arXiv:2305.03301v1 [math.PR] 5 May 2023

双变量随机张量均值的随机张量不等式与尾界，第一部分

Shih Yu Chang *

2023年5月8日

摘要

在本研究中，我们运用算子连接的概念来考察双变量随机张量均值。首先，我们通过建立张量马尔可夫不等式和张量切比雪夫不等式，将经典的马尔可夫不等式和切比雪夫不等式从随机变量推广到随机张量。我们利用这些不等式，为基于各种类型连接函数（即张量递增函数、张量递减函数和张量凹函数）的算子透视所表示的双变量随机张量均值建立尾界。我们还根据双变量随机张量均值的特征值的主序关系，考察特征值之和与乘积的尾界关系。这是我们关于随机张量不等式以及双变量随机张量均值尾界的工作的第一部分。在第二部分中，我们将考察关于不可逆随机张量的双变量随机张量均值及其应用。

索引词——马尔可夫不等式、切比雪夫不等式、随机张量、双变量张量均值、L¨owner 序关系、主序关系。

1 引言

随机张量在机器学习、物理学和计算机科学等多个领域都有理论和实际应用。在机器学习中，随机张量通常用于神经网络的权重初始化。神经网络由相互连接的节点（神经元）组成，这些节点接收输入数据、执行计算并产生输出。训练前，这些神经元之间连接的权重通常以随机值初始化。这有助于打破网络的对称性，并确保每个神经元学习到数据的不同特征 [1]。在物理学中，随机张量用于研究量子纠缠和纠缠态几何。具体而言，随机张量网络已用于模拟量子系统并理解纠缠态的性质。这些研究在量子计算、量子场论和凝聚态物理学等领域具有应用价值 [2]。在计算机科学中，随机张量用于算法的设计与分析。例如，随机化矩阵算法利用随机张量高效地计算矩阵分解，这些分解可应用于数据分析、信号处理和机器学习。随机化算法还用于图论，以解决图划分和聚类等问题 [3]。总而言之，随机张量的理论与应用在各个领域都有广泛的实际用途，从提升机器学习模型的性能，到增进我们对量子物理学的理解，再到优化算法 [4–10]。

*Shih Yu Chang 任职于美国加利福尼亚州圣何塞的圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮箱：shihyu.chang@sjsu.edu）。

在我们近期的工作中，我们通过随机双张量积分（DTI）的形式研究了双变量随机张量均值 [5]。我们推导出了随机 DTI 的酉不变范数尾界，并利用该界进一步推导出多种类型的双张量均值（例如算术均值、几何均值和调和均值）的酉不变范数尾界。在这项工作中，我们运用算子连接的概念来研究双变量随机张量均值 [11]。自 1994 [12, 13], 以来，Ando-Hiai 型不等式及其应用一直是算子理论领域活跃的研究课题，而且它们在双变量/多变量算子均值的近期发展中发挥着关键作用。将张量视为算子时，两个张量的算子视角 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$和 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$是与一个连续函数（又称连接函数） g 相关联的二元张量函数，该函数定义在 $(0, \infty)$ 上，记为 $\mathcal{A} \#_g \mathcal{B}$，其定义如下：

$$\mathcal{A} \#_g \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}^{1/2} \star_N g\left(\mathcal{B}^{-1/2} \star_N \mathcal{A} \star_N \mathcal{B}^{-1/2}\right) \star_N \mathcal{B}^{1/2}, \tag{1}$$

其中， $\star_N$ 是由方程 (2) [14, 15]定义的两个张量之间的爱因斯坦积。当函数 g 是满足 $g(1) = 1$的正算子单调函数时，算子透视运算 $\#_g$ 可简化为算子均值运算 [11]。

在这项工作中，我们首先通过建立张量马尔可夫不等式和张量切比雪夫不等式，将经典的马尔可夫不等式和切比雪夫不等式从随机变量推广到随机张量。这些不等式用于为基于各种类型连接函数的算子透视所表示的双变量随机张量均值提供尾界：张量递增函数、张量递减函数和张量凹函数。我们还基于双变量随机张量均值的特征值的主序关系，推导了特征值求和与乘积的尾界关系。我们关于双变量随机张量均值之间 L¨owner 序关系的研究基于 [14], 近期的工作；不过，通过递归技术和 Kantorovich 型不等式，我们将若干 L¨owner 序关系推广到了更大的指数范围。这是我们关于随机张量不等式和双变量随机张量均值尾界的研究的第一部分。在第二部分中，我们将研究关于不可逆随机张量的双变量随机张量均值及其应用。

