映到其像上。则有： （*1*）图 *4* 是拓扑空间范畴 $\textsc{Top}$ 中的一个纤维积。

$$\begin{array}{ccc} |\Sigma| & \xrightarrow{\mathrm{poly}_\Sigma} & \Sigma \\ {\scriptstyle |\Phi|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ |\Delta| & \xrightarrow{\mathrm{poly}_\Delta} & \Delta. \end{array}$$

Diagram 4

（*2*）若两对映射 (φ, m_φ) 或 $(|\Phi|, \text{多面体}_\Sigma \circ m_\varphi)$ 中的一对是带指标分支覆盖，则另一对也是。

对 φ 的假设有其几何来源，并确保 φ 能恰当地反映 $|\Phi|$ 的组合信息。我们称这样的偏序集态射为组合的。参见第 3.4 小节以及第 11 页公式（5）之后的讨论。我们在第 3.7 小节论证，这是一项宽松的条件，通过细分总能实现。该结果推动了问题 2 的研究，其证明需要引理 39 和 40；它们本身是判断是否为带指标分支覆盖的判据。鉴于定理 A，我们现在将重点转向有限偏序集。

我们推广所谓热带态射或热带覆盖中广为人知的平衡条件；背景介绍可参见例如 [Mik07; BN09; BBM11; Cap14] ，或综述 [DV21]。给定偏序集的一个态射 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 以及一个开集 $\mathcal{V} \subset \Sigma$，我们称映射 $m_\mathcal{V} : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 关于 φ 是平衡的，若对于任意 α 属于 $\mathcal{V}$ 且任意选取的 β

属于 Δ 且满足 $\varphi(\alpha) \lessdot \beta$，我们有

$$m_{\mathcal{V}}(\alpha) = \sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \alpha \lessdot \gamma}} m_{\mathcal{V}}(\gamma). \tag{1}$$

这里，$\alpha \lessdot \gamma$ 意味着 γ 覆盖 α，即 γ 是集合 $\mathcal{U}_\alpha = {\uparrow}\alpha \setminus \{\alpha\}$中的最小元。在多面体复形中，这意味着 $\sigma_\alpha \subset \sigma_\gamma$且 $\dim \sigma_\alpha = \dim\ \sigma_\gamma - 1$。

定理 B. 设 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射，且$m_\varphi : \Sigma \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$是指标映射。假设 Δ 是连通的。当且仅当(φ, m_φ) 是平衡的，数对(φ, m_φ) 是带指标分支覆盖，且其分支轨迹位于$\max \Delta$ 的补集中。

同样，φ 是组合的这一点是必要的：参见注 79，其中给出了缺少该条件时两个方向上的反例。借助平衡条件这一工具，我们在第 4.2 小节探讨问题 3。由此得到若干关于路径提升的结果。首先，引理 83 提升向上路径，这意味着问题 1 的一个必要条件。

命题 C。设 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的一个态射。如果存在一个平衡映射$m_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$，那么 φ 是一个开映射。

在充分条件方面，我们最初猜想，只要 Σ 通过余维一连通就足够了。事实并非如此，见例 85，其中有一个映射$\varphi :\ \Sigma \to \Delta$，其中 Σ 通过余维一连通，φ 满足作为开映射的必要条件；然而，值得注意的是，我们展示了一个无法延拓的指标映射。在更强的连通性条件下，我们能够证明延拓成立。

定理 D。设 $\varphi :\ \Sigma \to \Delta$ 是一个组合态射，且 $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \Sigma$ 是开集。若$\mathcal{U}_{\varphi(\alpha)} = ({\uparrow_\Delta}\varphi(\alpha)) \setminus \{\varphi(\alpha)\}$ 是连通的，并且对所有 α 属于 $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$，都有 $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_{\varphi(\alpha)}) \subset \mathcal{V}$，那么任意平衡映射 $m_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 都可以通过如下定义扩张为平衡映射 $m_{\mathcal{W}} :\ \mathcal{W} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$。

$$m_{\mathcal{W}}(\alpha) = \sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \alpha \lessdot \gamma}} m_{\mathcal{V}}(\gamma) \tag{2}$$

对于覆盖 $\varphi(\alpha)$ 的 $\alpha \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$ 和 β。其值与 β 的选择无关。

尽管由于对 $\mathcal{U}_{\varphi(\alpha)}$ 的条件，这个结果看起来可能有些繁琐，但作为推论，我们得到了热带模空间中感兴趣的情形。也就是说，如果我们在最高维胞腔上赋予满足平衡条件的权重，那么只要目标空间 Δ 是强连通的，就可以将其扩展为整个空间 Σ 上的指标映射；换言之，Δ 是连通的，并且对于秩至多为 $\dim \Delta - 2$ 的元素，$\mathcal{U}_\beta$ 是连通的。

命题 E。设 Σ 和 Δ 是分次偏序集，$\varphi :\ \Sigma \to \Delta$ 是一个组合态射，且 $m_{\mathcal{V}}$ 在余维 *1* 上是平衡的。若 Δ 是强连通的，则 $m_{\mathcal{V}}$ 可扩展为 m_Σ。

最后，引理 83 在某些条件下提升所有路径，由此结合命题93回答了问题 3。因此，我们通过组合映射提升热带对象的连通性。

命题 F。设 Σ 和 Δ 为分次偏序集，$\varphi :\ \Sigma \to \Delta$ 为组合态射，m_Σ 为平衡映射。若 Δ 在余维 k 上连通，且 φ 在 Σ 中有一个在余维 k 上连通的纤维，则 Σ 在余维 k 上连通。

1.3.**与过去和未来工作的联系**。我们的三大主要影响来源是：Payne [Pay09] 对锥复形和偏序集的分歧覆盖研究； [ACP15；CMR16；CCUW20] 对热带模空间的研究方法；以及 [DV20] 对热带态射的组合研究。我们的主要动机是即将发表的文章 [Var23], ，该文汇集了 [DV20] 中所有在余维 1 上平衡的组合构造。通过本文的工作，我们得到一个带指标分支覆盖，其度数可以还原出能够证明度量图纤数界的热带态射数量。

展望未来的研究，我们设想这一框架可以为其他构造热带模空间并研究覆盖的工作提供不同的视角，例如 [Cha12; CMR16]。如何将我们的方法推广到不一定是多面体复形的空间这一一般情形，仍是一个开放问题。迄今为止，将这一理论应用于热带模空间时，需要进行重心细分，这极大地增加了组合学的复杂性。为了更好地处理与热带模空间相关的面范畴，我们仍需发展偏序集叠及其覆盖的理论。

1.4. **致谢**。 作者谨向 Jan Draisma 致谢，感谢他提出启发性的讨论、多年来的指导，以及细致审阅本文初稿；感谢 Livio Ferretti 耐心解答有关有限拓扑空间的问题；并感谢 Martin Ulirsch 就偏序集、范畴论和叠的概念展开讨论。本研究得到瑞士国家科学基金会资助，资助编号为 200142。

2. 多面体空间

2.1. 多面体空间。我们回顾一些多面体几何的事实，主要依据[Zie12] 以及受环面簇启发的标准记号，参见 [CLS11]。设 N 为一个有限秩自由阿贝尔群，并记 $N_{\mathbb{R}}$ 为实向量空间 $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。 N中的元素称为整点，而 $N^* = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$中的元素称为整函数。给定 $u \in N^*$ 和常数 $c \in \mathbb{R}$ ，对应一个有理闭上半空间$H^+(u, c) = \{x \in V\colon\ u(x) \geq c\}$。我们考察 $N_{\mathbb{R}}$中的有理多面体 σ ，即有限个有理 $H^+(u, c)$的交集。整仿射映射 $f\colon N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}$ 是满足 $f(N) \subset N'$的仿射映射；也就是说， $f(x) = y + L_{\mathbb{R}}(x)$，其中 $y \in N'$和 $L_{\mathbb{R}}$是某个 $L \in \mathrm{Hom}(N, N')$的延拓。这些映射将有理多面体映为有理多面体。 σ的维数$\dim \sigma$是其仿射包$\text{aff-span}\,\sigma$的维数。 σ的 k维面是维数为 k的面，而0维面是顶点。我们用 N^σ 表示交集 $N \cap \text{aff-span}\ \sigma$。线性部分空间 $L(\sigma)$是 $N_{\mathbb{R}}$ 中最大的子空间，其某个平移包含于 σ 中。我们总是假设 $L(\sigma)$平凡。

定义 5. 我们考虑以下范畴:

- $\textsc{Poly}$ 由有限秩自由阿贝尔群 N 和 $N_{\mathbb{R}}$ 中满足 $L(\sigma) = \{0\}$ 的多面体 σ 所组成的对象对 (N, σ) 的范畴，其中态射 $f\colon (N, \sigma) \to (N', \sigma')$ 是满足 $f(\sigma) \subset \sigma'$ 的整仿射映射。
- $\textsc{Poly}_{\mathbb{Z}}$ $\textsc{Poly}$ 的子范畴，其对象为满足以下条件的对 (N, σ)： σ 是有理的， σ 的所有顶点都属于 N，并且 $N = N^\sigma$。
- $\textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}$具有与 $\textsc{Poly}_{\mathbb{Z}}$相同的对象，且态射为 $f\colon (\tau, N^\tau) \to (\sigma, N^\sigma)$，使得 N^τ同构地映射到 $N^\sigma \cap$仿射包 $f(\tau)$，并且 $f(\tau)$是 σ的一个面；这些称为面态射。

面态射 $f\colon\ \sigma \to \sigma'$ 若 $f(\sigma)$ 是 σ' 的真面，则称其为真。非真面态射是 $\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 中的同构。多面体空间是沿面态射粘合的一组多面体。

定义 6. 设 Σ 为一个有限范畴，且 $\sigma\colon\ \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 为一个函子 $\alpha \mapsto (N^{\alpha},\ \sigma_{\alpha})$。我们稍微滥用一下记号，在不会引起混淆时，将 $(N^{\alpha},\ \sigma_{\alpha})$ 简写为 σ_{α}。如果满足以下提升条件，我们就称 σ 为一个多面体空间：

(a) 对于每个 α 属于 Σ，以及 $\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 中的每个真面态射 $f_{\tau\sigma_{\alpha}}\colon (N,\tau) \to (N^{\alpha},\sigma_{\alpha})$，都存在一个态射 f 属于 Σ，使得 $\sigma(f) = f_{\tau\sigma_{\alpha}}$。(b) 对于任意 $g\colon \gamma \to \alpha$ 和 $h\colon \beta \to \alpha$ 属于 Σ，若 $\sigma(g)$ 和 $\sigma(h)$ 都是真面，则存在一个从 Σ 中的图表到 $\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 中的图表的双射，其形式如图表 7 所示。



图表 7

换言之，对于每个使右侧图表交换的面态射 $f_{\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}}\colon \sigma_{\alpha} \to \sigma_{\beta}$，恰有一个面态射 f，使得左侧图表交换且 $\sigma(f) = f_{\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}}$。

(c) Σ 中的唯一同构是自映射。

注 8. 直观而言，如果 σ 是一个多面体空间，条件 (a) 意味着 Σ 在所有面以及多面体的包含关系上都没有冗余信息。条件 (b) 是证明引理 18 中分层的关键。条件 (c) 则是为了便于使用骨架范畴，正如 [ACP15], 中所做的那样，这样我们就能得到一个面偏序集，参见引理 12。△

注 9. 定义 6 与 [CCUW20], 中的定义 2.15 非常接近，但关键在于我们避免对非真面态射要求提升条件，因为这与条件 (c) 不兼容。因此，我们没有一个在 $\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 上的群胚纤维范畴，但这并不构成问题，因为我们不会探讨 2-范畴方面。△

定义 10. 态射 $\Phi\colon\ [\sigma\colon \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}] \to [\delta\colon \Delta \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}]$ 是一个对 $(\varphi,\ \{\Phi_{\alpha}\}_{\alpha\in\Sigma})$，其中 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是一个函子，$\left\{\Phi_{\alpha}\colon \sigma_{\alpha} \to \delta_{\varphi(\alpha)}\right\}_{\alpha\in\Sigma}$ 是一个从 σ 到 $\delta\circ\varphi$ 的自然变换，并且 Φ_{α} 的像不包含在 $\delta_{\varphi(\alpha)}$ 的任何真面中。

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{\alpha} & \xrightarrow{\sigma(f)} & \sigma_{\beta} \\ {\scriptstyle\Phi_{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi_{\beta}} \\ \delta_{\varphi(\alpha)} & \xrightarrow{\delta(\varphi(f))} & \delta_{\varphi(\beta)} \end{array}$$

图 11

也就是说，对于每个 $f\colon \alpha \to \beta \in \Sigma$，图 11 在 $\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 中交换。

我们用 PolySpace 表示多面体空间范畴。当不会造成混淆时，我们将 Σ 记为 $\sigma\colon\ \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$。注意，通过将 σ 与其所有面的多面体空间 σ 相对应，$\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}$ 嵌入到 PolySpace 中，例如见图 1。

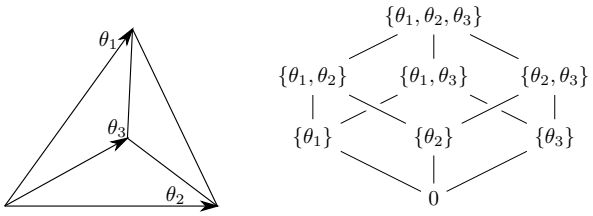

FIGURE 1. 左侧是一个维数为 3 的 σ 单纯锥。右侧是 σ 嵌入 POLYSPACE时的面图。

2.2. **面偏序集**。 任何范畴在 Obj(Σ) 上都有一个预序，由 $\alpha \preceq \beta$ 当 Hom(α, β) $\neq \varnothing$ 给出。如果 Σ 为一个多面体空间编制索引，则我们有

引理 12. *若 σ 是多面体空间，则 $(\Sigma, \preceq)$ 是一个称为面偏序集的偏序集。*

证明。 对于反对称性，如果 $\alpha \preceq \beta$ 和 $\beta \preceq \alpha$，则存在面态射 $f\colon \alpha \to \beta$ 和$g\colon \beta \to \alpha$，因此 dim $\sigma_\alpha \leq$dim σ_β且 dim $\sigma_\beta \leq$dim σ_α。 因此，dim $\sigma_\alpha =$dim σ_β，且面态射 f 是一个同构，因此根据定义 6 的条件 (c)， $\alpha = \beta$。□

给定偏序集 Σ 中的 α，由 α 生成的上集和下集是偏序集。

$$\uparrow_\Sigma \alpha = \{\gamma \in \Sigma\colon\ \alpha \leq \gamma\}, \qquad \downarrow_\Sigma \alpha = \{\gamma \in \Sigma\colon\ \alpha \geq \gamma\}.$$

在上下文允许的情况下，我们写作 $\uparrow\alpha$ 和 $\downarrow\alpha$。集合 $\uparrow\alpha$ 生成一个拓扑，我们称之为定义在 Σ上的偏序拓扑，其开集也称为上集。闭集由 $\downarrow\alpha$生成，我们也称它们为下集。

偏序集的一个态射是一个保序映射 $f\colon \Sigma \to \Delta$，即 $x \leq y$ 蕴含 $f(x) \leq f(y)$，对所有 $x,\ y \in \Sigma$ 均成立。这构成了一个范畴 POSET。偏序拓扑给出了一个从 POSET 到 TOP 的全忠实函子，因为当且仅当偏序集映射 f 是保序映射时，它在偏序拓扑下才是连续的。

注 13。 函子 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 对于我们在本小节中描述的预序是保序的。因此，多面体空间态射会诱导一个面偏序集的态射，它在偏序拓扑中是连续函数。△

2.3. **拓扑实现**。 存在一个忠实的拓扑实现函子 $|\cdot|$，从POLY 到拓扑空间与连续函数的范畴 TOP。它将 (N, σ) 映射为带有由 $N_{\mathbb{R}}$ 诱导的拓扑的 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$，而态射 f 是仿射映射，因此自动连续。正如 [ACP15], 中的注 2.2.1 所述， TOP中所有有限余极限都存在，因此我们得到一个针对 POLYSPACE 的忠实拓扑实现函子，将 Σ映射为余极限

$$|\Sigma| = \operatorname*{colim}_{\alpha \in \Sigma} |\sigma_\alpha| \in \text{TOP}.$$

因此，对于任意$f\colon\ \alpha \to \beta$ 属于 Σ，我们将满足 $p_\alpha = p_\beta \circ \sigma(f)$的泛映射记为 $p_\alpha\colon |\sigma_\alpha| \to |\Sigma|$；而 $|\Sigma|$ 赋予相对于所有 p_α的终拓扑。对于$\Phi\colon\ \Sigma \to \Delta$， Φ 的拓扑实现是一个连续函数 $|\Phi|\colon\ |\Sigma| \to |\Delta|$，由粘合所有 $|\Phi_\alpha|$得到，使得对所有 $\alpha \in \Sigma$，图 14 都交换。

$$\begin{array}{ccc} |\sigma_\alpha| & \xrightarrow{p_\alpha} & |\Sigma| \\ {\scriptstyle |\Phi_\alpha|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |\Phi|} \\ |\delta_{\varphi(\alpha)}| & \xrightarrow{p_{\varphi(\alpha)}} & |\Delta| \end{array}$$

图 14

2.4. 相对内部。 设 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个多面体，其仿射包 σ 不一定等于 $N_{\mathbb{R}}$。σ 的相对内部 σ° 是 $|\sigma|$ 作为仿射包 σ的子空间时的拓扑内部。这等于 $|\sigma|$ 中所有真面 σ的并集的补集；参考文献见例如 [Zie12，第 2 节。3] 相对内部与仿射映射可交换，即 $f(\sigma^\circ) = f(\sigma)^\circ$。此外，对于 POLY 中的映射，我们有

引理 15。 设 $f\colon (N^\sigma, \sigma) \to (N^\delta, \delta)$ 是 POLY 中的仿射映射。若 $f(\sigma)$ 不包含在 δ 的某个真面中，则 $f(\sigma^\circ) \subseteq \delta^\circ$。等价地，若 $f(\sigma^\circ) \cap \delta^\circ \neq \varnothing$，则 $f(\sigma^\circ) \subseteq \delta^\circ$。

证明。这一事实由 f 是仿射映射可知，因此 $f(\sigma)$ 是 aff-span N_δ 中的一个多面体；再由 $f(\sigma)^\circ = f(\sigma^\circ)$ 可知。详细内容参见例如 [Var22, 引理 9.13] 。□

引理 15 的重要性在于，来自多面体空间的态射 $(\varphi, \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$ 的映射 Φ_α 满足该引理。若采用面态射，则可得到更强的结论。

引理 16。 设 $\Sigma \in \mathrm{PolySpace}$ 和 α, β 属于 $\mathrm{Obj}(\Sigma)$。存在态射 $\alpha \to \beta$ 当且仅当 $p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ)$∩的像 $p_\beta \neq \varnothing$。此外，若 $p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ)$∩的像 $p_\beta \neq \varnothing$，则 $p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ)$∩的像 $p_\beta = p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ)$。

