声学系统中的非阿贝尔拓扑相及其商关系

孙晓晨[1,2,§]，王家宝[1,§]，何成[1,2,3,*]，陈艳峰[1,2,3,†]

[1]固态微结构国家重点实验室与材料科学与工程系，南京大学，中国南京 210093

[2]南京大学先进微结构协同创新中心，中国南京 210093

[3]健恩南京大学人工功能材料重点实验室，南京 210093，中国 a

*通讯作者。
chenghe@nju.edu.cn

†通讯作者。yfchen@nju.edu.cn §X.-C. S.、
J.-B. W. 对本研究贡献相同。

摘要

非阿贝尔拓扑相（非阿贝尔拓扑相）是量子计算与通信领域备受追捧的候选态，但其构型与操控并不简单，尤其对于经典波而言。在本研究中，我们利用一对三分量声学偶极子之间新颖的编织型耦合；这些偶极子作为功能元件，具有有效虚耦合。将它们沿一维排列后，我们得以在紧凑且互易的厄米系统中生成声学非阿贝尔拓扑相。我们进一步给出涵盖所有 i、j 和 k 非阿贝尔相的完整相图，并通过不同的端点态直接展示其独特的商关系。基于实空间编织的非阿贝尔拓扑相，或可启发对具有非对易特性的声学器件的探索。

拓扑相代表了一种新颖的物质形态 [1–5]，在过去十年中，人们对利用人工材料（如光子晶体和声子晶体）[6–16]设计能带拓扑产生了浓厚兴趣。其全局性质使 $\boldsymbol{k}$ 空间中的能带具有鲁棒性，从而在实际制备中面对不利但不可避免的扰动或缺陷时，仍能实现稳定的波传输。构造或破坏两个相邻能带的节点或节点线通常发挥着关键作用。一个广为人知的例子是具有拓扑荷的拓扑半金属，例如布里渊区（BZ）中包围节点的 $\boldsymbol{k}$ 球面或 $\boldsymbol{k}$-环，其可以呈现非平凡的费米弧 [17,18]。进一步破坏这种局域能带简并，可以产生拓扑绝缘体；其陈数 [1]、 Z_2 不变量 [19], 和 Zak 相位 [20] 等拓扑不变量刻画了孤立体能带的全局性质。随后，能隙中会出现非平凡的边界态。迄今为止，它们通常被用于处理两个相邻能带之间的一个能隙或节点，其中大多数属于具有交换性质的阿贝尔群，因此能够线性累加。

当存在两个以上能够相互作用的能带时，情况可能大不相同。例如，在三能带系统中，存在两个相互作用的能隙，并且任意两条能带之间都可能出现三种简并类型。这种三能带编织可能导致非交换行为，归属于非阿贝尔（NA）四元数群，而非阿贝尔群。人们通常会考虑多个二维（2D）、三维（3D）和合成维度拓扑半金属，或非厄米系统中的复特征值空间，以提供足够的维度进行能带编织，从而为实现非阿贝尔拓扑荷（NATC）提供便利的平台 [21–31]。相反，由于一维（1D）系统的自由度受限，探索其中非阿贝尔能带拓扑的研究寥寥无几；这类研究需要额外的参数空间条件，例如虚耦合 [32]。

然而，与半金属相比，一维非阿贝尔系统至少在两个方面具有自身优势。其一源于其具有周期性边界条件的一维布里渊区，该区域可被视为包围母体二维空间中某些节点的一个子集$\boldsymbol{k}$-回路。因此，一维非阿贝尔情形可自然升级为全局非阿贝尔拓扑相，从而在完整能隙中承载端点态，使实验观测更加直接。其二则来自其简单的模型、紧凑的尺寸，以及便于未来应用的轻松操控。近期一项开创性研究展示了一维非阿贝尔电路系统；该系统通过同时破缺时间反演对称性和宇称对称性，同时保持联合宇称-

时间反演对称性 [32]。然而，对于无磁性的经典波，尤其是空中传播的声音，实现非阿贝尔行为仍然具有挑战性。

本文报道了在一维声学系统中对非阿贝尔拓扑相的实验实现。为此，我们加入了一个额外的配对元胞，并通过编织式连接管道将其连接起来，使声学系统能够在单一模型中实现正、负和复数耦合。因此，我们观测到了所有i、j和k相，并发现了端点态，绘制出了相图。此外，我们验证了不同非阿贝尔拓扑相之间的商关系。这项工作拓展了我们对经典波拓扑系统中非阿贝尔物理学的认识；这类系统在器件设计方面已相当成熟，应用也十分广泛。

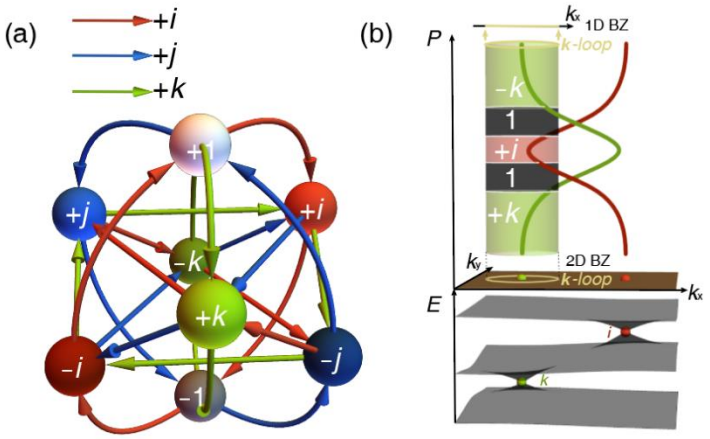

图 1 | 能带中的 NATC。(a) 四元数群。球体表示群元素，共轭元素以相近的颜色表示。例如，$\pm i$ 分别以浅红色和深红色表示，但它们属于同一个类。红色、蓝色和绿色箭头分别表示由 $+i/+j/+k$ 进行的相互乘法。例如，$(+i)\cdot$（蓝色 $\rightarrow$）$=(+k)$。(b) NATC 示意图。DP i和k在棕色平面上投影至二维布里渊区，分别标记为红点和绿点。随着P增大，绕原点处 DP-k一周的$\boldsymbol{k}$环路会改变其 NATC。一维布里渊区可视为高维空间中的此类环路。