本文其余部分安排如下。第 2 节将回顾张量的基本定义。第 3 节介绍张量版马尔可夫不等式和张量版切比雪夫不等式。第 4 节将针对各种类型的连接函数，建立双变量随机张量均值的若干尾界。第 5 节将基于双变量随机张量均值特征值的主序关系，探讨特征值求和与乘积的尾界关系。

术语表：复数集和实数集分别记为 $\mathbb{C}$和 $\mathbb{R}$。自然数集记为 $\mathbb{N}$。标量用斜体字母或希腊字母表示，例如 x或 β；向量用小写粗体字母表示，例如 $\boldsymbol{x}$；矩阵用大写粗体字母表示，例如 $\boldsymbol{X}$；张量用花体字母表示，例如 $\S$ 或 $\mathcal{X}$。

2 张量基础

本节将回顾张量的必要基础知识。给定 $\mathcal{X}_{\text{定义}=}(x_{i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_N}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$和 $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times K_1 \times \cdots \times K_L}$ $= y_{i_1 \ldots i_M\, j_1 \ldots j_N} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$，的爱因斯坦积定义为 $\mathcal{X} \star_{N\text{定义}}(,,,,)$

$$(\mathcal{X} \star_N \mathcal{Y})_{i_1,\ldots,i_M,k_1,\ldots,k_L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,\ldots,j_N} x_{i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_N} y_{j_1,\ldots,j_N,k_1,\ldots,k_L}. \tag{2}$$

定义 1 所有元素均为零的张量称为零张量，记作 $\mathcal{O}$。

定义 2 单位张量 $\mathcal{I} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 定义为

$$(\mathcal{I})_{i_1 \times \cdots \times i_N \times j_1 \times \cdots \times j_N} \stackrel{def}{=} \prod_{k=1}^{N} \delta_{i_k, j_k}, \tag{3}$$

其中 $\delta_{i_k,\ j_k}$ 定义为$= 1$当 $i_k = j_k$；否则 $\delta_{i_k,\ j_k}$ 定义为$= 0$。

为定义厄米张量 [16], , 张量的共轭转置运算（或厄米伴随）规定如下。

定义 3 给定张量 $\mathcal{X}$定义为$= (x_{i_1,\ \ldots,\ i_M,\ j_1,\ \ldots,\ j_N}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$，其共轭转置记为 $\mathcal{X}^H$，定义为

$$(\mathcal{X}^{\mathrm{H}})_{j_1,\ldots,j_N,i_1,\ldots,i_M} \stackrel{def}{=} x^*_{i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_N}, \tag{4}$$

其中星号“$*$”表示复数 $x_{i_1,\ \ldots,\ i_M,\ j_1,\ \ldots,\ j_N}$的复共轭。若张量 $\mathcal{X}$满足 $\mathcal{X}^{\mathrm{H}} = \mathcal{X}$，则 $\mathcal{X}$是厄米张量。

下面的定义介绍酉张量 [16]。

定义 4 给定张量 $\mathcal{U}$定义为$= (u_{i_1,\ \ldots,\ i_N,\ i_1,\ \ldots,\ i_N}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$，若

$$\mathcal{U}^{\mathrm{H}} \star_N \mathcal{U} = \mathcal{U} \star_N \mathcal{U}^{\mathrm{H}} = \mathcal{I} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}, \tag{5}$$

那么 $\mathcal{U}$是一个酉张量。

定义 **5** $\mathcal{X} = x_{i_1 \ldots i_N\ j_1 \ldots j_N}$ $\mathcal{Y} \in$给定一个方形张量 $_{def}(,,,,)$ $\in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$，若存在使得

$$\mathcal{X} \star_N \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \star_N \mathcal{X} = \mathcal{I}, \tag{6}$$