证明。为方便起见，我们用 σf 表示 $\sigma(f)$。设 $f_{\alpha\beta}\colon \alpha \to \beta$ 是一个态射。由 $|\Sigma| = \operatorname{colim}_{\alpha\in\Sigma}|\sigma_\alpha|$ 的泛性质可得 $p_\alpha = p_\beta \circ \sigma f_{\alpha\beta}$。因此，$p_\alpha \subset$的像 p_β的像。

反过来，假设存在 $z \in p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ) \cap$的像 p_β。设 $x \in \sigma_\alpha^\circ$ 和 $y \in \sigma_\beta$满足 $p_\alpha(x) = p_\beta(y) = z$，并令 τ 为 σ_β 的唯一面，使得 $y \in \tau^\circ$。根据定义 6 的条件 (a)，存在 α' 和 $\iota\colon \alpha' \to \beta$ 属于 Σ，使得 $\sigma\iota(\sigma_{\alpha'}) = \tau \subset \sigma_\beta$。由于 $\sigma\iota$ 是双射，令 x' 为 $\sigma_{\alpha'}$ 中 y 在 $\sigma\iota$下的原像。注意，x' 属于 $\sigma_{\alpha'}^\circ$。

由于 $p_{\alpha'}(x') = z = p_\alpha(x)$，根据 $|\Sigma|$ 的泛性质，存在一个连接 x和 x'的面态射序列；例如，$\alpha \xrightarrow{f_1} \alpha_1 \xleftarrow{f_2} \alpha_2 \xleftarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} \alpha'$ 满足 $x' = \sigma f_n(\dots \sigma f_3^{-1}(\sigma f_2^{-1}(\sigma f_1(x))))$. 我们声称可以将前两个态射替换为一个态射，因此通过迭代，可以得到一个长度为 1 的序列 $f\colon \alpha \to \alpha'$ 满足 $\sigma f(x) = x'$。如果$\alpha \neq \alpha'$，那么定义 6 的条件 (c)意味着 $\dim \alpha \neq \dim \alpha'$，但此时 $\sigma f(x)$包含在 $\sigma_{\alpha'}$的某个真面中，这与 $x' = \sigma f(x)$属于 $\sigma_{\alpha'}^\circ$相矛盾。因此，$\alpha = \alpha'$，而ι就是所需的态射 $\alpha \to \beta$。

为了证明这一结论，前两个态射有 4 种情况：$\alpha \xrightarrow{f_1} \alpha_1 \xrightarrow{f_2} \alpha_2$、$\alpha \xleftarrow{f_1} \alpha_1 \xleftarrow{f_2} \alpha_2$、$\alpha \xleftarrow{f_1} \alpha_1 \xrightarrow{f_2} \alpha_2$ 和 $\alpha \xrightarrow{f_1} \alpha_1 \xleftarrow{f_2} \alpha_2$。在前两种情况下，我们将它们复合。在第三种情况下，$\sigma f_1(\sigma_{\alpha_1})$ 是 σ_α 的一个面，其中包含内点 x。因此，f_1 是一个同构，我们可以反转箭头，将其归入第一种情况。

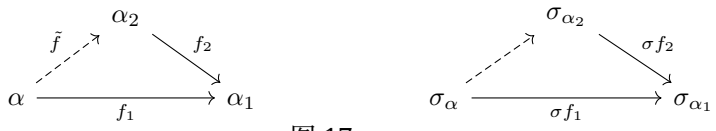

图 17

第四个给出了图 17。存在点 $x_2 \in \sigma_{\alpha_2}$ 和 $x_1 \in \sigma_{\alpha_1}$，以及面态射 $f_1\colon N^\alpha \to N^{\alpha_1}$ 和 $f_2\colon N^{\alpha_2} \to N^{\alpha_1}$，使得 $x_1 = \sigma f_1(x) = \sigma f_2(x_2)$。$\operatorname{im}\sigma f_1$ 和 $\operatorname{im}\sigma f_2$ 都是包含 x_1的 σ_{α_1} 的面。由于 x 位于 σ_α°中，点 $x_1 = \sigma f_1(x)$ 是 $\operatorname{im}\sigma f_1$的内点，因此面 $\operatorname{im}\sigma f_1$ 包含于 $\operatorname{im}\sigma f_2$中。由于这两个映射都是面态射，因此它们是单射且仿射的，所以 $(\sigma f_2)^{-1}\circ\sigma f_1$ 限制为一个面态射$\sigma_\alpha \to \sigma_{\alpha_2}$。根据定义 6 的条件 (b)，存在唯一的提升 $f : \alpha \to \alpha_2$，这取代了 $\alpha \xrightarrow{f_1} \alpha_1 \xleftarrow{f_2} \alpha_2$。□

2.5. **拓扑实现的分解**。由引理 16 可知，$|\Sigma|$ 可分层为互不相交的内部之并，这与嵌入多面体复形类似。

引理 18。设 $\sigma\colon \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 属于 $\mathrm{POLYSPACE}$。我们有

$$|\Sigma| = \bigsqcup_{\alpha\in\Sigma} p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ).$$

证明。根据 $|\Sigma|$的泛性质，对于每个 x 属于 $|\Sigma|$，都存在 γ 属于 Σ，使得 $x \in \operatorname{im} p_\gamma$。取 $\hat{}x$ 属于纤维 $p_\gamma^{-1}(x)$，并取 τ 为 σ_γ 的一个面，使得 $\hat{}x$ 属于 τ°。根据定义 6 的性质 (a)，存在 α 和 $f\colon \alpha \to \gamma$ 属于 Σ，使得 $\sigma f(\sigma_\alpha) = \tau$。因此，$\hat{}x$ 属于 $\tau^\circ = \sigma f(\sigma_\alpha)^\circ = \sigma f(\sigma_\alpha^\circ)$，且 $x = p_\gamma(\hat{}x)$ 属于 $(p_\gamma \circ \sigma f)(\sigma_\alpha^\circ) = p_\alpha(\sigma_\alpha^\circ)$，所以确有 $|\Sigma| = \bigcup p_\alpha(\alpha_\alpha^\circ)$。根据引理 16 和定义 6 的性质 (c)，这个并是不交的。□

因此，我们可以描述交集 $\operatorname{im} p_\alpha \cap \operatorname{im} p_\beta$。下文中，$\downarrow\alpha$ 如第 2.2 小节所述，且等于 $\operatorname{Hom}(-,\alpha)$ 中映射的定义域集合。

引理 19. 设 $\sigma : \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 属于 $\mathrm{POLYSPACE}$，且 α、β 属于 Σ。则有

$$\operatorname{im} p_\alpha \cap \operatorname{im} p_\beta = \bigcup_{\eta\in\downarrow\alpha\cap\downarrow\beta} \operatorname{im} p_\eta.$$

证明. 若 x 属于 $\operatorname{im} p_\alpha \cap \operatorname{im} p_\beta$，则由引理 18 可得一个 $\eta \in \Sigma$，使得 $x \in p_\eta(\sigma_\eta^\circ)$，因此由引理 16 可得态射 $\eta \to \alpha$ 和 $\eta \to \beta$。反之，若存在态射 $f : \eta \to \alpha$ 和$g\colon \eta \to \beta$，则有 $p_\eta = p_\alpha \circ \sigma f$和 $p_\eta = p_\beta \circ \sigma g$，因此 $\operatorname{im} p_\eta \subset \operatorname{im} p_\alpha \cap \operatorname{im} p_\beta$。□

注意到 $\operatorname{Hom}_\Sigma(\alpha,\alpha)$ 等于 $\operatorname{Aut}\alpha$，因此 p_α 可经由 $\operatorname{Aut}\alpha$ 作用于 $|\sigma_\alpha|$所得商空间 $|\sigma_\alpha|/\operatorname{Aut}\alpha$ 的投影分解。映射 $p_\alpha\colon |\sigma_\alpha|/\operatorname{Aut}\alpha \to |\Sigma|$是到其像上的同胚；参见图 20。因此，根据引理 18，$|\Sigma|$分解为模自同构的多面体内部的不交并。

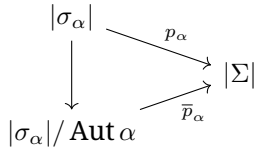

图 20

2.6. **多面体复形与重心细分**。如果 $(\mathrm{Obj}(\Sigma)\ \preceq)$ 编码了 Σ 的全部信息，那么对于所有 $\alpha \in \Sigma$，我们都有平凡的 $\operatorname{Aut}\alpha$。因此，图 20 中的 p_α 是单射的，并且 $|\Sigma|$ 以一种直接的方式局部多面体化。

定义 21。若多面体空间 $\sigma : \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 满足 $\#(\mathrm{Hom}_{\Sigma}(\alpha,\beta)) \leq 1$，则称其为<式样 id='5'>有理多面体复形。如果 $\mathrm{Hom}_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ 中存在唯一元素，我们将其记为 $f_{\alpha\beta}$，并将 PolyComplex 记为 PolySpace 中由多面体复形构成的满子范畴。

例 22（嵌入多面体复形）。设 (V,N) 是带有整结构的向量空间，且 Σ 是 (V,N) 中的有限整多面体族，满足：
(a) 若 σ 属于 Σ，且 τ 是 σ 的一个面，则 τ 属于 Σ；(b) 若 σ_1,σ_2 属于 Σ 和 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \varnothing$，则 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 是 σ_1 的一个面，也是 σ_2 的一个面。
族 Σ 构成一个范畴，其态射为集合包含映射。于是，取 σ 为恒等函子，便得到一个满足定义 6 的多面体复形。我们有：

$$|\Sigma| \sim \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma. \tag{3}$$

因此，拓扑实现将嵌入多面体复形的支撑集推广了。 ⋆

尽管在模空间的构造中经常会出现非平凡的自同构群，但在热带模空间的语境下，关注多面体复形是合理的：可以通过细化为重心细分来处理，代价是面偏序集的组合结构会变得更加复杂。

定义 23. 多面体空间 $\Sigma \in \mathrm{PolySpace}$ 的细化是一个态射 $\Phi : \Sigma \to \Sigma \in \mathrm{PolySpace}$，使得拓扑实现 $|\Phi| : |\Sigma'| \to |\Sigma|$ 是同胚，并在整点上诱导一个双射，即 $|\Phi|(N') = N$。

例24. 给定 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$，以及超平面 H，使得 $H \cap \sigma^{\circ} \neq \varnothing$ 对 σ 产生非平凡细化，即 $\sigma \cap H^{-}$ 和 $\sigma \cap H^{+}$。此外，如果 σ 有无界面，则可以选择 H，使所有有界面都包含在 H^{-} 中，因此 $\sigma \cap H^{-}$ 有界，且 $\sigma \cap H^{+}$ 有唯一的有界面。⋆

我们概述胞腔 $\sigma \subset (V,\ N)$ 为锥的多面体空间的重心细分。记 $\mathrm{CONE}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 为 $\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 的子范畴，其对象为锥。回顾一下，$\mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 中的多面体具有平凡的线性部分空间，因此 $\mathrm{CONE}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 中的锥是尖的，即它们具有一个 0-面，并由其 1-面张成。如果 σ 是有理的且 $0 \lessdot \theta \preceq \sigma$ 是一个 1-面，那么 $\theta \cap N$ 是由本原向量 v_θ 生成的幺半群。面态射 f 保持本原向量，即 $f(v_\theta) = v_{f(\theta)}$。因此，如果我们将 σ 的重心 定义为

$$\bar{\beta}(\sigma) = \sum_{0\lessdot\theta\preceq\sigma} v_\theta,$$

我们得到 $f(\beta(\sigma)) = \beta(f(\sigma))$。由此我们构造一个细化：

构造 25（重心细分）。设 $\sigma : \Sigma \to \mathrm{CONE}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 是一个锥的多面体空间。用 $\mathrm{bcs}(\Sigma)$ 表示 Σ 中所有由真态射组成的链 $\mathcal{C}\colon\ \alpha_1 \xrightarrow{f_1} \alpha_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_k} \alpha_k$ 的集合。对于 $\mathcal{C} \in \mathrm{bcs}(\Sigma)$，我们关联有理锥

$$\mathrm{bcs}(\sigma)(\mathcal{C}) = (\mathrm{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(\bar{\beta}(\sigma(\alpha_k)), \bar{\beta}(\sigma f_{k-1}(\sigma(\alpha_{k-1}))), \dots, \sigma(f_{k-1}\circ\cdots\circ f_1)(\sigma(\alpha_1))), N^{\alpha_k}).$$

为了得到一个将 $\mathrm{bcs}(\sigma)$ 映射到 $\mathrm{bcs}(\Sigma) \to \mathrm{CONE}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 的函子，使其成为多面体空间，我们需要在 $\mathrm{bcs}(\Sigma)$ 中添加一个充当顶点的对象，以及满足提升条件的态射，之后再转到骨架范畴。对于每一对链 $\mathcal{C}\colon\ \dots \xrightarrow{f_k} \alpha_k$ 和 $\mathcal{D}\colon \dots \xrightarrow{g_l} \gamma_l$，以及每个态射 $h\colon\ \alpha_k \to \gamma_l$，添加一个态射 $h^{\mathcal{C},\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。

相应的多面体映射 $\mathrm{bcs}(\sigma)(h^{\mathcal{C},\mathcal{D}})$ 可通过将 $\sigma(h)$ 限制到 $\mathrm{bcs}(\sigma)(\mathcal{C})$ 得到，它映射到 $\mathrm{bcs}(\sigma)(\mathcal{D})$，因为 $f(\bar{\beta}(\sigma)) = \bar{\beta}(f(\sigma))$。最后，$h^{\mathcal{D},\mathcal{E}}_2 \circ h^{\mathcal{C},\mathcal{D}}_1 = h^{\mathcal{C},\mathcal{E}}_3$ 当且仅当存在 h_1，h_2，$h_3 \in \mathrm{Mor}(\Sigma)$ 使得 $h_2 \circ h_1 = h_3$。

注意，对于 $\mathcal{C}\colon \ldots \xrightarrow{f_k} \alpha_k$，我们有 $\dim \mathrm{bcs}(\sigma)(\mathcal{C}) = k+1$，且该锥是单纯的，即同构于 $\mathbb{R}^{k+1}_{\geq 0}$。此外，正如 [ACP15]，中指出的那样，这种构造消除了自同构以及将同一个面多次粘合到同一个锥上的情况。

命题26。设 $\sigma : \Sigma \to \mathrm{Cone}^f_{\mathbb{Z}}$ 是一个锥的多面体空间。其重心细分 $\mathrm{bcs}(\sigma)$ 是由单纯锥构成的多面体复形。

注记27。紧多面体 $\sigma \subset (V, N)$ 称为一个多胞体。为了定义它的重心，我们考虑 σ 的齐次化 $\tilde{\sigma}$，也就是说，将 (V, N) 嵌入到 $(V \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{Z})$ 所在的平面中，使其最后一个坐标等于 1，并考虑 $\tilde{\sigma} = \mathrm{span}^{\mathbb{R}_{\geq 0}\sigma}$。定义 $\beta(\sigma)$ 等于 $\sigma \cap (\mathrm{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \beta(\tilde{\sigma}))$。类似地，$\tilde{\sigma}$ 的重心细分 $\mathrm{bcs}(\tilde{\sigma})$ 在 σ 上诱导出重心细分 $\mathrm{bcs}(\sigma)$。记 σ 的维数为 d，则 $\mathrm{bcs}(\sigma)$ 的胞腔同构于 d-单形 Δ^d，即 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中由 $d+1$ 个标准向量构成的凸包 $\mathrm{convex}\,\{e_1, \ldots, e_{d+1}\}$。

任意多面体 σ 都可以分解为一个多胞体 $P(\sigma)$ 与一个锥 $C(\sigma)$ 的闵可夫斯基和。锥 $C(\sigma)$ 称为 σ 的衰退锥。因此，$\mathrm{bcs}(P(\sigma))$ 和 $\mathrm{bcs}(C(\sigma))$ 诱导出 σ 的细化，使得每个胞腔都是一个单纯形与一个单纯锥的闵可夫斯基和。这一构造消除了任意多面体的自同构，从而推广了命题 26。△

2.7. **关联 $(\Sigma, \preceq)$ 与 $|\Sigma|$ 的拓扑**。给定 $\Sigma \in \mathrm{PolySpace}$ 和 $x \in |\Sigma|$，考虑集合 $\{\gamma \in \Sigma\colon\ x \in \mathrm{im}\ p_\gamma\}$。由引理 16 和 18 可知，这是由 Σ 中的元素 α 生成的一个上集，满足 $x \in p_\alpha(\sigma^\circ_\alpha)$。因此，下述映射定义良好：

定义 28。设 Σ 属于 $\mathrm{PolySpace}$。我们定义映射 $\mathrm{poly}_\Sigma\colon\ |\Sigma| \to \Sigma$，给定 b y

$$x \mapsto \min\{\gamma \in (\Sigma, \preceq)\colon\ x \in \mathrm{im}\, p_\gamma\}.$$

现在我们假设 Σ 是一个多面体复形，因此泛映射 $p_\alpha\colon\ \sigma_\alpha \to |\Sigma|$有逆映射。

引理 29. 设 $\sigma : \Sigma \to \mathrm{Poly}^f_{\mathbb{Z}}$ 属于 $\mathrm{PolyComplex}$。映射$\mathrm{poly}_\Sigma\colon\ |\Sigma| \to \Sigma$ 是满射、开映射且连续。

证明. 对于任意 $x \in p_\alpha(\sigma^\circ_\alpha)$，$\mathrm{poly}_\Sigma(x)$等于 α，因此该映射是满射。

回顾一下，当且仅当对所有 $\alpha \in \Sigma$，$p_\alpha^{-1}(V)$在 $|\sigma_\alpha|$ 中是开集时，$V \subseteq |\Sigma|$ 在 $|\Sigma|$ 的终拓扑中是开集。为了证明poly_Σ 是开映射，取一个开集 $V \subset |\Sigma|$ 、$\alpha \in \mathrm{poly}_\Sigma(V)$，以及 Σ 中的 β，使得 $\alpha \preceq \beta$。存在 V中的 x，使得 $x \in p_\alpha(\sigma^\circ_\alpha)$。由于$\alpha \preceq \beta$，存在 $f_{\alpha\beta}\colon\ \alpha \to \beta \in \Sigma$。因此，$p_\alpha = p_\beta \circ \sigma(f_{\alpha\beta})$，且有 $x \in \mathrm{im}\, p_\beta$，所以$p_\beta^{-1}(V)$是 $|\sigma_\beta|$中 $p_\beta^{-1}(x)$的一个开邻域。存在一点 y属于 $p_\beta^{-1}(V) \cap \sigma^\circ_\beta$，因为 $|\sigma_\beta|$ 中任意一点的邻域都与 σ°_β相交。这说明 $p_\beta(y) \in V$，且$\mathrm{poly}_\Sigma(p_\beta(y)) = \beta$。因此，$\mathrm{poly}_\Sigma(V)$是一个上集，也就是开集。

