arXiv:2305.03227v1 [math.FA] 5 May 2023

积分与拟算术平均的次交换性

DOROTA G LAZOWSKA、PAOLO LEONETTI、JANUSZ MATKOWSKI 和 SALVATORE TRINGALI

ABSTRACT. 设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 是有限测度空间，存在 $A\in\mathscr{L}$和 $B\in\mathscr{M}$，满足 $0<\lambda(A)<1<\lambda(X)$ 且 $0<\mu(B)<\mu(Y)$，或者反过来。此外，设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个非空开区间，并假设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}_+$是同胚，且 g 递增。我们证明函数不等式

$$f^{-1}\biggl(\int_X f\biggl(g^{-1}\biggl(\int_Y g\circ h\,d\mu\biggr)\biggr)\,d\lambda\biggr)\le g^{-1}\biggl(\int_Y g\biggl(f^{-1}\biggl(\int_X f\circ h\,d\lambda\biggr)\biggr)\,d\mu\biggr)$$

当且仅当 $f=ag^b$ 对于某些 a、$b\in\mathbb{R}_+$ 满足 $b\ge1$时，每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 h 都满足：$X\times Y\to I$。对于概率空间，也给出了类似的刻画。

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULTS

设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 为有限测度空间，$I\subseteq\mathbb{R}$ 为一个非空区间，且 f、$g\colon I\to\mathbb{R}$ 为连续单射（注意，I 可能有界，也可能无界，并且既不必是开集，也不必是闭集）。我们要寻找关于 f 和 g 的条件，使得不等式

$$f^{-1}\biggl(\int_X f\biggl(g^{-1}\biggl(\int_Y g\circ h\,d\mu\biggr)\biggr)\,d\lambda\biggr)\le g^{-1}\biggl(\int_Y g\biggl(f^{-1}\biggl(\int_X f\circ h\,d\lambda\biggr)\biggr)\,d\mu\biggr)\tag{1}$$

对每个 $h\colon\ X\times Y\to I$属于适当类别的 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测函数都成立，并假定（1）两边均有定义。

如果（X、$\mathscr{L}$、λ）和（Y、$\mathscr{M}$、μ）是概率空间，则（1）的左右两边可以解释为“部分混合积分拟算术平均”。拟算术平均在决策理论中通常称为“确定性等价物”，最早由 Kolmogorov[10], Nagumo [20], de Finetti [4], 和 Kitagawa [8], 提出，并已被证明在各种情境中都很有用，参见例如[5, 9, 12, 17, 18, 21]。关于这一问题的相关文献，请参阅 [14, 第 1] 节。

已在 [14, 命题 2] 中证明，若（X，$\mathscr{L}$，λ）和（Y，$\mathscr{M}$，μ）是概率空间，且对于每个“测试函数” h（$X\times Y$），其像包含于 I的某个紧子集中，则（1）两边都有良好定义；特别是，当 $h\colon\ X\times Y\to I$是一个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数时，这一条件尤其成立。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：26E60，39B62；次要分类号：39B52，60B99。
Key words and phrases. 函数不等式；次交换映射；[积分] 拟算术平均；凸性；确定性等价物。

近期， [6], 针对非退化概率空间中的等号情形，研究了一个相关问题。

$$f^{-1}\left(\int_X f\left(g^{-1}\left(\int_Y g\circ h\, d\mu\right)\right) d\lambda\right) = g^{-1}\left(\int_Y g\left(f^{-1}\left(\int_X f\circ h\, d\lambda\right)\right) d\mu\right). \tag{2}$$

（假定所有测度空间都是有限的，并且若存在 $A\in\mathscr{C}$ 使得 $0<\gamma(A)<\gamma(S)$，则称测度空间 $(S,\mathscr{C},\gamma)$ 是非退化的。）

由 [14], 中的主要结果可得以下刻画：

定理 1.1. 设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 为非退化概率空间，且 $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ 为连续单射。

那么，方程 (2) 对每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X\times Y\to I$ 成立，当且仅当 $f=ag+b$ 对于某个 $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $a\neq 0$。

此外，如果（X， $\mathscr{L}$， λ）和（Y， $\mathscr{M}$， μ）不是概率空间，那么容易验证，只要 f 和 g 是从区间 I 到正实数 $\mathbb{R}_+ :=$ （0， ∞）的连续双射，式（2）两边都有定义。在这种情况下，区间 I 必然是开区间，因此根据布劳威尔不变域定理（参见[2], ）， f 和 g 都是同胚。