图1(a)所示的NA四元数群$Q=\{+1,\pm i,\pm j,\pm k,-1\}$由三个满足 $ij=-ji=k$、$jk=-kj=i$、$ki=-ik=j$ 以及 $i^2=j^2=k^2=-1$的反对易虚单位组成，这让人联想到泡利矩阵。这里，NA源于乘法 $ij\neq ji$ 不满足交换律。在物理上，$+1$ 表示平庸拓扑，而$\{\pm i\}$、$\{\pm j\}$、$\{\pm k\}$和$\{-1\}$表示不同的NATC。该群的物理解释如图1b所示，

其中，二维三能带系统中的两个节点分别表示2nd &3rd 能带以及1st&2nd 能带之间的简并。由于对称性，2nd &3rd （1st &2nd）波矢沿包围节点的$\boldsymbol{k}$回路会获得额外的π 相位，从而被赋予荷i（k）。当系统随某个参数 P演化时，节点沿编织轨迹移动，而$\boldsymbol{k}$回路在 P-布里渊区空间中延展为一个圆柱面。在$\boldsymbol{k}$-圆柱面内部，每个相交曲面上的节点都表明NATC经历了一个 $+k\sim 1\sim +i\sim 1\sim -k$过程。由于NA编织 $iki^{-1}=k^{-1}=-k$ [21]， k 的符号发生改变，导致节点[26–28]发生反弹。一维和二维情形之间的唯一差异在于，一维布里渊区本身就是一个$\boldsymbol{k}$回路，并且可以作为二维母系统中的一个子空间。在这个意义下，NATC升级为全局NATP（图1b中的黄色线条和箭头）。节点轨迹与$\boldsymbol{k}$-圆柱面的交点表示相变点，此时带隙闭合（图1b）。因此，不同NATP之间的边界处必然存在端点态或界面态。

从理论上说，实现 NATC 需要不同类型的耦合，例如正值、负值和虚数值 [32]。已有研究表明，利用声学偶极模，将腔体端点分别以相反或相同方向连接，可以实现正耦合或负耦合，因为同相特征值分别大于或小于反相特征值 [33]。最近的研究证实，正耦合和负耦合会引入扭曲的 π-磁通块，并等效地产生复跃迁 [9] （见补充信息中的图 S1）。在实际实现中，我们采用耦合管的编织式排列，以确保所有管道长度一致，并通过管道直径控制耦合强度。此外，我们将腔体改成 U 形，使其在位能可通过腔体长度调节，同时缩小声学模型与紧束缚方法（TBA）之间的差异 [35]。

一个包含 6 个腔体的元胞，晶格常数为 $a=4cm$ 。为满足 3 条能带的要求，其中一层有 3 个腔体，另一层则有一组配对腔体，用于构造共轭虚耦合，如图 2(a) 所示，其子晶格指标分别为 X_α $(X=A,B,C)$、 $\alpha=\uparrow\downarrow$。相应的紧束缚近似模型如图 2(b) 所示。它们的在位能标记为 S_X，由腔体 hx 的长度控制。这 6 个腔体之间没有胞内耦合。胞间耦合可表示为 $v_{X_\alpha,\ Y_\beta}=\pm(1-|\delta($ $X,Y)-\delta(\alpha,\beta)|)$，这表示在同一层 α 内，只有连接字母指标相同的腔体的耦合 X (v_X)；而在不同层之间，只有连接字母指标不同的腔体的耦合。我们进一步约束

即 $v_{(X_\downarrow,n),(Y_\uparrow,n+1)} = -v_{(X_\uparrow,n),(Y_\downarrow,n+1)} = v_{(Y_\downarrow,n),(X_\uparrow,n+1)} = -v_{(Y_\uparrow,n),(X_\downarrow,n+1)} \equiv v_{XY}$，其中 n 标记元胞。所有连接管道的长度均相同，耦合强度由其直径 d_X/d_{XY} 决定。在实际操作中，我们使用符号“$\pm d$”表示正/负耦合，并在图 2(a) 中分别用红色/蓝色标记。k_x 空间中的紧束缚近似哈密顿量可写为

$$H(k_x) = \begin{bmatrix} H_\mathrm{d}(k_x) & \mathrm{i}H_\mathrm{o}(k_x) \\ -\mathrm{i}H_\mathrm{o}(k_x) & H_\mathrm{d}(k_x) \end{bmatrix}$$

$$H_\mathrm{d}(k_x) = \begin{bmatrix} S_A + 2v_A\cos k_x & 0 & 0 \\ 0 & S_B + 2v_B\cos k_x & 0 \\ 0 & 0 & S_C + 2v_C\cos k_x \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$H_\mathrm{o}(k_x) = 2\sin k_x \begin{bmatrix} 0 & v_{AB} & v_{CA} \\ v_{AB} & 0 & v_{BC} \\ v_{CA} & v_{BC} & 0 \end{bmatrix}$$

在基底 $(A_\uparrow, B_\uparrow, C_\uparrow, A_\downarrow, B_\downarrow, C_\downarrow)$ 下。通过酉变换 $U = \exp(\mathrm{i}\tau_x \otimes \sigma_0\,\pi/4)$，其中$\tau_x$ 是泡利矩阵的x分量，σ_0 是 3×3 单位矩阵，哈密顿量可在新基底 $(A_\uparrow + \mathrm{i}A_\downarrow, B_\uparrow + \mathrm{i}B_\downarrow, C_\uparrow + \mathrm{i}C_\downarrow, A_\uparrow - \mathrm{i}A_\downarrow, B_\uparrow - \mathrm{i}B_\downarrow, C_\uparrow - \mathrm{i}C_\downarrow)/\sqrt{2}$下对角化：

$$H_0(k_x) = UH(k_x)U^\dagger = \begin{bmatrix} H_\mathrm{d}(k_x) + H_\mathrm{o}(k_x) & 0 \\ 0 & H_\mathrm{d}(k_x) - H_\mathrm{o}(k_x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} H_+(k_x) & 0 \\ 0 & H_-(k_x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$H_\pm(k_x)$ 是具有一对共轭 NATC [32] 的哈密顿量。有效模型如图 2(c) 所示。