那么 $\mathcal{Y}$是 $\mathcal{X}$的逆。我们通常记作 $\mathcal{Y}_{def} = \mathcal{X}^{-1}$。

这里还列出其他重要的张量运算。方形张量的迹等于其所有对角元素之和，使得

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \le i_j \le I_j,\, j \in [N]} \mathcal{X}_{i_1,\ldots,i_N,i_1,\ldots,i_N}, \tag{7}$$

其中 $[N]_{\text{def}} = \{1, 2, \cdots, N\}$。两个张量 $\mathcal{X}$、 $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times J_1 \times \cdots \times J_N}$的内积定义为

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{X}^H \star_M \mathcal{Y}\right). \tag{8}$$

由于矩阵特征分解定理在线性代数理论和应用中至关重要，我们将为厄米张量给出一个对应的分解定理。根据 [16], 中的定理 5.2，每个厄米张量 $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 都有如下分解:

$$\mathcal{H} \ = \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathcal{U}_i \star_1 \mathcal{U}_i^H, \ \text{with } \langle \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_i \rangle = 1 \text{ and } \langle \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j \rangle = 0 \text{ for } i \neq j, \tag{9}$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}$和 $\mathcal{U}_i \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times 1}$。这里，张量 $\mathcal{U}_i$彼此正交，因为 $\langle \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j \rangle = 0$对于 $i \neq j$成立。数值 λ_i 称为厄米特征值，而将其分解所需的最小整数 r

如方程 (9) 所示，厄米张量的分解称为厄米张量秩。在本工作中，我们假设本文讨论的所有厄米N张量均为满秩，即$r = \prod I_j$。正定（PD）张量是所有厄米特征值均为正的厄米j=1张量。半正定（SPD）张量是所有厄米特征值均非负的厄米张量。

我们使用 $\preceq$ 表示两个张量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之间的L¨owner序关系，记作 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$，这表示$\mathcal{B}-\mathcal{A}$是一个正定张量。另一方面，我们使用 $\succeq$ 表示两个张量 $\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$之间的L¨owner序关系，记作 $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$，这表示 $\mathcal{A}-\mathcal{B}$是一个正定张量。

3 张量 Markov/Chebyshev 不等式

给定两个厄米张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，我们用 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$表示张量 $\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 是正定的。厄米张量之间的这种序关系可以视为 Loewner 序。另一方面，我们用 $\mathcal{A} \npreceq \mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 不是正定的。这意味着$\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 必定包含一些负特征值。

我们将给出以下定理：张量马尔可夫不等式。

定理1（张量马尔可夫不等式）设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 是一个正定的确定性张量，$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 是一个随机厄米张量，且 $\mathcal{X} \succeq \mathcal{O}$ 几乎必然成立。我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X} \npreceq \mathcal{A}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}[\mathcal{X}] \star_N \mathcal{A}^{-1}\right). \tag{10}$$

证明：首先，我们需要证明以下不等式。

$$\mathbb{I}^{\mathcal{X}\npreceq\mathcal{A}} \leq \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}^{-1/2} \star_N \mathcal{X} \star_N \mathcal{A}^{-1/2}\right), \tag{11}$$

其中，$\mathbb{I}^{\mathcal{X}\npreceq\mathcal{A}}$ 是关于条件 $\mathcal{X} \npreceq \mathcal{A}$ 的示性函数。对于 $\mathcal{X} \preceq \mathcal{A}$ 的情况，由方程（11）给出的这个不等式成立，因为 $\mathbb{I}^{\mathcal{X}\npreceq\mathcal{A}}$ 等于零，且张量 $\mathcal{A}^{-1/2} \star_N \mathcal{X} \star_N \mathcal{A}^{-1/2}$ 是正定张量。

对于 $\mathcal{X} \npreceq \mathcal{A}$ 的情况，我们知道至少有一个张量 $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times 1}$ 满足 t

$$\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\left(\mathcal{A}-\mathcal{X}\right)\mathcal{U} < 0. \tag{12}$$

由于张量 $\mathcal{A}$ 是可逆张量，我们可以通过令$\mathcal{V}$=$\mathcal{A}^{1/2} \star_N \mathcal{U}$将张量 $\mathcal{U}$ 变换为张量 $\mathcal{V}$，并由方程(12)得到以下不等式:

$$\mathcal{V}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{V} - \mathcal{V}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{A}^{-1/2} \star \mathcal{X} \star \mathcal{A}^{1/2} \star_N \mathcal{V} < 0; \tag{13}$$

