强激波激波捕捉方法的数值稳定性分析 I：二阶 MUSCL 格式

任伟杰[a]，谢文佳[a,*]，张烨[a]，余航[a]，田正宇[a]

[a] *College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Hunan 410073, China*

arXiv:2305.03281v1 [math.NA] 5 May 2023

摘要

当流场中存在强激波时，现代激波捕捉格式往往会出现数值激波异常，这可能限制其在高超声速流动计算中的进一步应用。本研究致力于探究二阶有限体积格式的主要数值特性及激波不稳定性的内在机制。为此，我们首次针对有限体积 MUSCL 方法建立了矩阵稳定性分析方法。该线性化分析方法能够以定量且高效的方式研究有限体积激波捕捉格式的激波不稳定性问题。稳定性分析结果表明，二阶格式的激波稳定性与黎曼求解器、马赫数、限制器函数、数值激波结构以及计算网格密切相关。利用所建立的方法，定量揭示了二阶方法与这些因素相关的独特稳定性特征。矩阵稳定性分析方法还阐明了不稳定性的源位置。结果表明，激波不稳定性源于数值激波结构。这些结论为深入理解激波不稳定性问题铺平了道路，也可能为开发适用于高马赫数可压缩流的更可靠激波捕捉方法带来新的启示。

关键词： 有限体积法、激波捕捉、高超声速、激波不稳定性、矩阵稳定性分析、MUSCL

1. 引言

激波数值预测是计算流体力学中最重要的问题之一，尤其是在高超声速流动计算中。基于弱解数学理论的激波捕捉方法，编写代码相对简单，且能够模拟任何类型的流场，无论是否存在激波 [1]。因此，这些方法广泛应用于实际流体流动模拟中。然而，采用现代激波捕捉格式计算包含强激波的流场时，往往会出现数值异常，例如爆炸结现象

*通讯作者*Email address:* xiewenjia@nudt.edu.cn（Wenjia Xie）

以及激波后振荡。这些现象在高超声速流动模拟中频繁出现，并显著降低高超声速加热预测的可靠性。

作为最著名的激波异常之一，Peery 和 Imlay 在使用 Roe 求解器计算钝体周围的超声速流场时，首次观察到了爆炸结现象 [2] 。爆炸结现象指的是钝体计算中的一种伪解：驻点线上，弓形激波前方会出现并逐渐长出一个突起 [3], 。不过，人们普遍认为，这只是数值激波不稳定性的一种具体表现。以往研究表明，当激波捕捉方法在间断处的耗散性较小时，更容易出现这类数值激波不稳定性。此外，近期研究 [4–6] 甚至表明，像 HLLE 格式 [7, 8] 和 Rusanov 格式 [9] （局部 Lax–Friedrichs）这样的耗散性求解器，也会受到激波不稳定性问题的困扰，尽管专家们十分认可其稳健性。因此，尽管可压缩流数值方法取得了重大进展，但毫不夸张地说，现代激波捕捉技术远称不上完善。过去三十年间，研究人员进行了大量研究，旨在厘清爆炸结现象的数值特征，并提出可能的解决方法，以消除这类不稳定性。关于这一主题的详细文献综述，请参阅文献 [10–14] 及其中的参考文献。这里，我们仅简要回顾为揭示爆炸结现象内在机理所做的不懈努力；这一问题正是本研究的核心。

Quirk [3] 首先对近似黎曼求解器的激波不稳定性问题进行了全面研究。通过线性化扰动分析，他指出，低耗散性的黎曼求解器（如 Roe）在平行于激波的方向上，不会对接触波和剪切波引入任何耗散。因此，受扰动的压力场与密度场之间持续的相互作用会触发激波不稳定性。Pandolfi 和 D’Ambrosio [15] 将 Quirk 的线性化扰动分析扩展到了更多格式。他们同样关注受扰动的压力场与密度场之间的关系，并指出，如果某些格式能够抑制密度扰动，例如 HLL[7] 和 van Leer [16]，那么这些格式就不会出现卡宾克尔现象。Gressier 和 Moschetta [17] 采用 Quirk 的线性化扰动分析，发现严格稳定性与接触间断的精确分辨能力之间存在不相容性。基于对混合格式的分析，Shen 等人[11] 发现，y 方向上的第三个通量分量（横向动量通量分量）在触发激波不稳定性方面发挥着重要作用。此外，基于线性化分析，他们揭示了沿激波方向不一致的法向动量分布是激波不稳定性的根源。Simon 和 Mandal[18, 19]认为，垂直于激波前沿的界面上的质量通量分量和界面法向动量通量分量对于激波不稳定性都至关重要。他们通过线性化分析和数值实验研究了 HLLE [7, 8]和 HLLC [20]格式的稳定性，并发现 HLLC 格式中的激波不稳定性可能由非预期的激活所触发。

出现在与激波前沿横向的界面上的质量通量和界面法向动量通量分量中的反扩散项。Xie 等人[21] 使用各种近似黎曼求解器进行了一系列数值测试，并发现能够保持正激波两侧质量通量的格式具有激波稳定性。结合线性化分析与数值实验，他们认为，如果在激波后方添加与动量对应的耗散，则可以缓解激波不稳定性。

在上述研究中，激波不稳定性被归因于接触波或剪切波上的多维耗散不足。这与理论分析 [22] 和物理考量 [23]的结论一致。然而，Chen等人[24, 25]最近的研究表明，黎曼求解器在激波垂直横向面上的不当压力耗散，与爆炸结现象和激波不稳定性密切相关。通过对一种新颖的激波不稳定性分析模型进行稳定性分析，得出了这一重要结论；该模型保留了数值激波不稳定性的基本特征。这也为Liou猜想 [26], 的部分合理性提供了支持。该猜想指出，质量通量独立于压力项的格式不受爆炸结现象的影响。通过线性扰动分析发现，压力耗散项等效于减小激波后的质量通量扰动；从扰动的角度来看，这会引发激波不稳定性 [27–29]。值得注意的是，Fleischmann等人[30, 31] 将爆炸结现象归因于Godunov型格式的低马赫数问题。他们指出，在垂直于激波前沿传播方向的横向通量计算中，耗散包含过多声学贡献，是导致数值不稳定性的主要原因。横向马赫数较低时诱发的压力波动幅值错误，会触发激波不稳定性。因此，对于低马赫数情况，通过降低声波上的黏性，可以采用一种从根本上不同的方法来稳定激波捕捉格式。

数值激波结构被证明是影响激波不稳定性的重要因素。基于矩阵稳定性分析，Dumbser等人[32] 和Chauvat等人[33] 发现，激波不稳定性与数值激波结构密切相关。当内部激波条件更接近上游状态时，数值格式更容易出现不稳定性。Kitamura等人[34–36]和Xie 等人[21]针对一维和二维正激波开展的数值实验验证了这些结论。此外，基于矩阵稳定性分析，Liu等人[37] 发现，存在一个与激波强度无关的触发不稳定性的阈值。根据他们的研究，如果数值激波结构中特定单元界面两侧的密度比超过某一阈值，则计算将变得不稳定。Xie 等人[28] 将激波不稳定性与数值激波结构内部不恰当的熵产生联系起来。通过耗散分析和数值实验，他们发现，如果能够保证激波内部产生足够的熵，则

不稳定性问题可以得到成功消除。Zaide 和 Roe [38, 39]研究了数值激波结构影响激波不稳定性的机制，并将激波不稳定性归因于 Hugoniot 曲线的非线性。他们认为，数值激波结构中的中间状态总是假定满足局部热力学平衡，而这一假设在物理激波内部并不成立，这正是导致激波不稳定性的原因。基于他们的结论，Zaide 和 Roe[40, 41]开发了两种新型通量函数，这些函数能够允许具有一个中间状态的驻定激波，并产生明确无歧义的数值激波结构，同时证明了其稳定性。

众所周知，计算网格是影响激波不稳定性的另一个关键因素。Quirk [3] 发现，网格与激波对齐时，爆炸结现象会更加明显。通过数值测试，Ohwada等人[5] 揭示，即使是HLLE[7, 8] 和AUSM$^+$ [42]等稳健格式，在网格与激波对齐时也可能产生不稳定的流场。基于一系列数值实验，Henderson和Menart [43] 全面研究了计算网格对激波异常的影响。他们发现，激波附近网格单元的长宽比是影响爆炸结现象强度的一个因素。长宽比越大，流场越稳定。在 [5]中也得出了相同的结论。Chen等人[25] 还通过矩阵稳定性分析方法研究了激波不稳定性的网格依赖性。他们发现，当横向面与激波波垂直时，不稳定性可能由横向面引发；增大横向面与激波前沿之间的夹角，则可能消除激波异常。

需要指出的是，Dumbser等人[32] 提出了矩阵稳定性分析方法，将格式稳定捕捉激波的能力与稳定性矩阵的特征值联系起来。基于矩阵稳定性分析方法，可以定量分析扰动误差的演化，并且易于通过编程实现。此外，该分析方法能够纳入数值激波的特征、计算网格的影响以及边界条件 [18]。因此，矩阵稳定性分析方法成为判断格式是否稳定的有力工具。当稳定性分析得出某格式不稳定时，Euler 计算中总能发现不稳定性，尽管这种不稳定现象可能只在某些条件下出现[11]。因此，矩阵稳定性分析方法被广泛用于探究激波不稳定性的机理 [25, 32, 33, 37] ，并验证新型激波稳定格式 [24, 44–48]的激波稳定性。然而， [32] 中提出的矩阵稳定性分析方法仅适用于一阶格式。由于实际高超声速流动计算中采用的是二阶甚至高阶格式，因此需要全面研究这类方法的激波稳定性。数值实验结果 [26, 49] 表明，二阶格式的稳定性可能与一阶情形不同，而且二阶格式中使用的限制器在触发激波不稳定性方面发挥着重要作用。Tu等人[50] 和Jiang等人[51] 甚至

通过各种数值实验研究高阶格式的稳定性，并揭示高阶格式面临激波不稳定性的风险更高。然而，Kemm[52]认为，提高格式阶数可以通过引入更多自由度，在捕捉到的激波处重新构建 Rankine–Hugoniot条件，从而为稳定激波位置提供另一种途径。从上述研究可以发现，目前关于空间离散阶数影响的结论尚未达成共识。尽管取得了这些进展，但鲜有研究致力于定量分析二阶乃至更高阶激波捕捉方法的激波稳定性。这种情况主要是由于缺乏有效的分析方法。在本研究中，我们针对有限体积 MUSCL 方法开发了矩阵稳定性分析方法，为二阶格式的稳定性提供了一种定量分析工具。后续研究将进一步介绍适用于高阶有限体积格式的矩阵稳定性分析方法。借助该方法，可以详细研究有限体积格式的主要数值特性及其激波不稳定性的内在机制。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍可压缩流的控制方程及其相关的有限体积离散。第 3 节引入平面定常激波问题，并阐述其相关的不稳定行为。第 4 节建立二阶有限体积方法的矩阵稳定性分析方法。第 5 节利用所建立的分析方法，探讨二阶有限体积格式的数值特性及激波不稳定性的内在机制。第 6 节总结全文，并展望未来的发展方向。

2. 控制方程与有限体积离散

2.1. 欧拉方程

我们考虑由二维欧拉方程控制的可压缩流，其积分形式写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\mathbf{U}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\mathrm{d}S=0, \tag{1}$$

其中， $\partial\Omega$ 表示控制体 Ω 的边界，$\mathbf{F}$ 为垂直于边界 $\partial\Omega$的通量分量。守恒变量和通量向量分别定义为

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}\rho q\\ \rho q u+p n_x\\ \rho q v+p n_y\\ (\rho e+p)\,q\end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中， ρ、 e和 p 分别表示密度、比总能和压力，而$\mathbf{u}=(u,v)$表示流速。定向速度 $q=un_x+vn_y$是速度在

$\mathbf{n}$ 方向上的分量，其中$\mathbf{n} = [n_x,\ n_y]^T$ 是表面微元 $\mathrm{d}S$的外法向单位向量。状态方程的形式为

$$p = (\gamma - 1)\,\rho \left[e - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \right], \tag{3}$$

其中 γ 为比热比。

2.2. 有限体积 *MUSCL* 格式

我们考虑在二维区域上采用以网格单元为中心的有限体积方法对系统（1）进行离散，该区域划分为若干结构化四边形网格单元。图1显示了一个特定的控制体 $\Omega_{i,j}$ ，其上的半离散有限体积格式可写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{i,j}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{|\Omega_{i,j}|}\sum_{k=1}^{4}\mathcal{L}_k\mathbf{F}_k, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{U}_{i,j}$ 表示 $\mathbf{U}$ 在 $\Omega_{i,j}$上的平均值。 $|\Omega_{i,j}|$ 是 $\Omega_{i,j}$ 的体积， $\mathcal{L}_k$ 表示单元界面的长度。通量$\mathbf{F}_k$ 是计算得到的数值通量，假定其沿各个单元界面保持恒定。本研究采用近似黎曼求解器来确定每个单元界面处的数值通量 $\mathbf{F}_k$ 。

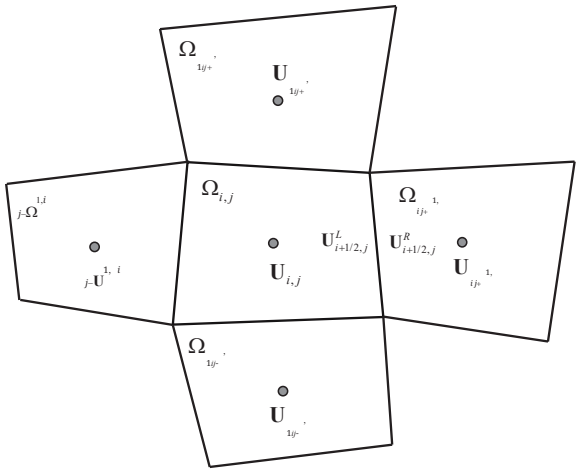


图 1：x-y 平面中二维区域的可能网格配置。

在本研究中，我们致力于研究二阶有限体积格式的激波不稳定性，尤其是 MUSCL 方法 [53, 54]。如图 1 所示，考虑 $\Omega_{i,\ j}$ 与 $\Omega_{i+1,\ j}$之间的界面，我们可以得到 [55, 56]

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^L_{i+1/2,j} &= \mathbf{U}_{i,j} + \frac{1}{2}\Psi^L_{i+1/2,j}\left(\mathbf{U}_{i,j} - \mathbf{U}_{i-1,j}\right) \\
\mathbf{U}^R_{i+1/2,j} &= \mathbf{U}_{i+1,j} - \frac{1}{2}\Psi^R_{i+1/2,j}\left(\mathbf{U}_{i+2,j} - \mathbf{U}_{i+1,j}\right)
\end{aligned}, \tag{5}$$