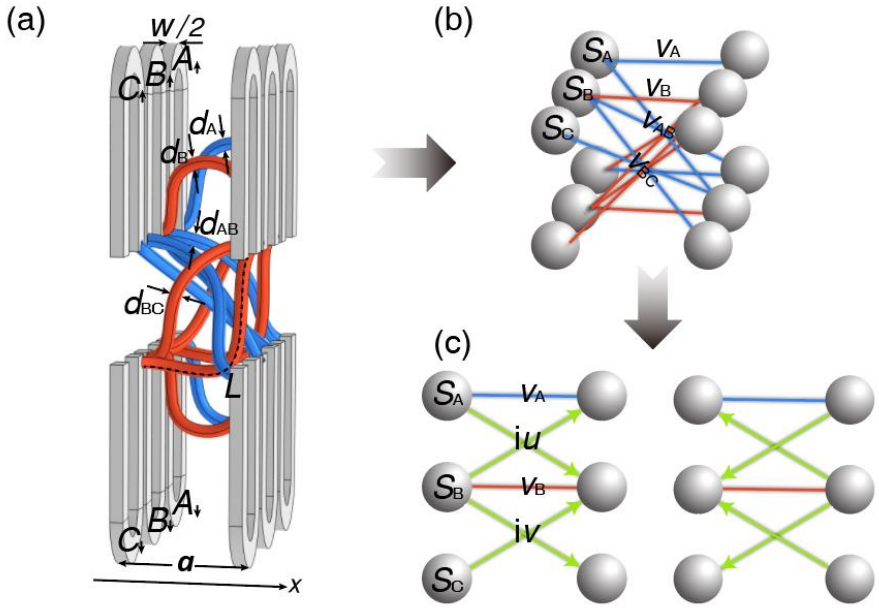

图2. 模型构建。(a) 两层声学结构。U形腔体通过红色管道连接，形成有效正耦合；通过蓝色管道连接，形成负耦合。所有管道长度均为 $L = 7cm$。(b) 具有纯实耦合的紧束缚近似模型。(c) 具有虚耦合的有效紧束缚近似模型。

我们可以通过以下方式计算 NA 电荷：

$$Q = \overline{\exp}\left[\oint A(k_x)\cdot dk_x\right] \tag{3}$$

其中 $A(k)=\sum \beta_t(_t \quad -- \quad _{i2}\sigma_t)$，其中 σ_t 为泡利矩阵，$\beta_t=\sum_{pq} u^p|\partial_{k_x}|u^q\ \epsilon_{tpq}\ 2$ / 根据能带 p 和 q计算得出，ϵ_{tpq} 为完全反对称张量。指数上的横线表示路径排序。四元数群元素的最终结果表示为泡利矩阵 $1\to\sigma_0$，$i\to \mathrm{i}\sigma_x$，$j\to \mathrm{i}^{\sigma_y}$ 和 $k\to \mathrm{i}\sigma_z$，其中 σ_0 为 2×2 单位矩阵。需要注意的是，对于 NATC i、j 和 k，符号 ±仅具有相对意义；但对于单位元 1，它们可以区分平凡相位 1 和非平凡相位 -1。i、j 和 k 只能相对于一个基点加以区分，这意味着无法通过分别观察一对共轭荷来区分它们。它们之间的差异仅体现为夹在二者之间的界面态 [32]。从这个意义上说，尽管我们的设计无法区分一对共轭 NATC，但它为研究单一相位以及不同类别中各相位之间的界面提供了良好平台。下文中，我们使用 $H_+(k_x)$ 的 NATC 来表示一个特定系统。

H_+ 中的 9 个参数可分为 3 组：3 个位点能量 $S_{A、B、C}$，3 个字母索引相同的胞间耦合 v_X，以及 3 个字母索引不同的胞间耦合 v_{XY}。前两组位于哈密顿量的对角位置。每组参数的总和（$S_A+S_B+S_C$&$v_A+v_B+v_C$）不会影响 NATC，因为它们只会平移或缩放能带。为确保正交性，我们将其余参数设为 $S_A-S_B\equiv S_-$、$S_A+S_B-2S_C\equiv S_+$、$v_A-v_B\equiv v_-$、$v_A+v_B-2v_C\equiv v_+$、$v_{AB}\equiv u$、$v_{BC}\equiv v$ 和 $v_{CA}\equiv w$。在不失一般性的前提下，我们忽略次近邻耦合（$w=0$）以及前两个位点之间的差异（$S_-=0$），并将 $u=1$ 设为单位量。我们得到一个由 3 个剩余参数构成的相图：v_-、v_+ 和 S_+，如图 3(a) 所示，其中 $v=1$。能隙在相变面处闭合。

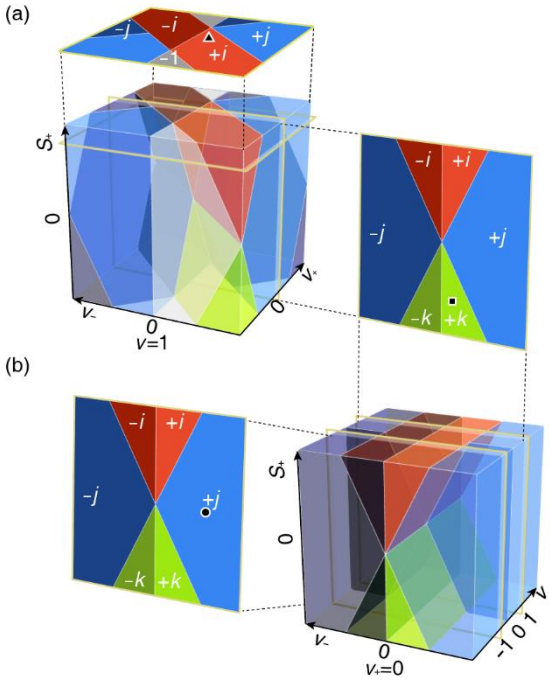

图 3. NATP 相图。(a) 由参数 $v_{\pm}$ 和 S_{+} 张成的 NATP 相图。$\pm i$、$\pm j$、$\pm k$ 和 -1 相位分别以红色、蓝色、绿色和灰色表示。选取 $v=1$ 和 $v_{+}=0$ 的切片，分别用正方形和长方形标记代表性状态 i 和 k。(b) 由参数 v、v_{-} 和 S_{+} 张成的相图。其 $v=1$ 切片即为 (d) 中的 $v_{+}=0$。选取切片 $v=-1$，用圆圈标记代表性状态 j。