因此，作者已在定理 [6, Theorem 2] 中证明了以下结果：

定理 1.2. 设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 是非退化测度空间，且 $f,g\colon I\to\mathbb{R}_+$ 是连续双射。

那么，等式 (2) 对每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X\times Y\to I$ 成立，当且仅当 $f=cg$ 存在某个 $c\in\mathbb{R}_+$。

现在，我们可以探讨在考虑（更一般的）函数不等式（1）时会出现什么情况，并针对若干情形回答这一问题。令

$$\mathcal{M}_f(h) := f^{-1}\left(\int_X f\circ h\,\mathrm{d}\lambda\right) \quad \text{and} \quad \mathcal{M}_g(h) := g^{-1}\left(\int_Y g\circ h\,\mathrm{d}\mu\right)$$

对每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X\times Y\to I$，等式（2）可改写为 $\mathcal{M}_f\circ\mathcal{M}_g=\mathcal{M}_g\circ\mathcal{M}_f$，即算子 $\mathcal{M}_f$ 和 $\mathcal{M}_g$ 交换。类似地，不等式（1）在 $\mathcal{M}_f\circ\mathcal{M}_g\le\mathcal{M}_g\circ\mathcal{M}_f$时成立，这可以理解为“算子对（$\mathcal{M}_f,\mathcal{M}_g$）的‘次交换性’”或“算子对（$\mathcal{M}_g,\mathcal{M}_f$）的‘超交换性’”。一种相关的次交换性函数不等式已在 [7]中研究。

1.1. 主要结果。下面给出我们的第一个主要结果，它适用于一类特殊的非退化测度空间。

定理 1.3。设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 是非退化测度空间，且存在 $A\in\mathscr{L}$使得 $0<\lambda(A)<1<\lambda(X)$，并设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}_+$为连续双射。

那么，不等式 (1) 对每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X\times Y\to I$成立，当且仅当以下条件之一成立：

（L1） g 递增，且对于某个 a， $f=ag^b$ $b\in\mathbb{R}_+$ 满足 $b\ge 1$； （L2） g 递减，且对于某个 $a\in\mathbb{R}_+$ 以及某个非零的 $b\le 1$， $f=ag^b$。

将假设 $0<\lambda(A)<1<\lambda(X)$ 替换为从第一个空间到第二个空间的某个可测集 A，也有类似的刻画（为便于后文引用，我们将其表述如下）：

定理 1.4. 设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 是非退化测度空间，且存在 $B\in\mathscr{M}$ 使得 $0<\lambda(B)<1<\lambda(Y)$，并设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}_+$ 是连续双射。

当且仅当 (1) 成立时，每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X\times Y\to I$都满足不等式 (L1)或 (L2) 成立。

定理 1.3 和定理1.4 的证明基本遵循相同的思路。此外，我们将在下文的引理 2.1 中证明：若不等式（1）成立，且 g 在任意非退化测度空间上递增，则 f 也递增。另一方面，若 g递减，则根据注 2.2，f 不一定递减（在一个不属于我们两个结果涵盖范围的简单情形中）。

当 g 递增时，我们可以将上述两个刻画合并为以下直接推论（该推论已在摘要中陈述）：

推论 1.5. 设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 是非退化测度空间，且存在 $A\in\mathscr{L}$，使得 $0<\lambda(A)<1<\lambda(X)$，或者存在 $B\in\mathscr{M}$，使得 $0<\mu(B)<1<\mu(Y)$。另设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}_+$ 是连续双射，且 g 递增。

那么，不等式 (1) 对每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X\times Y\to I$成立，当且仅当 $f=ag^b$ 存在某个 a，$b\in\mathbb{R}_+$ 使得 $b\geq 1$。

最后，我们给出概率空间情形下的类似刻画。

定理 1.6. 设 $(X,\mathscr{L},\lambda)$ 和 $(Y,\mathscr{M},\mu)$ 是非退化概率空间，且 $f,g\colon I\to\mathbb{R}_+$ 是连续双射，其中 g 递增。令 $\phi:=f\circ g^{-1}$，并对每个 $t\in(0,1)$，定义映射 $\Psi_t\colon\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$ 为

$$\Psi_t(x_1,x_2):=\phi^{-1}(t\phi(x_1)+(1-t)\phi(x_2)),\quad \textit{for all } (x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2.$$

那么，下列条件两两等价：

(P1) 不等式 (1) 对每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 h 成立：$X\times Y\to I$；(P2) f 递增，且 Ψ_t 对某个 $t\in(0,1)$ 凸；(P3) f 递增，且 Ψ_t 对每个 $t\in(0,1)$ 凸。

