arXiv:2305.03248v1 [math.LO] 5 May 2023

定位与反局部化基数

Miguel A. Cardona* Diego A. Mej´ıa†

*帕沃尔·约瑟夫·萨法里克大学数学研究所，斯洛伐克科希策，Jesenn´a 5，邮编 04001

†静冈大学理学部创意科学课程（数学），日本静冈县静冈市骏河区大谷 836，邮编 422–8529

摘要

本文旨在概述实数上的定位与反定位基数基础，以及它们与测度和范畴相关概念及基数特征之间的相互作用。

1 引言

定位与反定位基数由 Miller 的 [Mil82] 和 Bartoszyi´ns [Bar84 的重要著作引入，Bar 87]用来刻画与测度和范畴相关的基数特征，同时也为证明 Cicho´n 图（图 1）中的不等式提供了工具。

多年来，在许多学者的推动下，定位与反定位基数一直是重要的研究对象 [Paw85、GS93、Kel08、KS09、KS12、BM14、KO14、CM19、KM22、GK21、CKM21]。尽管已有大量论文发表，我们仍认为有必要撰写一篇关于定位与反定位基数的综述，作为参考资料。

本文旨在对局部化基数和反局部化基数进行细致而深入的研究，并填补我们发现的所有空白。本文的目的是确立与测度和范畴相关的经典基数特征的众所周知的刻画，这些刻画涉及局部化基数和反局部化基数，希望借此让对实直线组合学感兴趣的人更容易理解这些结果。

*电子邮箱：miguel.cardona@upjs.sk部分经费由斯洛伐克研究与发展署根据合同编号 APVV-20-0045 ˇ 资助，并由 Pavol Jozef Saf´arik 大学博士后职位提供支持。

†电子邮箱：diego.mejia@shizuoka.ac.jp本研究得到日本学术振兴会青年科学家科研资助金 18K13448 的支持。

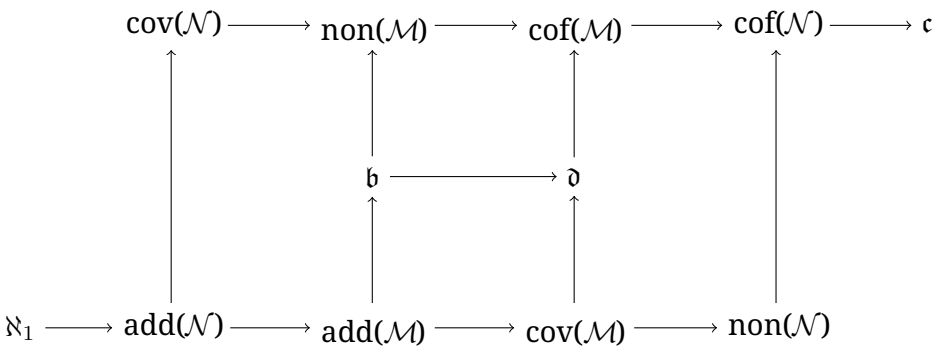

图 1：Cicho´n 图。箭头表示 $\leq$。此外，$\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$，且 $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{M})\}$。

在第 2 节和3中，我们回顾关系系统以及局部化基数和反局部化基数的基本符号与结果。与测度和范畴相关的基数特征的刻画将在以下各节中介绍：

第 4 节：零理想的可加性和共尾性（Bartoszy´nski [Bar84]）。
第 5 节：瘦理想的覆盖数和一致性数（Miller [Mil82], Bartoszy´nski[Bar87]）。

S第 6 节：零理想的覆盖数和一致性数（Bartoszy´nski [Bar88]）.
第 7 节：覆盖数与一致性数 $\mathcal{E}$，由 F_σ 零测集生成的理想（Bartoszy´nski 和 Shelah [BS92], [Car23]）。
Sect第 8 节：零可加集理想的一致性数（Pawlikowski [Paw85]）.
前面给出的刻画也见于 [BJ95]。

2 关系系统与基数特征

我们首先介绍关系系统的框架，它对于定义许多经典的基数特征非常有用。这一框架由 [Voj93], 提出，另见 [Bla10]。

定义 2.1. 若 $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 由两个非空集合 X 和 Y 以及一个关系 $\sqsubset$构成，则称 R 为关系系统。

(1) 若集合 $F \subseteq X$ 满足 $\exists y \in Y\ \forall x \in F\colon x \sqsubset y$，则称其为 R有界。

(2) 若集合 $D \subseteq Y$ 满足 $\forall x \in X\ \exists y \in D\colon x \sqsubset y$，则称其为 R支配。

我们为这个关系系统 R 关联两个基数特征：

$\mathfrak{b}(\mathbf{R}) := \min\{|F| : F \subseteq X$ 是 R 无界的$\}$ R 的无界数，并且

$\mathfrak{d}(\mathbf{R}) := \min\{|D| : D \subseteq Y$ 是 R支配的$\}$ R 的支配数。

实数集的对偶定义为 $\mathbf{R}^\perp := \langle Y, X, \sqsubset^\perp \rangle$ 其中 $y \sqsubset^\perp x$ 当且仅当 $x \not\sqsubset y$。注意$\mathfrak{b}(\mathbf{R}^\perp) = \mathfrak{d}($R) 且 $\mathfrak{d}(\mathbf{R}^\perp) = \mathfrak{b}(\mathbf{R})$。

下面，我们将定义有向预序，它们为关系系统提供了一个非常具有代表性的一般性示例。

定义 2.2. 我们称 $\langle S, \leq_S \rangle$ 为有向预序，若它是一个预序（即 $\leq_S$ 是 S 上的自反传递关系），使得

$$\forall\, x, y \in S\ \exists z \in S\colon x \leq_S z \text{ and } y \leq_S z.$$

有向预序 $\langle S, \leq_S \rangle$ 被视为关系系统 $S = \langle S, S, \leq_S \rangle$，其关联的基数特征记作 $\mathfrak{b}(S)$ 和 $\mathfrak{d}(S)$。基数 $\mathfrak{d}(S)$ 实际上是 S 的共尾性，通常记作 $\mathrm{cof}(S)$ 或 $\mathrm{cf}(S)$。

回顾一下，每当 S 是一个没有最大元的有向预序时，$\mathfrak{b}(S)$ 是无限且正则的，并且 $\mathfrak{b}(S) \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d}(S)) \leq \mathfrak{d}(S) \leq |S|$。更进一步，如果 L 是一个没有最大元的线性序，那么 $\mathfrak{b}(L) = \mathfrak{d}(L) = \mathrm{cf}(L)$。

例 2.3。考虑 $\omega^\omega = \langle \omega^\omega, \leq^* \rangle$，它是一个有向预序。基数特征 $\mathfrak{b} := \mathfrak{b}(\omega^\omega)$ 和 $\mathfrak{d} := \mathfrak{d}(\omega^\omega)$ 分别是著名的有界数和支配数。

与一个理想相关联的基数特征也可以用关系系统来刻画。

例 2.4. 对于 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$，定义关系系统：

(1) $\mathcal{I} := \langle \mathcal{I}, \mathcal{I}, \subseteq \rangle$，当 $\mathcal{I}$ 对并运算封闭时，它是一个有向偏序（例如，一个理想）。

(2) $\mathbf{C}_\mathcal{I} := \langle X, \mathcal{I}, \in \rangle$。

事实 2.5. 若 $\mathcal{I}$ 是实数集 X 上的一个理想，且包含 $[X]^{<\aleph_0}$，则

(a) $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathrm{add}(\mathcal{I})$，即 $\mathcal{I}$ 的可加性。(c) $\mathfrak{d}(\mathbf{C}_\mathcal{I}) = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$，即 $\mathcal{I}$ 的覆盖数。(b) $\mathfrak{d}(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{I})$，即 $\mathcal{I}$ 的共尾性。(d) $\mathfrak{b}(\mathbf{C}_\mathcal{I}) = \mathrm{non}(\mathcal{I})$，即 $\mathcal{I}$ 的一致性数。

图基联系是确定基数特征之间关系的一个有用概念。

定义 2.6. 设 $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 和 $\mathbf{R}' = \langle X', Y', \sqsubset' \rangle$ 是关系系统。若 $(\Psi_-, \Psi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}'$ 的图基联系，则称 $\Psi_-\colon X \to X'$ 和 $\Psi_+\colon Y' \to Y$ 是满足下述条件的函数。

$$\forall\, x \in X\ \forall\, y' \in Y'\colon \Psi_-(x) \sqsubset' y' \Rightarrow x \sqsubset \Psi_+(y').$$

关系系统之间的图基序定义为：$\mathbf{R} \preceq_\mathrm{T} \mathbf{R}'$ 当且仅当存在从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}'$ 的图基联系。图基等价定义为：$\mathbf{R} \cong_\mathrm{T} \mathbf{R}'$ 当且仅当 $\mathbf{R} \preceq_\mathrm{T} \mathbf{R}'$ 且 $\mathbf{R}' \preceq_\mathrm{T} \mathbf{R}$

事实 2.7. 假设 $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ 和 $\mathbf{R}' = \langle X', Y', \sqsubset' \rangle$ 是关系系统，并且 $(\Psi_-, \Psi_+)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ 是一个图基联系。

(a) 如果 $D' \subseteq Y'$ 是 R′ 支配的，那么 $\Psi_+[D']$ 是 R支配的。

(b) (Ψ_+, Ψ_-): $(\mathrm{R}')^\perp \to \mathrm{R}^\perp$ 是一个图基联系。

(c) 若 $E \subseteq X$ 是 R-无界的，则 $\Psi_-[E]$ 是 R′-无界的。

推论 2.8。

(a) $\mathrm{R} \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{R}'$ 蕴含 $(\mathrm{R}')^\perp \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{R}^\perp$。(b) $\mathrm{R} \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{R}'$ 蕴含 $\mathfrak{b}(\mathrm{R}') \leq \mathfrak{b}(\mathrm{R})$ 且 $\mathfrak{d}(\mathrm{R}) \leq \mathfrak{d}(\mathrm{R}')$。(c) $\mathrm{R} \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{R}'$ 蕴含 $\mathfrak{b}(\mathrm{R}') = \mathfrak{b}(\mathrm{R})$ 且 $\mathfrak{d}(\mathrm{R}) = \mathfrak{d}(\mathrm{R}')$。

例 2.9。用 $\mathbb{I}$表示将 ω 划分为有限个非空区间所得的集合。在 $\mathbb{I}$上定义以下关系:

$$I \sqsubseteq J \text{ iff } \forall^\infty n < \omega\ \exists m < \omega\colon I_m \subseteq J_n; \quad I \triangleright J \text{ iff } \exists^\infty n < \omega\ \exists m < \omega\colon I_n \supseteq J_m.$$

注意，$\sqsubseteq$ 是 $\mathbb{I}$上的有向预序，因此我们将 $\mathbb{I}$ 视为关系为 $\sqsubseteq$的关系系统。记 $\mathrm{D}_2 := \langle \mathbb{I}, \mathbb{I}, \not\triangleright \rangle$。

对每个 $I \in \mathbb{I}$，我们定义 $f_I\colon \omega \to \omega$和 $I^{*2} \in \mathbb{I}$，使得 $f_I(n) := \min I_n$，并且 $I^{*2}_n := I_{2n} \cup I_{2n+1}$。对每个递增的 $f \in \omega^\omega$，定义递增函数 $f^*\colon \omega \to \omega$，使得$f^*(0) = 0$且 $f^*(n+1) = f(f^*(n)+1)$，并定义 $I^f \in \mathbb{I}$，使得 $I^f_n := [f^*(n)\ f^*(n+1))$。

在 Blass [Bla10] 证明了 $\mathbb{I} \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{D}_2 \cong_{\mathrm{T}} \omega^\omega$。更具体地说，对任意递增函数 $g \in \omega^\omega$ 和 $I, J \in \mathbb{I}$:

(a) $f_I \leq^* g$ 推出 $I \sqsubseteq I^g$（所以 $\mathbb{I} \preceq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$）。

(b) $g \not\leq^* f_I$ 推出 $I^g \triangleright I$（所以 $\omega^\omega \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{D}_2$）。(c) $I^{*2} \sqsubseteq J$ 推出 $I \not\triangleright J$（所以 $\mathrm{D}_2 \preceq_{\mathrm{T}} \mathbb{I}$）。

最后，我们回顾关系系统的复合。

定义 2.10。对于 $e \in \{0, 1\}$，两个关系系统 $\mathrm{R}_e = \langle X_e, Y_e, \sqsubset_e \rangle$ 的复合定义为 $(\mathrm{R}_0; \mathrm{R}_1) := \langle X_0 \times X_1^{Y_0}, Y_0 \times Y_1, \sqsubset_* \rangle$ 其中

$$(x, f) \sqsubset_* (y, b) \text{ iff } x \sqsubset_0 y \text{ and } f(y) \sqsubset_1 b.$$

事实 2.11。设 R_i 是关于 $i < 3$ 的关系系统。若 $\mathrm{R}_0 \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{R}_1$, , 则 $(\mathrm{R}_0;\mathrm{R}_2) \preceq_{\mathrm{T}} (\mathrm{R}_1; \mathrm{R}_2)$ 且 $(\mathrm{R}_2;\mathrm{R}_0) \preceq_{\mathrm{T}} (\mathrm{R}_2;\mathrm{R}_1)$。

下面的 定理描述了复合对基数特征的影响 s.

定理 2.12（[Bla10，第 4.10] 定理）。设 R_e 是 $e \in \{0, 1\}$上的一个关系系统。那么$\mathfrak{d}(\mathrm{R}_0; \mathrm{R}_1) = \mathfrak{d}(\mathrm{R}_0) \cdot \mathfrak{d}(\mathrm{R}_1)$，并且 $\mathfrak{b}(\mathrm{R}_0; \mathrm{R}_1) = \min\{\mathfrak{b}(\mathrm{R}_0)\ \mathfrak{b}(\mathrm{R}_1)\}$。

3 定位与反定位

<escape>本节内容基于 [CM19，第 3 节。1]局部化基数和反局部化基数也通过关系系统来定义。</escape>

定义 3.1。我们固定一个序列 $b = \langle b(n) \colon n \in \omega \rangle$ 由非空集合构成，以及 $h \colon \omega \to \omega$。

(1) 将 $\prod b := \prod_{n\in\omega} b(n)$ 和 $\mathcal{S}(b,h) := \prod_{n\in\omega} [b(n)]^{\leq h(n)}$ 记为。第二个集合中的函数通常称为斜线。

(2) 当 x 和 φ 是定义域为 ω 的函数时，我们记作

(i) $x \in^* \varphi$ 当且仅当集合 $\{n \in \omega \colon x(n) \notin \varphi(n)\}$ 是有限的，读作“φ 局部化 x”；(ii) $x \in^\infty \varphi$ 当且仅当集合 $\{n \in \omega \colon x(n) \in \varphi(n)\}$ 是有限的。表达式 $x \notin^\infty \varphi$ 读作“φ 反局部化 x”。

(3) 设 $\mathrm{Lc}(b,h) := \langle \prod b, \mathcal{S}(b,h) \in^* \rangle$，这是一个关系系统。记 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} = \mathfrak{b}(\mathrm{Lc}(b,h))$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} = \mathfrak{d}(\mathrm{Lc}(b,h))$，我们称它们为局部化基数。[1]

(4) 令 $\mathrm{aLc}(b,h) := \langle \mathcal{S}(b,h) \prod b, \not\ni^\infty \rangle$，这是一个关系系统。记作 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h} = \mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(b,h))$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h} = \mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(b,h))$，我们称之为反局部化基数。[2]

当使用单个集合 a（例如一个序数）代替 b 和 h 时，我们指的是取值为 a 的常值序列。例如，在书写 $\mathrm{Lc}(\omega,h)$ 和 $\mathrm{aLc}(b,1)$ 时，ω 指的是取值为 ω 的常值序列，而 1 指的是取值为 1 的常值序列。对于任意集合 A，id_A 表示 A 上的恒等函数。

允许 b 和 h 的定义域为任意无限可数集 D，而不只是 ω，也是很实用的；即使研究 $D = \omega$ 已足以理解定位和反局部化。例如，当 $D \subseteq \omega$ 为无限集时，我们可以讨论 $\mathrm{Lc}(b{\restriction}D, h{\restriction}D)$ 和 $\mathrm{aLc}(b{\restriction}D, h{\restriction}D)$，以及与之相关的基数特征。