一维非阿贝尔拓扑相在体能隙中具有端点态。我们首先选取 i 相和 k 相中的态，分别以三角形和正方形标记于图 3(a) 中（参数详情见补充信息中的表 I）。含有探针和声源的 i 相样品如图 4(a) 所示（详情见补充信息中的图 S2）。在我们关注的频率范围内，有三个能带和两个能隙。当波矢k_x 沿环路 $-\pi/a$ 移动至 π/a时，态的旋转表明存在非平凡的非阿贝尔拓扑相。例如，在 i 相中，2nd 和 3rd 能带的态获得 π 相位，而最低能态保持其符号不变（详情见补充信息中的图 S3）。因此，我们可以在发生扭转的能带之间观察到一个端点态。实验结果如图 4(b) 所示，与模拟和紧束缚近似结果一致（详情见补充信息中的图 S4）。k 相中的态会扭转其 1st 和 2nd 能带，并在二者之间呈现一个端点态，如图 4(c) 所示。

引入第四维后，相图为我们提供了更多信息。固定 $v_{-}=0$，并将非活动的 v 视为一个轴，我们得到图 3(b) 中的相图。值得

注意，图 3(b) 中 $v=1$ 的切片与图 3(a) 中 $v_{-}=0$ 的切片相同。沿 v 轴方向，相位似乎不受影响，只有在 $v=0$ 处出现能带简并，但这并不会导致相变。我们选取 j 相位中的一个状态，并以圆圈标示；该状态扭曲了其 1st 和 3rd 能带，同时还可以观察到两组夹在 2nd 能带之间的状态。需要指出的是，这些带隙内状态并非由 NA 拓扑所保证，而是由于特定的参数选择而产生。它们甚至可以被调谐至 2nd 体能带中，从而形成连续体中的束缚态 [32]。

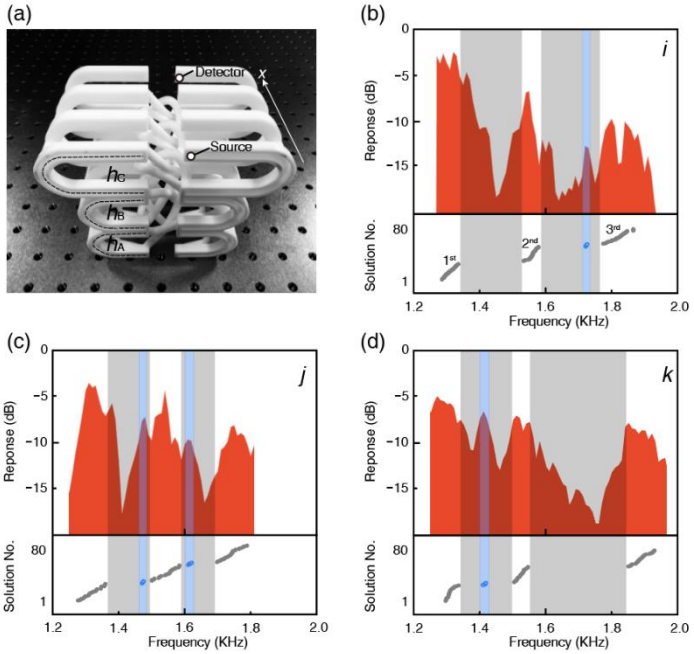

图 4. 单一相位的端点态。(a) 相位 i 的样品及用于检测响应的实验装置。参数见补充信息中的表 I。(b-d) 分别为相位 i, j 和 k的响应。模拟结果见下方图示。

在非阿贝尔情况下，不同于体-边对应关系，可以在两个具有拓扑 $\Delta Q = Q_L Q_R^{-1} = Q_L/Q_R$ [32]的不同非阿贝尔拓扑相 Q_L 和 Q_R 的畴壁处观察到非阿贝尔商关系。具体而言，相位 j&k （k&i/i&j）之间的畴壁，其作用类似于单一相位 i （j/k）中的端点。事实上，在阿贝尔情况下，例如陈绝缘体，其界面态可以由界面两侧的陈数之差确定 $\Delta C = C_L - C_R$; 这可以视为 C_L 和 C_R^{-1} 以及 $\Delta C = C_L C_R^{-1}$ 的阿贝尔群乘法积。因此，阿贝尔和非阿贝尔情况下都遵循同一规则：畴壁态分别由其两侧非阿贝尔拓扑相的原值和逆值决定。标出了探测器和声源的实验样品是

如图 5(a) 所示。声学系统中可见非阿贝尔商关系，如图 5(b-d) 所示).

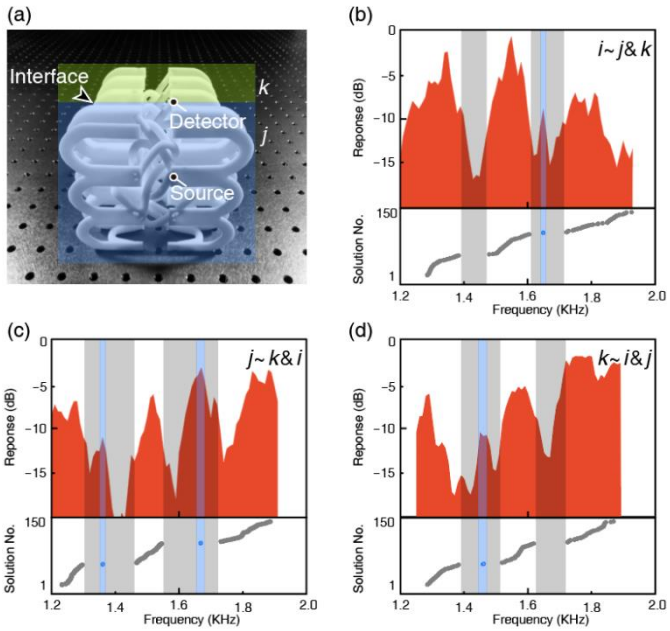

图 5. 不同相位之间的界面态。(a) 相位 *i vs k* 样本及用于检测响应的实验装置。参数见补充信息中的表 I。(b-d) 分别为界面 *j vs k*、*kvs i*和*i vs j*的响应。下方面板显示模拟结果。