其中，$\mathbf{U}^{L}_{i+1/2,\ j}$ 和 $\mathbf{U}^{R}_{i+1/2,\ j}$ 分别是界面左右两侧的变量，而 $\Psi^{L/R}_{i+1/2,\ j}$称为限制器。限制器是连续梯度的函数，可写为

$$\Psi^{L/R}_{i+1/2,j} = \Psi(r^{L/R}_{i+1/2,j}), \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} r^{L}_{i+1/2,j} &= \frac{\mathbf{U}_{i+1,j} - \mathbf{U}_{i,j}}{\mathbf{U}_{i,j} - \mathbf{U}_{i-1,j}} \equiv \frac{\Delta_+}{\Delta_-}\mathbf{U}_{i,j} \\ r^{R}_{i+1/2,j} &= \frac{\mathbf{U}_{i+1,j} - \mathbf{U}_{i,j}}{\mathbf{U}_{i+2,j} - \mathbf{U}_{i+1,j}} \equiv \frac{\Delta_-}{\Delta_+}\mathbf{U}_{i+1,j} \end{aligned}, \tag{7}$$

其中，Δ_+ 和 Δ_- 分别为前向差分算子和后向差分算子。当 $\Delta_-\mathbf{U}_{i,j} = 0$ 和$\Delta_+\mathbf{U}_{i+1,j} = 0$、$\Psi^{L}_{i+1/2,j}$ 和$\Psi^{R}_{i+1/2,j}$ 时，本文分别将它们设为零。注意，如果 $\Psi^{L/R}_{i+1/2,j} = 0$，相应格式将变为一阶精度。本研究采用了四种常用限制器，包括 superbee [57], van Leer [58], van Albada [59], 和 minmod [60] 。它们的函数可写为

$$\begin{aligned} \Psi_{superbee}(r) &= \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \\ \Psi_{vanLeer}(r) &= \frac{r + |r|}{1 + r} \\ \Psi_{vanAlbada}(r) &= \frac{r^2 + r}{1 + r^2} \\ \Psi_{minmod}(r) &= \max[0, \min(r, 1)] \end{aligned}. \tag{8}$$

如图 2 所示，四种限制器函数均位于阴影区域内，该区域即为二阶TVD区域 [61]。一般而言，从阴影区域的上边界到下边界，限制器的耗散性逐渐增强 [62]。

3. 平面稳态激波失稳

爆炸结现象通常指超声速或高超声速流中钝体前方发生畸变的激波 [3]。选择一个更简单、具备钝体爆炸结基本特征且易于分析的测试案例至关重要。本研究考虑二维稳态正激波问题。已有充分研究表明，如果某种格式在稳态正激波问题中产生不稳定解，那么它也会出现钝体爆炸结 [10, 32, 35]。

3.1. 问题定义

图3展示了稳态激波问题的计算网格。根据激波两侧的 Rankine-Hugoniot条件，分别为左侧（L：$i \leq 5$）和右侧（ R： $i \geq 7$）规定初始条件

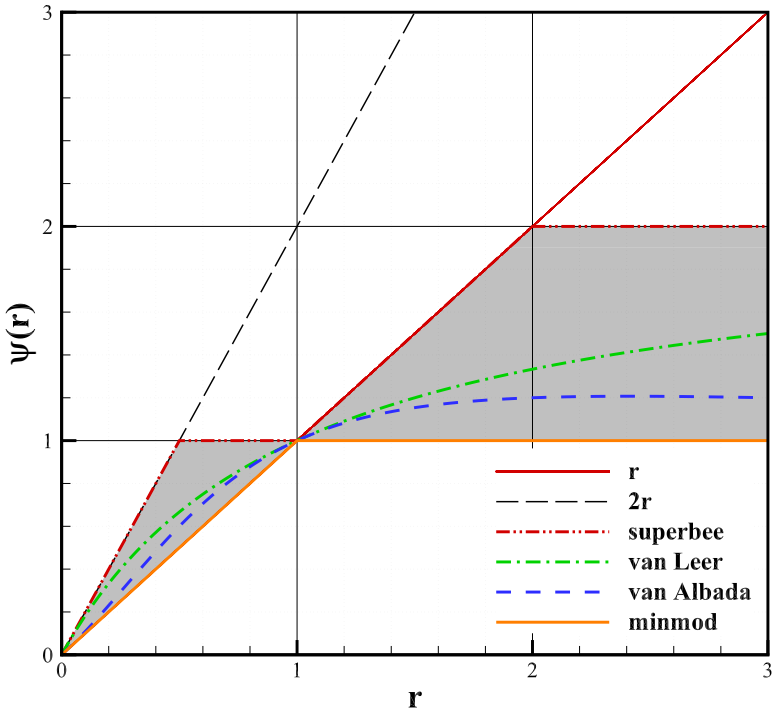


图 2：二阶TVD区域。

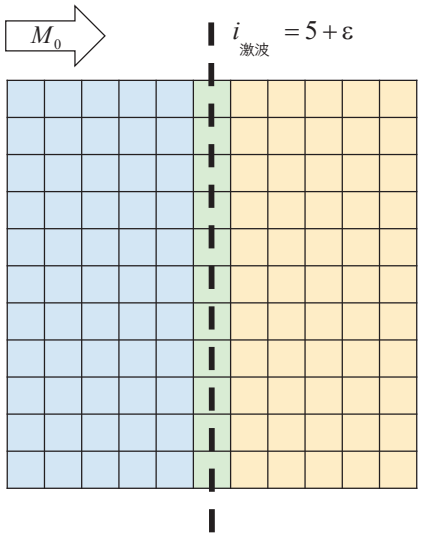


图 3：二维稳态正激波问题的计算网格。

正激波作为

$$\mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_R = \begin{pmatrix} f(M_0) \\ 1 \\ 0 \\ \frac{g(M_0)}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} + \frac{1}{2f(M_0)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

with

$$f(M_0) = \left(\frac{2}{(\gamma+1)M_0^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-1}, \quad g(M_0) = \frac{2\gamma M_0^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{10}$$

其中， M_0 为上游马赫数。激波（$M : i = 6$）内的中间状态按照 Hugoniot 曲线 [33]设定。

$$\begin{aligned} \rho_M &= (1-\alpha_\rho)\rho_L + \alpha_\rho \rho_R \\ u_M &= (1-\alpha_u)u_L + \alpha_u u_R \\ p_M &= (1-\alpha_p)p_L + \alpha_p p_R \end{aligned} \tag{11}$$

with

$$\begin{aligned} a_\rho &= \varepsilon \\ \alpha_u &= 1 - (1-\varepsilon)\left(1 + \varepsilon \frac{M_0^2 - 1}{1 + (\gamma-1)M_0^2/2}\right)^{-1/2} \left(1 + \varepsilon \frac{M_0^2 - 1}{1 - 2\gamma M_0^2/(\gamma-1)}\right)^{-1/2}, \\ \alpha_p &= \varepsilon \left[1 + (1-\varepsilon)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{M_0^2-1}{M_0^2}\right]^{-1/2} \end{aligned} \tag{12}$$

其中， $\varepsilon \in [0, 1]$ 是描述内部单元初始状态的加权平均值，在此称为激波位置。各个方向上的边界条件均通过虚拟单元施加。流入边界条件设为自由来流值，而为了将激波固定在相同位置，流出边界条件则通过将虚拟单元处的质量通量设为[35, 63]来确定。

$$(\rho u)_{imax+1,j} = (\rho u)_{imax+2,j} = (\rho u)_0 = 1. \tag{13}$$

与此同时，其他值仅进行外推。上下边界设为周期性条件。为了探索强激波捕捉数值方法的稳定性，应先获得二维平面稳态激波问题的收敛稳定解，以便进行线性稳定性分析。此处采用上述数值实验设置，对收敛稳定解进行数值测试。然而，考虑到某些情况下可能出现数值激波不稳定性，要获得这样的收敛稳定流场颇具挑战。下一节将介绍一种简单有效的策略，以确保获得收敛稳定的流场。

3.2. 稳定性分析的二维流场初始化

在当前研究中，用于稳定性分析的二维流场通过将一维计算得到的稳态流场投影到二维域上进行初始化。 [32, 64] 中也采用了这种初始化方法。

这样，当向二维流场中引入一个小的初始扰动时，如果格式稳定，该扰动就会衰减；否则，初始扰动会增大，从而导致不稳定性。因此，我们可以通过追踪扰动误差的演变来研究不同激波捕捉方法的稳定性。本文将小的初始扰动设为 $\delta = 10^{-7}$。

遗憾的是，已有研究表明，一维计算中也会出现激波不稳定性或爆炸结现象。发生这种情况时，计算无法收敛，也无法获得稳定解。因此，难以初始化二维流场。使用能够产生具有单个内部点的静止离散激波的黎曼求解器时，通常会出现一维激波不稳定性或爆炸结现象，例如当激波位置为 $\varepsilon = 0.1$, 0.2, 0.3 [28, 35, 38, 39] 时的 Roe 求解器。Xie 等人[21]发现，通过强制正激波两侧的质量通量保持一致，可以稳定激波，从而获得稳定解。本文采用[21] 提出的这一方法，在一维区域中获得稳定结果，其形式可写为

$$(\rho u)_R = (\rho u)_L, \tag{14}$$

其中，下标 L 和 R 分别表示激波结构正前方和正后方的网格单元。本文在 $\varepsilon = 0.1$，0。2，0。3 时，对 Roe 黎曼求解器采用修正 (14)，除非另有明确说明。

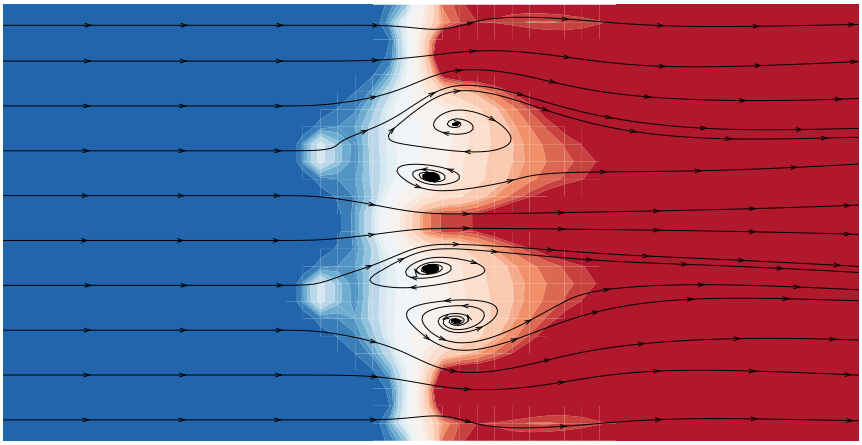


图 4：二维稳态正激波问题中典型爆炸结现象的密度等值线。（网格包含 50×25 个网格单元，采用 Roe 求解器的一阶格式，$M_0 = 20$、 $\varepsilon = 0.1$ 和 t=150。）

3.3. 二维稳态正激波问题中的鲤鱼效应

图 4 展示了二维稳态正激波问题中典型的爆炸结现象。如图所示，爆炸结现象的特征是出现若干凸形或凹形楔状激波轮廓。

沿横向方向交错分布，并且在激波轮廓 [21] 后方出现涡旋。

计算开始时，在每个网格单元上加入大小为 10^{-7} 的初始扰动，图5展示了最大扰动误差的演化过程。在本研究中，我们以横向速度的范数$\|v\|_\infty(t)$作为扰动误差的指标，因为已知平均流的精确解为 $v = 0$ [32, 43]。图5和图6是在$M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$条件下计算得到的，此时计算更容易出现不稳定。采用带有 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式。计算网格为 11×11 笛卡尔网格。除非特别说明，全文均采用 CFL 数为 $= 0.1$ 的三阶 TVD Runge Kutta 离散格式 [65] 。如图5所示，根据扰动误差的演化过程，激波不稳定性 [32]的发展分为三个阶段：

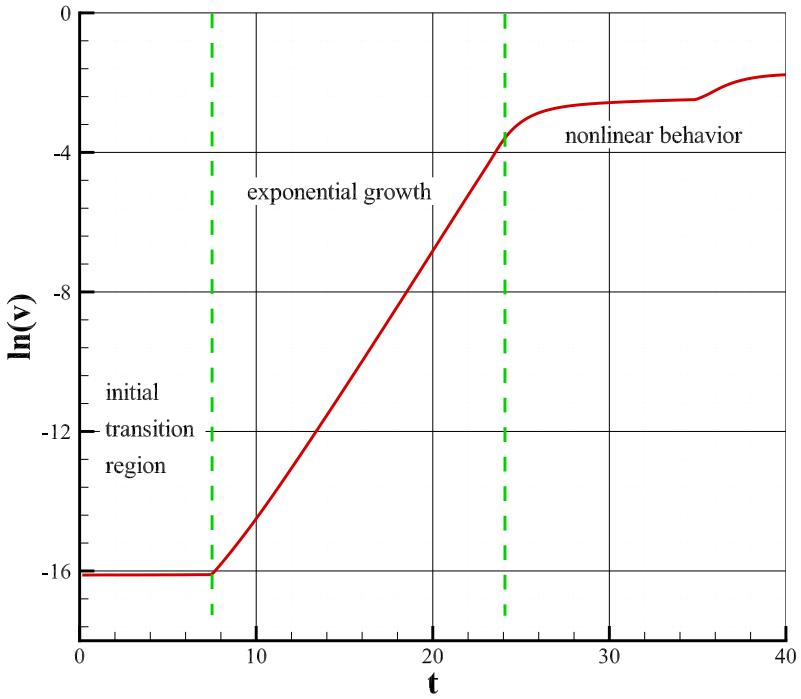


图5：扰动误差 δv 的演变。（含 11×11 个网格单元的网格，采用 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式， $M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$。）

1. 在 0 到 7.5 的时间区间内，也就是初始过渡区，扰动误差几乎保持不变。这可能是由于稳定模态 [32] 的阻尼作用。该阶段的流场与初始流场一致并保持稳定，如图6(a)所示。

2. $\|v\|_\infty(t)$ 在 7.5 至 24 的时间区间内呈指数增长。因此，该区域称为指数增长区。扰动误差的演变

在这一阶段符合指数定律

$$\|v\|_\infty(t) = v_0 \mathrm{e}^{\lambda_{num}(t-t_0)}, \tag{15}$$

其中， v_0、 λ_{num} 和 t_0 可从图5中轻松获得，而 λ_{num} 在本文中称为时间误差增长率。如图6(b)和图6(c)所示，流场在指数增长阶段变得不稳定，激波轮廓开始发生变形。

3. 时间达到24之后，扰动误差足够大，非线性效应变得显著，指数增长降至最低。如图5所示，在此阶段误差可能在较高水平波动。与此同时，流场是不符合物理规律的。如图6(d)所示，不稳定性更加严重，激波发生了严重畸变。

如图5所示，可以发现，指数增长阶段在扰动误差的演变过程中起着至关重要的作用，它决定了误差是增大还是减小、系统最终是稳定还是不稳定，以及系统向不稳定状态发展的速度。因此，在本研究中，我们重点关注指数增长阶段，并将激波不稳定性与时间误差增长率 λ_{num}联系起来。

图7展示了在相同计算时间下由一阶格式和二阶格式计算得到的密度等值线。如图所示，与一阶格式相比，二阶格式计算得到的激波轮廓畸变更为严重。此外，由二阶格式计算得到的流场中，激波后方出现了涡旋。图8比较了扰动误差，也表明二阶格式产生的扰动误差更早进入指数增长区域，且增长更快。在非线性区域，其扰动误差也大于一阶格式。图7和图8均表明，二阶格式的激波不稳定性比一阶格式更为严重。本研究将进一步详细研究二阶格式的激波不稳定性。