这等价于

$$\frac{\mathcal{V}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{A}^{-1/2} \star \mathcal{X} \star \mathcal{A}^{1/2} \star_N \mathcal{V}}{\mathcal{V}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{V}} > 1. \tag{14}$$

由厄米张量的最大特征值的瑞利商形式可得,

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\left(\mathcal{A}^{-1/2} \star \mathcal{X} \star \mathcal{A}^{1/2}\right) &= \sup_{\mathcal{W}\neq\mathcal{O}} \frac{\mathcal{W}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{A}^{-1/2} \star \mathcal{X} \star \mathcal{A}^{1/2} \star_N \mathcal{W}}{\mathcal{W}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{W}} \\ &\geq \frac{\mathcal{V}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{A}^{-1/2} \star \mathcal{X} \star \mathcal{A}^{1/2} \star_N \mathcal{V}}{\mathcal{V}^{\mathrm{T}} \star_N \mathcal{V}} \\ &> 1 \end{aligned} \tag{15}$$

其中，$\lambda_{\max}\left(\mathcal{A}^{-1/2}\star\mathcal{X}\star\mathcal{A}^{1/2}\right)$ 表示张量 $\mathcal{A}^{-1/2}\star\mathcal{X}\star\mathcal{A}^{1/2}$的最大特征值。由于$\mathcal{A}^{-1/2}\star\mathcal{X}\star\mathcal{A}^{1/2}$ 是正定张量，我们有

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}^{-1/2}\star\mathcal{X}\star\mathcal{A}^{1/2}\right)\geq\lambda_{\max}\left(\mathcal{A}^{-1/2}\star\mathcal{X}\star\mathcal{A}^{1/2}\right)>1. \tag{16}$$

这就证明了公式（11）。

对公式（11）的两边取期望，可得

$$\begin{aligned}\Pr\left(\mathcal{X}\not\preceq\mathcal{A}\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{I}_{\mathcal{X}\not\preceq\mathcal{A}}}\\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}^{-1/2}\star_N\mathcal{X}\star_N\mathcal{A}^{-1/2}\right)\right]\\ &=_1 \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}^{-1/2}\star_N\mathbb{E}\left[\mathcal{X}\right]\star_N\mathcal{A}^{-1/2}\right)\\ &=_2 \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{X}\right]\star_N\mathcal{A}^{-1}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

其中，$=_1$ 根据迹和期望的线性性成立，而 $=_2$ 源于迹的循环乘法不变性。□

在证明张量切比雪夫不等式之前，我们需要先给出以下引理 a.

引理1 设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$为两个厄米张量，且满足 $\mathcal{A}^2\preceq\mathcal{B}^2$。则有 $|\mathcal{A}|\preceq|\mathcal{B}|$。

证明：我们首先考虑张量 $\mathcal{A}$ 为正定张量且 $\mathcal{B}$ 为正定张量的情形。根据 $\mathcal{A}^2\preceq\mathcal{B}^2$，有

$$\mathcal{B}^{-1}\star_N\mathcal{A}^2\star_N\mathcal{B}^{-1}\preceq\mathcal{I}. \tag{18}$$

那么，我们得到以下不等式：

$$\begin{aligned}1 &\geq_1 \lambda_{\max}\left(\mathcal{B}^{-1}\star_N\mathcal{A}^2\star_N\mathcal{B}^{-1}\right)=\sigma^2_{\max}\left(\mathcal{B}^{-1}\star_N\mathcal{A}\right)\\ &\geq_2 \lambda^2_{\max}\left(\mathcal{B}^{-1}\star_N\mathcal{A}\right)\\ &=_3 \lambda^2_{\max}\left(\mathcal{B}^{-1/2}\star_N\mathcal{A}\star_N\mathcal{B}^{-1/2}\right),\end{aligned} \tag{19}$$