总之，我们的工作展示了在声学系统中实现非阿贝尔拓扑相，为探索玻色子非阿贝尔拓扑相开辟了新途径。这一成果还可以进一步结合非厄米 [24] 和 Floquet 拓扑 [36] 概念，或其他非阿贝尔编织过程 [37–41]，以探索新的拓扑物理学。与其二维和三维对应物相比，一维非阿贝尔拓扑在完整带隙中呈现出独特的端点态，使其成为设计功能性原始结构的有力候选。通过利用声学偶极模，我们有效实现了正耦合、负耦合以及等效复耦合，使声学晶体成为理论上模拟几乎所有类型紧束缚近似模型的多功能平台。我们的设计只需要一个辅助元胞，并提供了在实践中实现有效复耦合的可能最简单方法，这对于紧凑型器件可能很有用。连接管道可以替换为软管道，使其成为面向未来量子计算设计的即插即用、可调谐拓扑器件。通过不同参数获得的相图揭示了系统独特的物理性质，直接表明了其拓扑复杂性。

参考文献

[1] D. J. Thouless、M. Kohmoto、M. P. Nightingale 和 M. den Nijs，二维周期势中的量子化霍尔电导，《物理评论快报》49，405（1982年）。[2] B. A. Bernevig、T. L. Hughes 和 S.-C. Zhang，碲化汞量子阱中的量子自旋霍尔效应与拓扑相变，《科学》314，1757（2006年）。[3] M. König、S. Wiedmann、C. Brüne、A. Roth、H. Buhmann、L. W. Molenkamp、X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang，碲化汞量子阱中的量子自旋霍尔绝缘体态，《科学》318，766（2007年）。[4] B. A. Bernevig 和 S.-C. Zhang，量子自旋霍尔效应，《物理评论快报》96，106802（2006年）。[5] C. L. Kane 和 E. J. Mele，石墨烯中的量子自旋霍尔效应，《物理评论快报》95，226801（2005年）。[6] Z. Wang、Y. Chong、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić，单向抗背向散射拓扑电磁态的观测，《自然》461，7265（2009年）。[7] A. B. Khanikaev、S. Hossein Mousavi、W.-K. Tse、M. Kargarian、A. H. MacDonald 和 G. Shvets，光子拓扑绝缘体，《自然·材料》12，233（2013年）。[8] M. C. Rechtsman、J. M. Zeuner、Y. Plotnik、Y. Lumer、D. Podolsky、F. Dreisow、S. Nolte、M. Segev 和 A. Szameit，光子弗洛凯拓扑绝缘体，《自然》496，7444（2013年）。[9] M. Hafezi、S. Mittal、J. Fan、A. Migdall 和 J. M. Taylor，硅光子学中拓扑边缘态的成像，《自然·光子学》7，1001（2013年）。[10] R. Fleury、D. L. Sounas、C. F. Sieck、M. R. Haberman 和 A. Alù，紧凑型声学环行器中的声音隔离与巨大线性非互易性，《科学》343，516（2014年）。[11] M. Xiao、G. Ma、Z. Yang、P. Sheng、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan，周期性声学系统中的几何相位与能带反转，《自然·物理》11，240（2015年）。[12] L.-H. Wu 和 X. Hu，利用介电材料实现拓扑光子晶体的方案，《物理评论快报》114，223901（2015年）。[13] A. B. Khanikaev、R. Fleury、S. H. Mousavi 和 A. Alù，角动量偏置类石墨烯谐振器晶格中的拓扑稳健声传播，《自然·通讯》6，8260（2015年）。[14] X. Cheng、C. Jouvaud、X. Ni、S. H. Mousavi、A. Z. Genack 和 A. B. Khanikaev，光子拓扑绝缘体中的稳健可重构电磁通道，《自然·材料》15，542（2016年）。[15] C. He、X. Ni、H. Ge、X.-C. Sun、Y.-B. Chen、M.-H. Lu、X.-P. Liu 和 Y.-F. Chen，声学拓扑绝缘体与稳健单向声传输，《自然·物理》12，1124（2016年）。[16] X. Ni、M. A. Gorlach、A. Alu 和 A. B. Khanikaev，声学 kagome 晶格中的拓扑边缘态，《新物理学杂志》19，055002（2017年）。[17] X. Wan、A. M. Turner、A. Vishwanath 和 S. Y. Savrasov，烧绿石铱酸盐电子结构中的拓扑半金属与费米弧表面态，《物理评论B辑》83，205101（2011年）。[18] L. Lu、L. Fu、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić，螺旋体光子晶体中的外尔点与线节点，《自然·光子学》7，294（2013年）。[19] C. L. Kane 和 E. J. Mele，Z_2拓扑序与量子自旋霍尔效应，《物理评论快报》95，146802（2005年）。[20] P. Delplace、D. Ullmo 和 G. Montambaux，Zak相位与边缘态的存在性