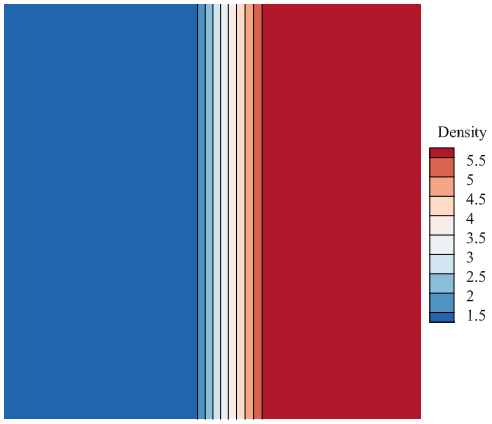
4. MUSCL格式的矩阵稳定性分析方法

4.1. 矩阵稳定性分析方法的建立

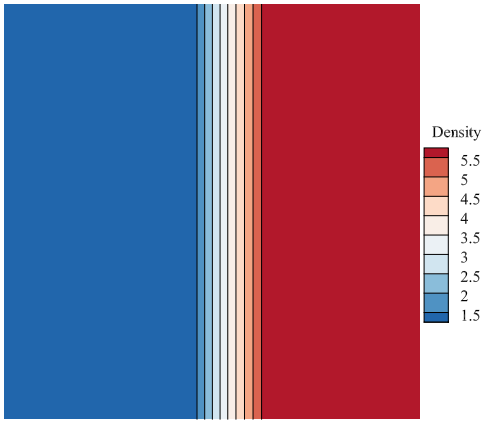
Dumbser等人[32] 提出的矩阵稳定性分析方法已被充分证明是评估激波捕捉方法激波不稳定性问题的一种有效工具。然而，这种稳定性分析方法仅适用于一阶格式，这限制了其在分析二阶及高阶格式稳定性方面的应用。在本研究中，我们将该方法扩展至二阶有限体积格式，具体如下。

对于定常场的稳定性分析，我们假设

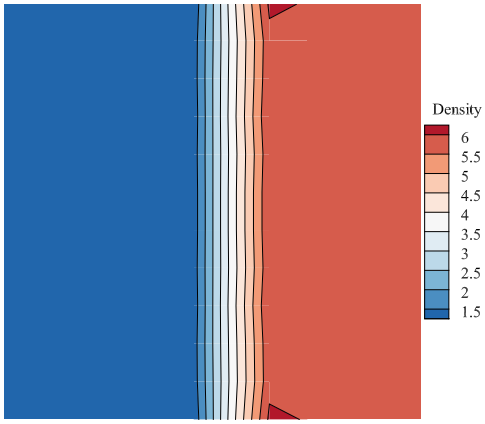
$$\mathbf{U}_{i,j} = \mathbf{U}^0_{i,j} + \delta\mathbf{U}_{i,j}, \tag{16}$$



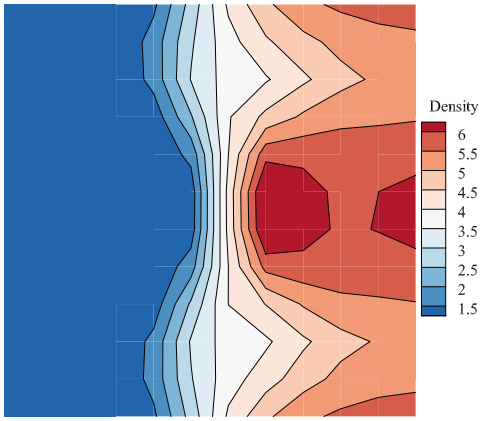
(a) t=7



(b) t=15

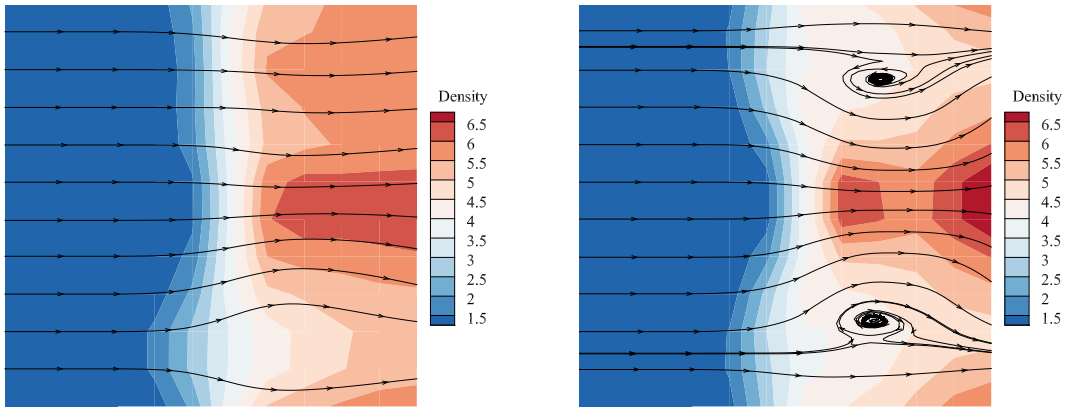


(c) t=25



(d) t=80

图6：流场的演化。（网格含 11×11 个网格单元，采用 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式， $M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$。）



(a) 一阶格式　　(b) 二阶格式

图7：一阶和二阶格式的密度等值线。（网格包含 11×11 个网格单元，采用 Roe 求解器，二阶格式采用 van Albada 限制器，$M_0 = 20$、 $\varepsilon = 0.1$和 t=100。）

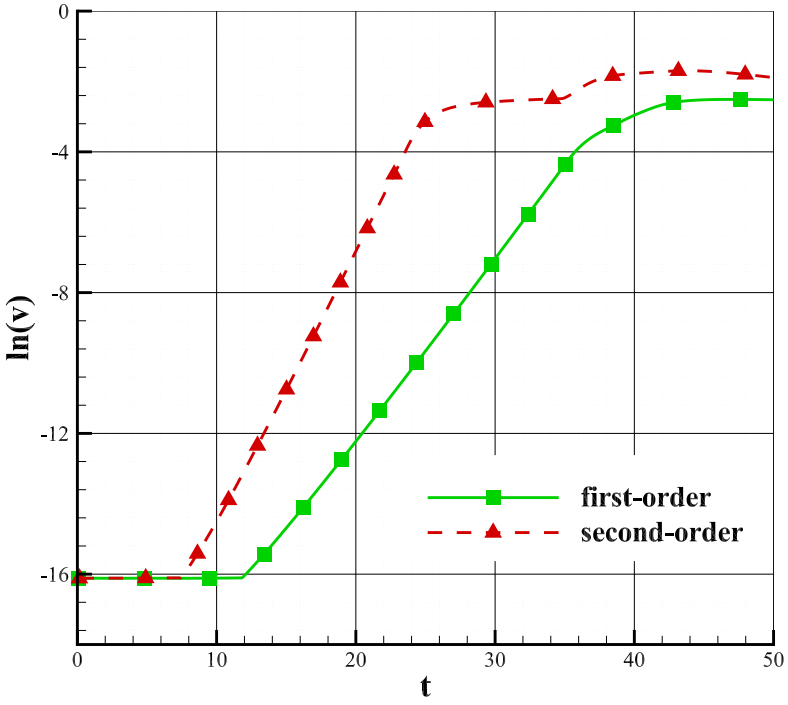


图8：一阶和二阶格式的扰动误差演化。（网格包含 11×11 个网格单元，采用 Roe 求解器，二阶格式采用 van Albada 限制器，$M_0 = 20$、 $\varepsilon = 0.1$和 t=100 （为清晰起见，仅显示 $t < 50$ ）。）

其中，$\mathbf{U}^0_{i,j}$ 表示稳态平均值，$\delta\mathbf{U}_{i,j}$ 表示微小的数值随机扰动。假设该随机扰动不会影响限制器函数。因此，限制器是稳态平均值的函数

$$\Psi^{L/R}_{i+1/2,j} = \Psi\left(r^{L/R,0}_{i+1/2,j}\right), \quad \text{with} \begin{cases} r^{L,0}_{i+1/2,j} = \dfrac{\mathbf{U}_{i+1,j}-\mathbf{U}_{i,j}}{\mathbf{U}_{i,j}-\mathbf{U}_{i-1,j}} = \dfrac{\mathbf{U}^0_{i+1,j}-\mathbf{U}^0_{i,j}}{\mathbf{U}^0_{i,j}-\mathbf{U}^0_{i-1,j}} \\ r^{R,0}_{i+1/2,j} = \dfrac{\mathbf{U}_{i+1,j}-\mathbf{U}_{i,j}}{\mathbf{U}_{i+2,j}-\mathbf{U}_{i+1,j}} = \dfrac{\mathbf{U}^0_{i+1,j}-\mathbf{U}^0_{i,j}}{\mathbf{U}^0_{i+2,j}-\mathbf{U}^0_{i+1,j}} \end{cases}. \tag{17}$$

因此，矩阵稳定性分析方法也适用于不可微的限制器，例如 mimod。第 4 节和第 5 节中的结果表明，这一假设是合理的。将 (16) 代入 (5)，可得

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^L_{i+1/2,j} &= \left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^L_{i+1/2,j}\right)\mathbf{U}^0_{i,j} - \frac{1}{2}\Psi^L_{i+1/2,j}\mathbf{U}^0_{i-1,j} \\ &\quad + \left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^L_{i+1/2,j}\right)\delta\mathbf{U}_{i,j} - \frac{1}{2}\Psi^L_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i-1,j} \\ \mathbf{U}^R_{i+1/2,j} &= \left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^R_{i+1/2,j}\right)\mathbf{U}^0_{i+1,j} - \frac{1}{2}\Psi^R_{i+1/2,j}\mathbf{U}^0_{i+2,j} \\ &\quad + \left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^R_{i+1/2,j}\right)\delta\mathbf{U}_{i+1,j} - \frac{1}{2}\Psi^R_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i+2,j} \end{aligned}, \tag{18}$$

其中，$\mathbf{U}^L_{i+1/2,j}$ 和 $\mathbf{U}^R_{i+1/2,j}$ 分别是 $\Omega_{i,j}$与 $\Omega_{i+1,j}$之间界面左右两侧的变量。$\mathbf{E}$ 表示 4×4 单位矩阵。由于数值通量 $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$ 是 $\mathbf{U}^L_{i+1/2,j}$和 $\mathbf{U}^R_{i+1/2,j}$的函数，因此，$\mathbf{F}_{i+1/2,j}$ 可在稳态平均值附近线性化为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2,j} &= \mathbf{F}_{i+1/2,j}\left(\mathbf{U}^L_{i+1/2,j}, \mathbf{U}^R_{i+1/2,j}\right) \\ &= \mathbf{F}_{i+1/2,j}\left(\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}, \mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}\right) + \frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}}\delta\mathbf{U}^L_{i+1/2,j} + \frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}}\delta\mathbf{U}^R_{i+1/2,j} \\ &= \mathbf{F}_{i+1/2,j}\left(\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}, \mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}}\Psi^L_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i-1,j} + \frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^L_{i+1/2,j}\right)\delta\mathbf{U}_{i,j} \\ &\quad + \frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^R_{i+1/2,j}\right)\delta\mathbf{U}_{i+1,j} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}}\Psi^R_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i+2,j} \end{aligned}. \tag{19}$$

为使表达式简洁，引入以下变量

$$\begin{aligned} \eta^{L/R}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{L/R,0}_{i+1/2,j}}\Psi^{L/R}_{i+1/2,j} \\ \beta^{L/R}_{i+1/2,j} &= \frac{\partial\mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial\mathbf{U}^{L/R,0}_{i+1/2,j}}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\Psi^{L/R}_{i+1/2,j}\right) \end{aligned}. \tag{20}$$

于是，(19) 可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2,j} &= \mathbf{F}_{i+1/2,j}\left(\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}, \mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}\right) \\ &\quad - \eta^L_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i-1,j} + \beta^L_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i,j} + \beta^R_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i+1,j} - \eta^R_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i+2,j} \end{aligned}. \tag{21}$$

将 (16) 和 (21) 代入 (4)，并考虑到平均场是稳态的，最终得到线性误差演化模态

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{U}_{i,j}}{\mathrm{dt}} =& -\left(\xi^L_{i+1/2,j}+\xi^L_{i,j+1/2}+\xi^R_{i-1/2,j}+\xi^R_{i,j-1/2}\right)\delta\mathbf{U}_{i,j}\\ &-\left(\xi^R_{i+1/2,j}-\mu^R_{i-1/2,j}\right)\delta\mathbf{U}_{i+1,j}-\left(\xi^R_{i,j+1/2}-\mu^R_{i,j-1/2}\right)\delta\mathbf{U}_{i,j+1}\\ &-\left(\xi^L_{i-1/2,j}-\mu^L_{i+1/2,j}\right)\delta\mathbf{U}_{i-1,j}-\left(\xi^L_{i,j-1/2}-\mu^L_{i,j+1/2}\right)\delta\mathbf{U}_{i,j-1}\\ &+\mu^R_{i+1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i+2,j}+\mu^R_{i,j+1/2}\delta\mathbf{U}_{i,j+2}+\mu^L_{i-1/2,j}\delta\mathbf{U}_{i-2,j}+\mu^L_{i,j-1/2}\delta\mathbf{U}_{i,j-2}\end{aligned}, \tag{22}$$

其中

$$\xi^{L/R}_{i+1/2,j}=\frac{\mathcal{L}_{i+1/2,j}}{|\Omega_{i,j}|}\beta^{L/R}_{i+1/2,j}\quad,\quad \mu^{L/R}_{i+1/2,j}=\frac{\mathcal{L}_{i+1/2,j}}{|\Omega_{i,j}|}\eta^{L/R}_{i+1/2,j}. \tag{23}$$

由式（22）可知，$\Omega_{i,\ j}$ 中扰动误差的演化受网格单元 $\Omega_{i,\ j}$ 本身、四个相邻网格单元以及四个次相邻网格单元中的误差影响。然而，对于一阶格式，只有 $\Omega_{i,\ j}$ 及其四个相邻网格单元中的误差会影响 $\Omega_{i,\ j}$ [32]中误差的演化。线性误差演化模型的差异表明，一阶格式与二阶格式的激波稳定性可能存在显著差异。

式（22）适用于计算域中的所有网格单元，最终可得到计算域中所有网格单元的误差演化

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\mathbf{U}_{1,1}\\ \vdots\\ \delta\mathbf{U}_{imax,jmax}\end{pmatrix}=\mathbf{S}\cdot\begin{pmatrix}\delta\mathbf{U}_{1,1}\\ \vdots\\ \delta\mathbf{U}_{imax,jmax}\end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中$\mathbf{S}$ 称为本文研究中的稳定性矩阵。仅考虑初始误差的演化时，可对式（24）进行解析求解。其解为

$$\begin{pmatrix}\delta\mathbf{U}_{1,1}\\ \vdots\\ \delta\mathbf{U}_{imax,jmax}\end{pmatrix}(t)=\mathrm{e}^{\mathbf{S}t}\cdot\begin{pmatrix}\delta\mathbf{U}_{1,1}\\ \vdots\\ \delta\mathbf{U}_{imax,jmax}\end{pmatrix}_{t=0}, \tag{25}$$