最后，$\{\uparrow\alpha\colon\ \alpha \in \Sigma\}$ 生成偏序拓扑，因此 poly_Σ 是连续的，如果

$$\mathrm{poly}_\Sigma{}^{-1}(\uparrow\alpha) = \bigcup_{\alpha \preceq \gamma} p_\gamma(\sigma^\circ_\gamma) \tag{4}$$

是开集，即对于所有 α， $\beta \in \Sigma$， $p_\beta^{-1}(\mathrm{poly}_\Sigma{}^{-1}(\uparrow\alpha)) \subset N_{\mathbb{R}}^\beta$ 都是开集。由引理 16 可知，$p_\beta(\sigma_\beta) \cap p_\gamma(\sigma_\gamma^\circ) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\gamma \preceq \beta$。在这种情况下， $p_\beta(\sigma_\beta) \cap p_\gamma(\sigma_\gamma^\circ) = p_\gamma(\sigma_\gamma^\circ)$，所以：

$$\begin{aligned}\mathrm{poly}_\Sigma{}^{-1}(\uparrow\alpha) \cap p_\beta(\sigma_\beta) &= \bigcup_{\alpha\preceq\gamma} p_\gamma(\sigma_\gamma^\circ) \cap p_\beta(\sigma_\beta) = \bigcup_{\alpha\preceq\gamma\preceq\beta} p_\gamma(\sigma_\gamma^\circ) \\ &= \bigcup_{\alpha\preceq\gamma\preceq\beta} p_\beta \circ \sigma(f_{\gamma\beta})(\sigma_\gamma^\circ) = p_\beta\Big(\bigcup_{\alpha\preceq\gamma\preceq\beta} \sigma(f_{\gamma\beta})(\sigma_\gamma^\circ)\Big).\end{aligned}$$

在两边应用 p_β^{-1} 后，我们得到

$$p_\beta^{-1}(\mathrm{poly}_\Sigma{}^{-1}(\uparrow\alpha)) = \bigcup_{\alpha\preceq\gamma\preceq\beta} \sigma(f_{\gamma\beta})(\sigma_\gamma^\circ),$$

an可以直接证明，这是 σ_β 的面之补集，因此是一个开集，即 .

$$|\sigma_\beta| = \bigcup_{\alpha\preceq\gamma\preceq\beta} \sigma(f_{\gamma\beta})(\sigma_\gamma^\circ) \sqcup \bigcup_{\substack{\eta\preceq\beta \\ \alpha\not\preceq\eta}} \sigma(f_{\eta\beta})(\sigma_\eta). \qquad \square$$

引理30。 设 $\Phi\colon \Sigma \to \Delta$ 是 PolyComplex 中的态射， $|\Phi| : |\Sigma| \to |\Delta|$ 是拓扑实现上诱导的映射。图 *31* 交换。

$$\begin{array}{ccc} |\Sigma| & \xrightarrow{\mathrm{poly}_\Sigma} & \Sigma \\ {\scriptstyle |\Phi|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ |\Delta| & \xrightarrow{\mathrm{poly}_\Delta} & \Delta \end{array}$$

Diagram 31

证明。 令 $\Phi = (\varphi, \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$，取 $|\Sigma|$ 中的一点 x，且 $\alpha = \mathrm{poly}_\Sigma(x)$。因此 $\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma(x) = \varphi(\alpha)$。另一方面，由引理 15 及其后续讨论可知，$\Phi_\alpha(\sigma_\alpha^\circ) \subseteq \delta^\circ_{\varphi(\alpha)^\circ}$ 因此， $\Phi_\alpha(p_\alpha^{-1}(x))$ 属于 $\delta^\circ_{\varphi(\alpha)}$，从而 $\mathrm{poly}_\Delta \circ p_{\varphi(\alpha)} \circ \Phi_\alpha \circ p_\alpha^{-1}(x) = \varphi(\alpha)$。由图 14 可得 $p_{\varphi(\alpha)} \circ \Phi_\alpha \circ p_\alpha^{-1}(x) = |\Phi|(x)$，故得证。□

从图 31 我们得到一个包含关系

$$\mathrm{poly}_\Sigma(|\Phi|^{-1}(y)) \subset \varphi^{-1}(\mathrm{poly}_\Delta(y)). \tag{5}$$

因此，人们可以想知道 Poly_Σ 是否将纤维 $|\Phi|^{-1}(y)$双射到纤维 $\varphi^{-1}(\mathrm{Poly}_\Delta(y))$上，这对于计数而言是理想的。显然并非如此：考虑嵌入的多面体复形 $|\Sigma|, |\Delta|$，以及 $|\Phi|$ 一个真包含关系 $|\Sigma| \subset |\Delta|$。任意点 $y \in |\Delta| \setminus |\Sigma|$都能否定该双射，但在关于 φ 的技术条件下，我们确实能在引理 52 中得到这一结论。

3. Indexed branched covers

3.1. 带指标的分歧覆盖。 受黎曼曲面映射的启发，参见例35。对我们而言，一对 (F, B)，其中包含一个连续映射 $F\colon X \to Y$和一个闭子集 $B \subset Y$，若 $Y \setminus B$是开且稠密的，并且将 F 限制在 $F^{-1}(Y \setminus B)$ 上后得到一个覆盖，则称其为分歧覆盖。集合 B 称为分支轨迹。

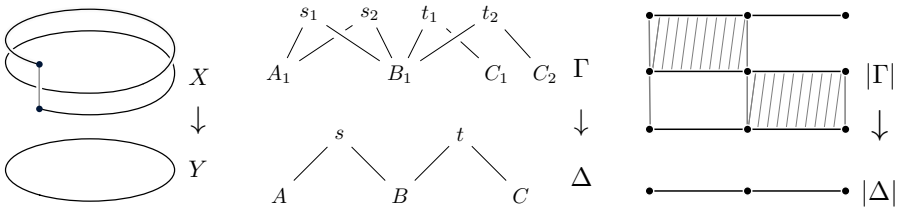

FIGURE 2. 左侧是一个圆的二重覆盖，其中竖直灰线表示两个点的识别。中间是偏序集的分歧覆盖。右侧是一个被细分为两部分的线段的分歧覆盖。这两个分歧覆盖都具有一个指标映射，使其成为三重指标分歧覆盖。

例32。设 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的一个态射。集合 $\mathcal{U} \subset \Delta$ 的闭包是$\downarrow_\Delta \mathcal{U}$，因此， Δ 的子集稠密，当且仅当它包含 $\max \Delta$。元素 $\beta \in \Delta$ 是极大的，当且仅当单点集 $\{\beta\}$ 是一个开集。因此，开$\{\beta\}$ 的纤维 $\varphi^{-1}(\{\beta\})$ 是若干个与 $\{\beta\}$ 同胚的开集的不交并，当且仅当 $\varphi^{-1}(\beta)$ 中的每个 α 都是极大的。于是，若 $(\varphi, \mathcal{B})$ 是一个分歧覆盖，则

(1) 若 β属于$\max \Delta$，则 $\varphi^{-1}(\beta) \subset \max\ \Sigma$。

(2) 我们有$\max \Delta \subset \Delta \setminus \mathcal{B}$。

此外，如果 φ满足 (1)，那么 $(\varphi,\ \Delta \setminus \max\ \Delta)$ 是一个分歧覆盖。 ⋆

为了将点数扩展到 B 上方的纤维，我们在 X 的点上定义一个重数，该重数在局部与纤维的适当邻域相一致。

定义33（局部度）。设 $F\colon X \to Y$ 是一个具有有限纤维的映射， $m_X : X \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是一个指标映射，并且 $V \subset X$。我们将 局部度 映射 $\deg(F, m_X, V)\colon Y \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义为

$$\deg(F, m_X, V)(y) = \sum_{\substack{x \in F^{-1}(y) \\ x \in V}} m_X(x). \tag{6}$$

从现在起，我们假设 F 具有有限纤维，且 Y 是连通的。方程（6）中的空和约定取值为0。为了得出以下观察，$\deg(F,\ m_X,\ V)$的定义域为 Y：对于任意一对集合 $V_1,\ V_2 \subset X$，都有

$$\deg(F, m_X, V_1) + \deg(F, m_X, V_2) = \deg(F, m_X, V_1 \cup V_2) + \deg(F, m_X, V_1 \cap V_2). \tag{7}$$

此外，如果 $F^{-1}(y) \cap V_1 = F^{-1}(y) \cap V_2$，则有过渡等式

$$\deg(F, m_X, V_1)(y) = \deg(F, m_X, V_2)(y). \tag{8}$$

最后，如果$\deg(F,\ m_X,\ V)$在 $F(V)$上为常数，我们就称它为常数。

定义34。若一对$(F,\ m_X)$由一个分歧覆盖 $F\colon\ X \to Y$和一个指标映射$m_X\colon\ X \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$组成，且对于每个连通开集 $U \subset Y$ 以及 $F^{-1}(U)$的每个连通分支 V，局部度$\deg(F,\ m_X,\ V)$都是常数，则称其为带指标分支覆盖。

特别地，由于 Y是开且连通的，这意味着纤维 $F^{-1}(y)$中各点按重数m_X计数后的总数，在 Y上是一个常数 $\deg(F, m_X)$。

例 35。 设 $f : X \to Y$ 是紧黎曼曲面之间的一个非常数全纯映射，且 x 是 X中的一个点。回顾一下，存在 X 和 Y 的坐标图，使得f 在 x 的一个邻域 U 内可表示为 $f = z^k$。整数 k 与坐标图的选取无关，因此映射 $m_X : X \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 将 $x \mapsto k$ 映至 m_X 是良定义的。这称为 x的分歧指数 。有序对（f, m_X）是一个带指标分支覆盖，其分支轨迹由 Y中的有限多个点组成。⋆

例36。 考虑图2(b)中的映射 $\Gamma \to \Delta$ 。下表给出了指标映射 m_Γ ，使得($\Gamma \to \Delta$， m_Γ)成为一个度数为3的带指标分支覆盖，其分支轨迹等于 $\{A, B\}$。

x	$m_\Gamma(x)$	x	$m_\Gamma(x)$
A_1	3	s_1	2
B_1	3	s_2	1
C_1	1	t_1	1
C_2	2	t_2	2

注意， $\{s, t\} \subset \{s, t, C\}$ 确实是一个稠密集，因为它的闭包是 $\downarrow s \cup \downarrow t = \Delta$。 ⋆

注37。 定义34受到 [Pay06]中的定义III.3和III.4的启发，并将二者综合在一起。△

3.2. **成为带指标分支覆盖的判据**。 作为朝着问题 2 迈出的第一步，我们证明，只需考虑 Y 的拓扑的一些特定基即可。我们用 $\pi_0(X)$ 表示 X 的连通分支集合。

注 38. </style}记号 $\pi_0(X)$ 不应引起混淆，因为我们只考虑局部路径连通的空间，也就是说，这类空间有一个由路径连通集构成的基，见命题 41 和 46。在这种情况下，连通分支与路径连通分支重合 [Mun00，定理 25.5]. △

引理 *39*。设 $F\colon X \to Y$ 是一个分歧覆盖， $m_X\colon X \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$，且 $U^{(1)}$、 $U(2)$ 是 Y 中的连通开集，并且对于 $V(_q) \in \pi_0(F^{-1}(U(_q)))$，$deg(F, m_X, V(_q))$ 为常数，其中 $q = 1$ 和 *2*。度数 $deg(F, m_X, V)$ 对于 $V \in \pi_0(F^{-1}(U(1) \cup U(2)))$ 为常数。

证明。 若 $U_{(1)}$与 $U^{(2)}$不相交，则证明完毕，因此假设 $U_{(1)} \cap U^{(2)} \neq \varnothing$。设$V$属于 $\pi_0(F^{-1}(U^{(1)} \cup U^{(2)}))$。若 $\left\{V_{(\ j}^{\ q}{}_{)}\right\}_{j \in J}$是$F^{-1}(U^{(q)})$中与 V相交的连通分支族，对 $q = 1$和 2，我们断言

$$V = \bigcup_{j \in J} V_j^{(1)} \cup \bigcup_{k \in K} V_k^{(2)}.$$

事实上，显然右边的集合包含左边的集合；反过来的包含关系可由以下观察得出：若 S 是一个与 $S \cap V \neq \varnothing$连通的集合，则 $S \cup V$是连通的，因此 $S \subset V$。令 $y_0 \in U_{(1)} \cap U_{(2)}$， $y_1 \in U^{(1)}$，以及 $y_2 \in U^{(2)}$。根据

由方程 (7) 和 (8)，我们有

$$\begin{aligned}(9)\qquad \deg\left(F, m_X, \bigcup_{j\in J} V_j^{(1)}\right)(y_1) &= \sum_{j\in J}\deg\left(F, m_X, V_j^{(1)}\right)(y_1)\\ &= \sum_{j\in J}\deg\left(F, m_X, V_j^{(1)}\right)(y_0)\\ &= \deg\left(F, m_X, \bigcup_{j\in J} V_j^{(1)}\right)(y_0).\end{aligned}$$

同样，我们推导出

$$(10)\qquad \deg\left(F, m_X, \bigcup_{k\in K} V_k^{(2)}\right)(y_2) = \deg\left(F, m_X, \bigcup_{k\in K} V_k^{(2)}\right)(y_0).$$

由于 y_0属于 $U_{(1)}$，且 $\left\{V_{(\ 1\ )}_j\right\}_{j\in J}$是与 V相交的 $F^{-1}(U^{(1)})$ 的连通分支族，因此我们有

$$F^{-1}(y_0)\cap\bigcup_{j\in J} V_j^{(1)} = F^{-1}(y_0)\cap V.$$

同样，我们得到关于 $F^{-1}(U^{(2)})$ 的类似表达式，并得出

$$F^{-1}(y_0)\cap\bigcup_{j\in J} V_j^{(1)} = F^{-1}(y_0)\cap V = F^{-1}(y_0)\cap\bigcup_{k\in K} V_k^{(2)}.$$

由等式 (8) 可知，等式 (9) 和 (10) 的右端相等。因此，左端也相等，正如所需。□

在拓扑空间 X 和 Y满足温和条件时，我们得到一个可数版本 .

引理 40。设 $F\colon X\to Y$ 是一个分歧覆盖，且 $m_X\colon X\to\mathbb{Z}_{\geq 1}$。如果 X 是局部路径连通的，Y 具有由连通集构成的可数基 $\mathcal{U}$，并且对于所有 $V\in\pi_0(F^{-1}(U))$和 $U\in\mathcal{U}$，$\deg(F, m_X, V)$ 均为常数，那么 (F, m_X) 是一个带指标分支覆盖。

证明。设 U 是 Y 中的一个连通开集。根据假设，我们可以将 U 写为一个可数并集 $U=\bigcup_{q=0}^{\infty} U_q$，其中 $U_q\in\mathcal{U}$。假设存在 $V\in\pi_0(F^{-1}(U))$，使得 $\deg(F, m_X, V)$ 不是常数；也就是说，存在 y 和 z 属于 Y，使得 $\deg(F, m_X, V)(y)\neq\deg(F, m_X, V)(z)$。分别令 $\{y_i\}_{i\in I}$ 和 $\{z_j\}_{j\in J}$ 为 $F^{-1}(y)\cap V$ 和 $F^{-1}(z)\cap V$，于是我们得到

$$(11)\qquad \deg(F, m_X, V)(y) = \sum_{i\in I} m_X(y_i) \neq \sum_{j\in J} m_X(z_j) = \deg(F, m_X, V)(z).$$

由于 U是开集且 F连续，因此 $F^{-1}(U)$ 是 X的开子空间。局部路径连通性在开子空间中得以继承，所以 $F^{-1}(U)$ 是局部路径连通的。因此，$F^{-1}(U)$ 的连通分支与路径连通分支重合，所以 $V\in\pi_0(F^{-1}(U))$ 是路径连通的。于是，对于每一对 $i\in I$，$j\in J$，我们都可以选取一条路径 $P_{ij}\colon[0,1]\to X$，连接 y_i与 z_j。由于 $F\circ P_{ij}$是连续映射，像 $\operatorname{im}\ F\circ P_{ij}$是 Y中的紧集。由于 $\{U_q\}$是 $\operatorname{im} F\circ P_{ij}$的覆盖，我们可以选取一个有限子覆盖，并令 r_{ij} 为该有限子覆盖中 U_q 的最大指数。

令 $r=$为 r_{ij}与 $U_r=\bigcup_{q=1}^{r}U_q$的最大值。注意，对所有的 i， j，都有 im $P_{ij}\subset F^{-1}($ $U_r)$。因此， $F^{-1}(U_r)$ 中包含 y_1的连通分支 $\tilde{V}$ 也包含所有的 y_i, z_j，因为 $\tilde{V}$也是一个路径连通分支。于是，通过有限次应用引理 39，˜ ˜我们得到 deg$(F,\ m_X,\ V)(y)$ $=$deg$(F,\ m_X,\ V)(z)$，这尤其意味着

$$\sum_{i\in I} m_X(y_i)=\sum_{j\in J} m_X(z_j),$$

这与公式（11）矛盾。因此，deg(F, m_X, V) 是常数，正如所期望的那样。 □

3.3. 路径连通集的基，对于 Σ 和 $|\Sigma|$。 给定一个多面体复形，我们描述其偏序集和拓扑实现的基，这些基满足引理 39 和 40 的条件。首先，对于偏序集，回顾一下，偏序拓扑中的一个<style id='9'>主开集是形如 $\uparrow_\Sigma\alpha$ 的集合。我们有：

命题41。 令 Σ 为有限偏序集。 Σ 的主开集族是 Σ 上偏序拓扑的路径连通集的有限基。

证明。 族 $\{\uparrow\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ 是偏序拓扑的有限基。为说明 $\uparrow\alpha$ 是路径连通的，注意到给定 γ_1, γ_2属于 $\uparrow_\Sigma\alpha$，以下映射 $f\colon [0,1]\to\Sigma$满足 $f(0)=\gamma_1$且 $f(1)=\gamma_2$，并且是连续的：

$$f(t)=\begin{cases}\gamma_1 & \text{for } 0\le t<\frac{1}{3},\\ \alpha & \text{for } \frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3},\\ \gamma_2 & \text{for } \frac{2}{3}<t\le 1.\end{cases} \tag{12}$$

因此， $\uparrow_\Sigma\alpha$ 是路径连通的，证毕。 □

其次，对于多面体复形，我们在若干个$N_{\mathbb{R}}^{\alpha}$ 中粘合球，从而为 $|\Sigma|$构造一个由连通集组成的拓扑基。为此，我们在每个 $N_{\mathbb{R}}^{\alpha}$上固定一个欧几里得度量 d_α，并假设 Σ中的所有面态射都是等距映射。我们在第3.6小节末尾定理 A 的证明中论证，对于任意多面体复形 Σ，都存在 Σ'，其面态射均为等距映射，且 $|\Sigma|$ 与 $|\Sigma'|$ 同胚，因此在任何拓扑命题中都可以去掉这一假设。