石墨烯，《物理评论B辑》84，195452（2011年）。[21] Q. Wu、A. A. Soluyanov 和 T. Bzdušek，非相互作用金属中的非阿贝尔能带拓扑，《科学》365，1273（2019年）。[22] M. Wang、S. Liu、Q. Ma、R.-Y. Zhang、D. Wang、Q. Guo、B. Yang、M. Ke、Z. Liu 和 C. T. Chan，声子晶体中非阿贝尔耳环节点链的实验观测，《物理评论快报》128，246601（2022年）。[23] Y. S. S. Patil、J. Höller、P. A. Henry、C. Guria、Y. Zhang、L. Jiang、N. Kralj、N. Read 和 J. G. E. Harris，非厄米简并点纽结及非对易辫子的测量，《自然》607，7918（2022年）。[24] K. Wang、A. Dutt、C. C. Wojcik 和 S. Fan，非厄米能带的拓扑复能量辫绕，《自然》598，59（2021年）。[25] Q. Zhang、Y. Li、H. Sun、X. Liu、L. Zhao、X. Feng、X. Fan 和 C. Qiu，声学非厄米布洛赫辫绕及相关拓扑相变的观测，《物理评论快报》130，017201（2023年）。[26] A. Bouhon、Q. Wu、R.-J. Slager、H. Weng、O. V. Yazyev 和 T. Bzdušek，外尔点的非阿贝尔互易辫绕及其在 ZrTe 中的体现，《自然·物理》16，11（2020年）。[27] B. Jiang、A. Bouhon、Z.-K. Lin、X. Zhou、B. Hou、F. Li、R.-J. Slager 和 J.-H. Jiang，非阿贝尔拓扑声学半金属及其相变的实验观测，《自然·物理》17，11（2021年）。[28] H. Qiu、Q. Zhang、T. Liu、X. Fan、F. Zhang 和 C. Qiu，理想超材料中的最简非阿贝尔节点辫绕，《自然·通讯》14，1（2023年）。[29] D. Cheng、K. Wang 和 S. Fan，合成频率维度中光子的人工非阿贝尔晶格规范场，《物理评论快报》130，083601（2023年）。[30] D. Wang、B. Yang、M. Wang、R.-Y. Zhang、X. Li、Z. Q. Zhang、S. Zhang 和 C. T. Chan，连接非相邻能隙的非阿贝尔带荷节点的观测，《物理评论快报》129，263604（2022年）。[31] M. Ezawa，具有 PT 对称性的非厄米非阿贝尔拓扑绝缘体，《物理评论研究》3，043006（2021年）。[32] Q. Guo、T. Jiang、R.-Y. Zhang、L. Zhang、Z.-Q. Zhang、B. Yang、S. Zhang 和 C. T. Chan，非阿贝尔拓扑荷与边缘态的实验观测，《自然》594，7862（2021年）。[33] Y. Qi、C. Qiu、M. Xiao、H. He、M. Ke 和 Z. Liu，四极拓扑绝缘体的声学实现，《物理评论快报》124，206601（2020年）。[34] L. B. Shao、Z. Y. Chen、K. Wang、S. A. Yang 和 Y. X. Zhao，源自射影对称代数的无自旋镜面陈绝缘体，arXiv:2207.05654。[35] Z.-G. Chen、L. Wang、G. Zhang 和 G. Ma，耦合声学腔系统中紧束缚模型的手征对称性破缺，《物理评论应用》14，024023（2020年）。[36] R.-J. Slager、A. Bouhon 和 F. N. Ünal，弗洛凯多能隙拓扑：非阿贝尔辫绕与反常狄拉克弦相，《arXiv》:2208.12824。[37] Y.-K. Sun、X.-L. Zhang、F. Yu、Z.-N. Tian、Q.-D. Chen 和 H.-B. Sun，光子波导中的非阿贝尔 Thouless 泵浦，《自然·物理》18，1080（2022年）。[38] Z.-G. Chen、R.-Y. Zhang、C. T. Chan 和 G. Ma，声学模式的经典非阿贝尔辫绕，《自然·物理》18，2（2022年）。[39] F. Yu、X.-L. Zhang、Z.-G. Chen、Z.-N. Tian、Q.-D. Chen、H.-B. Sun 和 G. Ma，非阿贝尔

光子芯片上的编织，arXiv:2112.01776 [物理学] (2021)。[40] O. You、S. Liang、B. Xie、W. Gao、W. Ye、J. Zhu 和 S. Zhang，非阿贝尔托姆泵的观测，《物理评论快报》**128**，244302 (2022)。[41] Y. Yang、C. Peng、D. Zhu、H. Buljan、J. D. Joannopoulos、B. Zhen 和 M. Soljačić，实空间中非阿贝尔规范场的合成与观测，《科学》**365**，1021 (2019)。

致谢

本研究由国家重点研发计划 [项目编号：2022YFA1404302（C.H.）] 和国家自然科学基金委员会 [项目编号：52022038（C.H.）、92263207（C.H.）、11874196（C.H.）、11890700（Y.-F.C.）、51721001（Y.-F.C.）、52027803（Y.-F.C.）和52103341（X.-C.S.）]共同资助。

作者贡献

X.-C. S. 和 C. H. 提出了最初的构想。X.-C. S. 完成了本研究的理论部分。J.-B. W. 开展了实验。C. H. 和 Y.-F. C. 负责指导本项目。所有作者均参与了分析和论文撰写。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

《非阿贝尔拓扑相及其在声学系统中的商关系》的补充信息

孙晓晨[1,2,§]，王家宝[1,§]，何成[1,2,3,*]，陈炎锋，[1,2,3,†]