当$\mathbf{S}$ 的特征值的最大实部为负时，该解将保持有界。因此，稳定性判据为

$$\max(\mathrm{Re}(\lambda(\mathbf{S})))\le 0. \tag{26}$$

需要注意的是，方程（19）只有在数值通量在平均值处可微时才是准确的，而这一条件并不总是成立。例如，当采用 Roe求解器，且激波恰好位于两个网格单元之间时（$\varepsilon=0$ or 1）。本文分析的是具有数值激波结构（$0<\varepsilon<1$）的情况。因此，本文所使用的求解器计算得到的数值通量在平均值处是可微的。数值通量函数的梯度，例如

$\frac{\partial \mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial \mathbf{U}^{L}_{i+1/2,j}}$，$\mathbf{U}^{0}_{i+1/2,j}$ 可以通过中心差分近似计算 [11]

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\left(\partial \mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j}\right)_k} = \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j}(\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j} + \delta \mathbf{I}_k, \mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j}) - \mathbf{F}_{i+1/2,j}(\mathbf{U}^{L,0}_{i+1/2,j} - \delta \mathbf{I}_k, \mathbf{U}^{R,0}_{i+1/2,j})}{2\delta}, \tag{27}$$

其中，$\mathbf{I}_k$ 是一个单位向量，其 kth 分量为 1，且 $\delta = 10^{-7}$ [11, 32]。

4.2. 矩阵稳定性分析方法的原始变量形式

众所周知，二阶 MUSCL 方法 (5) 不仅可以在守恒变量中实施，也可以在原始变量中实施。由于原始变量重构成本较低且适用范围广，因此在流动模拟中得到了广泛应用，尤其是在高超声速流动模拟中[66, 67]。因此，本研究采用原始变量形式的矩阵稳定性分析方法。数值通量 $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$ 也是原始变量的函数

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \mathbf{F}_{i+1/2,j}\left(\mathbf{W}^{L}_{i+1/2,j}, \mathbf{W}^{R}_{i+1/2,j}\right), \tag{28}$$

其中，$\mathbf{W} = (\rho,\ u,\ v,\ p)^T$是原始变量向量。然后，通量函数 $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$可线性化为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{i+1/2,j} = {} & \mathbf{F}_{i+1/2,j}\left(\mathbf{W}^{L,0}_{i+1/2,j}, \mathbf{W}^{R,0}_{i+1/2,j}\right) \\ & - \eta^{L}_{i+1/2,j}\delta\mathbf{W}_{i-1,j} + \beta^{L}_{i+1/2,j}\delta\mathbf{W}_{i,j} + \beta^{R}_{i+1/2,j}\delta\mathbf{W}_{i+1,j} - \eta^{R}_{i+1/2,j}\delta\mathbf{W}_{i+2,j}\end{aligned}, \tag{29}$$

其中，(29) 中的变量 $\eta^{L/R}_{i+1/2,j}$ 和 $\beta^{L/R}_{i+1/2,j}$ 如下

$$\begin{aligned}\eta^{L/R}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial \mathbf{W}^{L/R,0}_{i+1/2,j}}\Psi^{L/R}_{i+1/2,j} \\ \beta^{L/R}_{i+1/2,j} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{i+1/2,j}}{\partial \mathbf{W}^{L/R,0}_{i+1/2,j}}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{2}\Psi^{L/R}_{i+1/2,j}\right)\end{aligned}. \tag{30}$$

将 (16) 和 (29) 代入 (4)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{W}_{i,j}}{\mathrm{dt}} = {} & \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{i,j}}{\mathrm{d}\mathbf{W}_{i,j}}\right)^{-1}\Big[-\left(\xi^{L}_{i+1/2,j} + \xi^{L}_{i,j+1/2} + \xi^{R}_{i-1/2,j} + \xi^{R}_{i,j-1/2}\right)\delta\mathbf{W}_{i,j} \\ & - \left(\xi^{R}_{i+1/2,j} - \mu^{R}_{i-1/2,j}\right)\delta\mathbf{W}_{i+1,j} - \left(\xi^{R}_{i,j+1/2} - \mu^{R}_{i,j-1/2}\right)\delta\mathbf{W}_{i,j+1} \\ & - \left(\xi^{L}_{i-1/2,j} - \mu^{L}_{i+1/2,j}\right)\delta\mathbf{W}_{i-1,j} - \left(\xi^{L}_{i,j-1/2} - \mu^{L}_{i,j+1/2}\right)\delta\mathbf{W}_{i,j-1} \\ & + \mu^{R}_{i+1/2,j}\delta\mathbf{W}_{i+2,j} + \mu^{R}_{i,j+1/2}\delta\mathbf{W}_{i,j+2} + \mu^{L}_{i-1/2,j}\delta\mathbf{W}_{i-2,j} + \mu^{L}_{i,j-1/2}\delta\mathbf{W}_{i,j-2}\Big]\end{aligned}, \tag{31}$$

其中，ξ 和 μ 由式（23）计算。并且$\mathrm{d}\mathbf{U}_{i,j}$~~$\mathrm{d}\mathbf{W}_{i,j}$~~是守恒变量与原始变量之间的变换矩阵。它可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{i,j}}{\mathrm{d}\mathbf{W}_{i,j}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ (u^2+v^2)/2 & \rho u & \rho v & 1/(\gamma-1) \end{bmatrix}_{i,j}. \tag{32}$$

式（31）是$\Omega_{i,\ j}$中线性误差演化模型的原始变量形式。（24）也可以写成如下原始变量形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\mathbf{W}_{1,1}\\ \vdots \\ \delta\mathbf{W}_{imax,jmax}\end{pmatrix}=\mathbf{S}\cdot\begin{pmatrix}\delta\mathbf{W}_{1,1}\\ \vdots \\ \delta\mathbf{W}_{imax,jmax}\end{pmatrix}. \tag{33}$$

仅考虑初始误差的演化，方程（33）的解为

$$\begin{pmatrix}\delta\mathbf{W}_{1,1}\\ \vdots \\ \delta\mathbf{W}_{imax,jmax}\end{pmatrix}(t)=\mathrm{e}^{\mathbf{S}t}\cdot\begin{pmatrix}\delta\mathbf{W}_{1,1}\\ \vdots \\ \delta\mathbf{W}_{imax,jmax}\end{pmatrix}_{t=0}. \tag{34}$$

稳定性判据见式（26）。

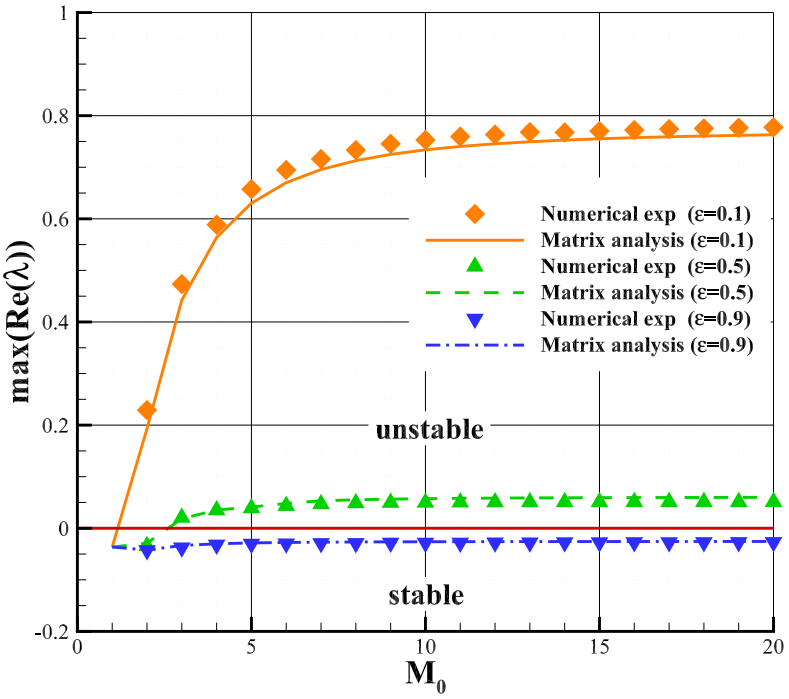


图9：本文提出的稳定性理论的定量验证。（采用 11×11 个网格单元的网格、Roe求解器和van Albada限制器， $M_0=1$，2，$\cdots$，20和 $\varepsilon=0.1$，0。5，0。9。）

4.3. 稳定性理论的定量验证

在第4.1节和第4.2节中，我们介绍了二阶MUSCL格式的矩阵稳定性分析方法。通过分析（25），我们可以发现，特征值的最大实部能够描述扰动误差的指数增长率，即（15）中的 λ_{num}。由于 λ_{num} 可以很容易地获得

数值实验，因此可以通过比较max(Re(λ))和 λ_{num}，对矩阵稳定性分析方法的可靠性进行定量验证。

采用配备 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式进行定量验证。条件为 $M_0 = 1$、2、$\cdots$、20 和 $\varepsilon = 0.1$、0。5、0。9。计算网格为11×11 笛卡尔网格。图9给出了 max(Re(λ)) 与 λ_{num} 的对比，结果表明，在不稳定区域和稳定区域，两者都吻合良好。需要指出的是，采用其他二阶格式以及不同的黎曼求解器、限制器函数和计算条件，也能得到良好的一致性。这证实了本研究提出的矩阵稳定性分析方法是可靠的。

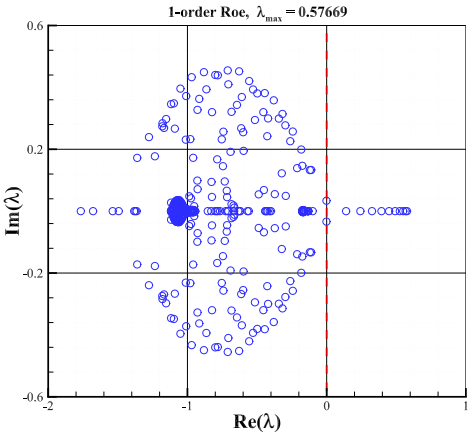
5. MUSCL格式的稳定性分析

研究充分表明，激波不稳定性受多种因素影响，例如黎曼求解器、激波强度、网格分布、网格长宽比、数值激波结构等 [35, 43, 44, 50]。人们通过大量数值实验研究这些因素与激波不稳定性之间的关系 [5, 21, 35, 43, 50, 68]。矩阵稳定性分析方法将激波稳定性与稳定性矩阵的特征值联系起来，从而成为研究激波稳定性的定量工具。Dumbser等人[32] 和Chen等人[24, 25] 利用该方法研究了这些因素对一阶格式稳定性特征的影响。那么，这些因素会如何影响二阶格式的稳定性？本节将采用第4节建立的矩阵稳定性分析方法来回答这一问题。

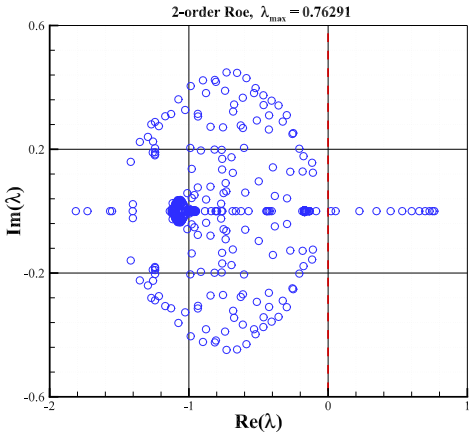
5.1. 不同黎曼求解器的稳定性分析

已有研究表明，黎曼求解器在触发激波不稳定性方面起着重要作用 [3, 21, 32, 35, 68]。本节进一步研究黎曼求解器对二阶格式激波不稳定性的影响。这里考察了几种具有不同耗散特性的近似黎曼求解器，包括 Roe [69, 70], HLL [7], HLLC [20], AUSM$^+$[42], 和 van Leer [16]。请注意，本文中的 HLL 和 HLLC 黎曼求解器采用 Davis [71]提出的波速估计方法。

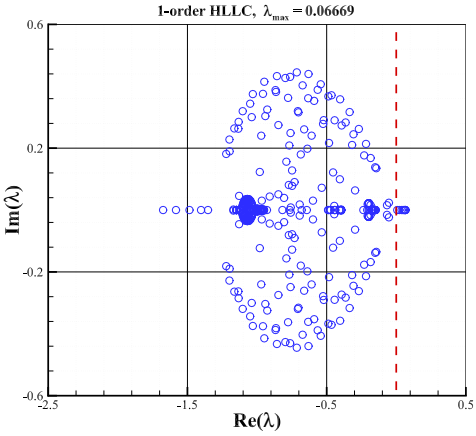
在 $M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$的条件下进行稳定性分析。图 10 展示了采用这些黎曼求解器的一阶和二阶格式的稳定性矩阵的所有特征值。右列显示采用 van Albada限制器的二阶格式结果，左列则显示一阶格式的结果。根据图 10 可以发现，二阶格式特征值最大实部的符号与黎曼求解器密切相关，并且与一阶格式的结果一致。这表明，与一阶格式一样，黎曼求解器仍在决定二阶格式的激波稳定性方面发挥关键作用，正如其对



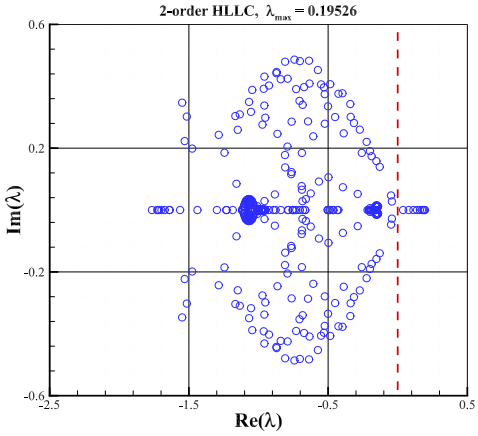
(a) 一阶 Roe



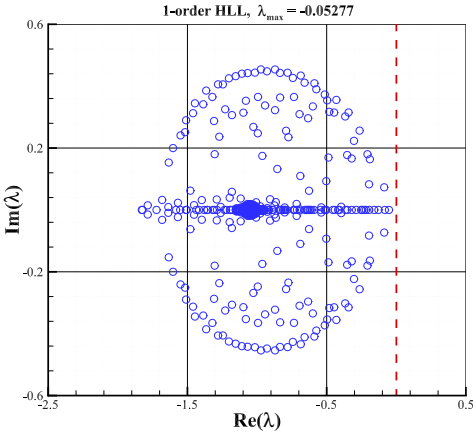
(b) 二阶 Roe



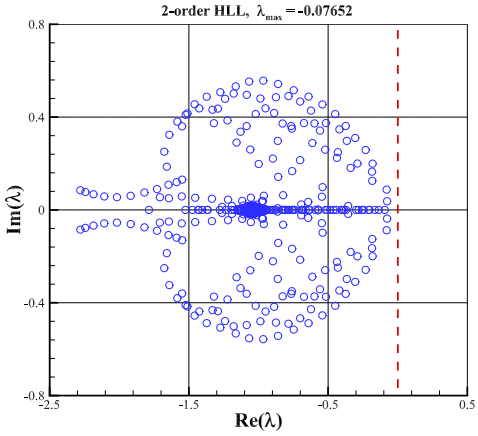
(c) 一阶 HLLC



(d) 二阶 HLLC

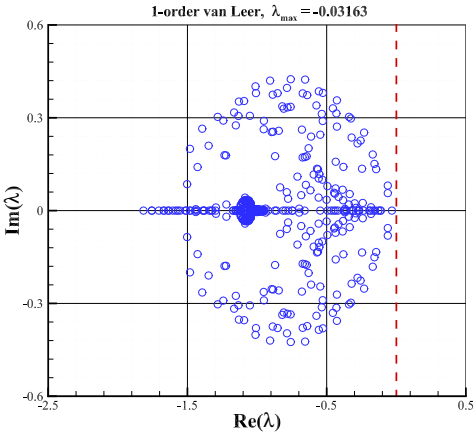


(e) 一阶 HLL

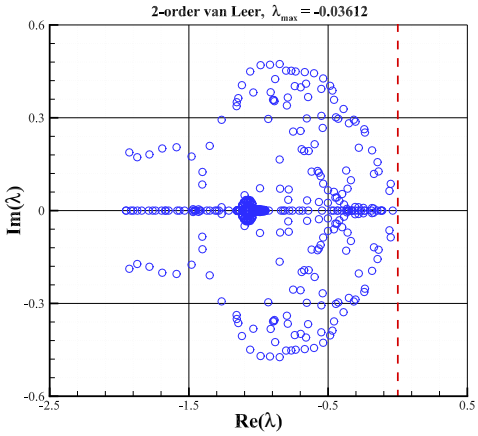


(f) 二阶 HLL

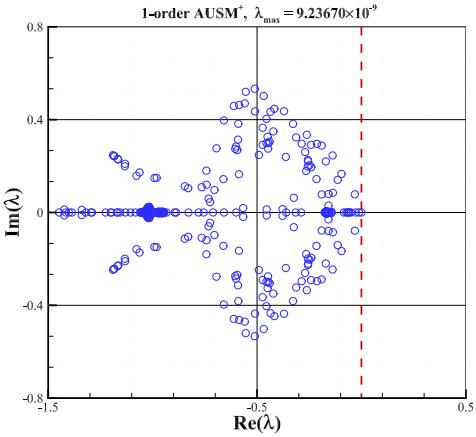
图10：不同黎曼求解器的特征值在S复平面中的分布。（网格包含 11×11 个网格单元，$M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$。左列：一阶格式；右列：采用van Albada限制器的二阶格式。）