以下结果展示了定位与反定位之间自然的图基联系，并表明对于 b，只有 $b(n)$ 的基数与之相关。其证明很直接，因此略去。

事实 3.2. $\mathrm{Lc}(b,h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(b',h')$，且 $\mathrm{aLc}(b',h') \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{aLc}(b,h)$，只要对于除有限多个 n 以外的所有 $|b(n)| \leq |b'(n)|$以及 $h'(n) \leq h(n)$。特别地，我们有

(a) $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b',h'} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b',h'}$，

(b) $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b',h'}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b',h'} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}$。

事实 3.3. $\mathrm{aLc}(b,h)^\perp \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(b,h)$，因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$ 和 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}$。

在实数的组合学中，当对所有 $n < \omega$ 都有 $0 < h(n) < |b(n)| \leq \aleph_0$ 时，对定位和反定位基数的研究颇为有趣。平凡情形总结如下。

[1] 在 [KM22、CKM21], 中，这些分别记为 $\mathfrak{v}^\forall_{b,h}$ 和 $\mathfrak{c}^\forall_{b,h}$。[2] 在 [KM22、CKM21], 中，这些分别记为 $\mathfrak{c}^\exists_{b,h}$ 和 $\mathfrak{v}^\exists_{b,h}$。

（T1）如果对除有限多个 $n<\omega$ 之外的所有情况都有 $|b(n)|\leq h(n)$，则 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=1$ 和 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$ 未定义。另一方面，如果 $\exists^{\infty}n<\omega\colon\ h(n)=0$，那么 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=1$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$ 未定义。因此，对于 b、h，两个定位基数仅在 $1\leq^{*}h$ 和 $\exists^{\infty}n<\omega\colon\ h(n)<|b(n)|$ 时有定义。更进一步，如果 $A:=\{n<\omega:\ 1\leq h(n)<|b(n)|\}$（其为无限的），那么 $\mathrm{Lc}(b,h)\cong_{\mathrm{T}}\mathrm{Lc}(b{\restriction}A,h{\restriction}A)$，因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b{\restriction}A,h{\restriction}A}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b{\restriction}A,h{\restriction}A}$。

(T2) 如果 $\exists^{\infty}i<\omega\colon\ |b(n)|\leq h(n)$，那么 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=1$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}$ 未定义。另一方面，如果 $\forall^{\infty}n<\omega\colon\ h(n)=0$，那么 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=1$ 和 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}$ 未定义。因此，对于 b,h，两个反局部化基数都有定义，当且仅当对除有限多个 $n<\omega$ 以外的所有情况，$h(n)<|b(n)|$，且 $\exists^{\infty}n<\omega\colon\ h(n)\geq 1$。更进一步，若 A 如 (T1) 所示，则 $\mathrm{aLc}(b,h)\cong_{\mathrm{T}}\mathrm{aLc}(b{\restriction}A,h{\restriction}A)$，因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b{\restriction}A,h{\restriction}A}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b{\restriction}A,h{\restriction}A}$。

将范围限制在无限集合上，可得以下一般事实。

事实 3.4. 设 b 和 h 如定义 3.1中所述。若 $A\subseteq\omega$ 是无限的，则 $\mathrm{Lc}(b{\restriction}A,h{\restriction}A)\preceq_{\mathrm{T}}\mathrm{Lc}(b,h)$ 且 $\mathrm{aLc}(b{\restriction}A,h{\restriction}A)\preceq_{\mathrm{T}}\mathrm{aLc}(b,h)$。因此，$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}\leq\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b{\restriction}A,h{\restriction}A}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b{\restriction}A,h{\restriction}A}\leq\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$；反局部化基数也同样如此。
更进一步，如果 $\omega\setminus A$ 是有限的，那么 $\mathrm{Lc}(b{\restriction}A,h{\restriction}A)\cong_{\mathrm{T}}\mathrm{Lc}(b,h)$，且 $\mathrm{aLc}(b{\restriction}A,h{\restriction}A)\cong_{\mathrm{T}}\mathrm{aLc}(b,h)$。

当某些（或所有）$b(n)$ 不可数时，情况颇为有趣。我们不展开讨论这一情形，只在下文引用相关结果。

定理 3.5 ([CM19，定理 3.4])。

(a) 如果对于除有限多个 $i<\omega$ 之外的所有 $i<\omega$，$b(i)$ 都是无限的，那么

$$\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\max\{\mathrm{cof}([\kappa]^{\aleph_0}),\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}\}\ \textit{and}\ \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\min\{\mathrm{add}([\kappa]^{\aleph_0}),\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}\}$$

其中 $\kappa=$ 下极限$_{i<\omega}|b(i)|$。特别地，如果 $\kappa=\omega$ 那么 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}$ 且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}$；否则，如果 κ 不可数，那么 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\aleph_1$。

(b) 如果 $b(i)$ 对于无穷多个 $i<\omega$ 都是无限的，那么

$$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\min\{\mathrm{add}([\lambda]^{\aleph_0}),\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h}\}\ \textit{and}\ \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\max\{\mathrm{cof}([\lambda]^{\aleph_0}),\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h}\}$$

其中 $\lambda=$ 上极限$_{i<\omega}|b(i)|$。特别地，如果 $\lambda=\omega$，那么 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h}$ 且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h}$；如果 λ 是不可数的且 h 趋于无穷大，那么 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\aleph_1$。

此外，如果 $F:=\{i<\omega:\ |b(i)|<\aleph_0\}$ 是无限的，那么 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b{\restriction}F,h{\restriction}F}$ 以及 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b{\restriction}F,h{\restriction}F}$，参见 CM19，定理 3.6]引理。。。

从现在起，在处理定位和反定位时，我们假设 $0<h(n)<|b(n)|\leq\aleph_0$ 对于所有（除有限多个之外的）$n<\omega$。根据 定理 3.5 （以及其后的评注），对定位和反定位基数的研究可归结为以下情形 $b\in\omega^{\omega}$ 和 $b=\omega$（但我们不打算作此区分）。

定位和反定位关系系统都与以下关于最终不同函数的关系系统有关。

定义 3.6. 设 $b := \langle b(n) : n < \omega \rangle$ 是一个非空集合序列。定义关系系统 $\mathrm{Ed}_b := \langle \prod b, \prod b, \neq^\infty \rangle$，其中 $x =^\infty y$ 表示 $x(n) = y(n)$ 对无穷多个 n 成立。关系 $x \neq^\infty y$ 表示 x 和 y 最终不同。我们简写为 $\mathrm{Ed} := \mathrm{Ed}_\omega$（当 b 是常值函数 ω 时）。

事实 3.7. $\mathrm{aLc}(b, 1) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}_b$，所以 $\mathfrak{b}(\mathrm{Ed}_b) = \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b\,1}$，且 $\mathfrak{d}(\mathrm{Ed}_b) = \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b\,1}$，。

更多的是，若 $b \in \omega^\omega$，则 $\mathrm{Lc}(b, b-1) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{aLc}(b, 1)$，所以 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,\,b-1} = \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b\,1}$，且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,\,b-1} = \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b\,1}$，。

对于 $b \in \omega^\omega$，我们有如下联系。

引理 3.8 ([KM22])。给定 b、$h \in \omega^\omega$，满足 $b \geq 1$ 和 $h \geq 1$，定义 $d(n) := \left\lceil \frac{b}{h(n)}(n) \right\rceil$。那么 $\mathrm{Ed}_d \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{aLc}(b, h)$，所以 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,\,h} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{d\,1}$，且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{d,\,1} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b\,h}$，。

证明。对于每个 $n \in \omega$，我们将 $b(n)$ 划分为 $d(n)$ 个集合 $\langle b_{n,\,m} : m < d(n) \rangle$ 大小为 $\leq h(n)$。令 $\Psi_- : \prod d \to \mathcal{S}(b, h)$ 由 $\Psi_-(x)(n)$ 定义：$= b_{n,\,x(n)}$ 并令 $\Psi_+ : \prod b \to \prod d$，使得对于任意 $y \in \prod b$，$\Psi_+(y)(n)$ 是满足 $y(n) \in b_{n,\,m}$ 的唯一 $m \in d(n)$。容易看出，(Ψ_-, Ψ_+) 是所需的图基联系。

□

我们讨论局部化基数和反局部化基数的一些“不太有趣”的情形，这些情形基于 Goldstern 和 Shelah 的以下结果 [GS93]。

引理 3.9 ([GS93，引理 1。8])。设 b 和 b' 是非空集合的可数序列，并且 h，$h' \in \omega^\omega$。设 $I \in \mathbb{I}$ 且假设，对于 $n < \omega$，存在函数 $t_n : b'(n) \to \prod_{i \in I_n} b(i)$ 使得

$$\text{for any } s \in \prod_{i \in I_n} [b(i)]^{\leq h(i)},\ \left| t_n^{-1}\left[\prod_{i \in I_n} s(i)\right] \right| \leq h'(n).$$

那么，$\mathrm{Lc}(b', h') \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(b, h)$。

证明。定义 $f : \prod b' \to \prod b$，使得对于 $x \in \prod b'$，$f(x)$ 是 $t_n(x(n))$（$n < \omega$）的拼接；并定义 $g : \mathcal{S}(b, h) \to \mathcal{S}(b', h')$，使得对于 $\varphi \in \mathcal{S}(b, h)$，$g(\varphi)_n := t_n^{-1}\left[\prod_{i \in I_n} \varphi(i)\right]$（根据假设，其大小为 $\leq h'(n)$）。因此，(f, g) 是所需的图基联系。

□

引理 3.10（[GS93，引理 1.10]）。设 $p(n) := 2^n$（$n < \omega$），且 $0 < N < \omega$。那么 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{p,\,N} = \mathfrak{c}$。

证明。不等式 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{p,\,N} \leq \mathfrak{c}$ 显然。为证明反向不等式，将 $p(n)$ 解释为长度为 n 的二进制序列集合。对于 $z \in 2^\omega$，定义 $x_z \in \prod p$，使得 $x_z(i) := z \restriction i$。为导出矛盾，假设 $S \subseteq \mathcal{S}(p, N)$ 是一个大小为 $< \mathfrak{c}$ 的集合，且 $\prod p$ 中的每个实数都被 S 的某个元素局部化。那么，存在单个 $\varphi \in S$，将形如 x_z 的无穷多个实数局部化，但这是不可能的，因为这些 x_z 两两最终不同。

□

Le引理 3.11（[GS93，引理 1.11]）。假设 $2 \leq N < \omega$。则 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{N,\,1} = \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{N,\,N-1} = \mathfrak{c}$。

证明。 根据 事实 3.7 ，只需证明 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{N,\ N-1}=\mathfrak{c}$。不等式 $\leq$ 显然成立。反之，根据引理 3.10 ，只需证明 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{p,\ N-1}\leq\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{N,\ N-1}$；更进一步，我们证明 $\mathrm{Lc}(p,N-1)\preceq_{\mathrm{T}}\mathrm{Lc}(N,N-1)$。令 $I=\langle I_n:\ n<\omega\rangle$ 为 ω 的区间划分，使得 $|I_n|=N^{p(n)}$；令 $\{t_{n,i}:\ i\in I_n\}$ 枚举从 $p(n)$ 到 N 的所有函数，并定义 $t_n:\ p(n)\to N^{I_n}$，其中 $t_n(j):=\langle t_{n,\ i}(j):\ i\in I_n\rangle$。

根据引理 3.9，只需证明对于任意 $s\in([N]^{\leq N-1})^{I_n}$，都有 $\left|t_n^{-1}\left[\prod_{i\in I_n}s(i)\right]\right|\leq N-1$。反设存在两两不同的 $j_k\in p(n)$，使得对于 $k<N$，$t_n(j_k)\in\prod_{i\in I_n}s(i)$。选取某个 $t:\ p(n)\to N$，使得对于所有 $k<N$，$t(j_k):=k$，因此$t=t_{n,\ i}$对某个 $i\in I_n$成立。于是，对于所有 $k<N$，都有 $k=t_{n,\ i}(j_k)\in s(i)$，即 $s(i)=N$，这与 $|s(i)|\leq N-1$ 矛盾。 □

因此，当 h不发散至无穷大时，局部化基数很容易计算。

定理 3.12. 若 h 不趋于无穷大，则 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}\geq\mathfrak{c}$ 且 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=N+1$ 其中N 是满足以下条件的最小自然数：$A_N:=\{n<\omega:\ h(n)=N\}$ 是无限的。此外，当 $\forall^\infty n<\omega$: $|b(n)|\leq\mathfrak{c}$时，$\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathfrak{c}$。

在前一个定理中，由$\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathrm{cof}([\lambda]^{\aleph_0})$，当 $\lambda:=\limsup_{n<\omega}|b(n)|>\mathfrak{c}$ 根据定理 3.5可得。

证明。由事实 3.2、3.4 以及一般假设 $b(n)>h(n)>0$ 对所有 $n<\omega$均成立，可得 $\mathrm{Lc}(N+1,N)\preceq_{\mathrm{T}}\mathrm{Lc}(b\restriction A_N,h\restriction A_N)\preceq_{\mathrm{T}}\mathrm{Lc}(b,h)$，因此由引理 3.11，$\mathfrak{c}\leq\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$，且 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}\leq\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{N+1,N}$。注意，在 $\mathcal{S}(N+1,N)$ 中，没有任何单个扇形集能局部化 $(N+1)^\omega$ 中的所有常值函数，因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}\leq\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{N+1,\ N}\leq N+1$。反过来，由 N 的定义，$N\leq^* h$，因此 $N<\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$。于是 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}=\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{N+1,N}=N+1$。

此外，如果 $\forall n<\omega:\ |b(n)|\leq\mathfrak{c}$那么 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}\leq|\mathcal{S}(b,h)|=\left|\prod b\right|=\mathfrak{c}$。 □

对于序列 $\langle{}^{h(n)}|b(n)|,$ 当 $n<\omega\rangle$不收敛于 0 时，我们对反局部化基数也有~~类似~~的结果（当 $b(n)$ 是一个无限集时，~~令~~ ${}^{h(n)}|b(n)|=0$ ）。

定理 3.13. 如果序列 $\left\langle\frac{h(n)}{|b\ n}():\ n<\omega\right\rangle$ 不收敛于 0，则 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=N$其中 N 是满足以下条件的最小自然数：$B_N:=\{n<\omega:\ |b(n)|\leq N\cdot h(n)\}$ 是无限的，并且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}=\mathfrak{c}$。

证明。对于所有 $n\in B_N$，存在 $b(n)$ 的一个划分$\langle c_{n,j}:\ j<N\rangle$，使得对于每个 $j<N$，$0<|c_{n,j}|\leq h(n)$。定义 $\Psi_-:\ N^{B_N}\to\mathcal{S}(b,h)$，使得对于每个 $z\in N^{B_N}$ 和 $n\in B_N$，$\Psi_-(z)(n)=c_{n,z(n)}$，并且对于所有 $i\notin B_N$，$\Psi_-(z)(i)=\emptyset$；并定义 $\Psi_+:\ \prod b\to N^{B_N}$，使得对于 $n\in B_N$，$\Psi_+(x)(n)=j$ 当且仅当 $x(n)\in c_{n,j}$。注意，数对 (Ψ_-,Ψ_+) 见证了 $\mathrm{Ed}_N\preceq_{\mathrm{T}}\mathrm{aLc}(b,h)$，因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}\leq\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{N,1}$ 且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{N,1}\leq\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b\,h},$。另一方面，由事实 3.7 和定理 3.12，$\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{N,1}=\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{N,N-1}=N$ 且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{N,1}=\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{N,N-1}=\mathfrak{c}$。因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}\leq N$ 且 $\mathfrak{c}\leq\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b\,h},$。$\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b\,h}$ 的反向不等式由以下事实推出：对于除有限多个 $n<\omega$ 之外的所有情况，$(N-1)\cdot h(n)<|b(n)|$ （因此 $N-1<\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b\,h}$）。

令 $b'(n) :=$ 最小值$\{\omega, |b(n)|\}$。由于 $|b'(n)| \leq |b(n)|$ 对所有 $n < \omega$都成立，根据事实 3。2 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,\ h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b',h,}$。另一方面，$\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b',\ h} \leq \left|\prod b'\right| \leq \mathfrak{c}$，因此 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,\ h} \leq \mathfrak{c}$。 □