我们用$=\{y\in N_{\mathbb{R}}^{\alpha}$表示$N_{\mathbb{R}}^{\alpha}$中以 x为中心、半径为 ε的开球，其中 $B(N_{\mathbb{R}}^{\alpha},\ x,\ \varepsilon)$: $d_\alpha(x,\ y)$ $<\varepsilon\}$。当 x属于 $N_{\mathbb{Q}}^{\alpha}$且 ε属于 $\mathbb{Q}$时，我们称 $B(N_{\mathbb{R}},\ x,\ \varepsilon)$是有理的。由于$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$中稠密，有理球族构成 $N_{\mathbb{R}}$的欧几里得拓扑的一个由连通集组成的可数基。由于所有 $f_{\alpha\beta}$ 都是等距映射，我们有 $d_\alpha=d_\beta\circ\sigma(f_{\alpha\beta})$。因此，对于 $|\Sigma|$ 中的一个点 x，我们将以 x 为中心、半径为 ε 的主球定义为

$$\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon)=\bigcup_{\beta\succeq\mathrm{poly}_\Sigma(x)} p_\beta(B(N_{\mathbb{R}}^{\beta},p_\beta^{-1}(x),\varepsilon)\cap\sigma_\beta). \tag{13}$$

对于开集 $U\subset|\Sigma|$，若有 $x\in U$ 且 ε 足够小，则集合 $\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon)$ 是一个开邻域。这是由两个引理得出的。

引理 42。 设 Σ 为一个其面态射为等距映射的多面体复形。对于每个 x 属于 $|\Sigma|$ 以及每个 γ 属于 $\uparrow_\Sigma \mathrm{Poly}_\Sigma x$，我们有

$$p_\gamma^{-1}\left(\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon)\right)=B(N_{\mathbb{R}}^{\gamma},p_\gamma^{-1}(x),\varepsilon)\cap\sigma_\gamma. \tag{14}$$

证明。左侧集合包含右侧集合，这是因为假设 $\gamma \succeq \text{poly}_\Sigma(x)$。对于反向的包含关系，设 $\hat{y}$ 属于 $p_\gamma^{-1}(\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon))$，也就是说，存在某个 $\beta \in \uparrow\text{poly}_\Sigma(x)$，使得

$$p_\gamma(\hat{y}) \in p_\beta(B(N_{\mathbb{R}}^\beta, p_\beta^{-1}(x), \varepsilon) \cap \sigma_\beta).$$

令 y equal $p_\gamma(\hat{y})$ 成立，并注意到该点属于 $\text{im}\, p_\gamma \cap p_\beta$，因此由引理 19 可知，存在$\eta$属于 Σ，以及态射 $f\colon \eta \to \beta$和 $g\colon \eta \to \gamma$，使得 y属于 im^{p_η}。由于 f, g是等距映射，且 $f = p_\beta^{-1} \circ p_\eta$, $g = p_\gamma^{-1} \circ p_\eta$，我们计算

$$\begin{aligned} d_\gamma(\hat{y}, p_\gamma^{-1}(x)) &= d_\gamma(p_\gamma^{-1}(y), p_\gamma^{-1}(x)) = d_\gamma(p_\gamma^{-1} \circ p_\eta \circ p_\eta^{-1}(y), p_\gamma^{-1} \circ p_\eta \circ p_\eta^{-1}(x)) \\ &= d_\gamma(g \circ p_\eta^{-1}(y), g \circ p_\eta^{-1}(x)) = d_\eta(p_\eta^{-1}(y), p_\eta^{-1}(x)) \\ &= d_\beta(p_\beta^{-1}(y), p_\beta^{-1}(x)) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

并由此得出，$\hat{y}$ 属于 $B(N_{\mathbb{R}}^\gamma, p_\gamma^{-1}(x)\ \varepsilon)$，证毕。 □

其次，我们用泛映射 p_α 来表示包含关系。用 cl(–) 表示一个集合的闭包。

引理 43. 设 Σ 为一个多面体复形，U 和 V 为 $|\Sigma|$的子集，且 $\mathcal{U} \subset \Sigma$ 满足多项式$_\Sigma U \subset \text{cl}(\mathcal{U})$。如果对于所有 β属于 $\mathcal{U}$，都有 $p_\beta^{-1}(U) \subset p_\beta^{-1}(V)$，那么 $U \subset V$。

证明。令 x属于 U，设 $\alpha = \text{poly}_\Sigma x$，以及 $\hat{x} = p_\alpha^{-1}(x)$。由于 $\text{poly}_\Sigma U \subset \text{cl}(\mathcal{U})$，存在 β属于 $\mathcal{U}$以及一个态射 $f\colon \alpha \to \beta$属于 Σ。因此，$x = p_\alpha(\hat{x}) = p_\beta \circ f(\hat{x})$ 表明 $f(\hat{x}) \in p_\beta^{-1}(U)$，所以根据假设也属于 $p_\beta^{-1}(V)$，从而 x属于 V，如 desired。□

将这两个要素结合起来，我们得到：

引理 44。设 Σ 是一个面态射为等距映射的多面体复形，$V \subset |\Sigma|$是一个开集，且 x 属于 V。存在一个常数 K，使得如果 $\varepsilon < K$，则有

$$\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon) \subset V.$$

证明。令 $\alpha = \text{poly}_\Sigma x$，设 $U = \uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon)$ 以及 $\mathcal{U} = \uparrow_\Sigma \alpha$。根据公式 13，我们有 $\text{poly}_\Sigma U \subset \text{cl}(\mathcal{U})$。由于 V是开集，对于每个 $\beta \in \mathcal{U}$，$p_\beta^{-1}(V)$ 都是开集。此外，注意到 $p_\beta^{-1}(x) \in p_\beta^{-1}(V)$。因此，我们可以选择 ε_β，使得

$$B(N_{\mathbb{R}}^\beta, p_\beta^{-1}(x), \varepsilon_\beta) \cap \sigma_\beta \subset p_\beta^{-1}(V).$$

根据引理 42，左边等于 $p_\beta^{-1}(\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon_\beta))$。因此，若取 $K = \min_{\beta \in \mathcal{U}} \varepsilon_\beta$，由引理 43 即得证。□

引理 45。设 Σ 是一个面态射为等距映射的多面体复形，且 x属于 $|\Sigma|$。存在一个常数 K，使得若 $\varepsilon < K$，则 $\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon)$是开集。

证明。令 $\alpha = \text{poly}_\Sigma$。将引理 44 应用于 $\text{poly}_\Sigma^{-1}(\uparrow_\Sigma \alpha)$，由于 poly_Σ 是连续的，该集合是开集，于是得到一个 K，使得若 $\varepsilon < K$，则 $\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon) \subset \text{poly}_\Sigma^{-1}(\uparrow_\Sigma \alpha)$。因此 $\text{poly}_\Sigma(\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon)) = \uparrow_\Sigma \alpha$，由引理 42 即得证。□

注意，$\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon)$ 中的任意点 y 都可以通过一条路径与 x连通。此外，Σ 的有理点集 $\Sigma_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} p_\alpha(N^\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cap \sigma_\alpha)$ 是可数且稠密的。因此我们得到：

命题 46。设 Σ 是一个多面体复形，其面态射是等距映射。Σ 的有理开主球族，即 $\uparrow_\Sigma B(x, \varepsilon)$，其中 $x \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$和 $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ 足够小，是 $|\Sigma|$ 的一个可数路径连通集基。□

3.4. **组合态射**。设 $\Phi\colon [\sigma\colon \Sigma \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}] \to [\delta\colon \Delta \to \mathrm{POLY}_{\mathbb{Z}}^{f}]$ 是 PolyComplex 中的一个态射，$|\Phi|\colon |\Sigma| \to |\Delta|$ 是其拓扑实现。我们给出一个条件，该条件意味着 $|\Sigma|$ 是若干个 $|\Delta|$ 的副本按照仅由 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 决定的方式粘合而成的。这将公式（5）加强为一个双射，这对于关联 $|\Phi|$ 和 φ 的纤维中的点数至关重要。

定义47. 我们称 $\Phi = (\varphi,\ \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$ 是组合的，如果对于所有 $\alpha \in \Sigma$，都有 $\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \delta_{\varphi(\alpha)}$，且 $\dim \sigma_\alpha = \dim \delta_{\varphi(\alpha)}$。

条件 $\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \delta_{\varphi(\alpha)}$ 意味着 $\Phi_\alpha\colon N_{\mathbb{R}}^{\alpha} \to N_{\mathbb{R}}^{\varphi(\alpha)}$ 是一个满射线性映射。结合维数条件可知，线性映射 Φ_α 是双射，因此是一个同胚。事实上，容易看出，Φ 是组合的，当且仅当 Φ_α 是单射，并且对于所有属于 Σ的 α，都有 $\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \delta_{\varphi(\alpha)}$。

注48. 在 [Pay06] 中，锥复形的组合态射满足：Φ_α将映射 $(N^\alpha,\ \sigma_\alpha)$ 同构地映射到 $(N^{\varphi(\alpha)}, \delta_{\varphi(\alpha)})$。这等价于 $\Phi_\alpha\colon N_{\mathbb{R}}^{\alpha} \to N_{\mathbb{R}}^{\varphi(\alpha)}$是单射，$\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \delta_{\varphi(\alpha)}$，且 $\Phi_\alpha(N^\alpha) = N^{\varphi(\alpha)}$。我们省略了最后一个条件，因为指数 $[N_{\varphi(\alpha)} : \Phi_\alpha(N_\alpha)]$ 编码了相关信息。△

我们用映射 φ 给出一种组合刻画。

引理49。多面体复形的一个$(\varphi\colon \Sigma \to \Delta, \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$ 态射是组合的，当且仅当对于所有 $\alpha \in \Sigma$，φ 将 $\downarrow_\Sigma \alpha$ 同构地映射到 $\downarrow_\Delta \varphi(\alpha)$。

证明。假设 $(\varphi, \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$ 是组合的，因此 $\Phi_\alpha\colon N_{\mathbb{R}}^{\alpha} \to N_{\mathbb{R}}^{\varphi(\alpha)}$是一个双射线性映射，于是 σ_α 的多面体结构与 $\Phi_\alpha(\sigma_\alpha)$ 的多面体结构同构。根据假设，$\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \delta_{\varphi(\alpha)}$，因此它们的多面体结构也同构。

反过来，假设对于所有 $\alpha \in \Sigma$，φ 都同构地映射到 $\downarrow_\Delta \varphi(\alpha)$。我们必须证明，对于所有 $\alpha \in \Sigma$，$\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \delta_{\varphi(\alpha)}$，且 $\dim \sigma_\alpha = \dim \delta_{\varphi(\alpha)}$。根据定义，我们已经有 $\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) \subset \delta_{\varphi(\alpha)}$。对于另一个包含关系，由于 $\varphi(\downarrow_\Sigma \alpha) = \downarrow_\Delta \varphi(\alpha)$，我们知道 $\delta_{\varphi(\alpha)}$ 的所有一维面都在 $\Phi_\alpha(\sigma_\alpha)$中。证毕，因为 $\delta_{\varphi(\alpha)}$ 是其一维面的凸包。此外，维数相等是成立的，因为 $\dim \sigma_\alpha$ 等于 $\downarrow_\Sigma \alpha$ 中极大链所含元素的个数；同理，对于 $\downarrow_\Delta \varphi(\alpha)$ 和 $\dim \delta_{\varphi(\alpha)}$ 也是如此；由于$\downarrow_\Sigma \alpha$ 与 $\downarrow_\Delta \varphi(\alpha)$ 同构，这四个数都相同。□

定义50. 我们称偏序集态射 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 组合的 当且仅当 Σ和 Δ 都是有限的，且对于所有 $\alpha \in \Sigma$，φ 将 $\downarrow_\Sigma \alpha$ 同构地映射到 $\downarrow_\Delta \varphi(\alpha)$。

因此，引理49表明，偏序集中的态射 $\Phi = (\varphi\colon \Sigma \to \Delta, \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$ 是组合的，当且仅当其底层范畴态射 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是组合的。

3.5. **纤维积**。现在我们证明，当 φ 是组合的时，空间 $|\Sigma|$ 与映射 poly_Δ 和 φ 下的纤维积 $|\Delta| \times_\Delta \Sigma$ 同胚。回忆一下，给定 $f\colon X \to Z$ 和 $g\colon Y \to Z$，它们属于 Top，纤维积 $X \times_Z Y$ 是图表 $X \to Z \leftarrow Y$ 的极限，与子空间同胚

$$X \times_Z Y = \{(x, y)\colon f(x) = g(y)\}$$

的积拓扑 $X \times Y$。泛性质指出，对于任意带有映射 $p\colon W \to X$和 $q\colon W \to Y$的 W，存在唯一映射 $\phi\colon W \to X \times_Z Y$，使得可以分解为 $p = \pi_X \circ \phi$ 和 $q = \pi_Y \circ \phi$，其中 π_X和 π_Y是典范投影。

引理 51。 如果 $\Phi:\Sigma\to\Delta$ 在 PolyComplex 中是组合的，那么映射

$$\begin{aligned}\phi\colon |\Sigma| &\to |\Delta|\times\Sigma,\\ x &\mapsto (|\Phi|(x),\ \mathrm{poly}_\Sigma(x)),\end{aligned}$$

是到 $|\Delta|\times_\Delta\Sigma$ 上的双射。

证明。 由引理30可知， ϕ 的像包含于 $|\Delta|\times_\Delta\Sigma$。设 (y,γ) 满足 $\mathrm{poly}_\Delta(y)=\varphi(\gamma)$，因此 $y\in p_{\varphi(\gamma)}(\delta^\circ_{\varphi(\gamma)})$。由于 $(\varphi,\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$ 是组合的，映射 $\Phi_\gamma:|\sigma_\gamma|\to|\delta_{\varphi(\gamma)}|$ 是一个同胚。因此，在 $p_\gamma(\sigma^\circ_\gamma)$ 中恰有一个 x，使得 $|\Phi|(x)=y$，且该点属于 $\mathrm{poly}_\Sigma^{-1}(\gamma)$。这表明 ϕ 是双射。□

给定 $|\Delta|$ 中的 y，纤维 $\pi_{|\Delta|}{}^{-1}(y)$ 等于 $\{(y,\alpha):\ \varphi(\alpha)=\mathrm{poly}_\Delta(y)\}$。因此，引理 51 将公式（5）加强为等式：

引理 52。 如果$(\varphi,\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$: $\Sigma\to\Delta$ 在 PolyComplex 中是组合的，那么对于任意y 在 $|\Delta|$ 中，映射poly_Σ 诱导出一个双射

$$|\Phi|^{-1}(y)\to\varphi^{-1}(\mathrm{poly}_\Delta(y)).$$ □

引理 51 表明， ϕ 限制为从 $|\Sigma|$ 到 $|\Delta|\times_\Delta\Sigma$的双射连续映射。下面只需证明 ϕ 是开映射。给定 $|\Sigma|$的一个开集 V，我们构造 $|\Delta|\times\Sigma$ 的一个开集U，使得 $\phi(V)=U\cap(|\Delta|\times_\Delta\Sigma)$。

由于 poly_Σ 是开映射，$\mathrm{poly}_\Sigma(V)$是开集。此外，拼接成 $|\Phi|$ 的映射 $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ 都是开映射。因此， U的一个自然候选是 $|\Phi|(V)\times\mathrm{poly}_\Sigma(V)$。

例 53。 设$(\varphi,\ \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma})$是 PolyComplex 中的一个组合态射，将一个具有三个锥的复形映射到一个具有两个锥的复形。图 3 展示了拓扑实现 $|\Phi|$ 以及保序映射 φ。考虑 $|\Phi|^{-1}(W)$在锥 β_2中的一个开 $W\subset|\Delta|$和一个连通分支 V，如图所示。我们有$U=|\Phi|(V)\times\mathrm{poly}_\Sigma(V)=|\Phi|(V)\times\{B_2,\beta_2\}$，但显然 $|\Phi|(V)$不是开集。事实上，由于 poly_Δ 是开映射，如果 $|\Phi|(V)$是开集，那么 $\mathrm{poly}_\Delta\circ|\Phi|(V)$也应是开集，但这等于 $\varphi\circ\mathrm{poly}_\Sigma(V)=\{B,\beta\}$，而后者不是上集。这里所提出的 U 不是开集。此外，在命题 C 的语境下，注意到 φ 不是开映射。⋆

因此，证明 ϕ 是开映射（这意味着 ϕ 是同胚）要复杂得多。

引理 54. 设 $\Phi:\Sigma\to\Delta$ *in* PolyComplex 是组合的。假设 Σ和 Δ 通过等距映射的面态射粘合。映射 ϕ 由 $x\mapsto(|\Phi|(x),\mathrm{poly}_\Sigma(x))$ 给出，且是开映射。

证明。设 V 是 $|\Sigma|$的一个开子集，任取点 x in V，令 $y=|\Phi|(x)$、 $\alpha=\mathrm{poly}_\Sigma(x)$ 和 $\beta=\varphi(\alpha)=\mathrm{poly}_\Delta(y)$。只要我们能找到 $\phi(x)=(y,\alpha)$ 的一个开邻域，且该邻域包含于 $\phi(V)$，便可得证。注意，由引理 51 可知

$$\phi(V)=(|\Phi|(V)\times\mathrm{poly}_\Sigma(V))\cap(|\Delta|\times_\Delta\Sigma). \tag{15}$$

我们断言，对足够小的 ε，由下式给出的 (y,α) 的邻域

$$U_\varepsilon=(\uparrow_\Delta B(y,\varepsilon)\times\uparrow_\Sigma\alpha)\cap(|\Delta|\times_\Delta\Sigma),$$

是开集，且包含于 $\phi(V)$ 中。

根据命题 46，存在 $\varepsilon_x>0$，使得 $\uparrow_\Sigma B(x,\ \varepsilon_x)$ 是开集，且包含于 V；也存在 K_x，使得若 $0<\varepsilon<K_x$，集合 $\uparrow_\Delta B(y,\ \varepsilon)$ 是开集。设 $(z,\ \eta)$ 属于 U_ε。