[1]南京大学固体微结构国家重点实验室与材料科学与工程学院，中国南京 210093

[2]南京大学先进微结构协同创新中心，中国南京 210093[3]南京大学江苏省人工功能材料重点实验室，中国南京 210093

*通讯作者。
chenghe@nju.edu.cn

†通讯作者。yfchen@nju.edu.cn §X.-C. S.、
J.-B. W. 对本研究贡献相同。

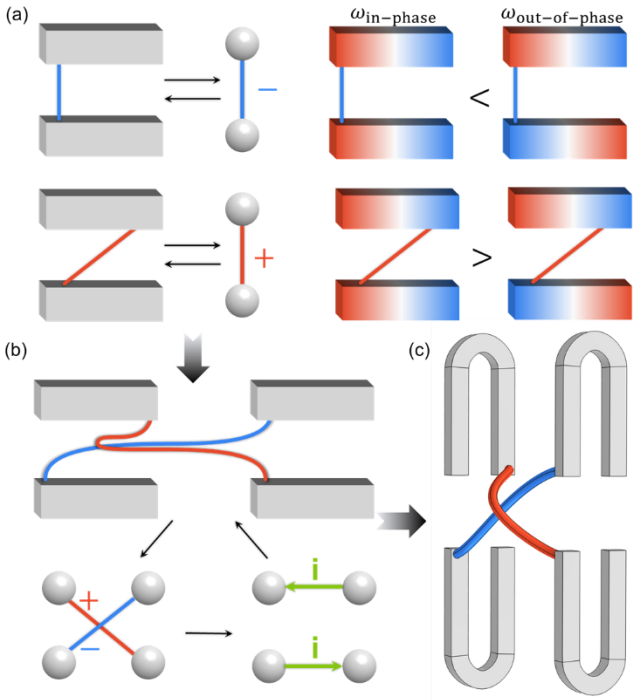

图 S1 | 声学偶极模图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦图 S1 | 声学偶极模的各种有效图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构造。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并会分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模的本图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构建。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模具有较大的本征频率，而负耦图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构造。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并会分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模的本征频率更高，而负耦合则会使反相模的频率更高。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构建。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模具有较大的本征频率，而负耦合则会使反相模具有较大的本征频率。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构造。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并会分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模的本征频率更高，而负耦合则会使反相模的频率更高。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效虚耦合。双层结构中的腔体可以通过交叉正负耦合进行连接。通过基变换，可以实现有效复耦合（在图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构建。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模具有较大的本征频率，而负耦合则会使反相模具有较大的本征频率。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效虚耦合。双层结构中的腔体可以通过交叉正负耦合进行连接。通过基变换，可以实现有效复耦合（在本例中为纯虚耦合）。(c) 实验中通过长度相同的编织管道连接的 U形腔图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构造。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并会分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模的本征频率更高，而负耦合则会使反相模的频率更高。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效虚耦合。双层结构中的腔体可以通过交叉正负耦合进行连接。通过基变换，可以实现有效复耦合（在本例中为纯虚耦合）。(c) 在实验中，通过长度相同的编织管道连接的 U形腔体。图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构建。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模具有较大的本征频率，而负耦合则会使反相模具有较大的本征频率。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效虚耦合。双层结构中的腔体可以通过交叉正负耦合进行连接。通过基变换，可以实现有效复耦合（在本例中为纯虚耦合）。(c) 在实验中，通过长度相同的编织管道连接的 U形腔体。图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构造。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并会分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模的本征频率更高，而负耦合则会使反相模的频率更高。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效虚耦合。双层结构中的腔体可以通过交叉正负耦合进行连接。通过基变换，可以实现有效复耦合（在本例中为纯虚耦合）。(c) 在实验中，通过长度相同的编织管道连接的 U形腔体。图 S1 | 声学偶极模的各种有效耦合的构造。(a) 有效正耦合和负耦合。当通过管道连接时，偶极模的简并会分裂为同相模和反相模。有效正耦合会使同相模的本征频率更高，而负耦合则会使反相模的频率更高。它们分别可以通过连接方向相反和方向相同的腔体端点来实现。(b) 有效虚耦合。双层结构中的腔体可以通过交叉正负耦合进行连接。通过基变换，可以实现有效复耦合（在本例中为纯虚耦合）。(c) 实验中通过长度相同的编织管道连接的 U形腔体。

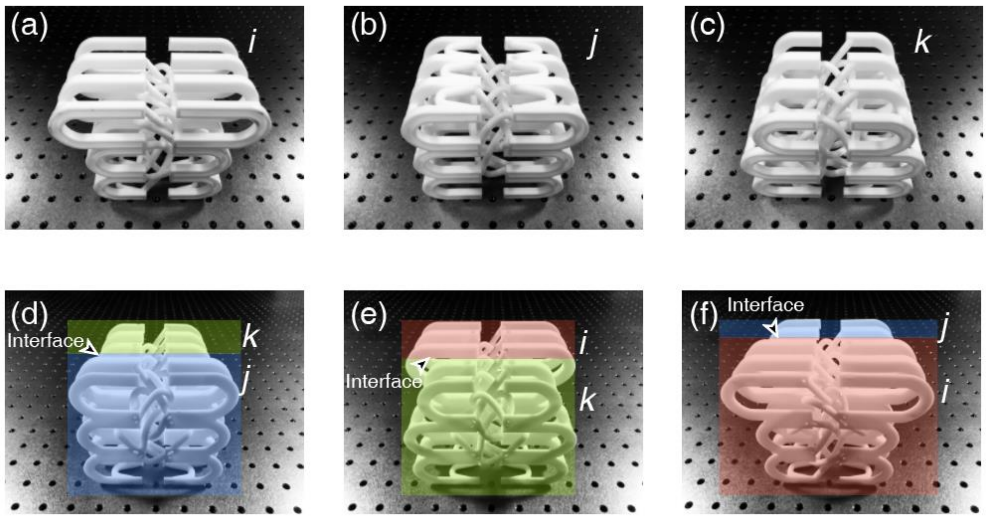

图 S2 | 实验样本。（a-c）分别用于*i*、*j*和*k*相位端点响应的实验样本。（d-f）分别用于*j*&*k*、*k*&*i*和*i*&*j*相位界面响应的实验样本。*i*、*j*和*k*相位分别标记为红色、蓝色和绿色。