关于经典拟算术平均的一个密切相关结果见 [3, 第四章第五节定理 1]。请注意，[3, 第四章第五节定理 7] 给出了一个简单条件，确保函数 Ψ_t的凸性。

我们的主要结果将在下一节中证明。

2. Proofs of the Main Results

在本节中，f 和 g 是从非空区间 $I\subseteq\mathbb{R}$到 $\mathbb{R}_+$的连续双射，我们采用以下记号

$$D:=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\quad\text{and}\quad\varphi:=g\circ f^{-1}. \tag{3}$$

D 中的向量用粗体字母表示，例如，$\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in D$ 表示对于某些 x_1、x_2、y_1、$y_2 \in \mathbb{R}_+$，有 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 且 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$。

在继续证明主要结果之前，我们先给出一个常用的预备引理。

引理 2.1. 设 $(X, \mathscr{L}, \lambda)$ 和 $(Y, \mathscr{M}, \mu)$ 为测度空间，且存在 $A \in \mathscr{L}$ 和 $B \in \mathscr{M}$，使得 $0 < \lambda(A) < \lambda(X)$ 且 $0 < \mu(B) < \mu(Y)$，并设 $f, g\colon I \to \mathbb{R}_+$ 为连续双射。为简化记号，定义

$$\alpha_1 := \lambda(A), \quad \alpha_2 := \lambda(A^c), \quad \beta_1 := \mu(B) \quad \text{and} \quad \beta_2 := \mu(B^c), \tag{4}$$

其中 $A^c := X \setminus A$ 和 $B^c := Y \setminus B$。

假设每个 (1) 都满足不等式 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X \times Y \to I$。则以下结论成立：

(i) 如果 g 递增，那么 f 也递增；

(ii) 若 g 递增，或若 f 递增且 g 递减，则

$$\alpha_1 \Phi(\mathbf{x}) + \alpha_2 \Phi(\mathbf{y}) \le \Phi(\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y}), \quad \text{for all } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \tag{5}$$

其中 $\Phi\colon D \to \mathbb{R}_+$ 是由下式定义的函数 $\Phi(\mathbf{x}) := \varphi^{-1}(\beta_1 \varphi(x_1) + \beta_2 \varphi(x_2))$；如果 f 和 g 均递减，则不等式(5) 反向成立；

(iii) 若 g 递增，则

$$\beta_1 \tilde{\Phi}(\mathbf{x}) + \beta_2 \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) \le \tilde{\Phi}(\beta_1 \mathbf{x} + \beta_2 \mathbf{y}), \quad \text{for all } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \tag{6}$$

其中 $\tilde{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}_+$ 是由下式定义的函数 $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) := -\varphi(\alpha_1 \varphi^{-1}(x_1) + \alpha_2 \varphi^{-1}(x_2))$；若 g 递减，则不等式(6) 反向成立。

证明。对于所有的 x、y、z、$w \in I$，函数

$$h = x\mathbf{1}_{A \times B} + y\mathbf{1}_{A \times B^c} + z\mathbf{1}_{A^c \times B} + w\mathbf{1}_{A^c \times B^c} \tag{7}$$

是一个 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$-可测简单函数，从 $X \times Y$ 到 I，因此我们可以将（7）代入（1）并得到

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_1 f(g^{-1}(\beta_1 g(x) + \beta_2 g(y))) + \alpha_2 f(g^{-1}(\beta_1 g(z) + \beta_2 g(w)))) \\ \le g^{-1}(\beta_1 g(f^{-1}(\alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(z))) + \beta_2 g(f^{-1}(\alpha_1 f(y) + \alpha_2 f(w)))). \end{aligned} \tag{8}$$

首先，假设 g 是递增的。注意，$\varphi = g \circ f^{-1}$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的连续双射。现在，在等式（8）两边应用 g 并令

$$x = f^{-1}(s), \quad y = f^{-1}(t), \quad z = f^{-1}(u), \quad \text{and} \quad w = f^{-1}(v),$$

我们得到

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 \varphi^{-1}(\beta_1 \varphi(s) + \beta_2 \varphi(t)) + \alpha_2 \varphi^{-1}(\beta_1 \varphi(u) + \beta_2 \varphi(v))) \\ \le \beta_1 \varphi(\alpha_1 s + \alpha_2 u) + \beta_2 \varphi(\alpha_1 t + \alpha_2 v) \end{aligned} \tag{9}$$