总之，当 $h(n)$ 发散至无穷时，局部化基数很有趣；当商 $^{h}{}_{(n)\ |b(n)|}$ 收敛至零时，反局部化基数很有趣。特别地，当 b是常值函数 ω时，参数 h 变得无关紧要（更一般地，当 h 如 b 定理定理 3.5所述时，h 也相当无关紧要）。为说明这一点，我们先给出几个非常有用的预备结果。

引理 3.14。设 $b = \langle b(i) : i < \omega\rangle$ 是非空集合序列，且 $h, h^+ \in \omega^\omega$。假设存在某个 $I \in \mathbb{I}$，使得对所有 $k < \omega$ 和 $i \in I_k$，$h(i) \geq h^+(k)$，并设 $b^+(k) := \prod_{i\in I_k} b(i)$。那么 $\mathrm{Lc}(b, h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(b^+, h^+)$。

证明。定义 $\Psi_- : \prod b \to \prod b^+$，并定义 $\Psi_+ : \mathcal{S}(b^+, h^+) \to \mathcal{S}(b, h)$，其中 $\Psi_-(x) = \langle x{\restriction}I_k : k < \omega\rangle$，且 $\Psi_+(S)(i) = \{t(i) : t \in S(k)\}$，其中 $k < \omega$ 是满足 $i \in I_k$ 的唯一元素。注意，$|\Psi_+(S)(i)| \leq |S(k)| \leq h^+(k) \leq h(i)$，因此 $\Psi_+(S) \in \mathcal{S}(b, h)$。容易证明，$\Psi_-(x) \in^* S$ 蕴含 $x \in^* \Psi_+(S)$。 □

引理 3.15. 设 $b = \langle b(i) : i < \omega\rangle$ 是一个非空集合序列，$h^+ \in \omega^\omega$ 且 $h^+ \geq^* 1$。设 $I = \langle I_n : n < \omega\rangle$ 是 ω 的区间划分，使得对所有 $n < \omega$，$|I_n| = h^+(n)$ 成立，并定义 $b^+(n) := \prod_{k\in I_n} b(k)$。那么 $\mathrm{aLc}(b^+, h^+) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}_b$。

证明。按如下方式定义 $F : \mathcal{S}(b^+, h^+) \to \prod b$：若 $\varphi \in \mathcal{S}(b^+, h^+)$，则寻找 $\varphi^* \in \mathcal{S}(b^+, h^+)$，使得 $\varphi(n) \subseteq \varphi^*(n)$ 且对所有 n，$|\varphi^*(n)| = h^+(n) = |I_n|$ 成立，于是枚举 $\varphi^*(n) := \{t^\varphi_{n,k} : k \in I_n\}$，并通过 $x_\varphi(k) := t^\varphi_{n,k}(k)$ 在 $k \in I_n$ 时定义 $F(\varphi) := x_\varphi$。另一方面，定义 $G : \prod b \to \prod b^+$，使得 $G(y) := \langle y{\restriction}I_n : n < \omega\rangle$。还需证明 $G(y) \in^\infty \varphi$ 蕴含 $y =^\infty x_\varphi$。存在无穷多个 $n < \omega$ 满足 $y{\restriction}I_n \in \varphi(n)$。对于这样的 n，$y{\restriction}I_n = t^\varphi_{n,k}$ 对某个 $k \in I_n$ 成立，因此 $x_\varphi(k) = t^\varphi_{n,k}(k) = y(k)$。故 $x_\varphi =^\infty y$。

□

定理 3.16. 如果 $h, h' \in \omega^\omega$ 是趋于 ∞ 的函数，那么 $\mathrm{Lc}(\omega, h) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(\omega, h')$。特别地，$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} = \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h'}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} = \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h'}$。

证明。固定 $h^+ \in \omega^\omega$ 严格递增，使得 $h^+(0) = 0$，$h^+ \geq^* h$ 且 $h^+ \geq^* h'$。只需证明 $\mathrm{Lc}(\omega, h^+) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(\omega, h)$（同样的证明也适用于 h'）。根据事实 3.2，我们得到 $\mathrm{Lc}(\omega, h^+) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(\omega, h)$。

对于逆向结论，定义 $g : \omega \to \omega$ 严格递增，使得 $g(0) = 0$ 且

$$\forall k < \omega\ \forall i \geq g(k) : h(i) \geq h^+(k).$$

令 $I_k = [g(k)\ g(k+1))$（ω 中的区间），并设 $b^+(k) := \omega^{I_k}$，其大小为 $\aleph_0$。因此，由事实 3.2 可得 $\mathrm{Lc}(b^+, h^+) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(\omega, h^+)$，所以我们只需证明 $\mathrm{Lc}(\omega, h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(b^+, h^+)$。但这由引理 3.14 得出。

□

定理 3.17。如果 $h \geq^* 1$，那么 $\mathrm{aLc}(\omega, h) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}$。

证明。回顾事实 3.7，$\mathrm{Ed} \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{aLc}(\omega, 1)$。显然，根据事实 3.2，$\mathrm{aLc}(\omega, 1) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{aLc}(\omega, h)$，因此只需证明 $\mathrm{aLc}(\omega, h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}$。令 $\langle I_n : n < \omega\rangle$ 为 ω 的区间划分，使得 $|I_n| = h(n)$，并令 $b(n) :=$ 最小值$\{\omega^{I_n}, \aleph_0\}$。由于对于除有限多个 n 之外的所有 n，$|b(n)| = \aleph_0$，$\mathrm{aLc}(b, h) \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{aLc}(\omega, h)$，所以我们只需证明 $\mathrm{aLc}(b, h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}$。但这由引理 3.15 得出。 □

此前的结果表明，我们只能从 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h}$, $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h}$, $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}$ 中得到四个基数（当 $h \to \infty$ 时对应第一对，当 $h \geq^* 1$ 时对应第二对）。在接下来的几节中，我们将介绍 Bartoszyński 的一个相当著名的结果，该结果表明，这些基数刻画了与测度和范畴相关的具体基数，即测度的可加性与共尾性，以及范畴的一致性数与覆盖数。

为完成本节，我们讨论定位和反定位基数的界限。

定义 3.18。定义以下基数特征。

$$\begin{aligned} \mathrm{minLc}_h &:= \min\{\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} : b \in \omega^\omega\}, \quad \mathrm{supLc}_h := \sup\{\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} : b \in \omega^\omega\}, \\ \mathrm{supaLc}_h &:= \sup\{\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h} : b \in \omega^\omega\}, \quad \mathrm{minaLc}_h := \min\{\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h} : b \in \omega^\omega\}. \end{aligned}$$

对于前两个基数，当 $h = \mathrm{id}_\omega$ 时，我们省略 h；对于后两个基数，当 $h = 1$ 时，我们省略 h。

参数 h 与这些极限无关。

定理 3.19。设 $h \in \omega^\omega$。则：

(a) 当 h 趋于无穷大时的 $\mathrm{minLc}_h = \mathrm{minLc}$ 和 $\mathrm{supLc}_h = \mathrm{supLc}$。

(b) 当 $h \geq^* 1$ 时，$\mathrm{supaLc}_h = \mathrm{supaLc}$ 和 $\mathrm{minaLc}_h = \mathrm{minaLc}$。

证明。(a)：取某个 $h^+ \in \omega^\omega$ increasing，使得 $h^+(0) = 0$ and $h^+ \geq^* h$。由于 h发散至无穷大，我们可以找到某个 $I \in \mathbb{I}$，如引理 3.14 中所述，因此存在某个 $b^+ \in \omega^\omega$，使得 $\mathrm{Lc}(b,h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(b^+,h^+)$。因此，对于任意 $b \in \omega$，$\mathrm{minLc}_{h^+} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b^+,h^+} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h}$ 且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b^+,h^+} \leq \mathrm{supLc}_{h^+}$，所以 $\mathrm{minLc}_{h^+} \leq \mathrm{minLc}_h$ 且 $\mathrm{supLc}_h \leq \mathrm{supLc}_{h^+}$。反向不等式由事实 3.2 可立即得到。

由于 $h^+ \geq \mathrm{id}_\omega$，同样的论证表明，$\mathrm{minLc} = \mathrm{minLc}_{h^+}$ 且 $\mathrm{supLc} = \mathrm{supLc}_{h^+}$。

(b)：设 $b \in \omega^\omega$。根据 引理 3.15，我们可以找到某个 $b' \in \omega^\omega$ 使得 $\mathbf{aLc}(b',h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{Ed}_b$，因此 $\mathrm{minaLc}_h \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b',h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b\,1}$,且 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b\ ,1} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b',h} \leq \mathrm{supaLc}_h$。因此，$\mathrm{minaLc}_h \leq \mathrm{minaLc}$ 且 $\mathrm{supaLc} \leq \mathrm{supaLc}_h$。反向不等式可由 事实 3.2 得出。 □

这些基数可用于刻画 $b = \omega$ 的局部化基数和反局部化基数。

定理 3.20. $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{minLc}_h\}$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{supLc}_h\}$。

证明。假设 $F \subseteq \omega^\omega$ 且 $|F| < \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{minLc}_h\}$。因此，存在某个 $d \in \omega^\omega$，使得对于每个 $x \in F$、$\forall^\infty i < \omega$： $x(i) < d(i)$。另一方面，由于 $|F| < \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{d,\ h}$，我们可以在 $\mathcal{S}(d,h)$ 中找到一个扇形集 $\subseteq \mathcal{S}(\omega,h)$，将 F 中的所有实数局部化（只需使用一个与 F 具有相同大小的族 $F' \subseteq \prod d$，使得 F' 的每个成员都是 F 中某个成员的有限修改，反之亦然）。因此，$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} \geq \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{minLc}_h\}$。

现在我们证明 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h} \leq \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{supLc}_h\}$。选取一个大小为 $\mathfrak{d}$ 的支配族 $D \subseteq \omega^\omega$，并且对于每个 $d \in D$，选取一个斜线族 $S_d \subseteq \mathcal{S}(d,h)$，使其见证 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{d,h}$。注意，$S := \bigcup_{d\in D} S_d \subseteq \mathcal{S}(\omega,h)$ 的大小为 $\leq \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{supLc}_h\}$，并且 ω^ω 中的每个实数都被 S 中的某个扇形集局部化，因此 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,h} \leq |S|$。

显然 $\omega^\omega \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{Lc}(\omega, h)$，因此 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} \leq \mathfrak{b}$ 且 $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h}$。另一方面，由于 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,\ h}$ 且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,\ h} \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\ h}$ 对任意 $b \in \omega^\omega$ (由 事实 3.2)，可得反向不等式。 □

正如定理 3.20中一样，我们有：

定理 3.21。$\min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}\} = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{minaLc}_h\}$ 以及 $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,h}\} = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{supaLc}_h\}$。

其他诸如 $\sup\{\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} :\ b \in \omega^\omega\}$ 的基数原则上并没有那么有趣：这个上确界将是 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{1,\ h}$，这是未定义的；或者至少，如果将 b 限制为大于 h，那么它将是 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{h+1,\ h} = \mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{h+1,\ 1}$。此外，当 h 不趋于无穷时，minLc_h 和 supLc_h 可由定理 3.12轻易刻画。然而，当施加更多限制时，我们会得到一些有趣的极限，并将在以下各节中讨论这些极限；例如，对于使 $\sum_{n<\omega} \frac{h_{(n)}}{b(n)}$ 收敛的 b、$h \in \omega^\omega$，$\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b\,h}$ 的最小值与测度覆盖有着深刻的联系。

4 测度与定位

我们先回顾一下术语。给定一个由非空集合组成的序列 $b = \langle b(n) :\ n \in \omega\rangle$，记作

$$\mathrm{seq}_{<\omega}\, b := \bigcup_{n<\omega} \prod_{i<n} b(i).$$

对每个 $\sigma \in \mathrm{seq}_{<\omega}(b)$，定义

$$[s] := [s]_b := \left\{x \in \prod b :\ s \subseteq x\right\}.$$

作为一个拓扑空间，$\prod b$ 具有乘积拓扑，其中每个 $b(n)$ 都赋予离散拓扑。注意，$\{[s]_b : s \in \mathrm{seq}_{<\omega}\, b\}$ 构成了该拓扑的一个开闭集基。当每个 $b(n)$ 都是可数的时，$\prod b$ 是一个波兰空间；此外，如果对于无穷多个 n，$|b(n)| \geq 2$，那么 $\prod b$ 是一个完美波兰空间。最相关的情形是：

- 康托尔空间 2^ω，其中对所有 n，$b(n) = 2$；以及
- 贝尔空间 ω^ω，其中对所有 n，$b(n) = \omega$。

现在我们回顾 $\prod b$ 上的勒贝格测度，其中每个 $b(n) \leq \omega$ 都是序数。对于任意序数 $0 < \eta \leq \omega$，在 η 的幂集上的概率测度 μ_η 定义如下：

- 当 $\eta = n < \omega$、μ_n 时，$= \frac{1}{n}$是满足以下条件的测度：对所有 $k < n$，$\mu_n(\{k\})$，以及
- 当 $\eta = \omega$、μ_ω 时，$= \frac{1}{2^{k+1}}$是满足以下条件的测度：对于 $k < \omega$，$\mu_\omega(\{k\})$。

记 Lb_b 为 $\langle \mu_{b(n)} :\ n < \omega\rangle$ 上的乘积测度，我们称之为 $\prod b$ 上的勒贝格测度，因此 Lb_b 是 $\prod b$ 的 Borel σ 代数上的概率测度。更具体地说，Lb_b 是 Borel σ 代数上的唯一测度，使得对于任意 $s \in \mathrm{seq}_{<\omega}\, b$，$\mathrm{Lb}_b([s]) = \prod_{i<|s|} \mu_{b(i)}(\{s(i)\})$。特别地，分别用 Lb、Lb_2 和 Lb_ω 表示 $\mathbb{R}$、2^ω 和 ω^ω 上的勒贝格测度。

注 4.1。

（1）如果 X 是完美波兰空间，那么 $\mathcal{M}(X) \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{M}(\mathbb{R})$，并且 $\mathbf{C}_{\mathcal{M}(X)} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$，其中$\mathcal{M}(X)$表示 X 的瘦子集理想（参见[Kec95，第 15.D 小节]）。因此，与瘦理想相关的基数特征独立于用于计算它的完美波兰空间。当上下文中空间明确时，我们将瘦理想记作 $\mathcal{M}$。

(2) 设 X 是一个波兰空间。用 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 上博雷尔子集的 σ-代数，并假设 $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ 是一个 σ-有限测度，满足 $\mu(X) > 0$，且每个单点集的测度均为零。用 $\mathcal{N}(\mu)$ 表示由 μ-零测集生成的理想；当 X 上的测度明确时，也记作 $\mathcal{N}(X)$。于是 $\mathcal{N}(\mu) \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{N}(\mathrm{Lb})$，且 $\mathbf{C}_{\mathcal{N}(\mu)} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{N}(\mathrm{Lb})}$，其中 Lb 是 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度（参见[Kec95，定理 17.41]）。因此，与两个零测理想相关的四元组基数特征相同。

当 $b = \langle b(n) : n < \omega \rangle$，每个 $b(n) \leq \omega$ 都是非零序数，且 $\prod b$ 是完美的时，我们有 Lb_b 满足上述 μ 的性质。

当测度空间已知时，我们将零理想记作 $\mathcal{N}$。

(3) 对于上述的 b，用 $\mathcal{E}(\prod b)$ 表示由 $\prod b$ 的 F_σ 零测度子集生成的理想。同样，定义 $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{E}([0,1])$。当 $\prod b$ 是完美的时，由 $F_b\colon \prod b \to [0,1]$ 定义的映射

$$F_b(x) := \sum_{n<\omega} \frac{x(n)}{\prod_{i\leq n} b(i)}$$

是连续满射，并且保持测度。因此，该映射通过像和原像，在 $\mathcal{E}(\prod b)$ 与 $\mathcal{E}([0,1])$ 之间保持集合关系。因此，$\mathcal{E}(\prod b) \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{E}([0,1])$，且 $\mathbf{C}_{\mathcal{E}(\prod b)} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{E}([0,1])}$。我们还有 $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{E}([0,1])$ 和 $\mathbf{C}_{\mathbb{R}} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{E}([0,1])}$，以及 $\mathcal{E}(\omega^\omega) \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{E}(2^\omega)$ 和 $\mathbf{C}_{\mathcal{E}(\omega^\omega)} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{E}(2^\omega)}$。