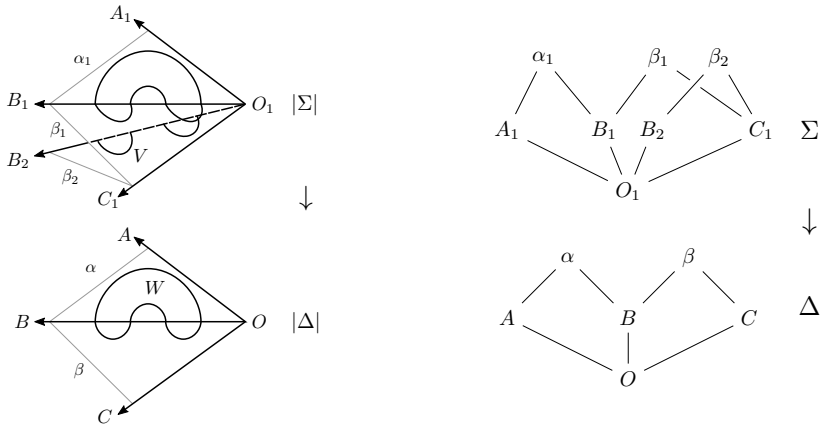

FIGURE 3. 左侧是 POLYCOMPLEX 中一个组合态射的拓扑实现 $|\Phi|$、陪域 $|\Delta|$ 的一个开子集 W，以及其上方的纤维 $|\Phi|^{-1}(W)$ W。右侧是面偏序集的映射 $\varphi:\ \Sigma \to \Delta$。

由于 $(z,\ \eta)$ 属于 $|\Delta| \times_\Delta \Sigma$，因此 $\gamma = \varphi(\eta)$ 等于 $\mathrm{poly}_\Delta(z)$。我们还知道 η 属于 $\uparrow_\Sigma \alpha$，所以由引理 42 可得

$$p_\eta^{-1}(\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon_x)) = B(N_{\mathbb{R}}^\eta, p_\eta^{-1}(x), \varepsilon_x) \cap \sigma_\eta.$$

由于 Φ 是组合的，Φ_η 将 σ_η 同胚地映射到 δ_γ。由于 $B(N_{\mathbb{R}}^\eta, p_\eta^{-1}(x)\ \varepsilon_x) \cap \sigma_\eta$ 在 σ_η 中是开集，因此集合 $\Phi_\eta(B(N_{\mathbb{R}}^\eta, p_\eta^{-1}(x)\ \varepsilon_x) \cap \sigma_\eta)$ 在 δ_γ 中是开集，所以存在 ε_η 使得

$$B(N_{\mathbb{R}}^\gamma, \Phi_\eta \circ p_\eta^{-1}(x), \varepsilon_\eta) \cap \delta_\gamma \subset \Phi_\eta(B(N_{\mathbb{R}}^\eta, p_\eta^{-1}(x), \varepsilon_x) \cap \sigma_\eta) \subset p_\gamma^{-1}(|\Phi|(\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon_x))).$$

上面的第二个包含关系由图 11 得出；从同一幅图中我们还可得出 $\Phi_\eta \circ p_\eta^{-1}(x) = p_\gamma^{-1}(y)$。因此，若 $\varepsilon < \varepsilon_\eta$，则有

$$z \in p_\gamma(B(N_{\mathbb{R}}^\gamma, p_\gamma^{-1}(y), \varepsilon) \cap \delta_\gamma) \subset |\Phi|(\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon_x)). \tag{16}$$

如果我们按照上述方式为 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 中的每个 η 选择一个 ε_η，并将 ε 设为 ε_η 和 K_x 的最小值，则根据等式（16）和等式（13），我们有

$$(\uparrow_\Delta B(y,\varepsilon) \times \uparrow_\Sigma \alpha) \cap (|\Delta| \times_\Delta \Sigma) \subset (|\Phi|(\uparrow_\Sigma B(x,\varepsilon_x)) \times \uparrow_\Sigma \alpha) \cap (|\Delta| \times_\Delta \Sigma).$$

注意，$|\Phi|(\uparrow_\Sigma B(x,\ \varepsilon_x))$ 包含于 $|\Phi|(V)$ 中。此外，由于 V 是开集，$\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 是一个上集，因此 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 包含于其中。与等式（15）比较可知，$U_\varepsilon \subset \phi(V)$；并且由于 $\uparrow_\Delta B(y,\ \varepsilon)$ 和 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 都是开集，我们就完成了。□

3.6. 关联带指标的分歧覆盖。 设 Σ 和 Δ 为多面体复形，$\Phi{:}\Sigma \to \Delta$ 为组合态射，$|\Phi|$ 为其拓扑实现。我们考察 Σ 中主开集 $\uparrow_\Delta \beta \subset \Delta$ 的原像的连通分支，以及 $|\Sigma|$ 中 $|\Delta|$ 内主开球的原像的连通分支。结合引理 40，这便完成了定理 A 的证明。

引理 55。 如果 $\varphi:\ \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射，且 β 属于 Δ，那么

$$\pi_0(\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta)) = \{\uparrow_\Sigma \alpha\}_{\alpha \in \varphi^{-1}(\beta)}.$$

证明。首先注意，对于任意 $\gamma \in \varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta)$，都有 $\beta \in \downarrow_\Delta \varphi(\gamma)$。由于 φ 是组合态射，它将 $\downarrow_\Sigma \gamma$ 双射到 $\downarrow_\Delta \varphi(\gamma)$。因此，存在一个 $\alpha \in \Sigma$，使得 $\alpha \preceq \gamma$ 且 $\varphi(\alpha) = \beta$，从而得到

$$\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta) = \bigcup_{\alpha \in \varphi^{-1}(\beta)} \uparrow_\Sigma \alpha. \tag{17}$$

这个并集是不交的，因为如果存在 α, α' 属于 $\varphi^{-1}(\beta)$，使得 $\uparrow_\Sigma \alpha \cap \uparrow_\Sigma \alpha'$ 包含一个元素 γ，那么 φ 将同构地映射到 $\downarrow_\Delta \varphi(\gamma)$。由于 $\alpha, \alpha' \in \downarrow_\Sigma \gamma$，这就得到 $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\alpha')$，矛盾。最后，任何包含 α 的开集都必须包含$\uparrow_\Sigma \alpha$，因此，公式（17）中的每个 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 都是连通的。□

下面是引理 52 关于连通分支的一个版本。

命题 56。设 Φ 是组合的，Σ 和 Δ 具有为等距映射的面态射，$U = \uparrow_\Delta B(y, \varepsilon) \subset |\Delta|$ 是一个开主球，且 $\mathcal{U} = \mathrm{poly}_\Delta U$。映射 poly_Σ 在纤维的连通分支之间诱导一个双射

$$\pi_0(|\Phi|^{-1}(U)) \to \pi_0(\varphi^{-1}(\mathcal{U})).$$

证明。设 V 是 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$ 中的一个连通分支。我们首先证明 $\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 是 $\pi_0(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$ 中的一个连通分支。令 $\beta = \mathrm{poly}_\Delta y$。由于 U 是开集，我们得到 $\mathcal{U} = \mathrm{poly}_\Delta U = \uparrow_\Delta \beta$。假设存在一点 x 属于 V，使得 $|\Phi|(x) = y$，并令 $\alpha = \mathrm{poly}_\Sigma(x)$。由于 poly_Σ 是连续开映射，我们有 $\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 是包含 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 的连通开集。由于α 属于 $\varphi^{-1}(\beta)$，引理 55 表明 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 是 $\pi_0(\varphi^{-1}(\mathcal{U})) = \pi_0(\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta))$ 的一个连通分支，因此 $\mathrm{poly}_\Sigma(V) = \uparrow_\Sigma \alpha$。

为了证明存在一点 x 属于 V，使得 $|\Phi|(x) = y$，任取 z 属于 V，并令$\gamma = \mathrm{poly}_\Sigma(z)$。我们有 $\beta \preceq \varphi(\gamma)$，因为 $|\Phi|(V) \subset U$ 且 $\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma = \mathrm{poly}_\Delta \circ |\Phi|$。因此存在一个态射 $f_{\beta\varphi(\gamma)} \colon \delta_\beta \to \delta_{\varphi(\gamma)}$，并且我们有 $p_\beta = p_{\varphi(\gamma)} \circ f_{\beta\varphi(\gamma)}$。由于 y 属于 $\mathrm{im}\, p_\beta$，我们有 y 属于 $\mathrm{im}\, p_{\varphi(\gamma)}$，于是可以令 $\hat{}y = p^{-1}_{\varphi\gamma()}(y)$。

由于 Φ 是组合的，仿射映射 Φ_γ 将 σ_γ 同胚地映到 $\delta_{\varphi(\gamma)}$。因此 $\hat{}y$ 属于 $\mathrm{im}\, \Phi_\gamma$，我们可以令 $\hat{}x = \Phi_\gamma^{-1}(\hat{}y)$。由图 14 可知，$|\Phi| \circ p_\gamma(\hat{}x) = p_{\varphi(\gamma)} \circ \Phi_\gamma(\hat{}x) = p_{\varphi(\gamma)}(\hat{}y) = y$。令 $x = p_\gamma(\hat{}x)$，则 $|\Phi|(x) = y$。注意，x 属于 $p_\gamma(\Phi_\gamma^{-1}(p^{-1}_{\varphi\gamma()}(U)))$。我们声称后一个集合包含于 V。

由于 $\mathrm{poly}_\Delta y = \beta \preceq \varphi(\gamma)$，我们可以应用引理 42 得到

$$p^{-1}_{\varphi(\gamma)}(U) = B(N_{\mathbb{R}}^{\varphi(\gamma)}, p^{-1}_{\varphi(\gamma)}(y), \varepsilon) \cap \delta_{\varphi(\gamma)},$$

这尤其意味着 $p^{-1}_{\varphi\gamma()}(U)$ 是一个凸集，因而是连通的。由于 Φ_γ 是一个同胚，$\Phi_\gamma^{-1}(p^{-1}_{\varphi\gamma()}(U))$ 也是连通的，$p_\gamma(\Phi_\gamma(p^{-1}_{\varphi\gamma()}(U)))$ 同样如此。最后，回想一下，我们选取了点 z，使其属于 V，并令 $\gamma = \mathrm{poly}_\Sigma(z)$。由于 $|\Phi|(z) \in |\Phi|(V) \subset U$，且 $\mathrm{poly}_\Sigma(z) = \gamma$，由图 14 可知，$z$ 属于 $p_\gamma(\Phi_\gamma^{-1}(p^{-1}_{\varphi\gamma()}(U)))$。因此，$p_\gamma(\Phi_\gamma^{-1}(p^{-1}_{\varphi}(\gamma)(U))) \subset |\Phi|^{-1}(U)$ 是连通的，并与连通分支 V相交，所以我们得出所需的包含关系。

总而言之，我们已经证明，对于y U球的中心，每个$|\Phi|^{-1}(U)$的连通分支都与 $|\Phi|^{-1}(y)$相交。此外，我们还证明，对于 $|\Phi|^{-1}(y)$中的 x，以及包含 x的 V 连通分支，可得 $\mathrm{poly}_\Sigma(V) = \uparrow_\Sigma(\mathrm{poly}_\Sigma(x))$。这两条事实与引理 52 和引理 55 一起，蕴含了满射性和单射性。□

注记 57. 在图 3 中，集合 U 是连通的，集合 $\mathcal{U} = \mathrm{poly}_\Delta U$ 是主理想，但 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$有三个元素，而 $\pi_0(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$只有两个。这说明有必要对命题 56 中的 U 施加限制。△

现在，我们证明，若图 31 中的一个竖直映射是带指标分支覆盖，则另一个也如此。考虑一个指标映射 $m_\Phi\colon |\Sigma| \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$、一个连通开集 $U \subset |\Delta|$、 V in $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$ 中的一个连通分支，以及一个 U 中的点 y。我们有

$$\deg(|\Phi|, m_\Phi, V)(y) = \sum_{\substack{x \in |\Phi|^{-1}(y) \\ x \in V}} m_\Phi(x).$$

同理，对于一个指标映射 $m_\varphi\colon \Sigma \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$、一个连通开集 $\uparrow_\Delta \beta \subset \Delta$、 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(\uparrow_\Delta \beta))$ 中的一个连通分支 $\mathcal{V}$，以及一个 $\uparrow_\Delta \beta$ 中的点 γ，我们有

$$\deg(\varphi, m_\varphi, \mathcal{V})(\gamma) = \sum_{\substack{\alpha \in \varphi^{-1}(\gamma) \\ \alpha \in \mathcal{V}}} m_\varphi(\alpha).$$

我们的目标是联系这两个度数。第一步是结合引理 52 和命题 56，比较指标集 $|\Phi|^{-1}(y) \cap V$和 $\varphi^{-1}(\gamma) \cap \mathcal{V}$。

引理 58。 设 $U \subset |\Delta|$是一个开主球， V*in* $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$，且 y*in* U。若 Φ 是组合的，并且 Σ 和 Δ 具有等距映射的面态射，则 poly_Σ诱导一个双射

$$V \cap |\Phi|^{-1}(y) \to \mathrm{poly}_\Sigma(V) \cap \varphi^{-1}(\mathrm{poly}_\Delta(y)). \tag{18}$$

证明。 由于 Φ 是组合的，根据引理 52，方程（18）中的映射是单射；对于 $\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 中的 $\alpha \cap \varphi^{-1}(\mathrm{poly}_\Delta(y))$，存在 $|\Phi|^{-1}(y)$ 中的 x，使得 $\mathrm{poly}_\Sigma(x) = \alpha$。假设 x 不在 V 中。令 V' 为 $|\Phi|^{-1}(U)$中 x 所在的连通分支。根据命题 56，$\mathrm{poly}_\Sigma(V')$ 是一个与 $\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 不同的连通分支。但 α 既属于 $\mathrm{poly}_\Sigma(V)$，也属于 $\mathrm{poly}_\Sigma(V')$，矛盾。因此， x 属于 V，证毕。□

在关联两个指标集之后，以下结论很容易证明:

命题59。 假设 Φ 是组合的，且 Σ 和 Δ 具有作为等距映射的面态射。设$m_\varphi\colon \ \Sigma \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为一个指标映射。我们有:

(1) 如果(φ, m_φ) 是一个分支轨迹为 $\mathcal{B} \subset \Delta$ 的带指标分支覆盖，那么$(|\Phi|, m_\varphi \circ$多面体$_\Sigma)$ 是一个分支轨迹为多面体$_\Delta^{-1}\mathcal{B}$的带指标分支覆盖。*(2)* 如果$(|\Phi|, m_\varphi \circ$多面体$_\Sigma)$ 是一个分支轨迹为 $B \subset |\Delta|$ 的带指标分支覆盖，那么(φ, m_φ)是一个分支轨迹为 $\Delta \setminus$ 多面体$_\Delta(|\Delta| \setminus B)$的带指标分支覆盖。

证明。 我们先作两点观察，然后逐一证明各项。

观察 I: 设 $y \in |\Delta|$ 和 $\beta \in \Delta$ 满足 $\mathrm{poly}_\Delta(y) = \beta$。由引理 45，若 ε 足够小，则 $U_\varepsilon = \uparrow_\Delta B(y, \varepsilon)$ 是开映射，因此 $\mathrm{poly}_\Delta(U_\varepsilon) = \uparrow_\Delta \beta$。设 V是 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U_\varepsilon))$ 中的一个连通分支。由命题 56 可知，$\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 等于某个 $\alpha \in \varphi^{-1}(\beta)$，并且是 $\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta)$ 的一个连通分支。因此，图 31 限制为

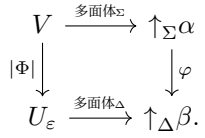

图 60

两个竖直映射都是连续的。由于 poly_Σ 和 poly_Δ 是开映射，若其中一个竖直映射是开映射，则另一个也如此。最后，引理 58 表明，若其中一个竖直映射是双射，则另一个也如此。因此，若其中一个竖直映射是同胚，则另一个也如此。

观察 II：设 $U \subset |\Delta|$ 是一个开主球，V 属于 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$，且 y 是 U 中的一个点。令 $\mathcal{U} = \mathrm{poly}_\Sigma(U)$。于是引理 58 给出

$$\begin{aligned}(19)\qquad \deg(|\Phi|, m_\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma, V)(y) &= \sum_{\substack{x \in |\Phi|^{-1}(y) \\ x \in V}} m_\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma(x) \\ &= \sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\mathrm{poly}_\Delta(y)) \\ \gamma \in \mathrm{poly}_\Sigma(V)}} m_\varphi(\gamma) \\ &= \deg(\varphi, m_\varphi, \mathrm{poly}_\Sigma(V))(\mathrm{poly}_\Delta(y)).\end{aligned}$$

条目 (1) 的证明：假设 (φ, m_φ) 是一个分支轨迹为 $\mathcal{B} \subset \Delta$ 的带指标分支覆盖，并令 $\mathcal{W} = \Delta \setminus \mathcal{B}$。由于 poly_Δ 是开且连续的，集合 $W = \mathrm{poly}_\Delta^{-1}(\mathcal{W})$ 是开且稠密的。为证明 $|\Phi|$ 是一个分支轨迹为 $\mathrm{poly}_\Delta^{-1}\mathcal{B} = |\Sigma| \setminus W$ 的分歧覆盖，设 y 属于 W，因此 $\beta = \mathrm{poly}_\Delta y$ 属于 $\mathcal{W}$。考虑一个主球 $U_\varepsilon = \uparrow_\Delta B(y, \varepsilon) \subset |\Delta|$，它是开集，因此 $\mathrm{poly}_\Delta U_\varepsilon = \uparrow_\Delta \beta$。由于 φ 是一个在 $\mathcal{W}$ 上无分歧的分歧覆盖，且 $\uparrow_\Delta \beta$ 是包含 β 的最小开邻域，我们有 $\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta)$ 由若干互不相交的集合构成，每个集合都由 φ 同胚地映射到 $\uparrow_\Delta \beta$。由于 $\uparrow_\Delta \beta$ 连通，这些互不相交的集合就是 $\pi_0(\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta))$ 的元素。根据观察 I 和命题 56，这意味着 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U_\varepsilon))$ 中的每个元素都由 $|\Phi|$ 同胚地映射到 U_ε，证毕。

由于 $|\Phi|$ 是一个分歧覆盖，根据引理 40 和命题 46，要证明 $(|\Phi|, m_\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma)$ 是一个带指标分支覆盖，只需考虑一个开主球 $U = \uparrow_\Delta B(y, \varepsilon) \subset |\Delta|$。设 V 属于 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$。根据命题 56，开集 $\mathrm{poly}_\Sigma(V)$ 是 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ 的一个连通分支。由于 (φ, m_φ) 是一个带指标分支覆盖，$\deg(\varphi, m_\varphi, \mathrm{poly}_\Sigma(V))$ 在 $\uparrow_\Delta \beta$ 上为常数，因此方程（19）意味着 $\deg(|\Phi|, m_\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma, V)(y)$ 在 U 上为常数。

条目 (2) 的证明：假设 $(|\Phi|, m_\varphi \circ$多面体$_\Sigma)$ 是一个带指标分支覆盖，其分支轨迹为 $B \subset |\Delta|$，并设 $W = |\Delta| \setminus B$。由于多面体$_\Delta$ 是开且满射的，因此集合 $\mathcal{W} =$ 多面体$_\Delta W$ 是开且稠密的。为了证明 φ 是一个分支轨迹为 $\Delta \setminus$ 多面体$_\Delta(|\Delta| \setminus B) = \Delta \setminus \mathcal{W}$ 的分歧覆盖，取 β 属于 $\mathcal{W}$。由于 $\mathcal{W}$ 是开集，因此它是一个上集，我们有 $\uparrow_\Delta \beta \subset \mathcal{W}$，所以集合 $U =$ 多面体$_\Delta^{-1}(\uparrow_\Delta \beta)$ 非空且包含于 W 中。再次注意到 U 是连通的，因此 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$ 中的每个元素都通过 $|\Phi|$ 同胚地映射到 U。最后，我们再次由观察 I 和命题 56 得出结论。

由于 φ 是分歧覆盖，要证明 (φ, m_φ) 是带指标分支覆盖，根据引理 39，只需考虑一个上闭集 $\uparrow_\Delta \beta$。设 $\mathcal{V}$ 属于 $\pi_0(\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \beta))$。由于 poly_Δ

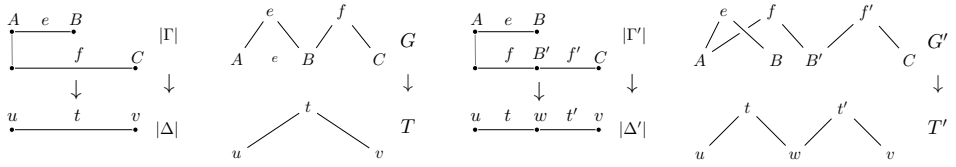

FIGURE 4. 左侧是一个一维多面体复形的态射及其对应的偏序集映射。右侧是使其成为组合映射的一个细化。

是满射，我们可以选择 $y \in |\Delta|$ 使得 $\mathrm{poly}_\Delta(y) = \beta$，并且根据命题 46，我们可以选择 ε 使得 $U = \uparrow_\Delta B(y, \varepsilon)$ 是开集。因此 $\mathrm{poly}_\Delta(U) = \uparrow_\Delta \beta$。根据命题 56，存在 V 属于 $\pi_0(|\Phi|^{-1}(U))$，使得 $\mathrm{poly}_\Sigma(V) = \mathcal{V}$。由于 $(|\Phi|, m_\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma)$ 是带指标分支覆盖，$\deg(|\Phi|, m_\varphi \circ \mathrm{poly}_\Sigma, V)(y)$ 在 U 上是常数。因此方程（19）表明，$\deg(\varphi, m_\varphi, \mathrm{poly}_\Sigma(V))$ 在 $\uparrow_\Delta \beta$ 上是常数。□

P把所有内容放在一起，我们得到定理 m A.