对于每个 $s, t, u, v \in f(I) = \mathbb{R}_+$。

为了导出矛盾，假设 f 是递减的。那么 φ 将在 $\mathbb{R}_+$上构成一个递减同胚，因此 $\varphi(r) \to +\infty$ 当 $r \to 0^+$时。令 $s = v = 1$ 并在（9）两边应用 φ^{-1}，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_1\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(1)+\beta_2\varphi(t))+\alpha_2\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(u)+\beta_2\varphi(1))\\ \geq \varphi^{-1}(\beta_1\varphi(\alpha_1+\alpha_2 u)+\beta_2\varphi(\alpha_1 t+\alpha_2))\end{aligned}$$

对任意 t、$u \in \mathbb{R}_+$ 均成立。令 $t \to 0^+$、$u \to 0^+$，并利用 φ 的连续性，我们得出：

$$\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(\alpha_1)+\beta_2\varphi(\alpha_2)) \leq 0,$$

这就产生了矛盾。因此，f 和 φ 均为递增函数，从而证明了(i)。

在 φ^{-1} 两边应用（9），得到

$$\begin{aligned}\alpha_1\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(s)+\beta_2\varphi(t))+\alpha_2\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(u)+\beta_2\varphi(v))\\ \leq \varphi^{-1}\left(\beta_1\varphi(\alpha_1 s+\alpha_2 u)+\beta_2\varphi(\alpha_1 t+\alpha_2 v)\right)\end{aligned}$$

对于每个 t，$u \in \mathbb{R}_+$，并回顾 Φ的定义，我们得到不等式 (5)，这也证明了条目 (ii)的第一部分。类似地，将 g 的值代入 (8) 两边，并令

$$x = g^{-1}(s), \quad y = g^{-1}(t), \quad z = g^{-1}(u), \quad \text{and} \quad w = g^{-1}(v),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1\varphi^{-1}(\beta_1 s+\beta_2 t)+\alpha_2\varphi^{-1}(\beta_1 u+\beta_2 v))\\ \leq \beta_1\varphi(\alpha_1\varphi^{-1}(s)+\alpha_2\varphi^{-1}(u))+\beta_2\varphi(\alpha_1\varphi^{-1}(t)+\alpha_2\varphi^{-1}(v))\end{aligned} \tag{10}$$

˜对所有 s，t，u，$v \in g(I) = \mathbb{R}_+$成立。根据函数 Φ 的定义，这等价于（6），由此证明了条目 (iii)的第一部分。

现在，假设 g 递减，并注意在这种情况下，不等式（9）需要反向。如果 f 递增，那么 φ 和 φ^{-1} 都递减，因此我们得到不等式（5）。反之，如果 f 也递减，那么 φ 和 φ^{-1} 都递增，因此不等式（5）以相反方向成立。这就完成了第 (ii) 项的证明。同理，由于 g 递减，不等式（10）需要反向，因此不等式（6）也需要反向，从而完成第 (iii) 项的证明。■

注 2.2. 从引理 2.1(i) 的陈述中，人们或许会猜测，如果 g递减，那么 f 也递减。然而，这并不成立。事实上，假设对于所有满足$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$的 $t \in \mathbb{R}_+$、$\mathscr{L} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$和 $\mathscr{M} = \{\varnothing, B, B^c, Y\}$，都有 $I = \mathbb{R}_+$,$f(t) = t$且 $g(t) = 1/t$。在这种情况下，由于 g 递减，每个 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$-可测简单函数 h 都满足不等式（1）：$X \times Y \to I$ 当且仅当（6）以相反方向成立。而后者确实成立，$g = \varphi = \varphi^{-1}$，因此

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{x})+\tilde{\Phi}(\mathbf{y})-\tilde{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= -\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{x_1+y_1}+\frac{1}{x_2+y_2}\right)^{-1}\\ &= \frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{(x_1+x_2+y_1+y_2)(x_1+x_2)(y_1+y_2)} \geq 0\end{aligned}$$

对于所有 \(x, y\) $\in D$。

在定理的证明中1.3，我们还需要以下刻画：

引理 2.3。固定 γ_1、$\gamma_2 \in \mathbb{R}_+$，使得 $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_1 + \gamma_2$。令 $\Psi\colon D \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $\liminf_{\boldsymbol{x}\to(0,0)} \Psi(\mathbf{x}) \geq 0$ 的函数。那么

$$\gamma_1\Psi(\mathbf{x}) + \gamma_2\Psi(\mathbf{y}) \leq \Psi(\gamma_1\mathbf{x} + \gamma_2\mathbf{y}), \quad \textit{for all } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \tag{11}$$