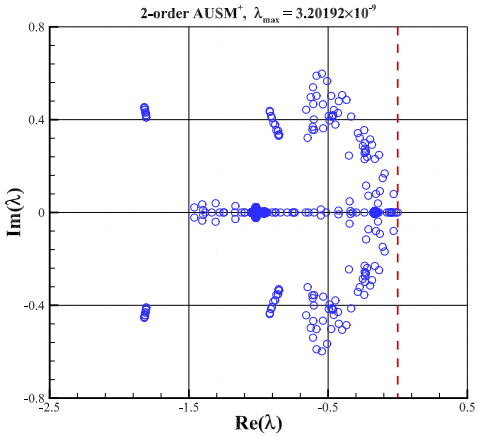
(g) 一阶 van Leer



(h) 二阶 van Leer



(i) 一阶 AUSM$^+$



(j) 二阶 AUSM$^+$

图 10：不同黎曼求解器对应的复平面中**S**的特征值分布。（网格包含 11×11 个网格单元，$M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$。左列：一阶格式；右列：采用 van Albada限制器的二阶格式。）

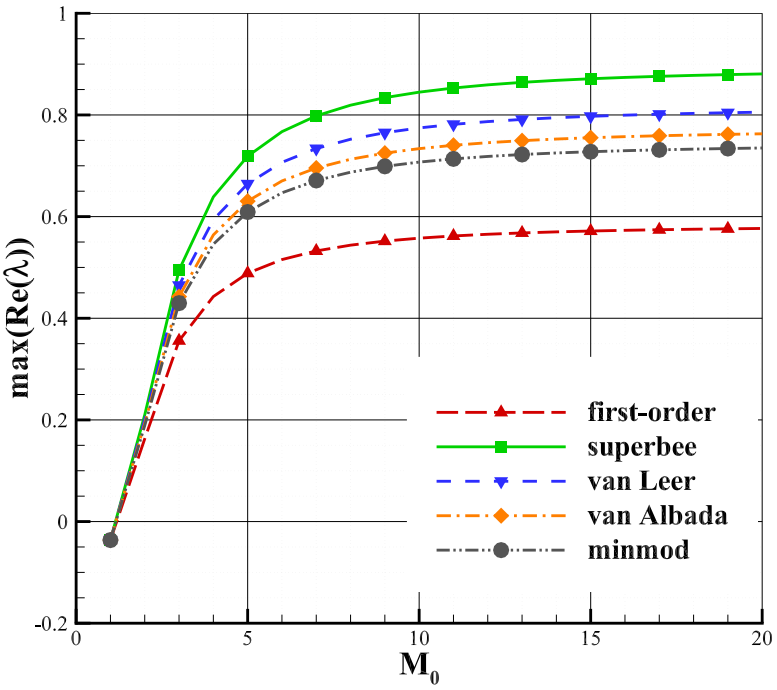
一阶情形。此外，如图所示，Roe 和 HLLC 黎曼求解器的特征值具有正实部，这显然会导致不稳定行为。众所周知，这两种求解器对接触波和剪切波的耗散最小。相反，HLL 和 van Leer 黎曼求解器的特征值始终具有负实部，表明它们具有稳定性。这两种求解器也都被称为耗散格式。更有趣的是，AUSM$^+$黎曼求解器的最大实部接近于零，这表明 AUSM$^+$ 黎曼求解器处于临界稳定状态。

5.2. 空间精度、限制器和马赫数的影响

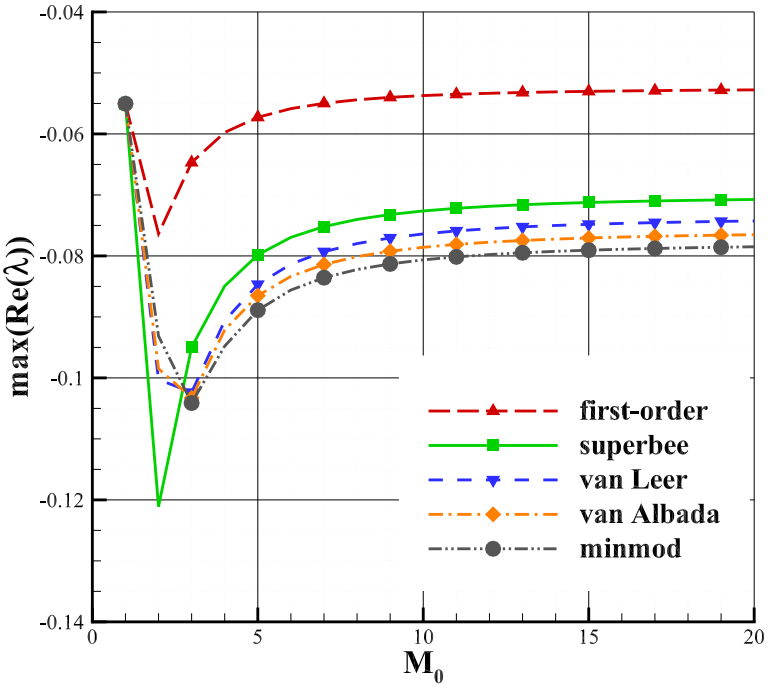
为研究空间精度、限制器和马赫数对激波不稳定性的影响，本节采用两种典型的黎曼求解器：Roe 和 HLL。也可以对其他求解器（如 HLLC、van Leer 和 AUSM$^+$）进行相同的研究，但为简洁起见，此处不予展示。如图11所示，分析针对二阶格式展开；为考察空间精度的影响，还列出了 一阶格式的结果以供比较。在考虑二阶精度时，采用了四种限制器（superbee、van Leer、van Albada 和 minmod）。通过分析图11中的结果，可以得出以下结论：

1. 如图11所示，空间精度会显著影响激波不稳定性。采用 Roe求解器的二阶格式，其特征值的最大实部大于一阶格式，这表明采用 Roe求解器的二阶格式比一阶格式更容易发生不稳定。然而，采用 HLL求解器的二阶格式，其特征值的最大实部小于一阶格式，表明采用 HLL求解器的二阶格式比一阶格式更稳定。对于 AUSM$^+$ 求解器，也可得出与 HLL求解器相同的结论；如第5.1节所示，该求解器临界稳定。因此，我们可以推断，当空间精度提高到二阶时，稳定格式和临界稳定格式的稳定性会更好，而不稳定格式的稳定性则会变差。

2. 对于二阶格式，限制器是影响激波不稳定性的关键因素。采用耗散最低的 superbee 限制器时，二阶格式的特征值最大实部最大；而采用耗散最高的 minmod 限制器时，其最大实部最小。这表明，采用耗散较低的限制器时，计算更容易出现不稳定性。 $M_0 = 2$ 时，HLL求解器是一个例外。如图11(b)所示，采用 HLL求解器的二阶格式使用 minmod 限制器时更不稳定，但仍然稳定。总之，如果需要缓解超声速和高超声速流动模拟中的激波不稳定性问题，优先选用耗散较高的限制器，例如 minmod。



(a) Roe黎曼求解器



(b) HLL黎曼求解器

图11：特殊精度、限制器和马赫数的影响。（包含 11×11 个网格单元的网格， $\varepsilon = 0.1$。）

3. 从图11可以看出，马赫数对激波不稳定性有显著影响。当马赫数较小时，特征值的最大实部会随着马赫数的增加而迅速增大；但当马赫数超过某个阈值后，增幅会减缓，特征值的最大实部甚至保持不变。该阈值由黎曼求解器、空间精度和限制器决定。这表明，马赫数较小时，其影响十分明显，且马赫数越大，激波不稳定性越严重。然而，马赫数的影响有限。若马赫数超过某个阈值，则对激波稳定性的影响很小。还应注意，采用 HLL求解器的格式在马赫数为 2 或 3 时最稳定（对于一阶格式和采用 superbee 限制器的二阶格式，马赫数为 2；对于其他格式，马赫数为 3。）

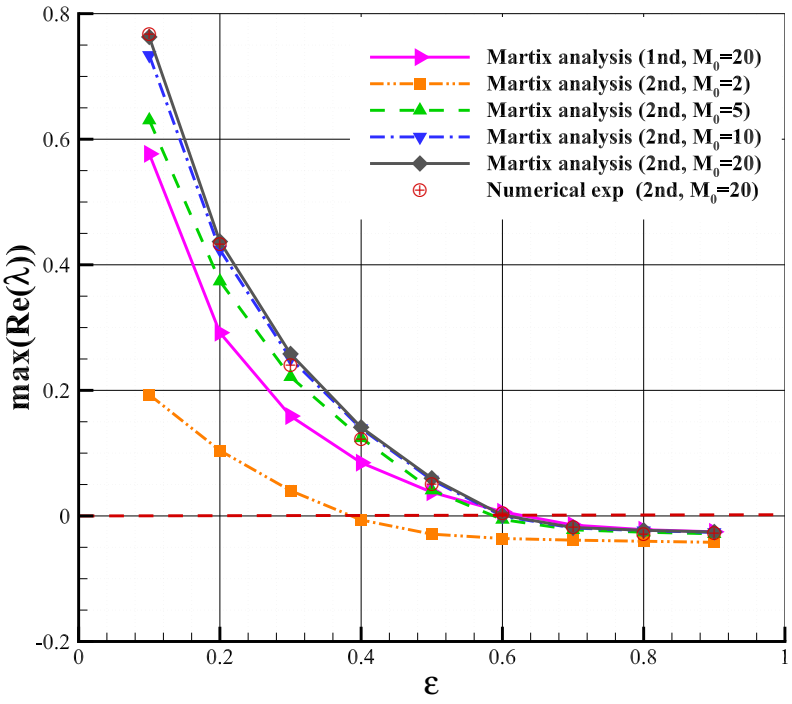


图12：数值激波结构的影响。（采用van Albada限制器的Roe求解器，网格包含 11×11 个网格单元。）

5.3. 数值激波结构分析

研究发现，数值激波结构对激波不稳定性起着至关重要的作用。本节采用矩阵稳定性分析方法，研究数值激波结构对二阶格式的影响。由于我们更关注不稳定行为，因此在后续分析中采用已证明更容易产生不稳定性的Roe求解器。

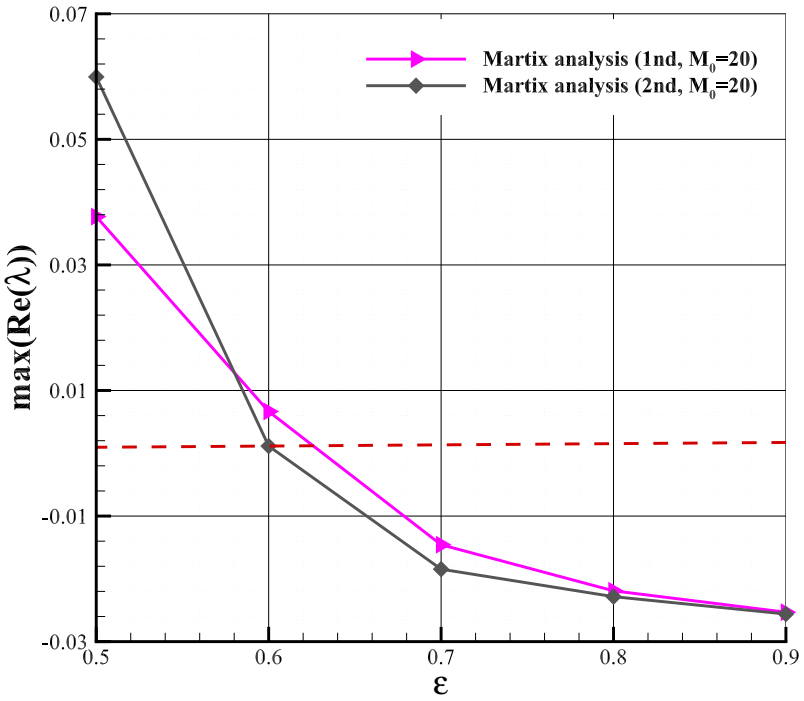


图13： $0.5 \leq \varepsilon \leq 0.9$对一阶和二阶格式数值激波结构的影响。（网格包含$11 \times 11$ 个网格单元，采用Roe求解器和van Albada限制器。）