其中，$\geq_1$ 由方程 (18) 得出，$\geq_2$ 由特征值与奇异值之间的韦伊不等式得出，而 $=_3$ 由张量循环置换下的特征值集合不变性得出。由方程 (19)，我们有

$$1\geq\lambda_{\max}\left(\mathcal{B}^{-1/2}\star_N\mathcal{A}\star_N\mathcal{B}^{-1/2}\right)\Longleftrightarrow\mathcal{A}\preceq\mathcal{B}. \tag{20}$$

接下来，我们考虑张量 $\mathcal{A}$ 是正定张量且 $\mathcal{B}$ 是正定张量的情形。根据张量 $\mathcal{B}$ 的特征分解，我们可将 $\mathcal{B}$ 表示为 $\mathcal{B}=\mathcal{U}\star_N\mathcal{D}\star_N\mathcal{U}^{\mathrm{T}}$，其中 $\mathcal{U}$ 是酉张量，$\mathcal{D}$ 是对角张量。对于任意 $\epsilon>0$，我们有 $\mathcal{B}+\epsilon\mathcal{I}=\mathcal{U}\star_N(\mathcal{D}+\epsilon\mathcal{I})\star_N\mathcal{U}^{\mathrm{T}}$，它是正定的。由以下关系，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^2 &= \mathcal{U}\star_N\mathcal{D}^2\star_N\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\\ &\preceq \mathcal{U}\star_N\left(\mathcal{D}+\epsilon\mathcal{I}\right)^2\star_N\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\\ &= \left(\mathcal{B}+\epsilon\mathcal{I}\right)^2,\end{aligned} \tag{21}$$

以及 $\mathcal{A}^2\preceq\mathcal{B}^2$，我们有 $\mathcal{A}^2\preceq(\mathcal{B}+\epsilon\mathcal{I})^2$。由于 $(\mathcal{B}+\epsilon\mathcal{I})$ 是正定张量，这意味着 $\mathcal{A}\preceq\mathcal{B}+\epsilon\mathcal{I}$。通过取$\epsilon\to0$，我们有 $\mathcal{A}\preceq\mathcal{B}$。

剩下的情况是， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都不是正定的。由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是厄米张量，我们有

$$\mathcal{A}^2 \preceq \mathcal{B}^2 \Longleftrightarrow |\mathcal{A}|^2 \preceq |\mathcal{B}|^2 . \tag{22}$$

由于 $|\mathcal{A}|$ 和 $|\mathcal{B}|$ 都是半正定张量，因此有 $|\mathcal{A}| \preceq |\mathcal{B}|$。 □

根据引理1，我们可以得到以下张量切比雪夫不等式。

定理2（张量切比雪夫不等式）设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 为正定确定性张量，$\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 为随机厄米张量，则有

$$\Pr\left(\mathcal{X} \not\preceq \mathcal{A}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}[\mathcal{X}^2] \star_N \mathcal{A}^{-2}\right). \tag{23}$$

证明：根据引理1，有 $\mathcal{X}^2 \preceq \mathcal{A}^2 \Longrightarrow |\mathcal{X}| \preceq |\mathcal{A}|$ 这等价于 $|\mathcal{X}| \not\preceq |\mathcal{A}| \Longrightarrow \mathcal{X}^2 \not\preceq \mathcal{A}^2$。

根据概率单调性，有

$$\begin{aligned} \Pr\left(|\mathcal{X}| \not\preceq \mathcal{A}\right) &\leq \Pr\left(\mathcal{X}^2 \not\preceq \mathcal{A}^2\right) \\ &\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{X}^2\right] \star_N \mathcal{A}^{-2}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

其中，最后一个不等式由定理1得出。 □

事实上，在张量切比雪夫不等式中，幂不必是 2，也可以取更一般的值。我们需要以下引理 2。

引理 2 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 是两个正定张量，且 $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$，并设 $q \in [0,1]$。那么，我们有

$$\mathcal{A}^q \succeq \mathcal{B}^q. \tag{25}$$

证明：对于实数 q，定义如下集合 S：

$$\mathrm{S} \;=\; \{q \in \mathbb{R} : \mathcal{A}^q \succeq \mathcal{B}^q\}. \tag{26}$$