当且仅当以下两个条件同时成立：

(M1) Ψ 是正齐次的，即

$$\Psi(\gamma\mathbf{x}) = \gamma\Psi(\mathbf{x}), \quad \textit{for all } \mathbf{x} \in D \textit{ and } \gamma \in \mathbb{R}_+;$$

(M2) Ψ 是超可加的，即

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geq \Psi(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{y}), \quad \textit{for all } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

特别地，如果 Ψ 满足条件(11)，则截面 $\Psi(\cdot,\ 1)$ 是凹的。

证明。(11) 与条件 (M1) 和 (M2) 之间的等价性由 [19, 推论2]（另见 [16, 定理 2]）可得。至于陈述的其余部分，令 $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 为如下定义的函数

$$h(x) := \Psi(x, 1), \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

那么条件 (M1) 意味着 $\Psi(\mathbf{x}) = x_2 h(x_1/x_2)$ 对所有 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D$均成立，因此条件(M2) 等价于

$$(x_2 + y_2)h\left(\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}\right) \geq x_2 h\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + y_2 h\left(\frac{y_1}{y_2}\right), \quad \text{for all} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D. \tag{12}$$

现在，固定 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $x, y \in \mathbb{R}_+$。令 $\mathbf{x} = (\alpha x, \alpha)$ 和 $\mathbf{y} = ((1-\alpha)y, 1-\alpha)$ 属于 (12)，我们得出 h 是凹函数。■

以下及下文中，我们继续采用（3）中的相同记号，以及引理 2.1 （4）陈述中的记号。现在我们来证明定理1.3。

定理*1.3*的证明。暂且假设 g 是递增的。

ONLY IF PART. 根据假设，存在 $A \in \mathscr{L}$ 使得 $\alpha_1 := \lambda(A)$，且 $\alpha_2 := \lambda(A^c)$，其中 $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_1 + \alpha_2$。

由引理2.1(ii)，不等式（5）成立。根据引理2.3 可知，Φ（定义见引理2.1(ii)）是正齐次的，这可以更明确地改写为

$$\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(\gamma x) + \beta_2\varphi(\gamma y)) = \gamma\varphi^{-1}(\beta_1\varphi(x) + \beta_2\varphi(y)), \text{ for all } x, y, \gamma \in \mathbb{R}_+. \tag{13}$$

现在固定 $\gamma \in \mathbb{R}_+$，并定义连续函数 $\Lambda_\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为

$$\Lambda_\gamma(x) := \varphi(\gamma\varphi^{-1}(x)), \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}_+. \tag{14}$$

然后，将 φ 作用于（13）的两边，并令 $x = \varphi^{-1}(s)$和 $y = \varphi^{-1}(t)$，得到

$$\beta_1\Lambda_\gamma(s) + \beta_2\Lambda_\gamma(t) = \Lambda_\gamma(\beta_1 s + \beta_2 t), \tag{15}$$

对于所有 $s, t \in \varphi(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$。

容易证明， $\Lambda_\gamma(x) \to 0$ 当 $x \to 0^+$时成立。事实上，注意到 φ 递增，当且仅当 φ^{-1}也递增。因此，如果 φ 分别递增 [、递减], ，那么 $x \to 0^+$ 当且仅当$\gamma\varphi^{-1}(x) \to 0^+$ [分别成立, $\gamma\varphi^{-1}(x) \to \infty$]。因此，在这两种情况下， $\varphi(\gamma\varphi^{-1}(x)) \to 0$ 当 $x \to 0^+$ 时成立。

因此，在（15）中分别令 $s \to 0$ 和 $t \to 0$ ，可得

$$\beta_1 \Lambda_\gamma(s) = \Lambda_\gamma(\beta_1 s) \quad \text{and} \quad \beta_2 \Lambda_\gamma(t) = \Lambda_\gamma(\beta_2 t), \text{ for all } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

结合（15），可推出

$$\Lambda_\gamma(x) + \Lambda_\gamma(y) = \Lambda_\gamma(x + y), \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{16}$$

因此，众所周知（例如参见[15] 或教材 [1, 11], ），存在函数$m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 使得

$$\Lambda_\gamma(x) = m(\gamma)x, \text{ for all } x, \gamma \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

还需注意， m 是连续的。事实上，由（14）和（17）可得 $\varphi(\gamma\varphi^{-1}(x)) = m(\gamma)x$ 对所有 x， $\gamma \in \mathbb{R}_+$均成立。特别地，令 $x = 1$，可得 $m(\gamma) = \varphi(\gamma\varphi^{-1}(1))$ 对所有$\gamma \in \mathbb{R}_+$均成立。因此，由 φ 的连续性可知，函数 m连续。