当空间明确时，我们只写 $\mathcal{E}$。因此，与 $\mathcal{E}$ 相关的基数特征不依赖于之前的空间。

本节旨在给出零理想的可加性和共尾性的以下刻画。

定理 4.2（Bartoszyński 1984 [Bar84]）。设 $h \in \omega^\omega$。若 h 发散至无穷大，则 $\mathrm{Lc}(\omega, h) \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{N}$。特别地，$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\, h} = \mathrm{add}(\mathcal{N})$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\omega,\, h} = \mathrm{cof}(\mathcal{N})$。

上述定理的证明分为两部分。第一部分证明 $\mathrm{Lc}(\omega, h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathcal{N}(\omega^\omega)$，第二部分证明 $\mathcal{N}(2^\omega) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(\omega, h)$。根据定理 3.16，只需对一个合适的 h 证明这一点，因此我们选取满足 $\sum_{i<\omega} \frac{1}{h\,i\,()} < \infty$ 的对象来证明。在开始证明第一个图基联系之前，我们先给出以下关于集合的概率独立性的引理。

引理 4.3。设 C 是一个可数集合且 $f\colon C \to [0,1]$。那么存在开闭集 $\langle K_i : i \in C \rangle$，属于实数集 ω^ω，使得 $\mathrm{Lb}_\omega(K_i) = f(i)$，并且对所有有限的 $F \subseteq C$，都有 $\mathrm{Lb}_\omega\left(\bigcap_{i\in F} K_i\right) = \prod_{i\in F} \mathrm{Lb}_\omega(K_i)$。

证明。对于每个 $i \in C$，存在某个 $x_i \in 2^\omega$ 使得 $f(i) = \sum_{k\in\omega} x_i(k)2^{-(k+1)}$。选取一个一一函数 $g\colon C \to \omega$，并且对于 $i \in C$，定义 $K_i := \{z \in \omega^\omega : x_i(z(g(i))) = 1\}$。为了说明 $\mathrm{Lb}_\omega(K_i) = f(i)$，令 $S_i := x_i^{-1}[\{1\}]$，于是得到 $K_i = \bigcup_{k\in S_i}\{z \in \omega^\omega : z(g(i)) = k\}$。注意，这是一个不交并，并且每个 $\{z \in \omega^\omega : z(g(i)) = k\}$ 的测度为$2^{-(k+1)}$。独立性的证明留给读者。 □

我们已准备好证明定理 4.2的第一个图基联系。

引理 4.4. 假设 $\sum_{i\in\omega} \frac{1}{h(i)} < \infty$。那么 $\mathrm{Lc}(\omega, h) \preceq_{\mathrm{T}} \mathcal{N}(\omega^\omega)$。

证明. 根据引理 4.3，存在 $\langle K_{i,j} : i, j \in \omega\rangle$ 在 ω^ω 中既开又闭，使得 $\mathrm{Lb}_\omega(K_{i,j}) = \frac{1}{h(i)}$并且 $\mathrm{Lb}_\omega\left(\bigcap_{(i,j)\in F} K_{i,j}\right) = \prod_{(i,j)\in F}\mathrm{Lb}_\omega(K_{i,j})$ 对任意有限的 $F \subseteq \omega \times \omega$ 都成立。

定义 $F\colon \omega^\omega \to \mathcal{N}(\omega^\omega)$，令 $F(x) := \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} K_{n,x(n)}$。我们断言 $F(x)$ 的测度为零。事实上，

$$\mathrm{Lb}_\omega(F(x)) \leq \mathrm{Lb}_\omega\left(\bigcup_{n\geq m} K_{n,x(n)}\right) \leq \sum_{n\geq m}\mathrm{Lb}_\omega(K_{n,x(n)}) = \sum_{n\geq m}\frac{1}{h(n)} \to 0 \text{ when } m \to \infty.$$

如下构造 $G\colon \mathcal{N} \to \mathcal{S}(\omega, h)$。设 $B \in \mathcal{N}$。我们使用以下事实，其证明从略。

事实 4.5. 若 $A \in \mathcal{B}(\omega^\omega)$ 且 $\mathrm{Lb}_\omega(A) > 0$，则存在某个紧 $K \subseteq A$，使得 $\mathrm{Lb}_\omega(K) > 0$，并且对于任意开 $U \subseteq \omega^\omega$，都有 $U \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Lb}_\omega(U \cap K) > 0$。

取如事实 4.5中所述的 $K_B \subseteq \omega^\omega \setminus B$。令 $T^B := \{s \in \omega^{<\omega} : K_B \cap [s] \neq \emptyset\}$，并对 $s \in T^B$，定义 $g_s^B(i) := \{j \in \omega : K_B \cap [s] \cap K_{i,\ j} = \emptyset\}$。那么，对于任意 $s \in T^B$，

$$\begin{aligned}
0 < \mathrm{Lb}_\omega(K_B \cap [s]) &\leq \mathrm{Lb}_\omega\left(\bigcap_{i\in\omega}\bigcap_{j\in g_s^B(i)}(\omega^\omega \setminus K_{i,j})\right)\\
&= \prod_i \prod_{j\in g_s^B(i)} \mathrm{Lb}_\omega(\omega^\omega \setminus K_{i,j}) && \text{由独立性,}\\
&= \prod_i \prod_{j\in g_s^B(i)} \left(1 - \frac{1}{h(i)}\right) = \prod_i \left(1 - \frac{1}{h(i)}\right)^{|g_s^B(i)|}\\
&\leq \prod_i e^{-\frac{|g_s^B(i)|}{h(i)}} && (\text{using } 1 + x \leq e^x)\\
&= e^{-\sum_i \frac{|g_s^B(i)|}{h(i)}}.
\end{aligned}$$

因此 $0 < e^{-\sum_i \frac{|g_s^B(i)|}{h(i)}}$，这意味着 $\sum_{i<\omega} \frac{|g_s^B(i)|}{h(i)} < \infty$。

固定一个正实数序列 $\langle \varepsilon_s : s \in T^B\rangle$，使得 $\sum_{s\in T^B}\varepsilon_s < 1$。定义 $f^B \in \omega^{T^B}$，使得 $\sum_{i\geq f^B(s)} \frac{|g_s^B(i)|}{h(i)} < \varepsilon_s$，并定义 $G(B) := \varphi^B$ 为时时彩官网

$$\varphi^B(i) := \bigcup\{g_s^B(i) : f^B(s) \leq i,\ s \in T^B\}.$$

注意，由于 $\varphi^B \in \mathcal{S}(\omega, h)$，因为

$$\begin{aligned}|\varphi^B(i)| &\le \sum\{|g^B_s(i)| : f^B(s) \le i,\ s \in T^B\}\\ &\le h(i)\sum\{\varepsilon_s : f^B(s) \le i,\ s \in T^B\} \le h(i).\end{aligned}$$

最后我们证明：若 $x \in \omega^\omega$, $B \in \mathcal{N}$ 和 $F(x) \subseteq B$，则 $x \in^* G(B) = \varphi^B$。
由于 $K_B \cap B = \emptyset$, $K_B \cap F(x) = \emptyset = K_B \cap \bigcap_m \bigcup_{i\ge m} K_{i,\ x(i)}$。因此 $\bigcap_m \bigcup_{i\ge m}(K_B \cap K_{i,\ x(i)}) = \emptyset$。于是，根据巴拿赫范畴定理，$\bigcup_{i\ge m}(K_B \cap K_{i,\ x(i)})$ 在 K_B 中不是稠密的，其中某个 m，所以存在某个 $s \in T^B$，使得 $[s] \cap \bigcup_{i\ge m}(K_B \cap K_{i,\ x(i)}) = \emptyset$。因此，对于所有 $i \ge m$，都有 $K_B \cap [s] \cap K_{i,\ x(i)} = \emptyset$，所以对于所有 $i \ge \max\{m, f^B(s)\}$，$x(i) \in g^B_s(i) \subseteq \varphi^B(i)$。□

对于定理4.2的逆向图基联系，我们需要一些关于编码 G_δ 的零测度子集 $\prod b$的结果，其中所有 $0 < b(n) \le \omega$ 序数如下所述。

定义 4.6。记 $\mathrm{cc}_b := [\mathrm{seq}_{<\omega} b]^{<\aleph_0}$。对于每个 $p \in \mathrm{cc}_b$，定义 $\mathrm{c}(p) := \bigcup_{s\in p}[s]$，它是 $\mathrm{seq}_{<\omega} b$ 的一个既开又闭子集。

定义 Nc_b 为所有满足以下条件的 $\bar p = \langle p_n : n < \omega\rangle \in \mathrm{cc}_b^\omega$ 的集合：$N(\bar p)$ 在 $\prod b$ 中的测度为零，其中

$$N(\bar p) := \bigcap_{n<\omega}\bigcup_{i\ge n} \mathrm{c}(p_i) = \left\{x \in \prod b : |\{i < \omega : x \in \mathrm{c}(p_i)\}| = \aleph_0\right\}.$$

事实 4.7。
(a) 对于 $\bar p \in \mathrm{cc}_b^\omega$，$\bar p \in \mathrm{Nc}_b$ 当且仅当 $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \exists N < \omega\ \forall n \ge N\colon \mathrm{Lb}_b\left(\bigcup_{N\le i<n} \mathrm{c}(p_i)\right) < \varepsilon$。

(b) 集合 Nc_b 在 cc_b^ω 中是博雷尔集，其中后者空间具有乘积拓扑，且 cc_b 为离散的。

(c) 对于 $\bar p \in \mathrm{cc}_b^\omega$，如果 $\sum_{n<\omega} \mathrm{Lb}_b(\mathrm{c}(p_n))$ 收敛，则 $\bar p \in \mathrm{Nc}_b$。

引理 4.8. 设 $\bar\varepsilon = \langle\varepsilon_n : n < \omega\rangle$ 是一个正实数序列。对于任意 $X \in \mathcal{N}(\prod b)$，存在某个 $\bar p \in \mathrm{Nc}_b$，使得 $X \subseteq N(\bar p)$ 且 $\mathrm{Lb}_b(\mathrm{c}(p_n)) < \varepsilon_n$ 对所有 $n < \omega$ 成立。

证明。不妨通过缩减 ε_n 的值，假设 $\sum_{n<\omega}\varepsilon_n$ 收敛。设 $X \subseteq \prod b$ 为零测度集，则对每个 $m < \omega$，存在某个 $\langle s_{m,\ i} : i < \omega\rangle \in (\mathrm{seq}_{<\omega} b)^\omega$，使得 $X \subseteq \bigcup_{i<\omega}[s_{m,i}]$ 且 $\sum_{i<\omega}\mathrm{Lb}([s_{m,i}]) < 2^{-m}\varepsilon_m$。然后，找一个递增函数 $f_m \in \omega^\omega$，满足 $f_m(0) = 0$，使得对所有 $0 < k < \omega$，$\sum_{i\ge f_m(k)}\mathrm{Lb}([s_{m,i}]) < 2^{-(m+k)}\varepsilon_{m+k}$。
对每个 $n < \omega$ 定义 $p_n := \bigcup_{m\le n}\{[s_{m,i}] : f_m(n-m) \le i < f_m(n-m+1)\}$。容易验证 $\bar p := \langle p_n : n < \omega\rangle$ 符合要求，特别是 $\bar p \in \mathrm{Nc}_b$ 根据 事实 4.7 (c)。□

现在我们可以完成定理 4.2的证明。
引理 4.9. 假设 $\sum_{n<\omega} \frac{1}{h(n)} < \infty$. 那么 $\mathcal{N}(2^\omega) \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Lc}(\omega, h)$.

证明. 为定义图基联系，考虑

$$b(n) := \left\{ p \in \mathrm{cc}_2 : \mathrm{Lb}_2(\mathrm{c}(p)) \leq \frac{1}{2^{n+1}(h(n)+1)} \right\},$$

其大小为 $\aleph_0$。因此 $\mathbf{Lc}(b,h) \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{Lc}(\omega,h)$。定义 $\Psi_-\colon \mathcal{N} \to \prod b$，其中 $\Psi_-(X) \in \mathbf{Nc}_2$ 是按照引理 4.8 得到的，并定义 $\Psi_+\colon \mathcal{S}(b,h) \to \mathcal{N}$，使得对于 $\varphi \in \mathcal{S}(b,h)$，$\Psi_+(\varphi) := N(\bar{p}^{\varphi})$，其中 $p_n^{\varphi} := \bigcup \varphi(n)$。经过常规计算可得 $\mathrm{Lb}(\mathrm{c}(p_n^{\varphi})) \leq 2^{-(n+1)}$，因此根据事实 4.7 (c)，$G(\varphi) \in \mathcal{N}$。显然，$\Psi_-(X) \in^* \varphi$ 蕴含 $X \subseteq \Psi_+(\varphi)$。 □

以下是用局部化基数刻画 $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ 和 $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ 的另一种方式，其中 $b \in \omega^\omega$，这只是对定理 3.20的重新表述。

定理 4.10. $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{minLc}\}$，且 $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{supLc}\}$。

5 范畴与反局部化

本节介绍反局部化基数与实数上的瘦理想所关联的基数特征之间的联系。就此而言，主要结果如下定理所示。

定理 5.1（Miller [Mil82], Bartoszyński [Bar87]）。若 $h \geq^* 1$，则 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,\,h} = \mathrm{non}(\mathcal{M})$，且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{\omega,\,h} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$。

在深入证明的细节之前，出于组合学方面的考虑，我们先引入以下关系系统。

定义 5.2. 定义关系系统 $\mathbf{Ed}^*_b = \langle \prod b, [\omega]^{\aleph_0} \times \prod b, \mathrel{=\!\!*} \rangle$，其中 $x \mathrel{=\!\!*} (w,y)$ 当且仅当对于除有限多个 $n \in w$ 之外的所有情形，$x(n) \neq y(n)$。记作 $\mathbf{Ed}^* := \mathbf{Ed}^*_\omega$。

定理 5.1 得以解决，这要归功于定理 3.17 以及以下结果。

定理 5.3。$\big((\omega^\omega)^\perp; (\mathbf{Ed}^*)^\perp\big)^\perp \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{M}} \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{Ed} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{Ed}^* \preceq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$。特别是，

$$\mathfrak{b}(\mathbf{Ed}) = \mathfrak{b}(\mathbf{Ed}^*) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) \ \textit{and}\ \mathfrak{d}(\mathbf{Ed}) = \mathfrak{d}(\mathbf{Ed}^*) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}).$$

我们将定理 5.3 的证明分为两部分：

(↯1) $\mathbf{C}_{\mathcal{M}} \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{Ed} \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{Ed}^* \preceq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$。

(↯2) $\big((\omega^\omega)^\perp; (\mathbf{Ed}^*)^\perp\big)^\perp \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathcal{M}}$.