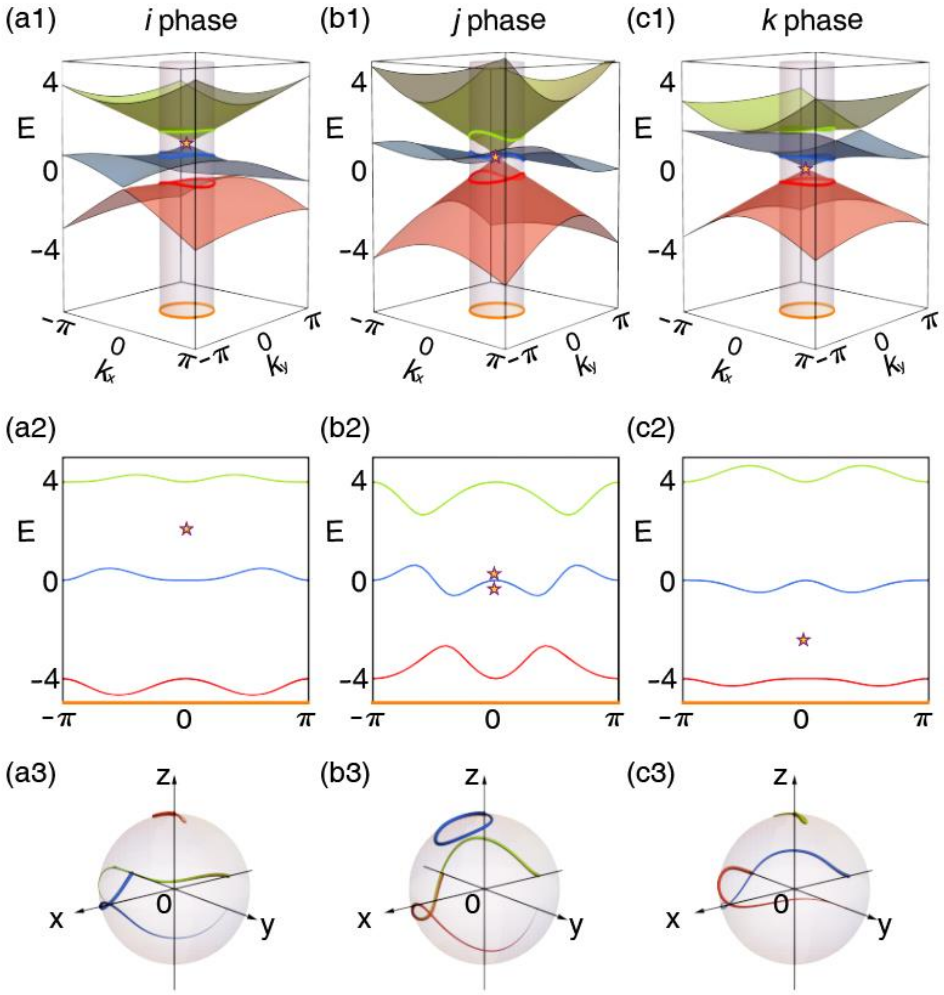

图 S3 | 本征态旋转。 (a1-c1) 二维能带结构，其中 1st 2nd 、3rd 和{v?}能带分别标记为红色、蓝色和绿色。哈密顿量为手稿中的式 (1)，并作如下替换：$\cos\ k \to k_x$，$\sin\ k \to k_y$。星号标示简并点。 (a2-c2) 一维能带结构。它可视为图 (a1-c1) 中橙色圆圈所示的一个子空间。星号标示与图 (a1-c1) 中简并态对应的端点态。(a3-c3) 一维系统中本征态的旋转。粗细渐变表示本征态随 k 从 $-\pi$ 变化至 π （取 $a = 1$）的变化情况。可以看出，1st（红色）、2nd（蓝色）和3rd（绿色）的本征态分别在*i*、*j*和*k*相位中几乎保持静止，而另外两个态则围绕其旋转 π 相位。

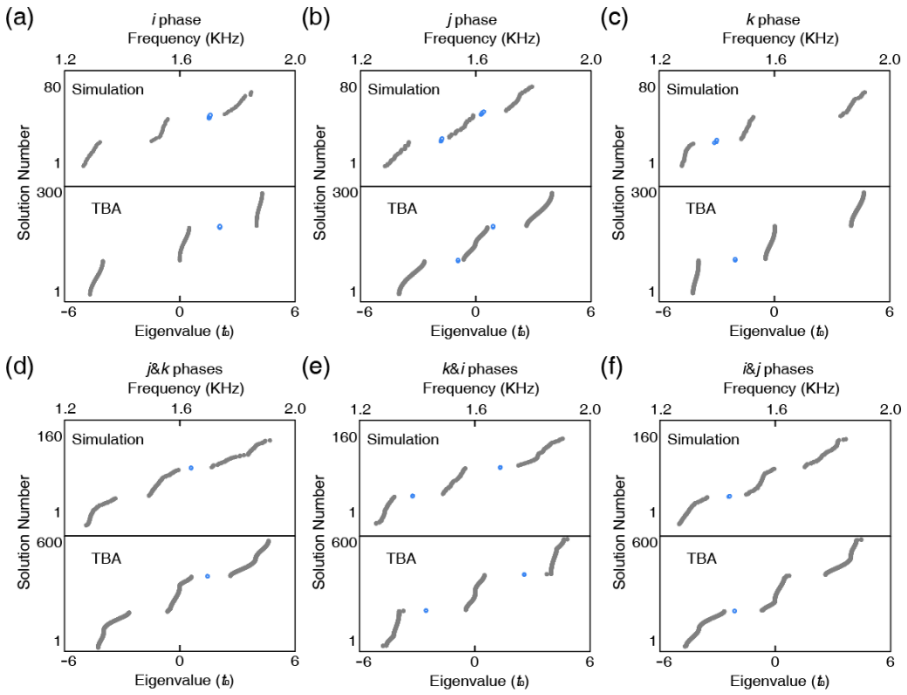

图 S4 | 分别为模拟和紧束缚近似得到的端点态和界面态。

表 I. 各种相位的参数

相位	方法	S_Ah/ $_A$	S_Bh/ $_B$	S_Ch/ $_C$	v_A/d_A	v_B/d_B	u/d_{AB}	v/d_{BC}
i	TBA	2	2	-4	-1	1	1	1
	模拟 (cm)	4.84	4.84	6.68	-0.48	0.48	0.48	0.48
j	TBA	0	0	0	-2	2	1	-1
	模拟 (cm)	5.5	5.5	5.5	-0.72	0.72	0.48	-0.48
k	TBA	-2	-2	4	-1	1	1	1
	模拟 (cm)	6.23	6.23	4.39	-0.48	0.48	0.48	0.48

注：“模拟”中的“–”表示使用了有效负耦合。

实验测量与数值模拟

实验中使用的所有样品均采用光敏树脂（Godart^{TM}8111X）通过 3D 打印制成（几何公差为 0.1 mm）。这种立体光刻材料（模量为 3160 MPa，密度为 1.14gcm^{-3} ）因其阻抗失配而被视为声学硬边界。所有位点和管壁的厚度均为 1 mm。实验中，我们在腔体的上、下表面钻出一些圆孔，并打印相应的塞子，以便进行测量。测量时，分别使用商用扬声器（AMT-47）和麦克风（BSWA MPA416）作为声源和探测器。

全波模拟采用基于有限元方法的三维声学模块，通过商业软件 COMSOL Multiphysics 实现。质量密度和声速分别为 1.21kgm^{-3} 和 343ms^{-1}。