最后，注意到

$$\Lambda_{\gamma_1\gamma_2} = \Lambda_{\gamma_1} \circ \Lambda_{\gamma_2}, \text{ for all } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_+,$$

由此可知，函数 m 是乘法性的，即，

$$m(\gamma_1\gamma_2) = m(\gamma_1)m(\gamma_2), \text{ for all } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_+.$$

结合 m 的连续性，很容易（细节略）证明存在一个非零常数 $c \in \mathbb{R}$ ，使得

$$m(\gamma) = \gamma^c, \quad \text{for all } \gamma \in \mathbb{R}_+.$$

因此，由（14）和（17）可得

$$\varphi(\gamma\varphi^{-1}(x)) = \Lambda_\gamma(x) = m(\gamma)x = \gamma^c x, \text{ for all } x, \gamma \in \mathbb{R}_+.$$

注意到 $c \neq 0$。令 $x = 1$，得到

$$\varphi(\gamma\varphi^{-1}(1)) = \gamma^c, \text{ for all } \gamma \in \mathbb{R}_+,$$

这可以改写为

$$f^{-1} \circ T = g^{-1}, \tag{18}$$

其中 $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是由 $T(x) := \varphi^{-1}(1)x^{1/c}$定义的双射。对 (18) 两边分别取逆，可得 $f = T \circ g$，即对于某个 a，有 $f = ag^b$, $b \in \mathbb{R}$ ，其中 $a > 0$ 且$b \neq 0$。最后，回想引理 2.3 表明截面 $\Phi(\cdot, 1)$ 是凹的，可知由 $\kappa(t) := \varphi^{-1}(\beta_1\varphi(t) + \beta_2\varphi(1))$ 定义的映射$\kappa\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是凹的。由于 $\varphi(t) = (g \circ f^{-1})(t) = (t/a)^{1/b}$ 且 $\varphi^{-1}(t) = at^b$ ，于是

$$\kappa(t) = a\left(\beta_1\left(\frac{t}{a}\right)^{1/b} + \beta_2\left(\frac{1}{a}\right)^{1/b}\right)^b, \text{ for all } t \in \mathbb{R}_+.$$

简单计算可得，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$\kappa''(t) = \beta_1\beta_2 \frac{1-b}{b}\left(\beta_1 + \beta_2 t^{-\frac{1}{b}}\right)^{b-2} t^{-1-\frac{1}{b}}$。因此，$\kappa$ 的凹性意味着 $b < 0$ 或 $b \geq 1$。由于 f 和 g 都是递增的，我们得出$b \geq 1$。

IF PART. 假设 $f = ag^b$ 存在某个 a，$b \in \mathbb{R}^+$ 且 $b \geq 1$。注意 $f^{-1}(t) = g^{-1}((t/a)^{1/b})$。另外，固定一个 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$-可测简单函数 $h\colon X \times Y \to I$。回顾g^{-1} 是递增的，并利用 Minkowski 积分不等式，参见例如 [22, 附录 A]，另见 [3,第 3 章第 2 节。4]，我们得到

$$f^{-1}\left(\int_X f\left(g^{-1}\left(\int_Y g\circ h\, d\mu\right)\right) d\lambda\right) = g^{-1}\left(\left(\int_X\left(\int_Y g\circ h\, d\mu\right)^b d\lambda\right)^{1/b}\right)$$
$$\leq g^{-1}\left(\int_Y\left(\int_X (g\circ h)^b\, d\lambda\right)^{1/b} d\mu\right) = g^{-1}\left(\int_Y g\left(f^{-1}\left(\int_X f\circ h\, d\lambda\right)\right) d\mu\right).$$

因此，不等式（1）成立。

上面的部分解决了 g 递增的情形。现在假设 f 递增且g 递减。整个证明沿用相同的思路，得出结论：对于某个 $a \in \mathbb{R}_+$ 和某个 $b < 0$ 或 $b \geq 1$，有 $f = ag^b$。因此，根据 f 和 g的单调性假设，我们得到 $b < 0$。

最后，假设 f 和 g 都是递减的。同样，整个证明按相同步骤进行，注意到由引理 2.1可知，不等式（5）的方向相反。因此，上文中的同一函数 κ 需要是凸的。鉴于 $f = ag^b$ 对于某个 $a \in \mathbb{R}_+$ 以及某个非零的 $b \in \mathbb{R}$成立，由 f 和 g 均递减可得 $b \in (0, 1]$。后一种情形中的 ONLYIF 部分可类似地证明。■