作为(↯1)的推论，

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}(\mathbf{Ed}) = \mathfrak{b}(\mathbf{Ed}^*) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}) \text{ and } \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}(\mathbf{Ed}) = \mathfrak{d}(\mathbf{Ed}^*) \leq \mathfrak{d}.$$

另一方面，令 实数集$_0$ ：$=$ $(\omega^\omega)^\perp$，实数集$_1$ ：$=$ $(\mathbf{Ed}^*)^\perp$ 以及 实数集$_*$ ：$=$ (实数集$_0$; 实数集$_1$)。然后，运用 Theorem2.12,

$$\mathfrak{d}(\mathbf{R}_*^\perp) = \mathfrak{b}(\mathbf{R}_*) = \min\{\mathfrak{b}(\mathbf{R}_0), \mathfrak{b}(\mathbf{R}_1)\} = \min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}(\mathbf{Ed}^*)\} \text{ and}$$
$$\mathfrak{b}(\mathbf{R}_*^\perp) = \mathfrak{d}(\mathbf{R}_*) = \mathfrak{d}(\mathbf{R}_0) \cdot \mathfrak{d}(\mathbf{R}_1) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}(\mathbf{Ed}^*).$$

这意味着 $\mathfrak{d}(\mathrm{R}_*^\perp) = \mathfrak{d}(\mathrm{Ed}^*)$ 和 $\mathfrak{b}(\mathrm{R}_*^\perp) = \mathfrak{b}(\mathrm{Ed}^*)$。因此，($\lightning_2$) 蕴含 $\mathfrak{d}(\mathrm{Ed}^*) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ 且 $\mathrm{non}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{b}(\mathrm{Ed}^*)$，由此得证定理 5.1。

我们现在 证明 ($\lightning_1$)。将 $\mathrm{Fn}(A, B)$ 记为从 A 到 B 的有限部分函数集合。

引理 5.4. $\mathsf{C}_{\mathcal{M}} \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed} \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}^* \preceq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$

证明。对于 $\mathsf{C}_{\mathcal{M}} \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}$，在 ω^ω 中进行推导，并使用映射 $x \mapsto x$ 和 $y \mapsto \{x \in \omega^\omega : \ x \neq^\infty y\}$（这是一个贫 F_σ集）。关系 $\mathrm{Ed}^* \preceq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$ 也可通过使用映射 $x \mapsto x$和 $y \mapsto$ $(\omega, y+1)$ （其中 $y+1$ 按坐标求和来解释）轻松得到。

现在我们证明 $\mathrm{Ed} \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}^*$。关系 $\mathrm{Ed}^* \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}$ 很容易证明。对于逆向，设 $b(n) := \{s \in \mathrm{Fn}(\omega, \omega) : \ |s| = n+1\}$。由于对于所有 $n < \omega$， $|b(n)| = \aleph_0$，因此 $\mathrm{Ed}_b \cong_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}$，所以我们证明 $\mathrm{Ed}_b \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{Ed}^*$。定义 $G\colon [\omega]^{\aleph_0} \times \omega^\omega \to \prod b$，使得 $G(w, y) := \langle y{\restriction}\{k_i^w : \ i \leq n\} : \ n < \omega\rangle$，其中 $w := \{k_i^w : \ i < \omega\}$ 是递增枚举。函数 $F\colon \prod b \to \omega^\omega$ 定义如下：对于 $x \in \prod b$，定义一个序列 $\langle m_j^x : \ j < \omega\rangle$，使得 $m_j^x \in \mathrm{dom}\ x_j \setminus \{m_i^x : \ i < j\}$（这是可行的，因为 $|\mathrm{dom}\ x_j| = j+1$），并令 $F(x) := F_x \in \omega^\omega$ 为任意一个函数，使得对于所有 $j < \omega$， $F_x(m_j^x) = x_j(m_j^x)$。剩下要证明的是，$x =^\infty G(w, y)$ 意味着对于无穷多个 $n \in w$， $F_x(n) = y(n)$。注意， $x =^\infty G(w, y)$ 意味着对于无穷多个 j， $x_j = y{\restriction}\{k_i^w : \ i \leq j\}$。对于这些 j， m_j^x 是 w 中两两不同的元素，并且 $F_x(m_j^x) = x_j(m_j^x) = y(m_j^x)$，因此 F_x 和 y 在 w 的无穷多个点上相等。

□

要证明 ($\lightning_2$) 我们还需要进行一些工作。为此，我们使用贫瘠集的以下刻画。

引理 5.5。定义 $b^*(n) : = \bigcup_{k>n} 2^{[n,k)}$ 以及 $b^* := \langle b^*(n) : \ n < \omega\rangle$。则：

(a) 对任意 $f \in \prod b^*$, $M_f^* : = \{x \in 2^\omega : \ |\{n < \omega : \ x \supseteq f(n)\}| < \aleph_0\}$是 F_σ且是贫集

(b) 如果 $X \in \mathcal{M}(2^\omega)$，那么对于某个 $f \in \prod b^*$，有 $X \subseteq M_f^*$。(c) $\mathrm{Mg}^* \cong_{\mathrm{T}} \mathsf{C}_{\mathcal{M}}$，其中 $\mathrm{Mg}^* : = \langle 2^\omega, \prod b^*, \sqsubset\rangle$，且 $x \sqsubset f$由 $x \in M_f^*$定义。

由于每个 $b^*(n)$ 都是无限可数的，我们显然有：

引理 5.6。 设 b^* 如 引理 5.5中所述。则 $\mathbf{Ed}_{b^*}^* \cong_{\mathrm{T}} \mathbf{Ed}^*$。

下面的引理也将很有用。

引理 5.7。关系系统 $\mathbf{D} := \langle W^*, \omega^\omega, \leq^+\rangle$ 与 ω^ω图基等价，其中 W^* 是 ω^ω 中的递增函数的集合，并且 $x \leq^+ y$ 当且仅当对除有限多个 k之外的所有 k， $x_{k+1} \leq y(x_k)$。

证明。 我们使用 例 2.9 中的关系系统及其中引入的记号。我们证明 $\mathbf{D} \preceq_{\mathrm{T}} \mathbb{I}$ 和 $\mathbf{D}_2 \preceq_{\mathrm{T}} \mathbf{D}$。

关系 $\mathbf{D} \preceq_{\mathrm{T}} \mathbb{I}$ 由映射 $x \mapsto I_x$ 见证，其中 I_x 是端点为 $\{0\} \cup \{x_k$ 的区间划分： $k < \omega\}$，以及 $J \mapsto y_J$，其中 $y_J(k) : = \min J_{n+2}$，只要$k \in J_n$。

另一方面，$\mathsf{D}_2 \preceq_{\mathrm{T}} \mathsf{D}$ 由 $I \mapsto f_I$ 和映射 F 见证：$\omega^\omega \to \mathbb{I}$ 定义如下：对于 $y \in \omega^\omega$，选取某个递增的 $y' \in \omega^\omega$，使得 $y'(0) = 0$，并且对所有 $n > 0$ 都有 $y'(n) > y(n)$，再定义 $F(y) := I^{y'}$。若 $I \in \mathbb{I}$、$y \in \omega^\omega$ 且 $f_I \leq^+ y$，那么对于最终所有的 k：找到某个 n，使得 $f_I(n) \leq y'^*(k) < f_I(n+1)$，因此 $f_I(n+1) \leq y(f_I(n)) < y'(f_I(n)) < y'(y'^*(k)+1) = y'^*(k+1)$，这表明 $I^{y'}_k$ 不包含于 I_n，即 $I \not\supseteq I^{y'}$。 □

现在我们已经具备证明 (↯2)所需的一切条件。

引理 5.8。$\left((\omega^\omega)^\perp;\ (\mathsf{Ed}^*)^\perp\right)^\perp \preceq_{\mathrm{T}} \mathsf{C}_{\mathcal{M}}$

证明。应用事实 2.11、引理 5.5、5.6 和 5.7 后，只需证明 $\mathsf{R}^\perp_* \preceq_{\mathrm{T}} \mathsf{Mg}^*$，其中 $\mathsf{R}_* := (\mathsf{R}_0;\ \mathsf{R}_1)$，$\mathsf{R}_0 := \mathsf{D}^\perp$，以及 $\mathsf{R}_1 := (\mathsf{Ed}^*_{b^*})^\perp$，其中 b^* 如引理 5.6 所述。因此 $\mathsf{R}^\perp_* = \langle W^* \times \prod b^*,\ \omega^\omega \times ([\omega]^{\aleph_0} \times \prod b^*)^{W^*},\ R^\perp_* \rangle$，其中

$$(x,a) R^\perp_* (y,f) \text{ iff either } x \leq^+ y \text{ or } a \nmid f(x).$$

给定 $a \in \prod b^*$，令 $g_a\colon \omega \to \omega$，使得 $g_a(n) > n$ 且 $a(n) \in 2^{[n, g_a(n))}$。定义$F\colon W^* \times \prod b^* \to 2^\omega$，使得对于 $(x,a) \in W^* \times \prod b^*$，如果 $w_{x,\,a} := \{k < \omega\colon g_a(x_k) < x_{k+1}\}$ 是无限的（即 $x \not\leq^+ g_a$），则对于所有 $k \in w_{x,\,a}$，$F(x,a) \supseteq a(x_k)$。
如下定义 $G\colon \prod b^* \to \omega^\omega \times ([\omega]^{\aleph_0} \times \prod b^*)^{W^*}$。对于 $c \in \prod b^*$，定义 $f_c\colon W^* \to [\omega]^{\aleph_0} \times \prod b^*$，使得每当 $x \not\leq^+ g_c$，$f_c(x) := (z_{x,\,c}, c)$，其中 $z_{x,\,c} := \{x_k : k \in w_{x,\,c}\}$。因此令 $G(c) := (g_c, f_c)$。
我们证明 $\neg((x,a) R^\perp_* (g_c, f_c))$ 蕴含 $F(x,a) \notin M^*_c$。假设表明 $x \not\leq^+ g_c$，并且 $w := \{k \in w_{x,c}\colon a(x_k) = c(x_k)\}$ 是无限的。对于 $k \in w$，$g_a(x_k) = g_c(x_k)$，因此 $w \subseteq w_{x,\,a}$，并且对于所有 $k \in w$，$F(x,a) \supseteq a(x_k) = c(x_k)$。这意味着 $F(x,a) \notin M^*_c$。 □

利用等式 $\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ 以及 $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{M})\}$，我们可以将定理 3.21 重新表述如下。

定理 5.9。$\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathsf{minaLc}\}$，且 $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathsf{supaLc}\}$

注 5.10。令 $\mathcal{SN}$ 为 $\mathbb{R}$中强零测度子集构成的理想。Miller [Mil81]证明了 $\mathrm{non}(\mathcal{SN}) = \mathsf{minaLc}$（利用 Yorioka 理想也可以很容易看出，参见例如[CM19]）。因此，前一定理表明 $\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{SN})\}$。

6 测度与反局部化

我们给出了零理想的覆盖数和一致性数关于反定位基数的如下刻画。证明依赖于 Bartoszynski 在 [Bar88] 中发展的小集合组合学，用以研究零理想覆盖数的共尾性。

定理 6.1 (Bartoszyński 1988 [Bar88])。

$$\text{(A)}\quad \min\left(\{\mathfrak{b}\}\cup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}\right)\le \mathrm{cov}(\mathcal{N})$$
$$\le \min\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}.$$

特别是，如果 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})<\mathfrak{b}$ 那么

$$\mathrm{cov}(\mathcal{N})=\min\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}.$$

$$\text{(B)}\quad \sup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}\le \mathrm{non}(\mathcal{N})\le$$
$$\sup\left(\{\mathfrak{d}\}\cup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}\right).$$

特别地，如果 $\mathrm{non}(\mathcal{N})>\mathfrak{d}$ 则

$$\mathrm{non}(\mathcal{N})=\sup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}.$$

有些不等式可以由以下结果推得。

Lem引理 6.2 ([KM22，引理 2.3])。设 b，$h\in\omega^\omega$ 并假设 $b\ge 1$ 且 $h\ge^* 1$。

(a) 如果 $\sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty$，那么 $\mathsf{C}_{\mathcal{N}}\preceq_{\mathrm{T}}\mathsf{aLc}(b,h)^\perp$。特别地 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})\le\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}$，并且 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}\le\mathrm{non}(\mathcal{N})$。

(b) 如果 $\sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}=\infty$，那么 $\mathsf{C}_{\mathcal{E}}\preceq_{\mathrm{T}}\mathsf{aLc}(b,h)$。特别地 $\mathrm{cov}(\mathcal{E})\le\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}$，并且 $\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}\le\mathrm{non}(\mathcal{E})$。

证明。（a）：只需找到函数 $\Psi_-\colon\prod b\to\prod b$ 和 $\Psi_+\colon\mathcal{S}(b,h)\to\mathcal{N}(\prod b)$，使得对于任意 $x\in\prod b$ 以及任意 $\varphi\in\mathcal{S}(b,h)$，$\Psi_-(x)\in^\infty\varphi$ 推出 $x\in\Psi_+(\varphi)$。定义 $\Psi_-\colon\prod b\to\prod b$ 为恒等映射，并定义 $\Psi_+\colon\mathcal{S}(b,h)\to\mathcal{N}(\prod b)$，使其满足 $\Psi_+(\varphi):=\{x\in\prod b:\ x\in^\infty\varphi\}$。显然，$\Psi_-(x)\in^\infty\varphi$ 推出 $x\in\Psi_+(\varphi)$，但我们必须证明 $\Psi_+(\varphi)\in\mathcal{N}(\prod b)$，这反过来将保证 (Ψ_-,Ψ_+) 是所需的图基联系。注意

$$\Psi_+(\varphi)=\bigcap_{n\in\omega}\bigcup_{m\ge n}\left\{x\in\prod b:\ x(n)\in\varphi(n)\right\}.$$

现在，对于 $n \in \omega$

$$\begin{aligned}\mathrm{Lb}_b(\Psi_+(\varphi)) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Lb}_b\left(\bigcup_{m\geq n}\left\{x \in \prod b : x(n) \in \varphi(n)\right\}\right)\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq n} \mathrm{Lb}_b\left(\left\{x \in \prod b : x(n) \in \varphi(n)\right\}\right)\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq n}\frac{|\varphi(n)|}{b(n)} \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq n}\frac{h(n)}{b(n)} = 0,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立是因为 $\sum_{n\in\omega} \frac{h}{b}(n)\ (n) < \infty$。

（b）：由事实 3.7 和引理 3.8 可知，只需证明当 $\sum_{n<\omega} \frac{1}{d\,n}(\,) = \infty$ 时，$\mathcal{C}_\mathcal{E} \preceq_\mathrm{T} \mathrm{Ed}_d$。情形 $d \leq^* 1$ 显然成立，因此可以假设 $d \not\leq^* 1$。对于 $y \in \prod d$，令 $\Psi_+(y) := \{x \in \prod d : x \neq^\infty y\}$。注意，$\mathrm{Lb}_d(\Psi_+(y)) = \lim_{n\to\infty}\prod_{m\geq n}\left(1 - \frac{1}{d}(m)\right)$，并利用如下事实：对任意 x，$1 + x \leq e^x$，可得，

$$\prod_{m\geq n}\left(1 - \frac{1}{d(m)}\right) \leq \prod_{m\geq n} e^{-\frac{1}{d(m)}} = e^{-\sum_{m\leq n}\frac{1}{d(m)}} = 0,$$

因此 $\Psi_+(x) \in \mathcal{E}(\prod d)$。令 $\Psi_- : \prod d \to \prod d$ 为恒等函数，则 (Ψ_-, Ψ_+) 是所需的图基联系。 □

我们回顾 Bartoszyński 的小集概念。

定义 6.3 ([Bar88])。设 $I = \langle I_n : n \in \omega\rangle$ 是实数集的有限子集序列 ω。对于 $\varphi \in \prod_{n<\omega}\mathcal{P}(2^{I_n})$，我们定义

$$N_\varphi := \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \in \omega : x{\restriction}I_n \in \varphi(n)\}.$$

注意，$N_\varphi \in \mathcal{N}$ 每当 $\sum_{n<\omega}\frac{|\varphi(n)|}{2^{|I_n|}} < \infty$）时（根据事实 4.7 (c)）。

如果存在一个划分 $I = \langle I_n : n \in \omega\rangle$，将 ω 的一个余有限子集划分为有限集，并且 $\varphi \in \prod_{n<\omega}\mathcal{P}(2^{I_n})$，使得 $X \subseteq N_\varphi$ 且 $\sum_{n<\omega}\frac{|\varphi(n)|}{2^{|J_n|}} < \infty$），则集合 $X \subseteq 2^\omega$ 是小集。

我们可以将引理 4.8 改述如下：

引理 6.4。假设 $X \in \mathcal{N}(2^\omega)$。那么存在某个 $\varphi \in \prod_{k<\omega}\mathcal{P}(2^k)$，使得 $\sum_{k<\omega}\frac{|\varphi(k)|}{2^k} < \infty$）并且 $X \subseteq N_\varphi$。

证明。设 $\bar{\varepsilon} = \langle\varepsilon_n : n < \omega\rangle$ 是一个正实数序列，使得 $\sum_{n<\omega}\varepsilon_n < \infty$。根据引理 4.8，存在某个 $\bar{p} \in \mathrm{Nc}_2$，使得 $X \subseteq N(\bar{p})$，并且对于所有 $n < \omega$，都有 $\mathrm{Lb}_2(\mathrm{cc}(p_n)) < \varepsilon_n$。由于每个 $\mathrm{cc}(p_n)$ 都是 2^ω 的既开又闭子集，我们可以找到一个递增的自然数序列 $\langle k_n : n < \omega\rangle$，并且对于每个 $n < \omega$，找到一个集合 $T_n \subseteq 2^{k_n}$，使得 $\mathrm{cc}(p_n) = \{x \in 2^\omega : x{\restriction}k_n \in T_n\}$。注意，$\mathrm{Lb}_2(\mathrm{cc}(p_n)) = \frac{|T_n|}{2^{k_n}} < \varepsilon_n$。

定义

$$\varphi(k) := \begin{cases} T_n & \text{if } k = k_n \text{ for some } n < \omega,\\ \emptyset & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，φ 符合要求。 □

尽管有上述结果，Bartoszˊnski [Bar88] 证明了存在并非小集的零测集。另一方面，他证明了每个零测集都可以被两个小集覆盖。这启发了以下定义。

定义 6.5. 若 $\mathbf{t} = (L, \varphi, \varphi')$ 满足以下条件，则称其为 2-小编码：

(T1) $L \in \mathbb{I}$，并记作 $L_{2k} = [n_k, m_k)$ 和 $L_{2k+1} = [m_k, n_{k+1})$（因此 $n_k < m_k < n_{k+1}$），并定义 $I := \langle I_k : k < \omega \rangle$ 和 $I' := \langle I'_k : k < \omega \rangle$ 为 $I_k := [n_k, n_{k+1})$ 和 $I'_k := [m_k, m_{k+1})$。

(T2) $\varphi \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(2^{I_n})$ and $\varphi' \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(2^{I'_n})$ satisfies $\frac{|\varphi(k)|}{2^{|I_k|}} < \frac{1}{4^{k+1}}$ and $\frac{|\varphi'(k)|}{2^{|I'_k|}} < \frac{1}{4^{k+1}}$.