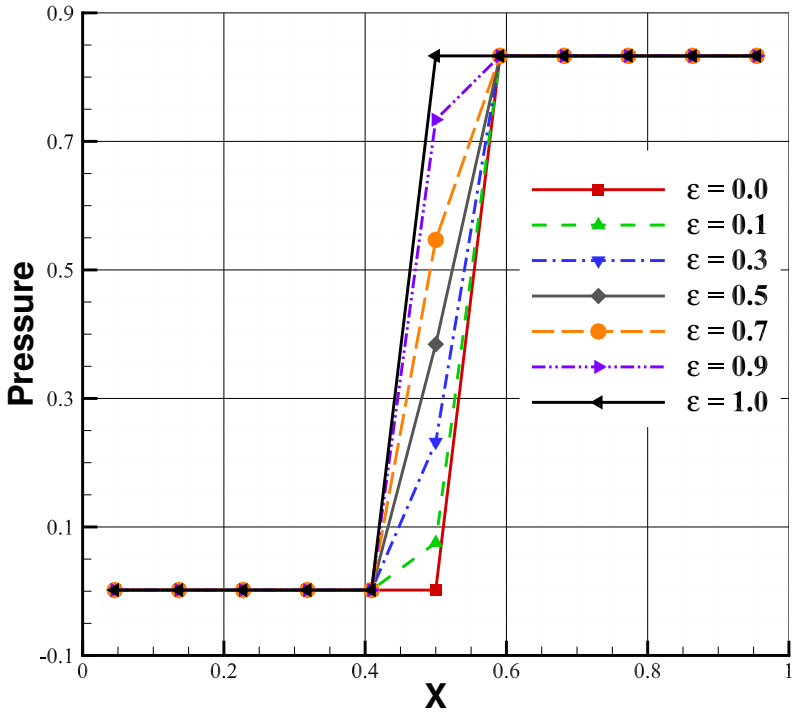
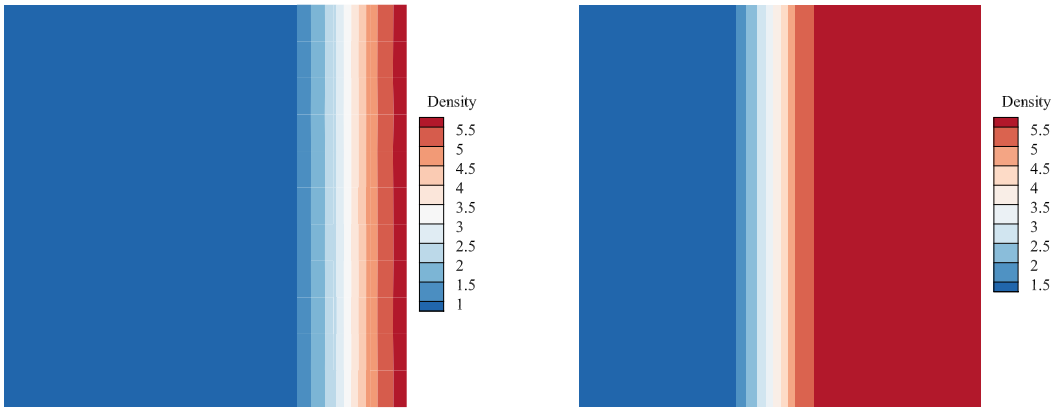


图14：具有不同激波位置的一维激波的收敛结果。（含 1×11 个网格单元的网格，采用 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式，$M_0 = 20$。）



(a) $\varepsilon = 0.5$　　(b) $\varepsilon = 0.7$

图15：不同数值激波位置处的密度等值线。（含 11×11 个网格单元的网格，采用 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式，t=1000。）

图12展示了数值激波结构的影响。如图所示，随着 ε 增大，二阶格式特征值的最大实部减小；当 ε 超过某一阈值时，特征值的最大实部开始小于0。该阈值与马赫数有关：当 $M_0 = 2$ 时约为0.4，当 $5 < M_0 < 20$时约为0.6。图14展示了不同 ε下的一维激波收敛结果。根据图12和图14，我们可以得出结论：内部激波条件越接近下游状态，二阶格式越稳定。图15展示了不同数值激波位置下的密度等值线，验证了矩阵稳定性分析的有效性。

图12还表明，数值激波结构对一阶格式和二阶格式的影响相同。无论是一阶格式还是二阶格式，都可以通过使内部激波条件更接近下游状态来稳定原本不稳定的格式。此外，当 $\varepsilon < 0.6$时，采用Roe黎曼求解器的一阶格式和二阶格式都不稳定。而且，二阶格式特征值的最大实部大于一阶格式，这表明二阶格式的稳定性不如一阶格式。然而，如图12和图13所示，当 $\varepsilon \geq 0.6$ 时，一阶格式和二阶格式的特征值最大实部均小于零或略大于零，表明计算稳定或临界稳定。此外，在 $\varepsilon \geq 0.6$区域内，一阶格式特征值的最大实部大于二阶格式，这表明二阶格式的稳定性优于一阶格式，与第5.2节的结论一致。

5.4. 激波不稳定性的网格依赖性

除了马赫数、空间精度、限制器函数、黎曼求解器和数值激波结构的影响外，计算网格也会对激波不稳定性[5, 15, 25, 32, 43]产生显著影响。本节将进一步从长宽比和畸变角的角度，研究网格如何影响二阶格式捕捉强激波的稳定性。

5.4.1. 长宽比

在本文中，长宽比可以定义为

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{35}$$

其中， Δx 表示网格单元在 x 方向上的长度， Δy 表示其在 y 方向上的长度。在本研究中，我们分析计算域为 50×50 和 $\Delta x = 1$ 的情况。随后，通过改变 y 方向上的网格单元数量来调整长宽比。图16展示了长宽比对特征值最大实部的影响。根据图16可以发现，随着 δ 的增大，特征值的最大实部逐渐减小。因此，我们可以得出结论，激波

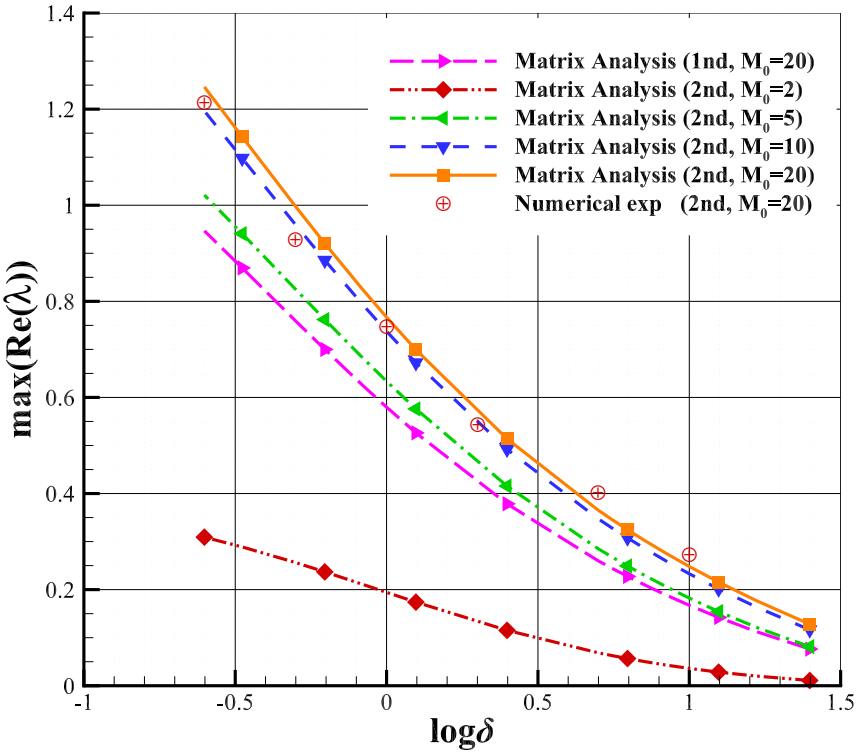
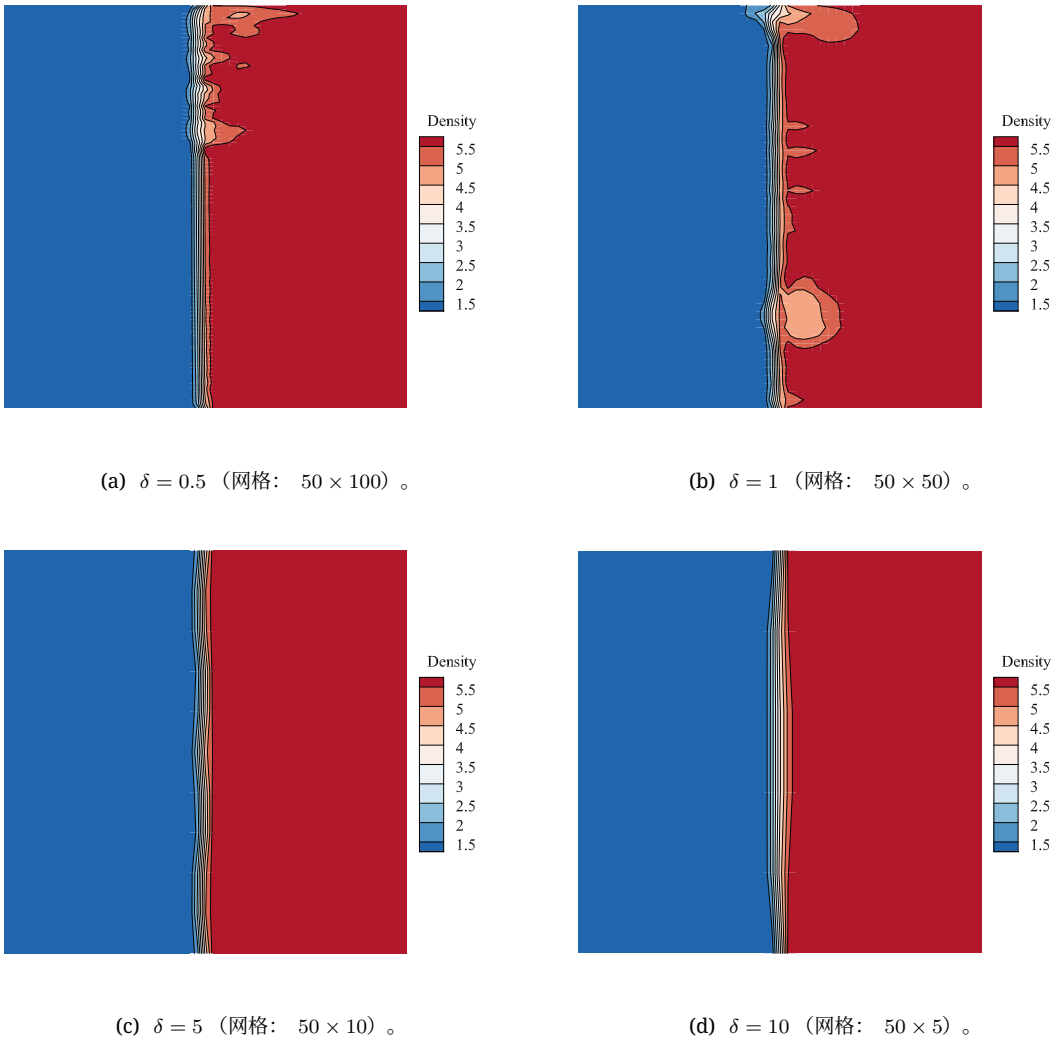


图 16：长宽比的影响。（计算域： 50×50，x 方向有 50 个网格单元，y 方向的网格单元数发生变化，初始激波位于 $i = 25$、$\varepsilon = 0.1$，采用 Roe求解器和 van Albada限制器。）

当网格在 y 方向变得更加细长时，不稳定性会减弱；而当网格在 y 方向加密时，不稳定性会加剧。图 17 中的数值实验验证了这一结论：随着长宽比增大，流场变得更加稳定。此外，从图 16 可以推断，长宽比对一阶格式和二阶格式的影响相同：增大长宽比可以减弱激波不稳定性。在相同马赫数下，对于不同的长宽比，二阶格式始终比一阶格式更不稳定。



(a) $\delta = 0.5$（网格： 50×100）。

(b) $\delta = 1$（网格： 50×50）。

(c) $\delta = 5$（网格： 50×10）。

(d) $\delta = 10$（网格： 50×5）。

图 17：不同长宽比下的流场。（计算域： 50×50，x 方向有 50 个网格单元，y 方向的网格单元数发生变化，初始激波位于 $i = 25$、 $M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$，采用 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式，t=500。）

长宽比的分析为我们在网格生成过程中提供了指导。我们可以通过增大激波附近的长宽比来缓解激波不稳定性，尽管增大该长宽比的效果

长宽比受到限制（如图 16 和 17 所示，即使长宽比高达 10——这在工程应用中可能过大——计算仍然不稳定。）。

5.4.2. 畸变角

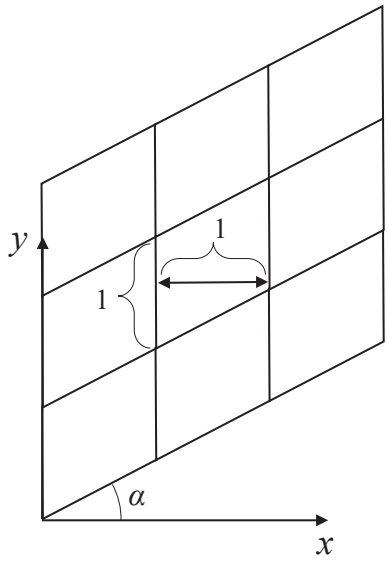


图 18：畸变角的定义。

除了长宽比之外，畸变角是另一个可能影响强激波捕捉稳定性的因素 [25]。本文将畸变角定义如图18所示。请注意，当网格沿逆时针方向偏转时， α 为正；反之则为负。本文取 $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ 。图19显示，**S** 的特征值实部最大值是 α的函数。如图所示，对于采用 Roe求解器的二阶格式，特征值实部最大值随 $|\alpha|$ 增大而减小；如果 $|\alpha|$ 足够大，该值可能变为负值。因此，可以通过增大网格的畸变角来消除二阶格式的激波不稳定性，且阈值与马赫数有关。当 $M_0 = 2$时，阈值约为 10°；若 $M_0 = 20$，阈值则约为 27° 。图20展示了畸变角不同时的流场，据此可见，随着畸变角增大，激波变得更加稳定。这证实了矩阵稳定性分析的结果。值得注意的是，Zhang 等人[49] 发现，采用三角形网格替代四边形网格可以消除爆炸结现象。这或许可以用本文的结论来解释。此外，比较一阶格式与二阶格式之间的差异可以发现，无论格式稳定与否，随着畸变角增大，一阶格式的特征值实部最大值始终小于二阶格式。因此，可以推断，随着畸变角增大，二阶格式的稳定性始终不如一阶格式。