定理的证明 *1.4*。 定理 1.4 的证明与前一个定理的证明思路相同。˜事实上，假设 g 是递增的，并重复相同的推理，将 Φ 替换为 Φ，即可得到相同的结论，即 $f = ag^b$ 对于某个 a，$b \in \mathbb{R}$ 其中 $a > 0$ 且 $b \neq 0$。此时，该截面的凹性

$$\tilde{\Phi}(t, 1) = -\varphi(\alpha_1\varphi^{-1}(t) + \alpha_2\varphi^{-1}(1)) = -(\alpha_1 t^b + \alpha_2)^{1/b}$$

等价于 $b \geq 1$。g 递减的情形以及 IF 部分的证明类似（我们省略进一步的细节）。■

定理 *1.6* 的证明。 (P1) $\Longrightarrow$ (P2)。由引理 2.1(i)，f 是递增的。此外，由引理˜2.1(iii)，函数 Ψ_{α_1}，它与 $-\Phi$一致，根据不等式（6）是 β_1-凸的。由于 Ψ_{α_1}也是连续的，因此它必为凸函数，参见例如 [13, 定理 1] 或教材 [1, 11]。

(P2) $\Longrightarrow$ (P3)。令 Γ 为所有使 $\gamma \in (0,1)$ 中 Ψ_γ 为凸的元素所组成的集合。由第 (P2) 项可知，Γ 非空，事实上 $\alpha_1 \in \Gamma$。

我们断言，Γ 在 (0, 1) 中相对稠密。事实上，设 γ_1，并注意到

$$\Psi_{\gamma_1}(\Psi_{\gamma_2}(\mathbf{x}), x_2) = \Psi_{\gamma_1\gamma_2}(\mathbf{x}), \text{ for all } \mathbf{x} \in D.$$

由于递增凸函数的复合是凸的，因此有 $\gamma_1\gamma_2 \in \Gamma$。此外，显然，如果 $\gamma \in \Gamma$，那么 $1-\gamma \in \Gamma$。如果 Γ 在 $(0,1)$ 中并非相对稠密，则存在一个非空开区间 $U := (a,b)$，其长度最大，并且满足 $U \cap \Gamma = \varnothing$。由于 $\Gamma \neq \varnothing$，因此 $a \neq 0$ 或 $b \neq 1$。设 $b \neq 1$（另一种情形类似）。令 $n \geq 1$ 为满足 $\alpha_1^n < 1 - a/b$ 的最小整数。注意，由 n 的最小性可知，我们有 $1-\alpha_1^n \leq 1-\alpha_1(1-a/b)$。再固定一个充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $b+\varepsilon < 1$ 且 $(b+\varepsilon)(1-\alpha_1(1-a/b)) < b$（注意，这确实是可能的）。由构造可得

$$a < b(1-\alpha_1^n) \leq b\,(1-\alpha_1(1-a/b)) < (b+\varepsilon)(1-\alpha_1^n) < b < b+\varepsilon < 1. \tag{19}$$

由 U 的极大性，我们可以取 $\gamma \in (b, b+\varepsilon)$。然而，这意味着 $\gamma(1-\alpha_1^n) \in \Gamma$，这与 (19) 以及 $U \cap \Gamma = \varnothing$ 的事实相矛盾。

此时，更明确地说，我们知道

$$\Psi_\gamma\left(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}\right) \leq \alpha\Psi_\gamma\left(\mathbf{x}\right) + (1-\alpha)\Psi_\gamma\left(\mathbf{y}\right)$$

for 对所有 $\alpha \in (0,1)$、$\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in D$ 以及 $\gamma \in \Gamma$。根据 $f \circ g^{-1}$ 的连续性，我们得出 $\Gamma = (0,1$).