定理 *A* 的证明。根据引理30，该方块交换。根据引理51和54，它是一个纤维积。接下来应用命题59，即可得出：如果其中一个竖直映射是带指标分支覆盖，那么另一个也是。

给定 $\sigma : \Sigma \to \mathrm{POLY}^f_{\mathbb{Z}}$，定理 A 的陈述是拓扑性的，因此我们可以用任意一个拓扑实现与 $|\Sigma|$ 同胚的多面体复形替换σ，也可以替换整结构。我们对所有 $\alpha \in \Sigma$ 应用例24，因此可以假设 Σ 的多面体要么是多胞体，要么有一个维数为 $d-1$ 的唯一有界面，其中 $d =$维 α。经过重心细分后，根据命题26和注记27，我们得到单形和单纯锥。由于闵可夫斯基和对并集满足分配律，我们可以假设 Σ 的每个多面体 σ_α 都具有 $\mathrm{conv}\,\mathcal{V} + \mathrm{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathcal{R}$ 的形式，其中 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{R}$ 是标准向量 $\{e_1, \ldots, e_d\}$ 的子集，且 $d =$维 σ_α。因此，我们甚至可以假设 $(\sigma_\alpha, N^d) = (\mathbb{R}^d_{\geq 0}, \mathbb{Z}^d)$，并且 $f_{\alpha\gamma}$ 将 N^α 单射映入 N^γ。这意味着我们在 $(\sigma_\alpha, N^\alpha)$ 上有一个典范的欧几里得度量 d_α，且任意一个 $f_{\alpha\gamma}$ 都是等距映射。因此，现在可以应用命题59，得到定理。□

3.7. 态射细化。 给定一个多面体复形的态射 $\Phi : \Sigma \to \Delta$，自然会问是否存在细化 $\gamma : \Sigma' \to \Sigma$ 和 $\tau : \Delta' \to \Delta$，以及一个态射 $\Phi' : \Sigma' \to \Delta'$，使得拓扑实现 $|\Phi|$ 和 $|\Phi'|$ 同构，且 Φ 是组合的。对于维数为 1 的情形，这样的结果见构造*17*（热带态射的本质模型），并在 [DV20], 中举例说明:

例 61。 考虑图 4 所示的一维多面体复形的态射 $\Phi : [\Gamma : G \to \mathrm{POLY}^f_{\mathbb{Z}}] \to [\Delta : T \to \mathrm{POLY}^f_{\mathbb{Z}}]$。$t \in T$ 上的纤维有 3 个点，即 $\varphi^{-1}(t) = \{e, B, f\}$。注意到 $\downarrow_T \varphi(B) = \{u, t, v\}$ 且 $\varphi(\downarrow_G B) = \{t\}$，因此$\varphi$ 不是组合态射。设 z 是 Δ_t°中的一个点，则 $\mathrm{poly}_\Gamma(z) = t$。令 $y = |\Phi|(B)$。如果 z 位于 y右侧，则纤维 $|\Phi|^{-1}(z)$ 有 1 个点；否则有 2 个点。因此，$|\Phi|^{-1}(z)$与 $\varphi^{-1}(t)$之间始终不存在双射。细化至 Φ'后，我们得到一个组合态射，并可看出 $|\Gamma'|$ 是 φ' 与 poly_T的纤维积。⋆

进入高维后，源Σ 的多面体结构的推前不再在目标 Δ上诱导出多面体复形，参见例 68。进一步的

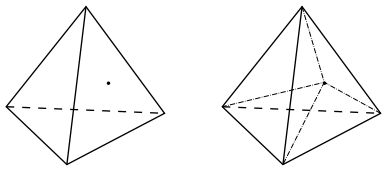

FIGURE 5. 左侧是 $\mathbb{R}^4$的正正交象限与超平面 $\sum x_i = 1$的交集，以及 $p = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ 0)$。右侧是由 p进行的星形细分，它增加了1个维数为1的锥、4个维数为2的锥、6个维数为3的锥和3个维数为4的锥。

细化需要通过星形细分来实现，我们现在在嵌入情形下举例说明。推广到多面体空间是直接的；有关面偏序集以及到 $\mathrm{CONE}_{\mathbb{Z}}^{f}$ 的函子的详细描述，参见 [Var22, 第 9 节。9]

例62。设 σ 是 $(V,\ N)$ 中的一个有理多面体锥，x 是 σ中的一个点。令 $\mathrm{star}_\sigma(x)$ 表示包含 x的 σ 的面的集合。星形细分

$$\mathrm{sd}_\sigma(x) = \left\{\mathrm{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(\tau, x)\colon\ \tau \text{ face of } \sigma,\ \tau \notin \mathrm{star}_\sigma(x)\right\}$$

is 一个嵌入多面体复形，而由包含关系给出的态射 $\mathrm{sd}_\sigma(x) \to \sigma$ 是一个 re细化。四维单纯锥的细分见图5。⋆

例63。考虑 $(V,\ N)$ 中的一个嵌入锥复形 Σ，以及一个点 $x \in |\Sigma|$。通过对每个包含 x 的锥进行星形细分，我们得到一个细化 $\mathrm{sd}_\Sigma(x) \to \Sigma$。具体来说，若令 $\delta \in \Sigma$ 为满足 $x \in \delta^\circ$的唯一锥，则被删除的锥是 $\mathrm{star}_\Sigma(\delta) = \{\sigma \in \Sigma$中的那些锥：$\delta \subset \sigma\}$。对于每个不包含$x$ 且为 $\mathrm{star}_\Sigma(\delta)$ 中某个锥 σ 的面的 τ，都会添加一个锥 $\mathrm{span}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x,\ \tau)$。也就是说，$\mathrm{sd}_\Sigma(x) = (\Sigma \backslash \mathrm{star}_\Sigma(\delta)) \cup \left\{\mathrm{span}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}(\tau,\ x)\colon\ \tau \notin \mathrm{star}_\Sigma(\delta)$ 和 $\tau \subset \sigma$ 对于某个 $\sigma \in \mathrm{star}_\Sigma(\delta)\right\}$.

更多信息（包括推广到胞腔复形情形的内容），请参阅 [Ewa12，定义 2.1]。关于抽象单纯复形情形，请参阅 [Koz07，定义 2.22]。⋆

另一方面，拉回细化是通过半空间划分实现的 .

例 64. 设 σ 是（$V,\ N$）中的一个有理多面体。我们暂且再次假设，span σ 不一定是整个 V。给定一个有理泛函 $u \in N^*$，通过考察两个多面体 $\sigma^+ = \sigma \cap H^+$（$u,\ c$）和 $\sigma^- = \sigma \cap H^-$（$u,\ c$），即可得到 σ 的一个划分，其中 H^+ 和 H^- 是第 2.1 小节开头引入的半空间。⋆

构造 65。设 $F\colon\ |\Sigma| \to |\Delta|$ 是一个连续映射，在每个 $\sigma \in \Sigma$ 上局部仿射且单射。给定 $\sigma \in \Sigma$，考虑 δ_1、.....、δ_μ 中 $\mathrm{poly}_\Delta(F(\sigma))$ 里维数为 $\dim \sigma - 1$ 的多面体。由于 F 在 σ 上是单射，若不存在这样的多面体，则对某个 $\delta \in \Delta$ 有 $F(\sigma) \subset \delta^\circ$，且无需进行细分。否则，如例 64 所示，使用 $F^{-1}(\delta_i)$ 在 $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ 中的 $\mathbb{R}$-张成空间进行半空间细分。对所有 $\sigma \in \Sigma$ 重复此过程，得到拉回细化 $F^*\colon\ \Sigma^* \to \Sigma$。

引理 66。如果 $F\colon\ |\Sigma| \to |\Delta|$ 是多面体复形之间的连续映射，并且对于每个 $\sigma \in \Sigma$，限制映射 $F|_{|\sigma|}$ 都是仿射单射映射，那么拉回细化 Σ^* 是一个多面体复形。

我们通过交替进行星形细分和拉回细化来细化 Σ 和 Δ 。为便于阐述，同时也着眼于热带模空间的未来应用，我们假设 Σ 和 Δ 是锥空间。按照注记27中给出的思路，推广是直接的。阅读例 68的同时理解下面的构造，效果最佳。

构造 67。 设 $F\colon |\Sigma_0| \to |\Delta_0|$ 是一个连续映射，在每个 $\sigma \in \Sigma$ 上局部仿射且单射。设 $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ 为 Σ_0 的射线集合，并按如下方式排序:

$$\dim \operatorname{poly}_\Delta F(\tau_i) \leq \dim \operatorname{poly}_\Delta F(\tau_j) \tag{20}$$

每当 $i \leq j$。遍历 τ_i ，执行以下操作:

(1) 对以 $F(\tau_i)$ 为中心的 Δ 进行星形细分，得到 Δ_{i+1}。**(2)** 拉回新的多面体结构，得到 Σ_{i+1}。**(3)** 如果 Σ_{i+1} 中存在新的射线，则重新标记射线序列，使得公式 (20) 中的条件仍然成立，并且 Σ_{i+1} 中较新的射线出现在 Σ_i 中相同维数的原始射线之后。**(4)** 重复此过程，直到不再有可供细分的射线，即直到对于所有 i， $F(\tau_i)$ 都是 Δ_k 的一条射线。

上述构造终止的证明，类似于通常证明重心细分可以通过对重心进行星形细分得到的方法。关键在于射线的排序方式。与重心细分的情形不同，这里的最终复形确实取决于所选的射线顺序。

例 68。 下面一系列图展示了构造 67。

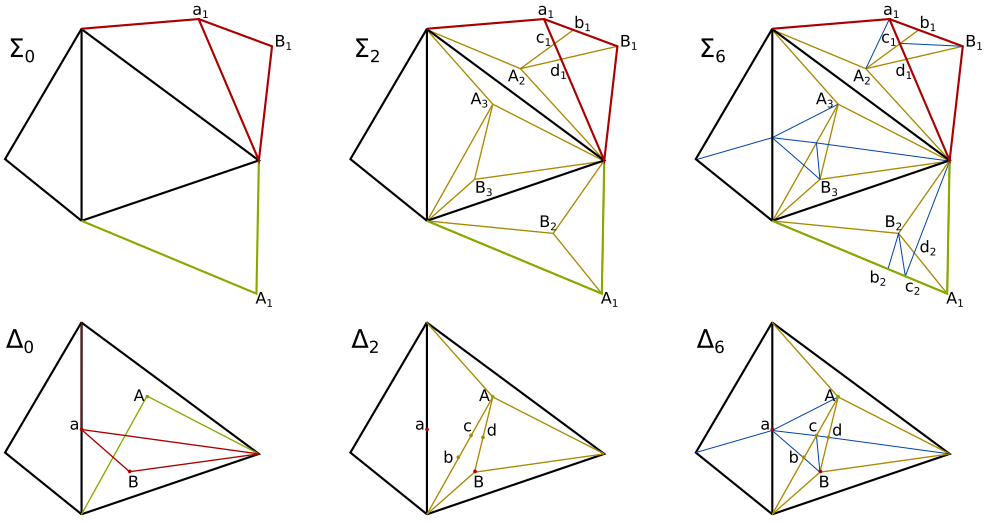

FIGURE 6。左侧 **(a)** 为初始映射 $\Sigma_0 \to \Delta_0$。注意，投影并未在 Δ_0 上定义多面体复形。中间 **(b)** 中，先在 Δ 上进行星形细分 A ，然后在 B 上进行星形细分，并将其拉回到 Σ ，从而产生 b、 c 和 d ，作为射线的像。右侧 **(c)** 中，在 Δ_2 上对 a、 b、 c、 d 进行星形细分，并拉回到 Σ_2。

⋆

注 69（多面体空间上的诱导仿射映射）。设 $\sigma\colon\ \Sigma \to \textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}$ 和 $\delta\colon\ \Delta \to \textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}$ 是多面体复形，因此可能具有非平凡的自同构和叠空间行为。设 $\Phi\colon$ $[\Sigma \to \textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}] \to [\Delta \to \textsc{Poly}^f_{\mathbb{Z}}]$是一个态射。此态射诱导出一个连续映射，该映射在重心细分上局部仿射且局部单射，即一个 $F\colon\ \mathsf{bcs}(\Sigma) \to \mathsf{bcs}(\Delta)$，可对其应用构造 67。△

4. The balancing condition and connectivity

4.1. 平衡条件。度量图（即一维多面体复形）的热带态射的通常定义始于一个具有整数斜率的分段线性连续映射，也就是说，一个多面体复形的态射。该映射必须满足两个可实现性条件，使其更接近黎曼曲面的理论：平衡条件和黎曼-赫尔维茨条件。现在我们聚焦于前一个条件，以证明它等价于该映射是一个带指标分支覆盖；这一证明也适用于高维。

定义 70. 设 $\varphi\colon\ \Sigma \to \Delta$ 为有限偏序集的一个态射，$\mathcal{V} \subset \Sigma$ 为一个上集，且$m_{\mathcal{V}}\colon\ \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$为一个映射。如果对于任意 α属于 $\mathcal{V}$以及任意满足 $\varphi(\alpha) \lessdot \beta$的 β属于 Δ的选择，下列称为平衡条件的等式成立，则称 $(\varphi, m_{\mathcal{V}})$ 是平衡的：

$$m_{\mathcal{V}}(\alpha) = \sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \alpha \lessdot \gamma}} m_{\mathcal{V}}(\gamma). \tag{21}$$

例 71（离散热带态射）。回想一下，利用例 36 中的指标映射，图2 (b) 中的偏序集映射 $\Gamma \to \Delta$ 就成为一个带指标分支覆盖。可以验证平衡条件。

根据定理 A，拓扑实现 $|\Phi|\colon |\Gamma| \to |\Delta|$ 是度量图之间的带指标分支覆盖。此外，由于 $|\Phi|$ 的目标是单连通的，Γ 可以看作是若干个 $|\Delta|$ 的副本在某些区域粘合而成。图 2 (c) 展示了这一点，其中虚线表示点的识别，与 [DV20] 中的做法相同。⋆

如果 φ 根据上下文显而易见，我们就称 $m_{\mathcal{V}}$ 为一个平衡映射。方程 (21) 中空和的约定是其值为零。这意味着，如果 $m_{\mathcal{V}}$ 是平衡映射，且 α 属于 $\max \mathcal{V}$，那么必有 $\varphi(\alpha)$ 属于 $\max\ \Delta$；否则，我们可以取一个覆盖 $\varphi(\alpha)$ 的 β，并应用平衡条件，从而得到 $\varphi^{-1}(\beta)$ 中一个覆盖 α 的元素。此外，如果 φ 是组合的，我们有：

引理72。设 $\varphi\colon\ \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射，$\mathcal{V} \subset \Sigma$ 是一个上集，且 $m_{\mathcal{V}}\colon\ \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是一个平衡映射。余限制 $\varphi|^{\varphi(\mathcal{V})}\colon\ \mathcal{V} \to \varphi(\mathcal{V})$ 是一个分歧覆盖，其分支轨迹为 $\varphi(\mathcal{V}) \setminus \max \Delta$。

证明。我们检验例32中的两个条件。检验第一个条件时，设 β属于$\max \varphi(\mathcal{V})$。假设存在 $\alpha \in \varphi^{-1}(\beta)$，使得 α 不是极大的，也就是说存在 γ 属于Σ，使得 $\alpha < \gamma$。由于 φ 是组合的，它将 $\downarrow_{\Sigma}\gamma$ 同构地映射到 $\downarrow_{\Delta}\varphi(\gamma)$，因此$\varphi(\gamma)$严格大于 β，这与 β 是极大的矛盾。因此，$\varphi^{-1}(\beta) \subset \max \Sigma$。第二个条件由定义成立。□

因此，给定两个元素 $\mu \lessdot \nu$，我们考察它们上方的纤维。

引理 73. 设 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射。对于任意 α 属于 Σ，以及μ、ν属于 $\uparrow_\Delta \varphi(\alpha)$ 且满足 $\mu \lessdot \nu$的情形，有如下划分：

$$\varphi^{-1}(\nu) \cap \uparrow_\Sigma \alpha = \bigsqcup_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\mu) \\ \gamma \in \uparrow_\Sigma \alpha}} \varphi^{-1}(\nu) \cap \{\eta \in \Sigma\colon\ \gamma \lessdot \eta\}\,. \tag{22}$$