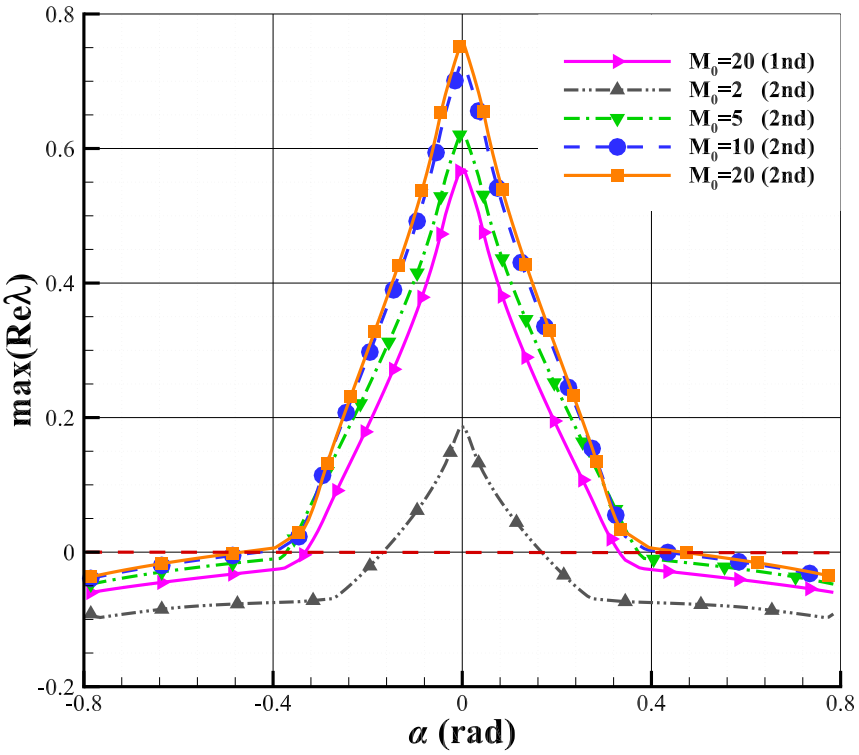
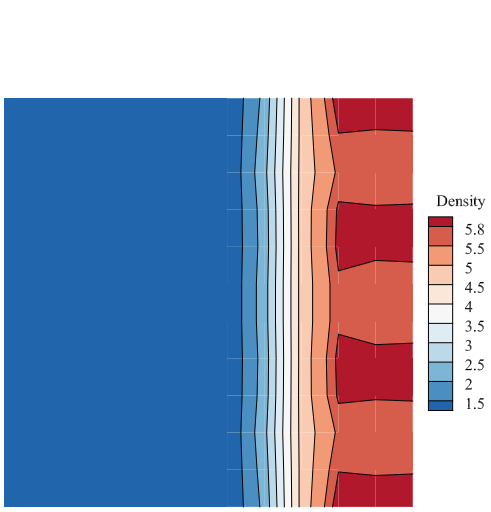
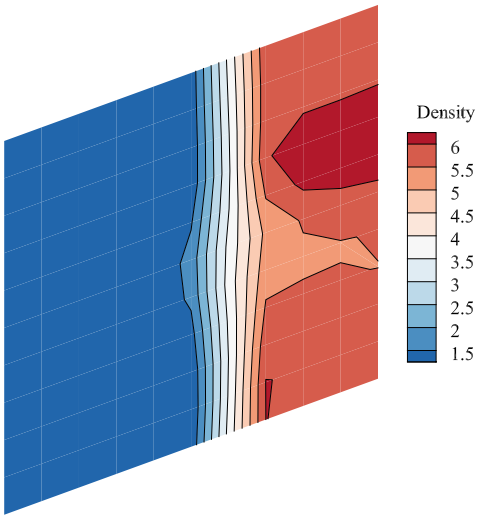


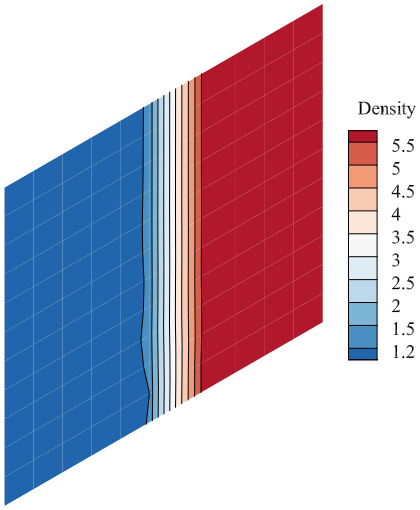
图19：畸变角的影响。($\varepsilon = 0.1$、Roe求解器和 va n Albada 限制器。)



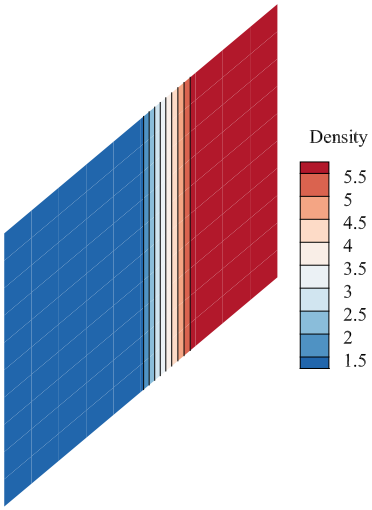
(a) $\alpha = 0°$



(b) $\alpha = 20°$



(c) $\alpha = 30°$

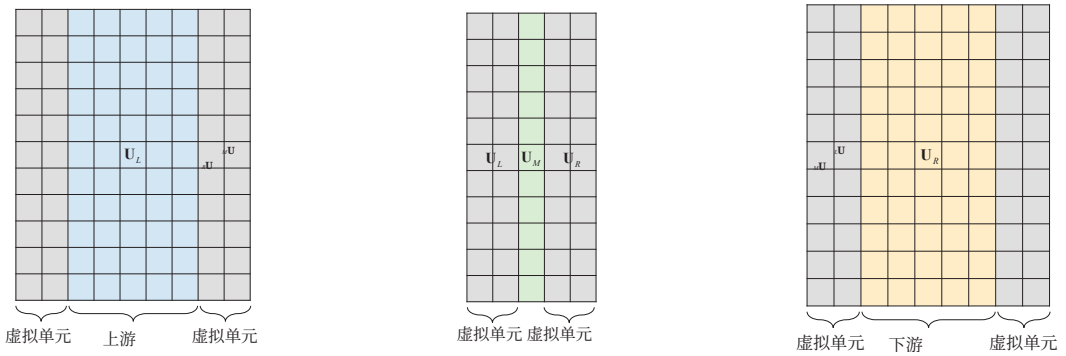


(d) $\alpha = 40°$

图20：不同畸变角下的流场。（网格包含 11×11 个网格单元， $M_0 = 20$ 和 $\varepsilon = 0.1$，采用Roe求解器和van Albada限制器的二阶格式，t=500。）

5.5. 不稳定性源的空间定位

在上述各节中，我们致力于探究二阶有限体积格式中激波不稳定性的主要数值特征。本节将进一步研究激波不稳定性机理中的一个重要问题：不稳定性源的空间定位。Dumbser等人[32] 和Chen等人[25]研究了这一问题，并发现当激波恰好位于两个网格单元之间时，激波不稳定性起源于激波上游。然而，在实际模拟中，捕捉到的激波很少恰好位于两个网格单元之间。Xie 等人[21]研究了数值激波结构的影响。通过一系列精心设计的数值实验，他们发现激波结构内部的扰动是触发不稳定性的主要因素。这些研究集中于一阶格式。本节将使用矩阵稳定性分析方法，研究二阶格式中不稳定性源的空间定位。

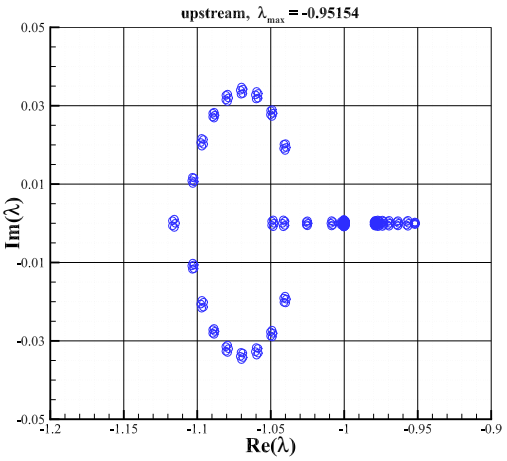


(a) 上游区域。 (b) 数值激波结构域——主。 (c) 下游区域。

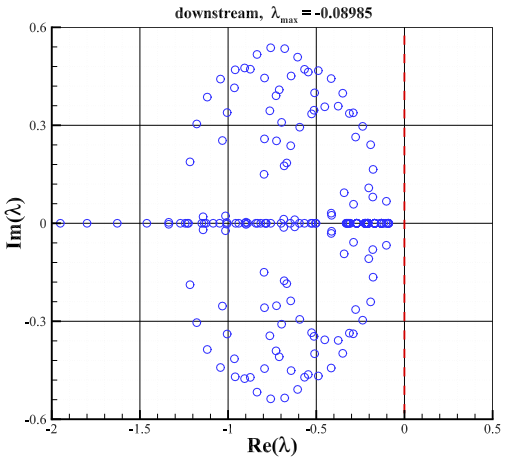
图 21：用于研究不稳定性源空间定位的三个测试算例。

如图 21 所示，为探究不稳定性源的位置，采用了三个测试算例。在第一个算例中（图 21(a)），除虚拟单元外，所有网格单元均设为上游状态 $\mathbf{U}_L$ ，而右侧边界条件则设为中间状态$\mathbf{U}_M$ 和下游状态 $\mathbf{U}_R$。由于假定边界处没有误差，因此除通量梯度 [32]外，边界对误差演化的直接贡献在稳定性矩阵中为零。此操作可防止数值激波结构和下游区域中产生任何误差，从而能够单独分析上游区域的稳定性。同样，为了分析数值激波结构和下游区域的稳定性，图 21(b) 和 (c) 展示了类似的处理方法。

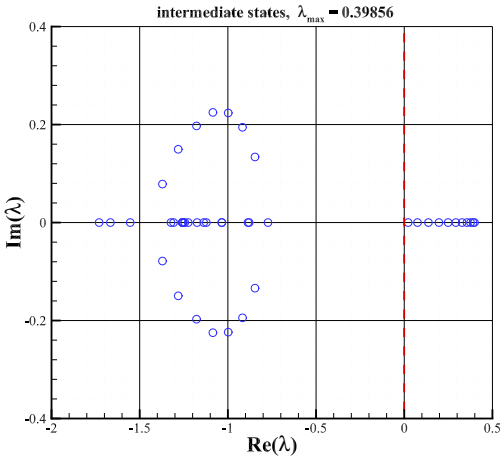
采用矩阵稳定性分析方法研究了三个测试算例的稳定性。图22展示了特征值在复平面上的分布，从中可以看出，数值激波结构的特征值最大实部大于0，而其余的均小于



(a) 上游。

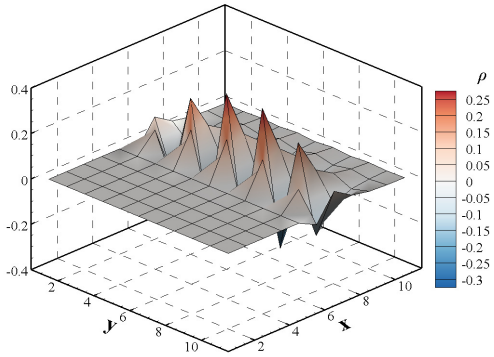


(b) 下游。

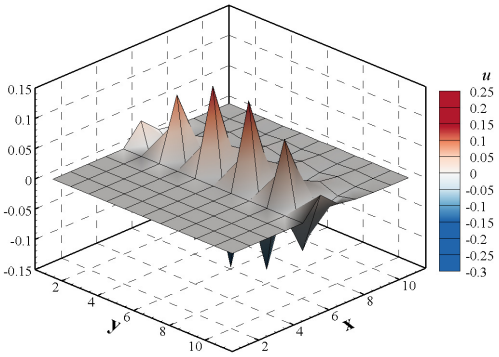


(c) 数值激波结构。

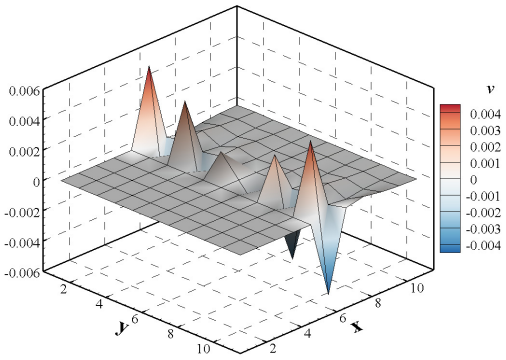
图 22：三种测试算例中$\mathbf{S}$ 在复平面上的特征值分布。($M_0 = 20$，采用 Roe求解器和 van Albada限制器的二阶格式。)



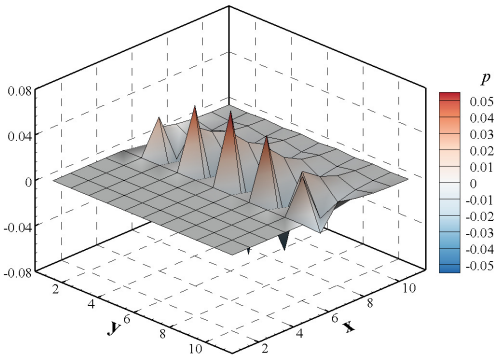
(a) ρ的不稳定模态。



(b) u的不稳定模态。



(c) v的不稳定模态。



(d) p的不稳定模态。

图23： $\lambda = 0.76291 + 0i$的不稳定模态。

0. 因此，我们可以推断，在激波位于上游边界或下游边界的情况下，稳定性分析预测其行为稳定；而当数值激波结构被包含在计算域内时，分析则预测其无条件不稳定。此外，下游场的特征值最大实部大于上游场的特征值最大实部，这可能意味着，与上游相比，下游更容易受到来自数值激波结构的不稳定信息的影响。此外，最大特征值 [32] 的特征向量中包含了不稳定模态的空间行为信息。图23展示了四个原始变量对应的不稳定模态。如图23所示，数值激波结构是最不稳定的位置，而且不稳定信息更容易向下游传播。因此，根据本节的分析，我们可以得出结论：激波不稳定性起源于数值激波结构。与上游相比，下游更容易受到激波结构中伪误差的影响。

6. 结论

本文致力于定量研究二阶格式的激波不稳定性。为此，我们针对有限体积 MUSCL 方法建立了矩阵稳定性分析方法。借助矩阵稳定性分析，我们详细研究了二阶格式的主要数值特性及其激波不稳定性的内在机理。结果表明，激波不稳定性受到激波强度的显著影响。随着马赫数增加，激波计算会变得更加不稳定。此外，黎曼求解器是影响激波稳定性的重要因素，其对二阶格式的影响与对一阶格式的影响一致。本研究最重要的发现之一，是揭示了一阶格式与二阶格式在激波不稳定性方面的差异。采用 HLL 等高耗散求解器时，将空间精度提高到二阶可提升强激波捕捉的稳定性。然而，与一阶格式相比，采用 Roe 等低耗散求解器的二阶格式更容易出现不稳定性。对于二阶格式，研究证实限制器是引发激波不稳定性的关键因素。与低耗散限制器相比，耗散性更高的限制器能够减缓计算结果趋于不稳定的过程。除上述因素外，结果还表明，计算网格仍是显著影响激波不稳定性的关键因素；增大长宽比和畸变角能够减轻激波不稳定性。此外，本研究还探讨了激波不稳定性的内在机理，并证实激波不稳定性源于数值激波结构。界面激波条件越接近下游状态，激波计算就越稳定。

该 c 当前研究为定量分析二阶 MUSCL 格式的激波稳定性提供了一种有效工具。 -

二阶有限体积 MUSCL 方法为深入理解和控制爆炸结现象或激波不稳定性的发生提供了一些线索。然而，数值证据表明，高阶格式可能面临更高的激波不稳定性风险，而且对其进行定量分析也更具挑战性。因此，亟需一种能够研究高阶格式激波稳定性的定量分析工具。高阶激波捕捉方法所具有的相应数值特征及其内在机理更值得深入研究。这正是我们目前正在开展的工作，并将在后续研究中予以介绍。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12202490）、中国湖南省自然科学基金（项目编号：11472004）、国防科技大学科研基金（项目编号：ZK21-10）以及湖南省研究生科研创新项目（项目编号：CX20220010 和 CX20220036）的资助。

参考文献

[1] A. Bonfiglioli, R. Paciorri, F. Nasuti, M. Onofri, 《结构化与非结构化网格上的 Moretti 激波拟合方法》，载于《数值分析手册》第 17 卷，Elsevier，2016 年，第 403–439 页。