以下结果归功于 Bartoszˊnski，它不仅表明任意零测集都可以被两个小集覆盖，还表明少于 $\mathfrak{b}$ 个零测集可以包含在来自同一划分 L 的小集对的并集中：

引理 6.6. 设 $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是实数集 $\mathcal{N}(2^\omega)$ 中的一个集族，且 $D \subseteq \mathbb{I}$ 在 $\mathbb{I}$ 上支配。若 $\kappa < \mathfrak{b}$，则存在某个 $L \in D$ 以及一些针对 $\alpha < \kappa$ 的 2-小编码 $\mathbf{t}^\alpha = (L, \varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)$（基于同一划分 L），使得对任意 $\alpha < \kappa$，$G_\alpha \subseteq N_{\varphi_\alpha} \cup N_{\varphi'_\alpha}$。

证明。对每个 $\alpha < \kappa$ 找一个 $\psi_\alpha \in \prod_{k<\omega} \mathcal{P}(2^k)$，使得 $\sum_{k<\omega} \frac{|\psi_\alpha(k)|}{2^k} < \infty$）并且 $G_\alpha \subseteq N_{\psi_\alpha}$（由 引理 6.4）。通过对 $k < \omega$ 递归定义 n^α_k 和 m^α_k，使得 $n^\alpha_0 = 0$，

$$m^\alpha_k := \min\left\{ j < \omega : j > n_k,\ 2^{n^\alpha_k} \sum_{i \geq j} \frac{|\psi_\alpha(i)|}{2^i} < \frac{1}{4^{k+1}} \right\}, \text{ and}$$

$$n^\alpha_{k+1} := \min\left\{ j < \omega : j > m_k,\ 2^{m^\alpha_k} \sum_{i \geq j} \frac{|\psi_\alpha(i)|}{2^i} < \frac{1}{4^{k+1}} \right\}.$$

通过 $L^\alpha_k := [n^\alpha_{2k}, n^\alpha_{2(k+1)})$ 定义 $L^\alpha \in \mathbb{I}$。由于 $\kappa < \mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathbb{I})$，找一个 $L \in D$，使得对于所有 $\alpha < \kappa$，$L^\alpha \sqsubseteq L$（见例 2.9）。记作 $L_{2k} = [n_k, m_k)$ 和 $L_{2k+1} = [m_k, n_{k+1})$，并定义 $I_k := [n_k, n_{k+1})$ 和 $I'_k := [m_k, m_{k+1})$。那么，对于每个 $\alpha < \kappa$，存在某个 $j_\alpha < \omega$，使得对于所有 $k \geq j_\alpha$，L_{2k} 包含 $[n^\alpha_\ell, m^\alpha_\ell)$，并且 L_{2k+1} 包含 $[m^\alpha_{\ell'}, n^\alpha_{\ell'+1})$，其中某些 $\ell, \ell' \geq k$。

对每个 $\alpha < \kappa$，定义 φ_α 和 φ'_α，使得

$$\varphi_\alpha(k) := \left\{ s \in 2^{I_k} : s \text{ is compatible with some } t \in \bigcup_{i=m_k}^{n_{k+1}-1} \psi_\alpha(i) \right\}, \text{ and}$$

$$\varphi'_\alpha(k) := \left\{ s \in 2^{I'_k} : s \text{ is compatible with some } t \in \bigcup_{i=n_{k+1}}^{m_{k+1}-1} \psi_\alpha(i) \right\}$$

当 $k \geq j_\alpha$ 时，否则 $\varphi_\alpha(k) = \varphi'_\alpha(k) = \emptyset$。

我们证明 $\mathbf{t}_\alpha := (L, \varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)$ 满足要求，也就是说，我们证明 (T2) 满足定义 6.5，并且 $G_\alpha \subseteq N_{\varphi_\alpha} \cup N_{\varphi'_\alpha}$。当 (T2) 显然成立时，有 $k < j_\alpha$；而当$k \geq j_\alpha$，$n_k \leq n^\alpha_\ell < m^\alpha_\ell \leq m_k$ 并且 $m_k \leq m^\alpha_{\ell'} < n^\alpha_{\ell'+1} \leq n_{k+1}$ 对某个 ℓ，$\ell' \geq k$，因此

$$\frac{|\varphi_\alpha(k)|}{2^{|I_k|}} \leq 2^{n_k} \sum_{i \geq m_k} \frac{|\psi_\alpha(i)|}{2^i} \leq 2^{n^\alpha_\ell} \sum_{i \geq m^\alpha_\ell} \frac{|\psi_\alpha(i)|}{2^i} < \frac{1}{4^{\ell+1}} \leq \frac{1}{4^{k+1}}$$

并且，类似地，

$$\frac{|\varphi'_\alpha(k)|}{2^{|I'_k|}} < \frac{1}{4^{k+1}}.$$

对于 $G_\alpha \subseteq N_{\varphi_\alpha} \cup N_{\varphi'_\alpha}$：若 $x \in G_\alpha$，则集合 $K := \{i < \omega : \ x\restriction i \in \psi_\alpha(i)\}$ 是无限的，因此 $K_1 := K \cap \bigcup_{k<\omega}[m_k, n_{k+1})$ 和 $K_2 := K \cap \bigcup_{k<\omega}[n_{k+1}, m_{k+1})$ 中至少有一个是无限的。若 K_1 是无限的，则对于所有满足 $K \cap [m_k, n_{k+1}) \neq \emptyset$ 的 k，都有 $x\restriction I_k \in \varphi_\alpha(k)$，而这样的 k 有无限多个，因此 $x \in N_{\varphi_\alpha}$；类似地，若 K_2 是无限的，则可得出 $x \in N_{\varphi'_\alpha}$。 □

下面的结果是通过剖析 Bartoszyński 对定理 6.1的原始证明得出的。

引理 6.7. 假设 $\mathbf{t} = (L, \varphi, \varphi')$ 是一个 2-小编码。对于 $k < \omega$，定义，

$S^{\mathbf{t}}_k := \{s \in 2^{[n_k, m_k)} : \ s$ 在 $\varphi(k)\}$内部至少有 $2^{n_{k+1}-m_k-k}$ 多个扩张，$\tilde{S}^{\mathbf{t}}_k$:
$= \{s \in 2^{[n_k, m_k)} : \ s$ 在 $\varphi'(k-1)\}$内部至少有 $2^{n_k-m_{k-1}-k}$ 多个扩张，

˜并设集合 $S^{\mathbf{t}}_0 := \emptyset$。那么：

(a) $\frac{|S^{\mathbf{t}}_k|}{2^{m_k-n_k}} < \frac{1}{2^{k+2}}$ *and* $\frac{|\tilde{S}^{\mathbf{t}}_k|}{2^{m_k-n_k}} < \frac{1_k}{2}$对所有 $k < \omega$均成立。

(b) 由 $\varphi_{\mathbf{t}}(k) := \left\{s \in 2^{I_k} : \ s\restriction[n_k, m_k)\right.$ 定义的扇形集$\varphi_{\mathbf{t}} \in \prod_{k<\omega} 2^{I_k} \in S^{\mathbf{t}}_k \cup \left.\tilde{S}^{\mathbf{t}}_k\right\}$ 满足 $\frac{|\varphi_{\mathbf{t}}(k)|}{2^{|I_k|}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$。

˜(c) 假设 $x \in 2^\omega$，使得 $\exists k_0 < \omega\ \forall k \geq k_0$: $x\restriction I_k \notin \varphi_{\mathbf{t}}(k)$。对于 $k < \omega$，记 $I_k := [m_k, n_{k+1})$，并定义：

$$\psi^x_{\mathbf{t}}(k) := \left\{s \in 2^{\tilde{I}_k} : x\restriction[n_k, m_k)^\frown s \in \varphi(k) \text{ or } s^\frown x\restriction[n_{k+1}, m_{k+1}) \in \varphi'(k)\right\}$$

当 $k \geq k_0$，或 $\psi^x_{\mathbf{t}}(k) := \emptyset$ 否则。则 $\forall k < \omega$: $\frac{|\psi^x_{\mathbf{t}}(k)|}{2^{|\tilde{I}_k|}} < \frac{1}{2^{k-1}}$。

˜(d) 假设 $x \in 2^\omega$ 如前一项所述，且 $y \in 2^\omega$ 满足 $\forall^\infty k < \omega$: $y\restriction I_k \notin \psi^x_{\mathbf{t}}(k)$。定义 $z_{x,y} \in 2^\omega$ 为

$$z_{x,y}(i) := \begin{cases} y(i) & \text{if } i \in \tilde{I}_k \text{ for some } k, \\ x(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

然后 $z_{x,\ y} \notin N_\varphi \cup N_{\varphi'}$。

证明。(a)：我们只需估计 $S^{\mathbf{t}}_k$ 的大小。对于 $k \in \omega$，注意到

$$|S^{\mathbf{t}}_k| \cdot 2^{n_{k+1}-m_k-k} \leq |\varphi(k)|.$$

因此，

$$|S^{\mathbf{t}}_k| \leq 2^k \cdot \frac{|\varphi(k)|}{2^{n_{k+1}-n_k}} \cdot 2^{m_k-n_k},$$

由此可根据 定义 6.5 (T2) 得出

$$\frac{|S^{\mathbf{t}}_k|}{2^{m_k-n_k}} \leq 2^k \cdot \frac{|\varphi(k)|}{2^{n_{k+1}-n_k}} < \frac{1}{2^{k+2}}.$$

同理，我们可以证明

$$\frac{|\tilde{S}^{\mathbf{t}}_k|}{2^{m_k-n_k}}<\frac{1}{2^k}.$$

(b)：由(a)可知，因为 $^{\varphi_{\mathbf{t}}}(\frac{k}{2^{|I_k|}}\leq\frac{|S^{\mathbf{t}}_k|}{2^{m_k-n_k}}+\frac{|\tilde{S}^{\mathbf{t}}_k|}{2^{m_k-n_k}})$。

(c)：注意，对所有 $k\geq k_0$，

$$\frac{|\psi^x_{\mathbf{t}}(k)|}{2^{|\tilde{I}_k|}}=\frac{|\psi^x_{\mathbf{t}}(k)|}{2^{n_{k+1}-m_k}}<\frac{2^{n_{k+1}-m_k-k}}{2^{n_{k+1}-m_k}}+\frac{2^{n_{k+1}-m_k-(k+1)}}{2^{n_{k+1}-m_k}}<\frac{1}{2^{k-1}}.$$

(d)：设 $z:=z_{x,\,y}$。该假设表明，对于除有限多个 $k<\omega$ 之外的所有情况，$x{\restriction}[n_k,m_k)^\frown y{\restriction}[m_k,n_{k+1}\notin\varphi(k)$ 且 $y{\restriction}[m_k,n_{k+1})^\frown x{\restriction}[n_{k+1},m_{k+1})\notin\varphi'(k)$，这说明 $z{\restriction}I_k\notin\varphi(k)$ 且 $z{\restriction}I'_k\notin\varphi'(k)$。因此，$z\notin N_\varphi\cup N_{\varphi'}$。 □

定理 6.1 的证明定理 6.1。(A)：鉴于 引理 6.2 (a)，第二个不等式很容易得出。因此，我们证明另一个不等式

$$\min\left(\{\mathfrak{b}\}\cup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\,b,h\in\omega^\omega\text{ and }\sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}\right)\leq\mathrm{cov}(\mathcal{N}).$$

假设 国产成人

$$(\bigstar)\qquad\kappa<\min\left(\{\mathfrak{b}\}\cup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\,b,h\in\omega^\omega\text{ and }\sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}\right)$$

以及 $\{G_\alpha:\ \alpha<\kappa\}\subseteq\mathcal{N}$。我们证明 $\bigcup_{\alpha<\kappa}G_\alpha\neq 2^\omega$。

通过运用引理 6.6，我们可以找到一个 $L\in\mathbb{I}$ 以及用于 $\alpha<\kappa$ 的 2-小编码 $\mathbf{t}^\alpha=(L,\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha)$，使得对于任意 $\alpha<\kappa$，$G_\alpha\subseteq N_{\varphi_\alpha}\cup N_{\varphi'_\alpha}$。由引理 6.7 (b)，令 $b(k):=2^{I_k}$ 且 $h(k):=\frac{2^{|I_k|}}{2^{k-1}}$，我们可以得到一个族 $\{\varphi_{\mathbf{t}_\alpha}:\ \alpha<\kappa\}\subseteq\mathcal{S}(b,h)$。然后，通过运用 (★)，我们可以找到一个 $x\in 2^\omega$，使得对于所有 $\alpha<\kappa$，$\forall^\infty k$: $x{\restriction}I_k\notin\varphi_{\mathbf{t}_\alpha}(k)$。因此，由引理 6.7 (c)，令 $\tilde{b}(k):=2^{|\tilde{I}_k|}$ 且 $\tilde{h}(k):=\frac{2^{|I_k|}}{2^{k-1}}$，我们可以得到一个族 $\{\psi^x_{\mathbf{t}_\alpha}:\ \alpha<\kappa\}\subseteq\mathcal{S}(\tilde{b},\tilde{h})$。再次使用 (★)，我们可以找到一个 $y\in 2^\omega$，使得对于所有 $\alpha<\kappa$,$\forall^\infty k\in\omega$: $y{\restriction}I_k\notin\psi^x_{\mathbf{t}_\alpha}(k)$。

最后，根据引理 6.7 (d)，我们可以找到一个实数 $z:=z_{x,\,y}\in 2^\omega$ 使得对所有 $\alpha<\kappa$都有 $z\notin N_{\varphi_\alpha}\cup N_{\varphi'_\alpha}$。由于对所有 $\alpha<\kappa$都有 $G_\alpha\subseteq N_{\varphi_\alpha}\cup N_{\varphi'_\alpha}$，我们得到 $z\notin\bigcup_{\alpha<\kappa}G_\alpha$。(B)：第一个不等式由引理 6.2 (a)很容易推出，因此我们证明

$$\mathrm{non}(\mathcal{N})\leq\sup\left(\{\mathfrak{d}\}\cup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b,h}:\,b,h\in\omega^\omega\text{ and }\sum_{n\in\omega}\frac{h(n)}{b(n)}<\infty\right\}\right).$$

选取一个 $\mathbb{I}$-支配族 $D\subseteq\mathbb{I}$，由划分构成，使得 $|D|=\mathfrak{d}$，并且对所有 $L\in D$ 和 $k<\omega$，都有 $|L_k|>k+3$。对于 $L\in D$，令 $L_{2k}=[n^L_k,m^L_k)$、$L_{2k+1}=[m^L_k,n^L_{k+1})$，并定义 $I^L_k:=[n^L_k,n^L_{k+1})$ 和 $\tilde{I}^L_k:=[m^L_k,n^L_{k+1})$。定义 $b^L(k):=2^{I^L_k}$、$\tilde{b}^L(k):=2^{\tilde{I}^L_k}$、$h^L(k)=\frac{2^{|I^L_k|}}{2^{k-1}}$

且 $\tilde{h}^L(k) := \frac{2^{|\tilde{I}^L_k|}}{2^{k-1}}$，并选取见证 F^L 和 $\tilde{F}^L$，它们属于 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{b^L}$、$h^L$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{aLc}}_{\tilde{b}^L}$，$\tilde{h}^L$，依次对应。对于 $x \in F^L$ 和 $y \in \tilde{F}^L$，按 引理 6.7 (d) 中的方法定义 $z^L_{x,y}$。