证明。考虑由 $\gamma \in \varphi^{-1}(\mu) \cap \uparrow_\Sigma \alpha$ 索引的族 $\{\uparrow_\Sigma \gamma\}$。该族的每个元素都是 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 的子集，并且根据引理 55，它们两两不相交。由于 $\{\eta \in \Sigma\colon\ \gamma \lessdot \eta\} \subseteq \uparrow_\Sigma \gamma$，只需证明公式（22）的右侧包含左侧即可。也就是说，对于 $\varphi^{-1}(\nu) \cap \uparrow_\Sigma \alpha$ 中的 η，证明存在 $\gamma \in \varphi^{-1}(\mu) \cap \uparrow_\Sigma \alpha$ 使得 $\gamma \lessdot \eta$。由于φ 是组合的，它将 $\downarrow_\Sigma \eta$ 同构地映射到 $\downarrow_\Delta \varphi(\eta)$，因此存在唯一的 γ，使得γ 属于 $\downarrow_\Sigma \eta$，且 $\varphi(\gamma) = \mu$。由于 $\varphi(\eta) = \nu$ 且 $\mu \lessdot \nu$，我们有 $\gamma \lessdot \eta$。此外，$\uparrow_\Sigma \gamma$ 是一个连通集，它在 η 处与集合 $\uparrow_\Sigma \alpha$ 相交。后者是空间 $\varphi^{-1}(\uparrow_\Delta \varphi(\alpha))$ 的一个连通分支，因此 $\uparrow_\Sigma \gamma \subset \uparrow_\Sigma \alpha$，于是得到所需的 $\gamma \in \uparrow_\Sigma \alpha$。□

注 74. 回顾一下，对于给定的偏序集 Σ，覆盖图 G_Σ 以 Σ 的元素为顶点，以覆盖关系 $\alpha \lessdot \gamma$为边。直观而言，引理 73 表明，对于任意向上路径 $P\colon\ \varphi(\alpha) \lessdot \beta_1 \lessdot \cdots \lessdot \beta_k$，其原像 $\varphi^{-1}(P)$具有树结构。换言之，$G_{\varphi^{-1}(P)}$ 是一个森林，即若干棵树的不交并。△

上述已证明的树结构蕴含了一些关键公式。

引理 75. 设 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射，$\mathcal{V}$ 是一个上集，且$m_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是一个平衡映射。对于任意 α 属于 Σ，以及 μ, ν 属于 $\uparrow_\Delta \varphi(\alpha)$，满足 $\mu \lessdot \nu$ 且$\varphi^{-1}(\mu) \cap \uparrow_\Sigma \alpha$ 包含于 $\mathcal{V}$，我们有：

$$\sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\mu) \\ \gamma \in \uparrow_\Sigma \alpha}} m_{\mathcal{V}}(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\mu) \\ \gamma \in \uparrow_\Sigma \alpha}} \sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(\nu) \\ \gamma \lessdot \eta}} m_{\mathcal{V}}(\eta) = \sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(\nu) \\ \eta \in \uparrow_\Sigma \alpha}} m_{\mathcal{V}}(\eta) \tag{23}$$

特别地，如果 $\beta \in \Delta$ 满足 $\varphi(\alpha) \lessdot \beta$，则有：

$$\sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \eta \in \uparrow_\Sigma \alpha}} m_{\mathcal{V}}(\eta) = \sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \alpha \lessdot \eta}} m_{\mathcal{V}}(\eta). \tag{24}$$

证明。方程（23）中的第一个等式由平衡条件推出。根据引理 73，中间各和式的指标集构成了右侧各和式指标集的一个划分，因此第二个等式成立。令 $\mu = \varphi(\alpha)$、$\nu = \beta$，并注意到左侧和式的指标集变为 $\varphi^{-1}(\alpha) \cap \uparrow_\Sigma(\alpha) = \{\alpha\}$，这是一个单点集，因为 φ 是组合的。由此从方程（23）得到方程（24）。□

备注 76。 注意，根据方程（6），方程（23）的左侧等于 $\deg(\varphi, m_\varphi, \uparrow_\Sigma \alpha)(\mu)$，右侧等于 $\deg(\varphi, m_\varphi, \uparrow_\Sigma \alpha)(\nu)$。△

注 77。 关键的是，请注意，在引理 75 中，我们不需要 α 属于像$\varphi(\mathcal{V})$。△

应用前面的公式，我们得到了偏序集的带指标分支覆盖的一个刻画。

命题 78。 设 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射，且 $m_\varphi\colon \Sigma \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是指标映射。我们有

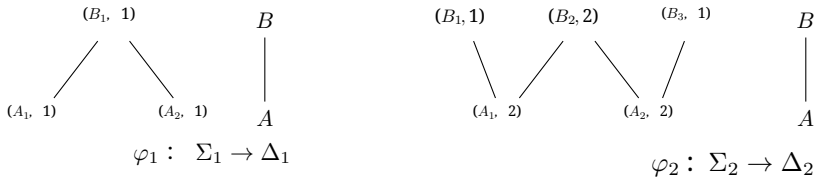

FIGURE 7. 两个偏序集态射 φ_1，φ_2 以及映射 $m_1:\ \Sigma_1 \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$,$m_2:\ \Sigma_2 \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 由图中各对数字的第二个数给出；(φ_1，m_1) 是平衡的，但不是带指标分支覆盖，而 (φ_2，m_2) 是带指标分支覆盖，但不平衡。

- 如果(φ,m_φ) 是带指标分支覆盖，那么(φ, m_φ) 是平衡的。
- 如果 m_φ 是平衡的，那么 $\varphi|^{\varphi(\Sigma)}:\ \Sigma \to \varphi(\Sigma)$ 是一个带指标分支覆盖。

证明。 *</style}*设 属于 ，属于 ，且满足 *()*，并且*()*。根据引理 *55*，包含 的 *()* 的连通分支 是上集 。因此，若 *(*,m_φ) 是一个带指标分支覆盖，则根据等式 (24)，有

$$m_\varphi(\alpha) = \sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \eta \in \uparrow_\Sigma \alpha}} m_\varphi(\eta) = \sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \alpha \lessdot \eta}} m_\varphi(\eta).$$

现在假设 m_φ 是平衡的。根据引理 72，余限制 $\tilde{\varphi} = \varphi|^{\varphi(\Sigma)}$ 是一个分支轨迹等于 $\varphi(\Sigma) \setminus \max\ \Delta$ 的分歧覆盖。根据引理 39 和引理 55，我们证明 deg($\tilde{\varphi}, m_\varphi, \uparrow_\Sigma \alpha$) 在 $\uparrow_\Delta \tilde{\varphi}(\alpha)$ 上为常数。这由等式 (23) 可知，因为左边是 deg($\tilde{\varphi}, m_\varphi, \uparrow_\Sigma \alpha$)($\mu$)，右边是 deg($\tilde{\varphi}, m_\varphi$, $\uparrow_\Sigma \alpha$)(ν)。因此，只需沿着一列应用上述结果，该序列从 $\tilde{\varphi}(\alpha)$ 开始，递增至 $\uparrow_\Delta \tilde{\varphi}(\alpha)$ 中任意给定的 ν，且每个元素都覆盖前一个元素，即可得证。□

注 79。 在命题 78 中，φ 具有组合性这一条件至关重要。图7展示了缺少这一条件时可能出现的两种失败情况。左图中，(φ_1, m_1) 是平衡的，但不是带指标分支覆盖，因为 ${\varphi_1}^{-1}$(*A*) 中的点数为 2，而 ${\varphi_1}^{-1}$(*B*) 中的点数为 1。右图中，原像点数是正确的，但 A_1 和 A_2 都不满足平衡条件，例如 $m_2(A_1)$ 的值应为 3。△

请注意，如果 φ 等于其余限制 $\varphi|^{\varphi(\Sigma)}$，那么命题 78 蕴含定理 B。缺少的关键要素是命题 C，我们将在下一节中证明它。

4.2. **问题 2 的一个必要条件**。 我们通过研究如何在态射 $\varphi:\ \Sigma \to \Delta$ 下将从 Δ 到 Σ 的路径提升，来证明命题 C。

定义 80. 给定偏序集 Σ，其可比图 G_Σ 的顶点是 Σ中的元素，当且仅当两个顶点可比时，它们之间才有边相连。

注意， G_Σ是一个简单图，因此 G_Σ中的一条路径是 Σ 中元素组成的序列 $\langle \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \rangle$，其中相邻元素可比，即对于 $1 \leq i \leq q$， $\gamma_{i-1} \leq \gamma_i$ 或 $\gamma_{i-1} \geq \gamma_i$。 如果图中任意两个顶点之间都存在路径，则称该图为连通图。

引理 81. 设 Σ 是带有偏序拓扑的有限偏序集。当且仅当可比图 G_Σ 作为图是连通的， Σ 作为拓扑空间才是连通的。□

注 82. 若 $\mathcal{V} \subset \Sigma$ 是连通的，我们可以考虑 $\mathcal{V}$ 上的诱导偏序，并应用引理 81，从而得出：$\mathcal{V}$ 中任意两个元素之间都存在一个序列，其中相邻元素彼此可比。△

现在我们利用平衡条件来提升路径。给定一条路径 $P = \langle \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q \rangle$˜属于 Δ，提升是 $P = \langle \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \rangle$ 中的一条路径，满足 $\varphi(\gamma_i) = \beta_i$，对所有 $i \in \{0, \ldots, q\}$均成立。

引理 83。 设 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 是偏序集态射，$\mathcal{V} \subset \Sigma$ 是一个上集，且 α 属于 $\mathcal{V}$。假设存在一个平衡映射 $m_{\mathcal{V}}$。任意满足 $\beta_0 = \varphi(\alpha)$ 的 $\uparrow_\Delta \varphi(\mathcal{V})$ ˜中的向上路径 $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_k$，都可提升为 $\mathcal{V}$ 中的一条路径 $P = \langle \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \rangle$，且满足 $\gamma_0 = \alpha$。

证明。采用归纳法，假设 β_i 提升到 γ_i 中。我们寻找 β_{i+1}的一个提升 $\gamma_{i+1} \in \mathcal{V}$，使其与 γ_i 可比较。由于 $\beta_i \leq \beta_{i+1}$ 且 Δ 是有限的，我们可以在 Δ 中选取一个序列$\mu_0 \lessdot \mu_1 \lessdot \cdots \lessdot \mu_k$，满足 $\mu_0 = \beta_i$和 $\mu_k = \beta_{i+1}$。注意，γ_i是 $\mu_0 = \beta_i$的一个提升，并且 γ_i 属于 $\mathcal{V}$，因此 $m_{\mathcal{V}}(\gamma_i) \geq 1$。于是，连续应用平衡条件可得到 μ_j的提升 $\eta_0 \lessdot \eta_1 \lessdot \cdots \lessdot \eta_k = \beta_{i+1}$，并令 $\gamma_{i+1} = \mu_k$。由于 $\gamma_i \leq \gamma_{i+1}$且 $\mathcal{V}$是一个上集，我们有 $\gamma_{i+1} \in \mathcal{V}$。□

作为引理 83 的推论，我们得到 $\varphi(\mathcal{V}) = \uparrow_\Delta \varphi(\mathcal{V})$，即 $\varphi(\mathcal{V})$ 是开映射。事实上，若β 属于 $\uparrow_\Delta \varphi(\mathcal{V})$，则存在 $\mu = \varphi(\alpha)$ 属于 $\varphi(\mathcal{V})$，使得 $\mu \leq \beta$。若 $\mu = \beta$，则结论成立；否则，我们可以将向上路径 $\mu < \beta$ 提升为路径 $\alpha < \gamma$，其中 γ 属于 $\mathcal{V}$ 且 $\beta = \varphi(\gamma)$，这表明 β 属于 $\varphi(\mathcal{V})$。特别地，这证明了命题 C

命题 *C* 的证明。设 $\mathcal{V}$ 是一个上集。限制映射 $m_{\mathcal{V}} = m_\Sigma|_{\mathcal{V}}$ 是平衡映射，因为对于任意元素 $\alpha \in \mathcal{V}$，覆盖 α 的元素也属于 $\mathcal{V}$。由引理 83 及其后的讨论可知，$\varphi(\mathcal{V})$ 是上闭集。因此 φ 是开映射。□

注记 84。 结合引理 C 和命题 78 可知，若 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 是偏序集的组合态射，那么 φ 是开映射，是存在指标映射 m_φ 使得 (φ, m_φ) 成为带指标分支覆盖的必要条件。该判据排除了存在某个指标映射、使得例 53 中的态射成为带指标分支覆盖的可能性。△

由于偏序集的组合态射是闭映射，我们现在可以完成定理 B 的证明。

定理 *B* 的证明。如前所述，只要证明φ 是满射，根据命题 78，我们就完成了。根据命题 C，我们知道 φ 是一个开映射。由于 φ 是组合的，闭集 $\downarrow_\Sigma \alpha$ 被映射为闭集，并且由于 Σ 中的每个闭集 $\mathcal{C}$ 都是有限个 $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{C}} \downarrow_\Sigma \alpha$的并集，因此我们也知道 φ 是一个闭映射。因此，$\varphi(\Sigma)$ 是 Δ中的一个既开又闭的集合。由于 Δ 是连通的，唯一满足这一条件的集合就是 Δ 本身。□

4.3. 扩展平衡映射。由于命题 78 中的指标映射定义在整个定义域上，这就引出了一个问题：当处理定义在真子集 $\mathcal{V} \subsetneq \Sigma$ 上的平衡映射 $m_{\mathcal{V}}$ 时，能得出什么结论?

例 85. 很容易构造出在 $\mathcal{V}$ 不连通时无法延拓的平衡映射 $m_{\mathcal{V}}$；例如，考虑偏序集 $\alpha \leftarrow A \leftarrow O \rightarrow B \rightarrow \beta$、组合态射 $\varphi = \mathrm{id}$、集合 $\mathcal{V} = \uparrow\{A, B\}$、平衡映射 $m_{\mathcal{V}}(\alpha) = m_{\mathcal{V}}(A) = 2$ 和 $m_{\mathcal{V}}(\beta) = m_{\mathcal{V}}(B) = 1$。无法将 $m_{\mathcal{V}}$ 延拓到 O。

此外，我们给出一个例子，其中 $\mathcal{V}$ 是连通的，但无法进行延拓。图 8 展示了一个组合态射 $\varphi : \Sigma \to \Delta$，由 $\varphi(A_i) = A$, $\varphi(\beta_i) = \beta$, 给出。

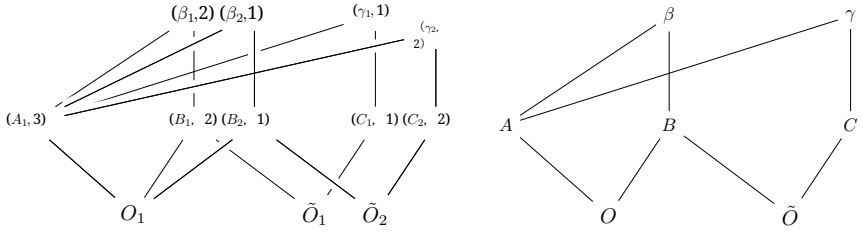

FIGURE 8. 左侧是一个偏序集 Σ 和一个映射 $m_1 : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$，满足 $\mathcal{V} = \Sigma \setminus \left\{O_1, \tilde{O}_1, \tilde{O}_2\right\}$；右侧是一个偏序集 Δ；二者共同构成偏序集 φ 的一个组合态射˜ ˜，使得 m_1 可以延拓到 O_1，但不能延拓到 O_1，也不能延拓到 O_2。

等等，以及一个映射 $m_{\mathcal{V}}\colon\ \mathcal{V} \to \Delta$，其满足 $\mathcal{V} = \Sigma \setminus \left\{O_1,\ \tilde{O}_1,\ \tilde{O}_2\right\}$，且其取值由图中各对数的第二个数给出。如果考虑 O_1，则有 $\varphi(O_1) = O$，˜，并且 B 和 C 都覆盖 O。注意

$$\sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(B) \\ \tilde{O}_1 \lessdot \eta}} m_{\mathcal{V}}(\eta) = 2 \neq 1 = \sum_{\substack{\eta \in \varphi^{-1}(C) \\ \tilde{O}_1 \lessdot \eta}} m_{\mathcal{V}}(\eta).$$

˜ ˜因此，不存在可使其满足平衡条件的 O_1 值。O_2 也是如此。另一方面，O_1 可以取值 3，这满足平衡条件。⋆

以下结果说明了为何在例 85 中，可以将 $m_{\mathcal{V}}$ 延拓到˜ ˜O_1，却无法延拓到 O_1 或 O_2。

命题 86。设 $\varphi\colon\ \Sigma \to \Delta$ 是一个组合态射，且 $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \Sigma$ 为开集。若 $\mathcal{U}_\alpha = (\uparrow_\Delta \varphi(\alpha) \setminus \{\varphi(\alpha)\}$ 连通，并且对于所有 α 属于 $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$，都有 $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathcal{V}$，那么任意平衡映射 $m_{\mathcal{V}}\colon\ \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 都可以延拓为平衡映射 $m_{\mathcal{W}}\colon\ \mathcal{W} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$，方法是令

$$m_{\mathcal{W}}(\alpha) = \sum_{\substack{\gamma \in \varphi^{-1}(\beta) \\ \alpha \lessdot \gamma}} m_{\mathcal{V}}(\gamma) \tag{25}$$

对于 $\alpha \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$ 和 β 覆盖 $\varphi(\alpha)$。该值与 β 的选择无关。

证明。我们证明，方程 (25) 中的值与 β 的选择无关；这也表明了平衡条件。设 β_1，β_2 是覆盖 $\varphi(\alpha)$ 的元素，因此它们属于 $(\uparrow_\Delta \varphi(\alpha)) \setminus \{\varphi(\alpha)\} = \mathcal{U}_\alpha$。由于 $\mathcal{U}_\alpha$ 是连通的，从 β_1 到 β_2 存在一条路径，该路径可以补全为一条路径 $P = \langle \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_k \rangle \subset (\uparrow_\Delta \varphi(\alpha)) \setminus \{\varphi(\alpha)\}$，使得 $\mu_0 = \beta_1$、$\mu_k = \beta_2$ 以及 $\mu_{i-1} \lessdot \mu_i$ 或 $\mu_{i-1} \gtrdot \mu_i$。由于 $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathcal{V}$，我们有 $\varphi^{-1}(\mu_i) \subset \mathcal{V}$。此外，$\mu_{i-1}$ 和 μ_i 属于 $\uparrow_\Delta \varphi(\alpha)$，因此我们可以对 P 中的连续元素应用引理 75，从而得到所需结果。□