[2] K. Perry, S. Imlay, 《钝体流动模拟》，载于第 24 届联合推进会议，美国航空航天学会，美国马萨诸塞州波士顿，1988 年，第 16 页。doi:10.2514/6.1988-2904。

[3] J. J. Quirk, 《对黎曼求解器之争的贡献》，International Journal for Numerical Methods in Fluids 18 (6) (1994) 555–574。doi:10.1002/fld.1650180603。

[4] K. Kitamura、E. Shima、Y. Nakamura、P. L. Roe, 《高超声速加热计算的欧拉通量评估》，AIAA Journal 48 (4) (2010) 763–776。doi:10.2514/1.41605。

[5] T. Ohwada, R. Adachi, K. Xu, J. Luo，关于动理学格式中激波异常的补救措施，Journal of Computational Physics 255 (2013) 106–129。doi:10.1016/j.jcp.2013.07.038。

[6] T. Ohwada、Y. Shibata、T. Kato、T. Nakamura，一种简单、稳健且高效的可压缩流高阶精度激波捕捉格式：迈向极简主义，Journal of Computational Physics 362 (2018) 131–162。doi:10.1016/j.jcp.2018.02.019。

[7] A. Harten、P. D. Lax、B. van Leer, 《关于双曲守恒律的上游差分与 Godunov 型格式》，《SIAM评论》25 (1) (1983年) 35–61。doi:10.1137/1025002。

[8] B. Einfeldt，论气体动力学中的 Godunov 型方法，SIAM 数值分析杂志 25 (2) (1988) 294–318。doi:10.1137/0725021。[9]V. Rusanov，非定常激波与障碍物相互作用的计算，苏联计算数学与数学物理 1 (2) (1961) 304–320。doi: 10.1016/0041-5553(62)90062-9。[10] F. Ismail，迈向对高超声速流中激波的可靠预测：利用熵和涡量控制消除马赫杆现象。博士论文，密歇根大学 (2006)。[11] Z. Shen、W. Yan、G. Yuan，消除激波不稳定性的混合格式稳定性分析，计算物理通讯 15 (5) (2014) 1320–1342。doi:10.4208/cicp.210513. 091013a。[12] A. V. Rodionov，Godunov型格式中的人工黏性及其对爆炸结现象的消除作用，Journal of Computational Physics 345 (2017) 308–329。doi:10.1016/j.jcp.2017.05.024。[13] S. Simon，欧拉方程组的基于 HLL 的近似黎曼求解器中的数值激波不稳定性：分析与消除方法，博士论文，印度理工学院孟买分校 (2019)。[14] F. Qu、D. Sun、Q. Liu、J. Bai，高超声速流的黎曼求解器综述，计算工程方法档案 29 (3) (2022) 1771–1800。doi:10.1007/s11831-021-09655-x。[15] M. Pandolfi、D. D'Ambrosio，迎风格式中的数值不稳定性："马赫杆"现象的分析与消除方法，Journal of Computational Physics 166 (2) (2001) 271–301。doi: 10.1006/jcph.2000.6652。[16] B. van Leer，欧拉方程的通量矢量分裂，载于：H. Araki、J. Ehlers、K. Hepp、R. Kippenhahn、H. A. Weidenm¨uller、J. Zittartz、E. Krause（编），第八届数值流体力学方法国际会议，第 170 卷，Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1982，第 507–512 页。[17]J. Gressier、J.-M. Moschetta，激波计算中的稳健性与精度，International Journal for Numerical Methods in Fluids 33 (3) (2005) 313–332。doi:10.1002/1097-0363(20000615)33:3<313::aid-fld7>3.0.co;2-e。[18] S. Simon、J. Mandal，通过反扩散控制消除 HLLC 黎曼求解器中的数值激波不稳定性，计算机与流体 174 (2018) 144–166。doi:10.1016/j.compfluid.2018.07.001。

[19] S. Simon, J. Mandal，消除HLLEM黎曼求解器中数值激波不稳定性的策略，International Journal for Numerical Methods in Fluids 89 (12) (2019) 533–569。doi:10.1002/fld. 4710.[20] E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares，在HLL黎曼求解器中恢复接触面，Shock Waves 4 (1) (1994) 25–34。doi:10.1007/BF01414629.[21] W. Xie, W. Li, H. Li, Z. Tian, S. Pan，强激波下Godunov型格式的数值不稳定性，Journal of Computational Physics 350 (2017) 607–637。doi:10.1016/j.jcp.2017.08.063.[22] B. Einfeldt，流体动力学中的平面波黎曼问题，arXiv预印本arXiv:1002.1396 (2010).[23]K. Xu, Q. Sun, P. Yu，计算流体力学中数值间断所产生的有效物理过程，International Journal of Hypersonics 1 (3) (2010) 157–172。doi: 10.1260/1759-3107.1.3.157。URL http://multi-science.atypon.com/doi/10.1260/1759-3107.1.3.157[24] Z. Chen, X. Huang, Y.-X. Ren, Z. Xie, M. Zhou，基于机理的基于黎曼求解器的激波捕捉格式的激波不稳定性消除，AIAA Journal 56 (9) (2018) 3652–3666。doi: 10.2514/1.j056882.[25] Z. Chen, X. Huang, Y.-X. Ren, Z. Xie, M. Zhou，基于黎曼求解器的激波捕捉格式中激波不稳定性的机理研究，AIAA Journal 56 (9) (2018) 3636–3651。doi:10.2514/1. j056881.[26] M.-S. Liou，质量通量格式及其与激波不稳定性的联系，Journal of Computational Physics 160 (2) (2000) 623–648。doi:10.1006/jcph.2000.6478.[27] W. Xie, Y. Zhang, Q. Chang, H. Li，面向全马赫数流动的精确且稳健的Roe型格式，Advances in Applied Mathematics and Mechanics 11 (1) (2019) 132–167.[28] W. Xie, Z. Tian, Y. Zhang, H. Yu, W. Ren，强激波下Godunov型格式数值不稳定性的进一步研究，Computers & Mathematics with Applications 102 (2021) 65–86。doi:10.1016/j.camwa.2021.10.008.[29] W. Xie, Z. Tian, Y. Zhang, H. Yu, W. Ren，面向高超声速加热计算的全速HLL型格式统一构造，计算机与流体 233 (2022) 105215.[30] N. Fleischmann, S. Adami, X. Y. Hu, N. A. Adams，一种消除网格对齐激波不稳定性的低耗散方法，Journal of Computational Physics 401 (2020) 109004。doi:10.1016/j. jcp.2019.109004.

[31] N. Fleischmann、S. Adami、N. A. Adams，具有较低数值耗散的 HLLC 黎曼求解器的激波稳定修正，Journal of Computational Physics 423 (2020) 109762.[32]M. Dumbser、J.-M. Moschetta、J. Gressier，爆炸结现象的矩阵稳定性分析，Journal of Computational Physics 197 (2) (2004) 647–670. doi:10.1016/j.jcp.2003. 12.013.[33] Y. Chauvat、J.-M. Moschetta、J. Gressier，激波的数值结构与爆炸结现象，International Journal for Numerical Methods in Fluids 47 (8-9) (2005) 903–909. doi:10.1002/fld.916.[34] K. Kitamura，关于高超声速加热问题的激波捕捉方法进一步综述，载于：第 21 届 AIAA 计算流体动力学会议，美国航空航天学会，加利福尼亚州圣迭戈，2013，p. 21. doi:10.2514/6.2013-2698.[35] K. Kitamura、P. Roe、F. Ismail，高超声速流动计算中的欧拉通量评估，AIAA Journal 47 (1) (2009) 44–53. doi:10.2514/1.33735.[36] K. Kitamura、E. Shima，迈向激波稳定且准确的高超声速加热计算：一种适用于 AUSM 系列格式的新压力通量，Journal of Computational Physics 245 (2013) 62–83. doi:10.1016/j.jcp.2013.02.046.[37] L. Liu、X. Li、Z. Shen，克服 HLLE 型黎曼求解器的激波不稳定性，Journal of Computational Physics 418 (2020) 109628. doi:10/gg3ghj.[38] D. Zaide、P. Roe，一维激波捕捉异常与跳跃条件，载于：第 20 届 AIAA 计算流体动力学会议，美国航空航天学会，夏威夷州檀香山，2011，p. 3686. doi:10.2514/6.2011-3686.[39] D. W.-M. Zaide，数值激波异常，博士论文，密歇根大学（2012）.[40] D. W. Zaide、P. L. Roe，一种可减少一维数值激波异常的二阶有限体积方法，载于：第 21 届 AIAA 计算流体动力学会议，2013，p. 2699.[41] D. W. Zaide、P. L. Roe，用于减少数值激波异常的通量函数，载于：第七届国际计算流体动力学会议（ICCFD7），2013，p. 20.[42] M.-S. Liou，AUSM 的后续：AUSM+，Journal of Computational Physics 129 (2) (1996) 364– 382. doi:10.1006/jcph.1996.0256.

[43] S. Henderson, J. Menart，关于爆炸结现象下钝头体的网格研究，载于：第 39 届 AIAA 热物理会议，美国航空航天学会，迈阿密，佛罗里达州，2007 年，第 3904 页。doi:10.2514/6.2007-3904.
[44] W. Xie, R. Zhang, J. Lai, H. Li，一种适用于不同马赫数下可压缩欧拉系统的精确稳健 HLLC 型黎曼求解器，《International Journal for Numerical Methods in Fluids》89 (10) (2019) 430–463。doi:10.1002/fld.4704.[45]L. Hu, H. Yuan, K. Zhao，一种具有改进接触间断分辨能力的可压缩欧拉流激波稳定 HLLEM 格式，Journal of Computational Physics 453 (2022) 110947。doi:10.1016/j.jcp.2022.110947.[46] S.-s. Chen, C. Yan, K. Zhong, H.-c. Xue, E.-l. Li，一种兼具稳健性与低耗散特性的新型通量分裂格式，用于高超声速加热预测，《International Journal of Heat and Mass Transfer》127 (2018) 126–137。doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.121.[47] J. Chen, D. Yang, Q. Chen, J. Sun, Y. Wang，一种稳定性改进的旋转格子玻尔兹曼通量求解器，用于模拟高马赫数下强激波可压缩流，Computers & Mathematics with Applications 132 (2023) 18–31。doi:10.1016/j.camwa.2022.12. 003.[48] D. Sun, F. Qu, J. Bai，一种具有自相似内部结构的有效欧拉系统全速域黎曼求解器，计算机与流体 239 (2022) 105392。doi:10.1016/j.compfluid.2022.105392.
[49] F. Zhang, Z. Yuan, J. Liu，关于非结构有限体积法数值激波稳定性的讨论：黎曼求解器与限制器，载于：第二届国际青年科学家航空航天会议，北京，中国，2017 年，第 6 页。[50] G. Tu, X. Zhao, M. Mao, J. Chen, X. Deng, H. Liu，采用高阶 CFD 格式评估欧拉通量：激波不稳定性，《国际计算流体动力学杂志》28 (5) (2014) 171–186。doi:10.1080/10618562.2014.911847.[51] Z.-H. Jiang, C. Yan, J. Yu, B. Gao，改善高超声速流动中的激波异常与加热预测的有效技术，AIAA Journal 55 (4) (2017) 1475–1479。doi:10.2514/1.j055347.[52] F. Kemm，关于爆炸结现象的启发式与数值考量，Applied Mathematics and Computation 320 (2018) 596–613。doi:10.1016/j.amc.2017.09.014.
[53] B. van Leer，迈向终极守恒差分格式。V. Godunov 方法的二阶续篇，Journal of Computational Physics 32 (1) (1979) 101–136。doi:10.1016/ 0021-9991(79)90145-1.

[54] B. van Leer、H. Nishikawa，《迈向对 MUSCL 的终极理解：实现三阶精度的陷阱》，Journal of Computational Physics 446 (2021) 110640。doi:10.1016/j.jcp. 2021.110640.[55] J. Blazek，《计算流体力学：原理与应用》，第三版版，Butterworth-Heinemann，阿姆斯特丹，2015 年。[56] P. W. Hemker、S. P. Spekreijse，《稳态欧拉方程的多重网格求解》，Vieweg+Teubner Verlag，威斯巴登，1987 年。[57] P. L. Roe，《对间断流建模的一些贡献》，载于：《对间断流建模的一些贡献》，第 22 卷，施普林格出版社，纽约/柏林，1985 年，第 163–193 页。[58] Bram van Leer，《迈向终极守恒差分格式。II. 二阶格式中单调性与守恒性的结合》，Journal of Computational Physics 14 (4) (1974) 361–370。doi:10.1016/0021-9991(74)90019-9.[59] G. D. van Albada、B. van Leer、W. W. Roberts，《宇宙气体动力学中计算方法的比较研究》，《迎风与高分辨率格式》108 (1) (1982) 76–84。[60] P. L. Roe，《欧拉方程的基于特征的格式》，《流体力学年度评论》18 (1) (1986) 337–365。doi:10.1146/annurev.fl.18.010186.002005.[61] P. K. Sweby，《采用通量限制器求解双曲守恒律的高分辨率格式》，SIAM 数值分析杂志 21 (5) (1984) 995–1011。doi:10.1137/0721062.[62] S. Tang、M. Li，《几种新型双曲守恒律对称通量限制器的构造与应用》，计算机与流体 213 (2020) 104741。doi:10.1016/j.compfluid.2020. 104741.[63] F. Ismail、P. L. Roe，《经济型熵一致欧拉通量函数 II：激波处的熵产生》，Journal of Computational Physics 228 (15) (2009) 5410–5436。doi:10.1016/j.jcp.2009. 04.021.[64] R. Sanders、E. Morano、M.-C. Druguet，《迎风格式的多维耗散：稳定性及其在气体动力学中的应用》，Journal of Computational Physics 145 (2) (1998) 511–537。doi:10.1006/jcph.1998.6047.[65] S. Gottlieb、C.-W. Shu，《总变差不增龙格－库塔格式》，《计算数学》67 (221) (1998) 73–85。doi:10.1090/S0025-5718-98-00913-2。

[66] W. J. Rider，将高分辨率格式推广到非线性双曲守恒律系统的方法，International Journal for Numerical Methods in Fluids 17 (10) (1993) 861–885. doi:10.1002/fld.1650171004.[67] O. Zanotti, M. Dumbser，基于 WENO重构和原始变量时空预测器的高效守恒 ADER格式，Computational Astrophysics and Cosmology 3 (1) (2016) 1. doi:10.1186/s40668-015-0014-x.[68] K. Kitamura, E. Shima，静止、缓慢移动和快速移动激波产生异常的数值实验，AIAA Journal 57 (4) (2019) 1763–1772. doi:10.2514/1.j057366.[69] P. L. Roe，近似黎曼求解器、参数向量和差分格式，Journal of Computational Physics 43 (2) (1981) 250–258. doi:10.1006/jcph.1997.5705.[70] P. L. Roe，欧拉方程的基于特征的格式，Annual Review of Fluid Mechanics 18 (1) (1986) 337–365. doi:10.1146/annurev.fl.18.010186.002005.[71] S. F. Davis，简化的二阶Godunov型方法，SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 9 (3) (1988) 445–473. doi:10.1137/0909030.