要证明所需的不等式，只需证明集合

$$Z := \left\{ z^L_{x,y} : x \in F^L,\ y \in \tilde{F}^L,\ L \in D \right\}$$

不属于 $\mathcal{N}$。令 $G \in \mathcal{N}$，由 引理 6.6 可知，存在某个 $L \in D$ 以及某个 2-小编码 $\mathbf{t} = (L, \varphi, \varphi')$，使得 $G \subseteq N_\varphi \cup N_{\varphi'}$。由 引理 6.7 (b)，$\varphi_{\mathbf{t}} \in \mathcal{S}(b^L, h^L)$，因此存在某个 $x \in F^L$，使得 $\forall^\infty k < \omega:\ x{\restriction}I_k \notin \varphi_{\mathbf{t}}(k)$。接着，由 引理 6.7 (c)，$\psi^x_{\mathbf{t}} \in \mathcal{S}(\tilde{b}^L, \tilde{h}^L)$，因此存在某个 $y \in \tilde{F}^L$，使得 $\forall^\infty k < \omega:\ y{\restriction}\tilde{I}_k \notin \psi_{\mathbf{t}}(k)$。因此，由 引理 6.7 (d)，$z^L_{x,y} \notin N_\varphi \cup N_{\varphi'}$，所以 $z^L_{x,y} \notin G$。因此，对于任意 $G \in \mathcal{N}$，$Z \not\subseteq G$，所以 $Z \notin \mathcal{N}$。 □

7 测度与弱定位

我们介绍定位结构的一个弱化形式，并展示其与由闭零测集生成的σ-理想 $\mathcal{E}$ 之间的联系。具体而言，我们使用弱定位基数来刻画$\mathcal{E}$和$\mathcal{E}$，见定理 7.9。本节的结果最初由 Bartoszyński 和 Shelah 提出，见 [BS92]，，并在 [Car23] 中重新表述。

我们使用以下斜线集合来寻找 $\mathcal{E}$ 的合适基。

定义 7.1. 对于递增函数 $b \in \omega^\omega$，定义以下斜线集合：

(1) $\mathcal{S}_b := \left\{ \varphi \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(b(n)) :\ \forall n \in \omega:\ \frac{|\varphi(n)|}{2^{b(n+1)-b(n)}} \leq \frac{1}{2^n} \right\}$。

(2) $\mathcal{S}^{\mathrm{w}}_b := \left\{ \varphi \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(b(n)) :\ \exists^\infty n \in \omega:\ \frac{|\varphi(n)|}{2^{b(n+1)-b(n)}} \leq \frac{1}{2^n} \right\}$。

注意，$\mathcal{S}_b \subseteq \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_b$ 并且

$$\varphi \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_b \text{ implies } \liminf_{n\to\infty} \frac{|\varphi(n)|}{|b(n)|} < 1,$$
$$\varphi \in \mathcal{S}_b \text{ implies } \limsup_{n\to\infty} \frac{|\varphi(n)|}{|b(n)|} < 1.$$

另请注意，若 b 是定义域为 ω 的函数，且对所有 $i < \omega$ 和 $h \in \omega^\omega$，$b(i) \neq \varnothing$，则

$$(\diamondsuit) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{h(n)}{|b(n)|} < 1 \text{ iff } \forall m < \omega:\ \prod_{n\geq m} \frac{h(n)}{|b(n)|} = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{h(n)}{|b(n)|} < 1 \text{ iff } \forall A \in [\omega]^{\aleph_0}:\ \prod_{n\in A} \frac{h(n)}{|b(n)|} = 0.$$

我们可以通过以下方式使用扇形集在 $\mathcal{E}$ 中构造集合。

引理 7.2。设 $\tilde{b} \in \omega^\omega$ 递增，且对于所有 $n \in \omega$， $b(n) := 2^{\tilde{b}(n+1)-\tilde{b}(n)}$ 。如果 $\varphi \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(b(n))$ 且 $\liminf_{n\to\infty} \frac{|\varphi(\tilde{b}\restriction n)|}{|b\restriction n|} < 1$，那么集合

$$H_{\tilde{b},\varphi} := \left\{ x \in 2^\omega : \forall^\infty n \in \omega \colon x\restriction[\tilde{b}(n), \tilde{b}(n+1)) \in \varphi(n) \right\}$$

属于 $\mathcal{E}$。

证明。注意到$H_{\tilde{b},\,\varphi}$是闭零测集的可数并

$$B^m_{\tilde{b},\varphi} := \left\{ x \in 2^\omega : \forall\, n \geq m \colon x\restriction[\tilde{b}(n), \tilde{b}(n+1)) \in \varphi(n) \right\} \text{ for } m \in \omega.$$

确实，

$$\begin{aligned} \mathrm{Lb}(B^m_{\tilde{b},\varphi}) &= \prod_{n\geq m} \mathrm{Lb}\left(\left\{ x \in 2^\omega : x\restriction[\tilde{b}(n), \tilde{b}(n+1)) \in \varphi(n) \right\} \right) \\ &= \prod_{n\geq m} \frac{|\varphi(n)|}{2^{\tilde{b}(n+1)-\tilde{b}(n)}} = 0, \end{aligned}$$

其中后一个等式由（◊）成立。因此，对于所有 $m < \omega$， $\mathrm{Lb}(B^m_{\tilde{b},\,\varphi}) = 0$ ，所以

$$H_{\tilde{b},\varphi} = \bigcup_{m<\omega} B^m_{\tilde{b},\varphi}$$

是一个 F_σ 零测集，因此属于 $\mathcal{E}$。 □

推论 7.3。设 $b \in \omega^\omega$ 递增。如果 $\varphi \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_b$那么 $H_{b,\,\varphi} \in \mathcal{E}$。

得益于前面的引理，我们得到 $\mathcal{E}$ 的一个基。

引理 7.4（[BS92，定理 4.3]）。设 $C \in \mathcal{E}$。则存在某个递增$b \in \omega^\omega$ 以及某个 $\varphi \in \mathcal{S}_{\tilde{b}}$ ，使得 $C \subseteq H_{\tilde{b},\,\varphi}$。

证明。无损一般性地，假设 $C \subseteq 2^\omega$ 是 F_σ 型零测集。那么 C 可以写成$\bigcup_{n\in\omega} C_n$ ，其中 $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ 是一个由零测度闭集组成的递增闭集族。
注意，每个 C_n 都是一个紧集。容易看出，如果 $K \subseteq 2^\omega$ 是一个紧零测集，那么

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall^\infty n\ \exists T \subseteq 2^n \colon K \subseteq [T] \text{ and } \frac{|T|}{2^n} < \varepsilon$$

，其中 $[T] := \bigcup_{t\in T}[t]$。因此，我们可以定义一个递增的 $b \in \omega^\omega$，使得 $b(0) := 0$，并且

$$\tilde{b}(n+1) := \min\left\{ m > \tilde{b}(n) : \exists T_n \subseteq 2^m \colon C_n \subseteq [T_n] \text{ and } \frac{|T_n|}{2^m} < \frac{1}{4^{\tilde{b}(n)}} \right\}.$$

接下来，选取 $T_n \subseteq 2^{\tilde{b}(n+1)}$ ，使得 $C_n \subseteq [T_n]$ 和 $\frac{|T_n|}{2^{\tilde{b}(n+1)}} < \frac{1}{4^{\tilde{b}(n)}}$。现在，对于 $n \in \omega$，定义

$$\varphi(n) := \left\{ s\restriction[\tilde{b}(n), \tilde{b}(n+1)) : s \in T_n \right\}.$$

显然，对于每个 $n < \omega$，都有 $|\varphi(n)| \leq |T_n|$ ，因此

$$\frac{|\varphi(n)|}{2^{\tilde{b}(n+1)-\tilde{b}(n)}} < \frac{1}{2^{\tilde{b}(n)}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

因此，$\varphi \in \mathcal{S}_{\tilde{b}}$ 并且，根据 推论 7.3， $H_{\tilde{b},\,\varphi} \in \mathcal{E}$。我们还有 $C \subseteq H_{\tilde{b},\,\varphi}$。 □

下面是一个技术性引理，它使我们能够将 ω^ω 与 $\mathcal{E}$联系起来。这对于证明本节的主要定理至关重要。

引理 7.5. 设 b_0，$b_1 \in \omega^\omega$ 是递增函数，设 $b_1^* \in \omega^\omega$ 如 例 2.9 中所述，并设 $\varphi \in \mathcal{S}_{b_0}$。

(1) 如果 $b_1 \not\leq^* b_0$，则存在一个 $\varphi^* \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_{b_1^*}$，使得 $H_{b_0,\,\varphi} \subseteq H_{b_1^*,\,\varphi^*}$。

（2）如果 $b_0 \leq^* b_1$，那么存在一个 $\varphi_* \in \mathcal{S}_{b_1^*}$，使得 $H_{b_0,\,\varphi} \subseteq H_{b_1^*,\,\varphi_*}$。

证明。令 $I_n := [b_0(n)\ b_0(n+1))$ 且 $I_n^* := [b_1^*(n)\ b_1^*(n+1))$，对所有 $n < \omega$ 成立。

(1)：根据 例 2.9，若 $b_1 \not\leq^* b_0$，则 $\exists^\infty n\ \exists m\colon\ I_m \subseteq I_n^*$。这使我们能够为每个 $\varphi^*(n)$ 定义 $n \in \omega$ 如下：

$$\varphi^*(n) := \begin{cases} \{s \in 2^{I_n^*} : I_m \subseteq I_n^* \text{ and } s{\restriction}I_m \in \varphi(m)\} & \text{if } m \text{ is minimal such that} \\ & n \leq m \text{ and } I_m \subseteq I_n^*; \\ 2^{I_n^*} & \text{if such } m \text{ does not exist.} \end{cases}$$

还需证明 $\varphi^* \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_{b_1^*}$，也就是说，存在无穷多个 n，使得对于某个$m \geq n$，有 $I_m \subseteq I_n^*$。令 $0 < m < \omega$ 满足 $b_0(m+1) < b_1(m+1)$（这样的元素有无穷多个，因为 $b_1 \not\leq^* b_0$），并选择 $n < \omega$ 使得 $b_0(m) \in I_n^*$，即$b_1^*(n) \leq b_0(m) < b_1^*(n+1)$。我们分两种情形讨论：

情形 1：$b_0(m+1) \leq b_1^*(n+1)$。于是 $b_1(n) \leq b_1^*(n) \leq b_0(m) < b_0(m+1) \leq b_1^*(n+1)$，因此 $I_m \subseteq I_n^*$。另一方面，$b_1(n) < b_0(m+1) < b_1(m+1)$，因此 $n < m+1$，也就是说，$n \leq m$。

情形 2：$b_0(m+1) > b_1^*(n+1)$。我们进一步区分两种子情形：

子情形 2.1：$b_0(m-1) \geq b_1^*(n)$。在这种情况下，我们有 $I_{m-1} \subseteq I_n^*$。于是 $b_1(n+1) \leq b_1^*(n+1) < b_0(m+1) < b_1(m+1)$，因此 $b_1(n+1) < b_1(m+1)$，这意味着 $n+1 < m+1$，也就是说，$n \leq m-1$。

子情形 2.2：$b_0(m-1) < b_1^*(n)$。在这种情况下，我们将得到矛盾。注意$m-1 \leq b_0(m-1) < b_1^*(n)$，因此 $m \leq b_1^*(n)$。于是 $b_1(m+1) \leq b_1(b_1^*(n)+1) = b_1^*(n+1)$。

另一方面，$b_0(m+1) > b_1^*(n+1)$，因此 $b_1^*(n+1) < b_0(m+1) < b_1(m+1) \leq b_1^*(n+1)$，这就产生了矛盾。

我们已经证明，存在无穷多个 n，使得对于某个 $m \geq n$，有 $I_m \subseteq I_n^*$。因此 $\varphi^* \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_{b_1^*}$。事实上，对于这样的 n 和 m，取最小的 m，

$$\frac{|\varphi^*(n)|}{2^{|I_n^*|}} = \frac{|\varphi(m)|}{2^{|I_m|}} \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^n}.$$

因此，$H_{b_0,\,\varphi} \subseteq H_{b_1^*,\,\varphi^*}$。

(2)：再次根据 例 2.9，注意若 $b_0 \leq^* b_1$ 则 $\forall^\infty n\ \exists m\colon\ I_m \subseteq I_n^*$。对于每个 $n \in \omega$，

$$\varphi_*(n) := \begin{cases} \{s \in 2^{I_n^*} : I_m \subseteq I_n^* \text{ and } s{\restriction}I_m \in \varphi(m)\} & \text{if } m \text{ is minimal such that} \\ & n \leq m \text{ and } I_m \subseteq I_n^*; \\ \emptyset & \text{if such } m \text{ does not exist.} \end{cases}$$

如 (1) 所述的论证保证，除有限多个 n 外，对每个 n 都存在某个 $m \geq n$，使得 $I_m \subseteq I_n^*$。这意味着 $\varphi_* \in \mathcal{S}_{b_1^*}$ 和 $H_{b,\ \varphi} \subseteq H_{b_1^*,\ \varphi_*}$。 □

我们提出以下自然的定位弱化概念，其灵感来自 [Bre06]。

定义 7.6. 设 b 是一个函数，其定义域为 ω，且对所有 $i < \omega$，$b(i) \neq \emptyset$，并设 $h \in \omega^\omega$。定义

$$\mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b,h) := \bigcup_{A \in [\omega]^{\aleph_0}} \mathcal{S}(b{\restriction}A, h{\restriction}A),$$

即，所有在 $\mathcal{S}(b,h)$ 中定义域无限的部分斜线的集合。令 $\mathrm{wLc}(b,h) := \langle \prod b, \mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b,h) \in^* \rangle$ 为关系系统，其中 $x \in^* \varphi$ 当且仅当 $\forall^\infty i \in \mathrm{dom}\ \varphi$: $x(i) \in \varphi(i)$（扩展定义 3.1中的记号）。记 $\mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b\ h}, := \mathfrak{b}(\mathrm{wLc}(b,h))$ 和 $\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b\ h}, := \mathfrak{d}(\mathrm{wLc}(b,h))$。

我们可以轻易证明:

事实 7 7 $A \subseteq \omega$ $b\ h \preceq_{\mathrm{T}} b{\restriction}A\ h{\restriction}A$ $\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b\ h} \leq$。对于任意无限的 R，wLc(R,) $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b{\restriction}A\ h{\restriction}A}$ $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b{\restriction}A\ h{\restriction}A} \leq \mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b\ h}$ Lc(R,)。特别地，,,和,,。

我们得到 $\mathcal{E}$ 与弱定位之间的以下简单联系。

引理 7.8。如果 $b \in \omega^\omega$ 且 $\limsup_{n\to\infty} {}^{h}\cancel{(n)}\, b\ (n) < 1$，则 $\mathrm{C}_{\mathcal{E}} \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{wLc}(b,h)$。特别地，$\mathrm{cov}(\mathcal{E}) \leq \mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b\ h}$，且 $\mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b,\ h} \leq \mathrm{non}(\mathcal{E})$。

证明。由于 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}(2^\omega)} \cong_{\mathrm{T}} \mathcal{C}_{\mathcal{E}(\prod b)}$ 由 注 4.1 (3)可得，我们只需证明 $\mathrm{C}_{\mathcal{E}(\prod b)} \preceq_{\mathrm{T}} \mathrm{wLc}(b,h)$。我们找到了一个函数 Ψ_+: $\mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b,h) \to \mathcal{E}(\prod b)$，使得对于任意 $x \in \prod b$ 和 $\varphi \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b,h)$，如果 $x \in^* \varphi$，则 $x \in \Psi_+(\varphi)$。
对于 $\varphi \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b,h)$，令

$$\Psi_+(\varphi) := \left\{ x \in \prod b : \forall^\infty n \in \mathrm{dom}\,\varphi : x(n) \in \varphi(n) \right\}.$$

我们只需验证 $\Psi_+(\varphi) \in \mathcal{E}(\prod b)$。事实上，令 $A_m := (\mathrm{dom}\ \varphi) \setminus m$ 并且

$$B_{\varphi,m} := \left\{ x \in \prod b : \forall n \in A_m : x(n) \in \varphi(n) \right\},$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lb}(B_{\varphi,m}) &= \prod_{n \in A_m} \mathrm{Lb}\left(\left\{ x \in \prod b : x(n) \in \varphi(n) \right\} \right) \\
&= \prod_{n \in A_m} \frac{|\varphi(n)|}{b(n)} \\
&\leq \prod_{n \in A_m} \frac{h(n)}{b(n)} = 0.
\end{aligned}$$