4.4. 强连通偏序集。我们将定理 D 简化为一个更便于应用于热带模空间的命题。回顾一下，如果偏序集 Σ 存在秩函数，也就是说，存在一个偏序集态射 $\mathrm{rk}\colon\ \Sigma \to (\mathbb{N}, \leq)$，满足 $\alpha \lessdot \gamma$ 当且仅当 $\mathrm{rk}\,\gamma = \mathrm{rk}\ \alpha + 1$对所有 $\alpha, \gamma \in \Sigma$成立，则称其为分次的。我们假设极小元的秩为 0。对于多面体

复形，$\dim\sigma$ 是一个自然的秩函数。我们用 $\Sigma(k)$ 表示 Σ中所有秩为 k 的元素。现在我们回顾三个标准定义，并介绍一个由我们提出的定义。

定义 87. 令 Σ 为一个秩函数为 rk 的分次有限偏序集。

- 的维数是 rk 的最大值。
- Σ 是纯维数 d 的，当且仅当 rk 在 $\max\Sigma$ 上为常数，且该值为 d。
- Σ 是余维-k 连通的，当且仅当对于某个 $\{0,\dots,d\}$ 中的 k，上集 $\uparrow_\Sigma\Sigma(d-k)$ 是连通的。
- Σ 是强连通的，当且仅当 Σ 连通，并且对于每个 $\alpha\in\downarrow_\Sigma\Sigma(d-2)$，上集 $(\uparrow_\Sigma\alpha)\setminus\{\alpha\}$ 都是连通的。

与热带对象相关的偏序集通常具有纯维数，并且在余维 1 上连通。我们证明，强连通蕴含这两种性质。

引理 88. 设 Σ 是维数为 d的分次偏序集。若 Σ 强连通，则对于任意 k属于 $\{1,\dots,d\}$，Σ 在余维 k上连通，且其维数是纯的。

证明。设 α和 β是 $\uparrow\Sigma(d-k)$中的元素。由于 Σ强连通，因此Σ 是连通的。所以存在一个序列 $P_0=\langle\gamma_0,\dots,\gamma_q\rangle$，其中相邻元素可比较，且包含 $\gamma_0=\alpha$和 $\gamma_q=\beta$。现在，令 $q=\min_{\gamma\in P_0}\mathrm{rk}\,\gamma$。若 $q\geq d-k$，则 α和 β已经在余维 k上连通。因此，假设 $q<d-k$，并令 $\gamma_i\in P_0$为一个满足 $\mathrm{rk}\,\gamma_i=q$的元素。我们有 $\gamma_{i-1}\geq\gamma_i$ 或 $\gamma_{i-1}\leq\gamma_i$，但后者将推出 rk $\gamma_{i-1}=q-1$，故予以排除。对 γ_{i+1}也同样成立，因此 γ_{i-1}和 γ_{i+1}属于 $\uparrow_\Sigma\gamma_i\setminus\{\gamma_i\}$；又由于 $\mathrm{rk}\,\gamma_i=q<d-k\leq d-1$ 且 Σ 强连通，我们可以通过一条路径 Q 将 γ_{i-1} 与 γ_{i+1} 连接起来，该路径的最小秩为 $q+1$。于是，我们用路径 Q 替换 P_0 中的γ_i，得到 P_1。重复此过程，可消去P_0 中秩为 q、秩为 $q+1$等的所有元素，直到所有元素的秩都至少为 $d-k$。

接下来，考虑具有秩 $\alpha=q<d$ 的 $\alpha\in\Sigma$，以及具有秩 $\beta=d$ 的 $\beta\in\Sigma$。由于 $d-q\geq1$，集合$\uparrow_\Sigma(q)$ 是连通的，因此存在一条路径 $P=\langle\alpha,\gamma,\dots,\beta\rangle\subset\uparrow\Sigma(q)$。同样，基于秩的原因，$\gamma<\alpha$ 被排除，这意味着 $\gamma>\alpha$，因此 α 不是 Σ的极大元。因此，Σ 的所有极大元的秩均为 d，这正是所要证明的。□

Re标记 89。 图 8 中所示的偏序集 Σ 在余维 1 上是连通的，但不是 t stro 高度连通。 △

因此，我们得到了这样一种情形：命题 86 的技术条件均已满足。

引理 90。 设 Σ和 Δ 为分次偏序集，$\varphi:\Sigma\to\Delta$ 为组合态射，$\mathcal{V}=\uparrow_\Sigma\Sigma(k+1)$ 且 $\mathcal{W}=\uparrow_\Sigma\Sigma(k)$，其中 k 属于 $\{0,\dots,$秩 $\Sigma-2\}$。对于所有 $\alpha\in\mathcal{W}\setminus\mathcal{V}$，我们有 $\varphi^{-1}((\uparrow_\Delta\varphi(\alpha))\setminus\{\varphi(\alpha)\})\subset\mathcal{V}$

证明。注意到 $\mathrm{rk}\,\alpha=k$，因为 α 位于 $\mathcal{W}\setminus\mathcal{V}$中；并且 φ 保持秩不变，因为 φ是组合的。因此，$\mathrm{rk}\,\varphi(\alpha)=k$，且 $(\uparrow_\Delta\varphi(\alpha))\setminus\{\varphi(\alpha)\}$ 的所有元素的秩至少为 $k+1$，$\varphi^{-1}((\uparrow_\Delta\varphi(\alpha))\setminus\{\varphi(\alpha)\})$的所有元素也是如此。因此，后一个集合属于 $\mathcal{V}=\uparrow_\Sigma\Sigma(k+1)$，如所需。□

命题 E 的证明。利用归纳法，假设 $m_\mathcal{V}$ 是定义在 $\mathcal{V}=\uparrow\Sigma(k+1)$ 上的平衡映射。令 $\mathcal{W}=\uparrow\Sigma(k)$。由于 Δ 是强连通的，我们有 $\mathcal{U}_\alpha=(\uparrow_\Delta\varphi(\alpha))\setminus\{\varphi(\alpha)\}$ 是连通的。由引理 90 可知，$\varphi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\subset\mathcal{V}$。因此，由定理 D 可知，映射 $m_\mathcal{V}$ 可延拓为平衡映射 $m_\mathcal{W}$。□

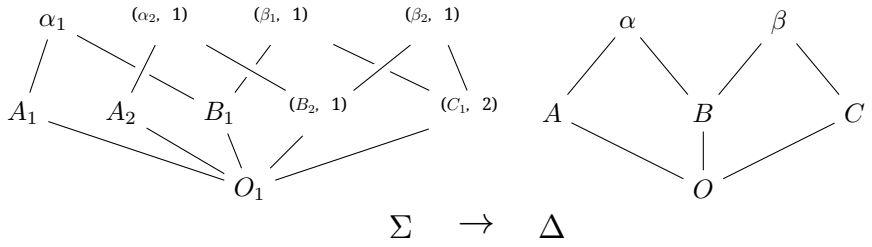

FIGURE 9. 一个组合态射 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$，以及一个平衡映射$m_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$，满足 $\mathcal{V} = \uparrow_{\Sigma} \{B_2, C_1\}$，且 φ 在 $\mathcal{V}$ 上的限制不是带指标分支覆盖。

4.5. 偏序集的进一步连通性。当 φ 的某个余限制是组合的时，我们在研究连通性时可以超越向上路径，并提升一般路径。若纤维连通，这使得我们能够将 Δ 的连通性提升到 Σ。

引理91。设 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是一个态射，$\mathcal{V} \subset \Sigma$ 是一个上集，$m_{\mathcal{V}}$ 是一个平衡映射，α 是$\mathcal{V}$中的一个元素，且 $P = \langle \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k \rangle \subset \varphi(\mathcal{V})$ 是一条路径，满足 $\beta_0 = \varphi(\alpha)$。若 $\psi = (\varphi|_{\mathcal{V}})|^{\varphi(\mathcal{V})^{\sim}}$是组合的，则存在一个提升 $P = \langle \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \rangle$，属于 $\mathcal{V}$，且满足 $\gamma_0 = \alpha$。

证明。通过归纳法，假设 β_i 提升到 $\mathcal{V}$中的 γ_i，并找到 β_{i+1} 的一个提升 $\gamma_{i+1} \in \mathcal{V}$，使其与 γ_i具有可比较性。$\beta_i \leq \beta_{i+1}$ 的情形由引理 83 处理。假设 $\beta_i \geq \beta_{i+1}$。由于 ψ 是组合的，下集 $\downarrow_{\mathcal{V}} \gamma_i$ 同构地映射到$\downarrow_{\varphi(\mathcal{V})} \varphi(\gamma_i) = \downarrow_{\varphi(\mathcal{V})} \beta_i$。由于 β_{i+1} 属于 $\downarrow_{\Delta} \beta_i$ 且属于 $\varphi(\mathcal{V})$，因此它也属于 $\downarrow_{\varphi(\mathcal{V})} \beta_i$，所以存在$\gamma_{i+1}$ 属于 $\downarrow_{\mathcal{V}} \gamma_i \subset \mathcal{V}$，使得 $\varphi(\gamma_{i+1}) = \beta_{i+1}$。□

例92。我们想知道在引理91中能否省去要求具有组合的 ψ这一条件。例如，这或许可以由较弱的条件推出，比如要求φ 是组合的。事实并非如此，例如在图9中，令 $\mathcal{V} = \uparrow_{\Sigma} \{B_2, C_1\} = \{B_2, C_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2\}$。我们有 $\beta_1 \in \mathcal{V}$，且 $\downarrow_{\mathcal{V}} \beta_1 = \{\beta_1, C_1\}$，但 $\downarrow_{\varphi\mathcal{V}} \psi(\beta_1) = \{\beta, C, B\}$，所以 ψ不是组合的。此外，这个例子还存在一条无法提升的路径：考虑路径 $\langle \beta, B \rangle \subset \varphi(\mathcal{V})$，在 $\mathcal{V}$ 中不存在以 β_1开头的提升。

图9还强调了这样一个事实：对于任意上集 $\mathcal{V}$，平衡映射限制后仍是平衡映射，但对于带指标的分歧覆盖，情况则更为微妙。令 $m_{\mathcal{V}}(C_1) = 2$，并将 $\mathcal{V}$ 中其余元素的 $m_{\mathcal{V}}$-值设为 1，我们得到一个平衡映射 $m_{\mathcal{V}}$，但 $(\psi,\ m_{\mathcal{V}})$ 并不是带指标分支覆盖，因为 C 上方纤维的计数为 2，而 B 上方纤维的计数为 1。⋆

现在我们利用路径提升的结果，给出 $\mathcal{V}$ 连通性的判据。

命题93。设 $\varphi\colon \Sigma \to \Delta$ 是一个态射，$\mathcal{V} \subset \Sigma$ 是一个上集，使得 $\psi = (\varphi|_{\mathcal{V}})|^{\varphi(\mathcal{V})}$是组合的，并且 $m_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是一个平衡映射。如果 $\varphi(\mathcal{V})$ 是连通的，且存在 β属于 $\varphi(\mathcal{V})$，使得 $\varphi^{-1}(\beta)$ 在 $\mathcal{V}$中连通，那么 $\mathcal{V}$ 是连通的。

证明。考虑 $\alpha \in \mathcal{V}$。存在一条路径 $P = \langle \varphi(\alpha)\ \beta_1, \ldots, \beta \rangle$ 连接 $\varphi(\alpha)$ 和 $\beta^{\sim}$，因为二者都在 $\varphi(\mathcal{V})$ 中。根据引理 81，存在一个提升 $P = \langle \alpha, \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k \rangle$ 连接α 与纤维 $\varphi^{-1}(\beta)$。由于纤维 $\varphi^{-1}(\beta)$ 是连通的，得证。□

4.6. **限制组合映射**。仍需证明命题 F。我们通过研究哪些上集 $\mathcal{V}$ 满足任意组合映射φ 的限制 $\psi = (\varphi|_{\mathcal{V}})|^{\varphi(\mathcal{V})}$ 也是组合映射，来证明这一点。请将以下结果与例92作对比。

引理 94. 设 $\varphi : \Sigma \to \Delta$ 是组合态射，且 $\mathcal{U} \subset \Delta$ 是一个上集。若 $\mathcal{V}$ 是 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ 的若干连通分支的并，则 $\psi = (\varphi|_{\mathcal{V}})|^{\varphi(\mathcal{V})}$ 是组合的。

证明。由于 φ 是组合的，对于每个 $\alpha \in \mathcal{V}$，集合 $\downarrow_{\mathcal{V}}\alpha$ 经由 ψ 同构地映射到 $\psi(\downarrow_{\mathcal{V}}\alpha)$，我们需要证明这与 $\downarrow_{\varphi(\mathcal{V})}\psi(\alpha)$ 一致。注意， $\psi(\downarrow_{\mathcal{V}}\alpha)$ 等于 $\psi(\downarrow_{\Sigma}\alpha \cap \mathcal{V})$，而 $\downarrow_{\varphi(\mathcal{V})}\psi(\alpha)$ 等于 $\downarrow_{\Delta}\psi(\alpha) \cap \varphi(\mathcal{V})$。因此，我们只需证明：若 $\beta \in \downarrow_{\Delta}\psi(\alpha) \cap \varphi(\mathcal{V})$，则 β 属于 $\psi(\downarrow_{\Sigma}\alpha \cap \mathcal{V})$；另一个包含关系显然成立。

由于 φ 是组合的，且 β 属于 $\downarrow_{\Delta}\varphi(\alpha)$，因此存在 β 的唯一提升 γ，使得 $\gamma \preceq \alpha$。˜考虑向上路径 $P = \langle \gamma, \alpha \rangle$，它经由 φ 映射到 $P = \langle \varphi(\gamma)\ \varphi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \psi(\alpha) \rangle$。路径 P 属于 $\varphi(\mathcal{V})$，而后者是 $\mathcal{U}$ 的子集，因为 β 属于 $\varphi(\mathcal{V})$。因此， $\tilde{P}$ 是 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ 中的一条路径。由于 $\mathcal{V}$ 是 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ 的若干连通分支的并，任何包含于 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$˜ ˜ ˜且满足 $P \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$ 的路径 $\tilde{P}$，都满足 $P \subset \mathcal{V}$。因此，由 $\alpha \in P \cap \mathcal{V}$ 可知 $P \subset \mathcal{V}$，进而 γ 属于 $\mathcal{V}$。所以， $\beta = \psi(\gamma)$ 属于 $\psi(\downarrow_{\Sigma}\alpha \cap \mathcal{V})$，得证。□

前一个结果结合组合态射保持分级偏序集秩函数这一事实，给出了我们的最后一个证明。

定理 *F* 的证明。 回想一下，我们假设所有极小元的秩都等于 0。由于 φ 是组合的，集合 $\downarrow_{\Sigma}\alpha$ 同构地映射到 $\downarrow_{\Delta}\varphi(\alpha)$，这意味着 $\mathrm{rk}_{\Sigma}\,\alpha = \mathrm{rk}_{\Delta}\,\varphi(\alpha)$。因此，若设 $\mathcal{V} = \uparrow\Sigma(k)$ 和 $\mathcal{U} = \uparrow\Delta(k)$，则有$\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$。由引理 94 可得， $\psi = (\varphi|_{\mathcal{V}})|^{\varphi(\mathcal{V})}$ 是组合的。因此，根据命题93，若存在 $\beta \in \mathcal{U}$ 使得 $\varphi^{-1}(\beta)$ 在 $\mathcal{V}$中连通，则 $\mathcal{V}$ 连通，证毕。□

References

[ACP15] Dan Abramovich、Lucia Caporaso 和 Sam Payne。“曲线模空间的热带化”。载于：《高等师范科学年鉴》 ´Ec. Norm. Sup ´er.(4) 48.4（2015），第 765–809 页。 ISSN: 0012-9593。arXiv：1212.0373v2。[BBM11] Benoˆıt Bertrand、Erwan Brugall´e 和 Grigory Mikhalkin。“热带开放赫尔维茨数”。载于：《帕多瓦大学数学研讨会学报》125（2011），第 157–171 页。 ISSN：0041-8994。arXiv:1005.4628v3。[BN09] Matthew Baker 和 Serguei Norine。“调和态射与超椭圆图”。载于：《国际数学研究通知》2009.15（2009），第 2914–2955 页。 ISSN：1073- 7928；1687-0247/e。[Cap14] Lucia Caporaso。“代数曲线与图的戈纳利”。载于《代数几何与复几何》。Springer，2014 年，第 77–108 页。arXiv：1201.6246v5。[CCUW20] Renzo Cavalieri 等。“热带曲线模叠”。载于：《数学论坛：Sigma》。第 8 卷。剑桥大学出版社，2020 年。[Cha12] Melody Chan。“热带托雷利映射的组合学”。载于：《代数与数论》6.6（2012），第 1133–1169 页。 ISSN：1944-7833。[CLS11] David A Cox、John B Little 和 Henry K Schenck。《环面簇》。第 124 卷。美国数学学会，2011 年。 ISBN：0-8218-4819-4。

[CMR16] Renzo Cavalieri、Hannah Markwig 和 Dhruv Ranganathan。《热带化可容许覆盖空间》。载于：《数学年鉴》364.3-4（2016），第 1275–1313 页。ISSN：0025-5831。[DV20] Jan Draisma 和 Alejandro Vargas。《到树的卡特兰多重热带态射；第一部分：构造》。载于：《符号计算杂志》（2020）。ISSN：0747-7171。[DV21] Jan Draisma 和 Alejandro Vargas。《关于度量图的 gonality》。载于：《美国数学会通报》68.5（2021），第 687–695 页。ISSN：0002-9920。[Ewa12] G¨unter Ewald。《组合凸性与代数几何》。第 168 卷。施普林格科学与商业媒体，2012。ISBN：1-4612-4044-1。[Koz07] Dimitry Kozlov。《组合代数拓扑》。第 21 卷。施普林格科学与商业媒体，2007。ISBN：3-540-71962-8。[Mik07] Grigory Mikhalkin。《热带几何及其应用》。载于：2006 年 8 月 22–30 日在马德里举行的国际数学家大会论文集。2007，第 827–852 页。ISBN：3-03719-022-1。arXiv：0601041v2。[Mun00] James R Munkres。《拓扑学》。普伦蒂斯·霍尔，新泽西州上萨德尔河，2000。[Pay06] Sam Payne。《环面向量丛》。密歇根大学，2006。[Pay09] Sam Payne。《环面向量丛、扇的分歧覆盖与解消性质》。载于：《代数几何杂志》18.1（2009），第 1–36 页。ISSN：1056-3911。[Var22] Alejandro Jos´e Vargas De Le´on。《度量图的 gonality 与到树的卡特兰多重热带态射》。学位论文。伯尔尼大学，2022。DOI：10.48549/3855。URL：https://boristheses.unibe.ch/3855/。[Var23] Alejandro Vargas。《到树的卡特兰多重热带态射；第二部分：计数与空间》。载于：准备中（2023）。[Zie12] G¨unter M Ziegler。《多胞体讲义》。第 152 卷。施普林格科学与商业媒体，2012。ISBN：0-387-94365-X。