(P3) $\Longrightarrow$ (P1)。这很直接。 ■

3. CLOSING REMARK

鉴于定理 1.6 的证明，值得指出的是，如果 $(X, \mathscr{L}, \lambda)$ 和 $(Y, \mathscr{M}, \mu)$ 是具有 $\lambda(X) \leq 1$ 和 $\mu(Y) \leq 1$ 的非退化测度空间，那么每个 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$-可测简单函数 h 都满足不等式 (1)：$X \times Y \to I$，前提是条件 (P2) 或条件 (P3) 成立。

REFERENCES

1. J. Acz´el 和 J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, 《数学及其应用百科全书》第31卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989年。内容涉及其在数学、信息论以及自然科学和社会科学中的应用。2. L. E. J. Brouwer, *Beweis der invarianz des n-dimensionalen gebiets*, 《数学年刊》71（1911年），第3期，305–313页。3. P. S. Bullen, *Handbook of means and their inequalities*, 《数学及其应用》第560卷，克卢沃学术出版社集团，多德雷赫特，2003年。修订自1988年原版 [P. S. Bullen、D. S. Mitrinovi´c 和 P. M. Vasi´c, ıt Means and their inequalities, Reidel, 多德雷赫特; MR0947142]。4. B. de Finetti, *Sul concetto di media*, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari 2（1931年），第3期，369–396页。5. H. Ergin 和 F. Gul, *A theory of subjective compound lotteries*, 《经济理论杂志》144（2009年），第3期，899–929页。6. D. G lazowska、P. Leonetti、J. Matkowski 和 S. Tringali, *Commutativity of integral quasi-arithmetic means on measure spaces*, 《匈牙利数学学报》153（2017年），第2期，350–355页。7. D. G lazowska 和 J. Matkowski, *Subcommuting and commuting real homographic functions*, 《差分方程及其应用杂志》22（2016年），第2期，177–187页。8. T. Kitagawa, *On some class of weighted means*, 《日本物理数学学会会刊》16（1934年），第3期，117–126页。9. P. Klibanoff、M. Marinacci 和 S. Mukerji, *A smooth model of decision making under ambiguity*, Econometrica 73（2005年），第6期，1849–1892页。10. M. Kolmogorov, *Sur la notion de la moyenne*, 《林琴科学院纪要》12（1930年），388–391页。

11. M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, 第2版, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2009年, 《柯西方程与詹森不等式》, 由 Attila Gil´anyi 编辑并撰写序言。12. P. Leonetti, *Quasi-arithmetic means ad libitum*, 手稿。13. P. Leonetti, *A characterization of convex functions*, 《美国数学月刊》125（2018年）, 第9期, 842–844页。14. P. Leonetti、J. Matkowski 和 S. Tringali, *On the commutation of generalized means on probability spaces*, 《数学探索》（新系列）27（2016年）, 第4期, 945–953页。15. P. Leonetti 和 J. Schwaiger, *The general linear equation on open connected sets*, 《匈牙利数学学报》161（2020年）, 第1期, 201–211页。16. J. Matkowski, *Functional inequality characterizing nonnegative concave functions in* $(0,\infty)^k$, Aequationes Math. 43（1992年）, 第2–3期, 219–224页。17. J. Matkowski, *Lagrangian mean-type mappings for which the arithmetic mean is invariant*, J. Math. Anal. Appl. 309（2005年）, 第1期, 15–24页。18. J. Matkowski 和 P. Pasteczka, *Invariant means and iterates of mean-type mappings*, Aequationes Math. 94（2020年）, 第3期, 405–414页。19. J. Matkowski 和 M. Pycia, *Convex-like inequality, homogeneity, subadditivity, and a characterization ofL^p-norm*, 《波兰数学年刊》60（1995年）, 第3期, 221–230页。20. M. Nagumo, *Commutativity of integral quasi-arithmetic means on measure spaces*, 《日本数学杂志》7（1930年）, 71–79页。21. Z. P´ales 和 P. Pasteczka, *On the Jensen convex and Jensen concave envelopes of means*, 《数学档案》（巴塞尔）116（2021年）, 第4期, 423–432页。22. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, 普林斯顿数学丛书第30号, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1970年。

（Dorota G lazowska） INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF ZIELONA GÓRA – PROF. Z. SZAFRANA 4A, PL-65-516 ZIELONA GÓRA*Email address*: d.glazowska@im.uz.zgora.pl（Paolo Leonetti） DEPARTMENT OF ECONOMICS, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'INSUBRIA – VIA MONTE GEN-EROSO 71, IT-21100 VARESE*Email address*: leonetti.paolo@gmail.com*URL*: https://sites.google.com/site/leonettipaolo/（Janusz Matkowski） INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF ZIELONA GÓRA – PROF. Z. SZAFRANA 4A, PL-65-516 ZIELONA GÓRA*Email address*: j.matkowski@im.uz.zgora.pl*URL*: http://januszmatkowski.com（Salvatore Tringali） SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, HEBEI NORMAL UNIVERSITY — SHIJIAZHUANG, HEBEI PROVINCE, 050024 CHINA*Email address*: salvo.tringali@gmail.com*URL*: http://imsc.uni-graz.at/tringali