（最后一个等式由（◊）推出。）因此，对于所有 $m \in \omega.$，$\mathrm{Lb}(B_{\varphi,m}) = 0$。于是 $\Psi_+(\varphi) = \bigcup_{m<\omega} B_{\varphi,m}$ 是一个 F_σ 零测集，并且属于 $\mathcal{E}(\prod b)$。 □

现在我们终于可以证明本节的主要结果了。

定理 7.9 ([BS92], [Car23])。

$$\text{(A)}\quad \min\left(\{\mathfrak{d}\}\cup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}\right)\le \mathrm{cov}(\mathcal{E})$$
$$\le \min\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}.$$

特别地，如果 \(\operatorname{cov}(\{v1\})\) $<\mathfrak{d}$ 则

$$\mathrm{cov}(\mathcal{E})=\min\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}.$$

$$\text{(B)}\quad \sup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}\le \mathrm{non}(\mathcal{E})\le$$
$$\sup\left(\{\mathfrak{b}\}\cup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}\right).$$

特别地，如果 $\mathrm{non}(\mathcal{E})>\mathfrak{b}$ 那么

$$\mathrm{non}(\mathcal{E})=\sup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \textit{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}.$$

证明。（A）第二个不等式由 引理 7.8显然成立。因此，我们证明另一个不等式

$$\mathrm{cov}(\mathcal{E})\ge \min\left(\{\mathfrak{d}\}\cup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\ \text{and}\ \limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}\right).$$

要证明这一点，假设 $\kappa<\min\left(\{\mathfrak{d}\}\cup\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{wLc}}_{b,h}:\ b,h\in\omega^\omega\text{且}\limsup_{n\to\infty}\frac{h(n)}{b(n)}<1\right\}\right)$ 以及 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{E}$ 的基数为 κ。我们将证明 $\bigcup\mathcal{J}\neq 2^\omega$。

对于每个 $A\in\mathcal{J}$，根据引理 7.4，存在 $b_A\in\omega^\omega$ 递增的以及 $\varphi_A\in\mathcal{S}_{b_A}$，使得$A\subseteq H_{b_A,\varphi_A}$。由于 $|\mathcal{J}|<\mathfrak{d}$，我们可以找到一个递增函数 b，使得对于 $A\in\mathcal{J}$，有 $b\not\le^* b_A$。然后，根据引理 7.5，我们得到一个族 $\{\varphi^*_A:\ A\in\mathcal{J}\}\subseteq\mathcal{S}^{\mathrm{w}}_{b^*}$，使得$A\subseteq H_{b^*,\varphi^*_A}$。注意，该族对应于 $\mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b',h)$ 中一个由 $\le\kappa$ 个部分斜线组成的族，并满足 $b'(n):=2^{b^*(n+1)-b^*(n)}$ 以及 $h(n):=b'(n)^{2^n}$，对所有 n 均成立。因此，我们可以找到一个 $x\in\prod b'$，使得对于所有 $A\in\mathcal{J}$，都有$\exists^\infty n<\omega:\ x(n)\notin\varphi^*_A(n)$。令 $y\in 2^\omega$ 满足，对于所有 n，有 $x(n)=y{\restriction}[b'(n)\ b'(n+1))$。显然，对于所有 $A\in\mathcal{J}$，都有 $y\notin H_{b^*,\varphi^*_A}$，因此 $y\notin\bigcup\mathcal{J}$。

(B)：第一个不等式由引理 7.8显然成立。要证明另一个不等式，取一个大小为 $\mathfrak{b}$ 的递增函数无界族 $B\subseteq\omega^\omega$。对于每个 $b\in B$，定义 $b'(n):=2^{b^*(n+1)-b^*(n)}$ 以及 $h_b(n):=b'(n)^{2^n}$，对所有 $n<\omega$ 均如此，并选取一个见证 $F_b\subseteq\prod b'$，使得 $\mathfrak{b}^{\mathrm{wLc}}_{b',h_b}$。对于每个 $x\in F_b$，定义 $y_x\in 2^\omega$，使得 $x(n)=y_x{\restriction}[b'(n)\ b'(n+1))$。令

$$H:=\{y_x:\ x\in F_b,\ b\in B\}.$$

只需证明 $H \notin \mathcal{E}$即可。事实上，如果 $A \in \mathcal{E}$，根据引理 7.4，存在 $b_A \in \omega^\omega$递增的和 $\varphi \in \mathcal{S}_{b_A}$，使得 $A \subseteq H_{b_A,\,\varphi}$。于是，存在某个 $b \in B$ 使得 $b \not\leq^* b_A$因此，根据 引理 7.5，存在某个 $\varphi^* \in \mathcal{S}^{\mathrm{w}}_{b^*}$ 使得 $A \subseteq H_{b^*,\,\varphi^*}$。由于 φ^* 对应于 $\mathcal{S}^{\mathrm{w}}(b', h_b)$ 的一个成员，因此存在某个 $x \in F_b$ 使得 $x \not\in^* \varphi^*$，所以 $y_x \notin H$。这表明，对于所有有 $A \in \mathcal{E}$都有 $A \not\subseteq H$，因此 $H \notin \mathcal{E}$。□

我们在不提供证明的情况下回顾以下关于与 $\mathcal{E}$ 相关的基数特征的结果。

定理 7.10 ([BS92], 另见 [BJ95，第 2 节。6])。

(a) $\min\{\mathfrak{b}, \mathrm{non}(\mathcal{N})\} \leq \mathrm{non}(\mathcal{E}) \leq \min\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{N})\}$。
(b) $\max\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathrm{cov}(\mathcal{E}) \leq \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{cov}(\mathcal{N})\}$。
(c) $\mathrm{add}(\mathcal{E}) = \mathrm{add}(\mathcal{M})$ 且 $\mathrm{cof}(\mathcal{E}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$。

我们可以询问，是否能够在 定理 7.9 中用局部化基数替换弱定位基数。根据 事实 7.7 我们有

$$\mathrm{cov}(\mathcal{E}) \leq \min\left\{\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} : b, h \in \omega^\omega \text{ and } \limsup_{n\to\infty} \frac{h(n)}{b(n)} < 1\right\} \text{ and}$$
$$\mathrm{non}(\mathcal{E}) \geq \sup\left\{\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} : b, h \in \omega^\omega \text{ and } \limsup_{n\to\infty} \frac{h(n)}{b(n)} < 1\right\},$$

但其他不等式若将弱定位替换为定位，则并不成立。为说明这一点，注意标准的 σ-中心偏序集 $\mathbb{E}$，它在 ω^ω 上添加一个最终不同的实数，会增大 $\mathrm{non}(\mathcal{E})$，但不会增大 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,\,h}$，其中 b、$h \in \omega^\omega$ 满足 $0 < h < b$。因此，若 $\aleph_1 < \kappa < \lambda = \lambda^{\aleph_0}$ 是基数且 κ 是正则基数，则长度为 $\lambda\kappa$（序数乘积）的 $\mathbb{E}$ 的 FS 迭代强制得到 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,\,h} = \aleph_1$ 和 $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{b,\,h} = \lambda$，对所有满足 $0 < h < b$ 的 b、$h \in \omega^\omega$ 均成立，并且 $\mathrm{non}(\mathcal{E}) = \mathrm{cov}(\mathcal{E}) = \kappa$。

8 零可加集与定位

我们根据局部化基数刻画零可加理想的一致性数。证明基于 Shelah 对零可加集的刻画，这比 Pawlikowski 原来的[Paw85] 证明更简单。

定义 8.1. 集合 $X \subseteq 2^\omega$ 是零可加的，若 $X + A \in \mathcal{N}$ 对所有 $A \in \mathcal{N}$均成立。（这里，2^ω 上的和是逐坐标模 2 求和。）记 $\mathcal{NA}$ 为 2^ω中零可加集所构成的 σ-理想。

设 $I = \langle I_n : n \in \omega\rangle$ 是 ω的有限子集序列。对于 $\varphi \in \prod_{n<\omega} \mathcal{P}(2^{I_n})$，定义

$$H^*_\varphi := \{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \in \omega : x{\restriction}I_n \in \varphi(n)\}.$$

我们采用 Shelah 给出的以下刻画 $\mathcal{NA}$。

定理 8.2 ([她95])。 集合 $X \subseteq 2^\omega$ 属于 $\mathcal{NA}$ 当且仅当对所有 $I = \langle I_n : n \in \omega \rangle \in \mathbb{I}$ 存在某个 $\varphi \in \prod_{n\in\omega} \mathcal{P}(2^{I_n})$ 使得 $X \subseteq H_\varphi$ 且 $\forall n \in \omega : |\varphi(n)| \leq n$。

$\mathcal{NA}$ 的一致性数具有如下刻画。

定理 8.3 （[Paw85，引理 2。2]）。 non（$\mathcal{NA}$） = minLc。

证明。对于证明，只需从某个支配族中取 b ，因此不妨设存在一个 $I \in \mathbb{I}$ ，使得对所有 $n < \omega$都有 $b(n) = 2^{|I_n|}$ 。我们首先证明 $\mathrm{Lc}(b, \mathrm{id}_\omega) \preceq_{\mathrm{T}} \mathsf{C}_{\mathcal{NA}}$。为此，只需找到函数 $\Psi_- : \prod b \to 2^\omega$和$\Psi_+ : \mathcal{NA} \to \mathcal{S}(b, \mathrm{id}_\omega)$，使得对于任意 $x \in \prod b$和 $X \in \mathcal{NA}$，若 $\Psi_-(x) \in X$，则$x \in^* \Psi_+(X)$。
令 $X \in \mathcal{NA}$。然后，应用定理 8.2，我们可以找到$\varphi_X \in \prod_{n\in\omega} \mathcal{P}(2^{I_n})$，使得$X \subseteq H^*_{\varphi_X}$并且 $\forall n \in \omega : |\varphi_X(n)| \leq n$。显然， $\varphi_X \in \mathcal{S}(b, \mathrm{id}_\omega)$。令 $\Psi_+(X) := \varphi_X$
另一方面，对于 $x \in \prod b = \prod_{i<\omega} 2^{I_i}$，定义 $\Psi_-(x) \in 2^\omega$ a 为二进制序列 $\langle x(n) : n < \omega \rangle$的连接。不难看出，$(\Psi_-, \Psi_+)$ 是所需的图基联系。

现在我们证明反向不等式，即 $\min\{\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,\mathrm{id}_\omega} : b \in \omega^\omega\} \leq \mathrm{non}(\mathcal{NA})$。设 $X \subseteq 2^\omega$ 是一个大小为 $<\mathrm{minLc}$ 的集合，并证明 $X \in \mathcal{NA}$。假设 $I \in \mathbb{I}$ ，并令 $b(n) := 2^{|I_n|}$ 对所有 $n \in \omega$成立。对于 $x \in X$，令 $\bar{x} = \langle x{\restriction}I_n : n < \omega \rangle$，于是 $\bar{x} \in \prod b$。由于$\{\bar{x} : x \in X\}$ 的大小为 $<\mathrm{minLc}$，我们可以找到某个 $\varphi \in \mathcal{S}(b, \mathrm{id}_\omega)$，使得对于所有 $x \in X$，都有 $\bar{x} \in^* \varphi$。因此，显然有 $X \subseteq H^*_\varphi$ 且 $\forall n \in \omega : |\varphi(n)| \leq n$，所以通过应用定理 8.2，我们得到 $X \in \mathcal{NA}$。 □

前一个证明的第二部分实际上表明 $\mathsf{C}_{\mathcal{NA}} \preceq_{\mathrm{T}} \prod_{b\in D} \mathrm{Lc}(b,\mathrm{id}_\omega)$（关系系统的直积），其中 D 是实数集 ω^ω 中的某个支配族，使得对于每个 $b \in D$，都存在某个 $I \in \mathbb{I}$，满足对所有 $n < \omega$， $b(n) = 2^{|I_n|}$。

致谢

本文是为京都大学数理科学研究所集合论研讨会“强迫与基数算术的新进展”的会议论文集撰写的。该研讨会由神户大学的酒井宏教授组织。作者非常感谢他组织了这场精彩的研讨会并让作者得以参加，也感谢他为第一作者亲赴京都大学数理科学研究所参会提供的资助。

参考文献

[Bar84] Tomek Bartoszy´nski. 测度的可加性蕴含范畴的可加性. 美国数学会汇刊, 281(1):209–213, 1984.[Bar87] Tomek Bartoszy´nski. 测度与范畴的组合方面. 数学基础, 127(3):225–239, 1987.

[Bar88] Tomek Bartoszy´nski. 关于用零测集覆盖实直线. Pacific J. Math., 131(1):1– 12, 1988.[BJ95] Tomek Bartoszy´nski and Haim Judah. 集合论：关于实直线的结构. A K Peters 出版社, 韦尔斯利, MA, 1995.[Bla10] Andreas Blass. 连续统的组合基数特征. 载于《集合论手册》第1、2、3卷, 第395–489页. 施普林格, 多德雷赫特, 2010.[BM14] J¨org Brendle and Diego Alejandro Mej´ıa. 碎片化理想中的 Rothberger 间隙. 数学基础, 227(1):35–68, 2014.[Bre06] J¨org Brendle. 连续统的基数不变量与不可数基数上的组合学. Ann. Pure Appl. Logic, 144(1-3):43–72, 2006.[BS92] Tomek Bartoszy´nski and Saharon Shelah. 闭零测集. Ann. Pure Appl. Logic, 58(2):93–110, 1992.[Car23] Miguel A. Cardona. 一种友好的迭代强迫, 使实数集的四个基数特征两两不同. Colloq. Math., 2023. 已接收， arXiv:2206.14703.[CKM21] Miguel A. Cardona, Lukas D. Klausner, and Diego A. Mej´ıa. 连续统多个不同对象：定位、反定位与 Yorioka 理想. 预印本， arXiv:2110.11614, 2021.[CM19] Miguel A. Cardona and Diego A. Mej´ıa. 关于 Yorioka 理想的基数特征. Math. Log. Q., 65(2):170–199, 2019.[GK21] Martin Goldstern and Lukas Daniel Klausner. Cicho´n 图与定位基数. Arch. Math. Logic, 60(3-4):343–411, 2021.[GS93] Martin Goldstern and Saharon Shelah. 许多简单的基数不变量. Arch. Math. Logic, 32(3):203–221, 1993.[Kec95] Alexander S. Kechris. 经典描述集合论， 《集合论手册》第156卷《集合论手册》. Springer-Verlag, 纽约, 1995.[Kel08] Jakob Kellner. 更多简单的基数不变量. Arch. Math. Logic, 47(5):503– 515, 2008.[KM22] Lukas Daniel Klausner and Diego Alejandro Mej´ıa. Yorioka 理想的许多不同一致性数. Arch. Math. Logic, 61(5-6):653–683, 2022.[KO14] Shizuo Kamo and Noboru Osuga. Yorioka 理想的许多不同覆盖数. Arch. Math. Logic, 53(1-2):43–56, 2014.[KS09] Jakob Kellner and Saharon Shelah. 决定性生物与大连续统. J. Sym- bolic Logic, 74(1):73–104, 2009.[KS12] Jakob Kellner and Saharon Shelah. 生物强迫与大连续统：二分之乐. Arch. Math. Logic, 51(1-2):49–70, 2012.[Mil81] Arnold W. Miller. 测度与范畴的一些性质. 美国数学会汇刊, 266(1):93–114, 1981.

[Mil82] Arnold W. Miller。《贝尔纲定理失效所需的最小基数的刻画》。Proc. Amer. Math. Soc., 86(3):498–502，1982。[Paw85] Janusz Pawlikowski。测度与范畴的传递基的幂。Proc. Amer. Math. Soc., 93(4):719–729，1985。[She95] Saharon Shelah。每个零可加集都是贫集可加的。Israel J. Math., 89(1- 3):357–376，1995。[Voj93] Peter Vojt´aˇs。经典实分析对象上的显式关系之间的广义伽罗瓦-图基联系。载于《实数的集合论》（Ramat Gan, 1991），第6卷，Israel Math. Conf. Proc.，第619–643页。Bar-Ilan Univ.，Ramat Gan, 1993。