显然，0 和 1 都属于集合 S。我们希望证明 $[0,1] \in \mathrm{S}$。由于二进制有理数在 $[0,1]$，中稠密，这等价于证明以下结论：

$$q, r \in \mathrm{S} \Longrightarrow \frac{q+r}{2} \in \mathrm{S}. \tag{27}$$

若 $q \in \mathrm{S}$，则有

$$\mathcal{A}^q \succeq \mathcal{B}^q \Longrightarrow \mathcal{A}^{-q/2} \star_N \mathcal{B}^q \star_N \mathcal{A}^{-q/2} \preceq \mathcal{I}. \tag{28}$$

于是，我们可以得到

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}^2\left(\mathcal{B}^{q/2} \star_N \mathcal{A}^{-q/2}\right) &= \lambda_{\max}\left(\left(\mathcal{B}^{q/2} \star_N \mathcal{A}^{-q/2}\right)^{\mathrm{H}} \star_N \left(\mathcal{B}^{q/2} \star_N \mathcal{A}^{-q/2}\right)\right) \\ &\leq \lambda_{\max}\left(\mathcal{A}^{-q/2} \star_N \mathcal{B}^q \star_N \mathcal{A}^{-q/2}\right) \leq 1 \end{aligned} \tag{29}$$

这意味着 $\lambda_{\max}\left(\mathcal{B}^{q/2} \star_N \mathcal{A}^{-q/2}\right) \leq 1$。由于我们还有 $r \in \mathrm{S}$，同理可得 $\lambda_{\max}\left(\mathcal{B}^{r/2} \star_N \mathcal{A}^{-r/2}\right) \leq 1$。

因此，我们有

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lambda_{\max}\left(\left(\mathcal{B}^{q/2}\star_N\mathcal{A}^{-q/2}\right)^{\mathrm{H}}\star_N\left(\mathcal{B}^{r/2}\star_N\mathcal{A}^{-r/2}\right)\right) \\ &= \lambda_{\max}\left(\mathcal{A}^{-q/2}\star_N\mathcal{B}^{(q+r)/2}\star_N\mathcal{A}^{-r/2}\right) \\ &\geq \lambda_{\max}\left(\mathcal{A}^{-(q+r)/2}\star_N\mathcal{B}^{(q+r)/2}\star_N\mathcal{A}^{-(q+r)/2}\right), \end{aligned} \tag{30}$$

这意味着 $\mathcal{A}^{(q+r)/2}\succeq\mathcal{B}^{(q+r)/2}$。由于 $(q+r)/2\in\mathsf{S}$，因此该引理得证。 □

利用引理 2，我们可以得到以下适用于一般指数的广义张量切比雪夫不等式。

定理 3（广义张量切比雪夫不等式）设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 为正定确定性张量，$\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 为随机厄米张量。给定 $p\geq 1$，则有

$$\Pr\left(\mathcal{X}\not\preceq\mathcal{A}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}[|\mathcal{X}|^p]\star_N\mathcal{A}^{-p}\right). \tag{31}$$

证明：在引理 2 中令 $q=1/p$，可得 $|\mathcal{X}|^p\preceq\mathcal{A}^p\Longrightarrow|\mathcal{X}|\preceq\mathcal{A}$。再由概率单调性和定理 1，可得

$$\Pr\left(|\mathcal{X}|\not\preceq\mathcal{A}\right)\leq\Pr\left(|\mathcal{X}|^p\not\preceq\mathcal{A}^p\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[|\mathcal{X}|^p\right]\star_N\mathcal{A}^p\right). \tag{32}$$

□

以下引理用于将 Loewner 序与定理 3 联系起来。

引理 3 给定以下满足关系 $\mathcal{X}\preceq\mathcal{Y}\preceq\mathcal{Z}$ 的随机正定张量 $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，以及一个确定性正定张量 $\mathcal{C}$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{33}$$

其中 $q\geq 1$。我们还有

$$\Pr\left(\mathcal{X}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Y}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right). \tag{34}$$

证明：根据定理 3，我们有

$$\begin{aligned} \Pr\left(\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right) &\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Y}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-q}\right) \\ &\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-q}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

其中，最后一个不等式来自函数 x^q 在 $q\geq 1$ 下的张量单调性。于是，我们得到方程 (33)。

由于 $\mathcal{X}\preceq\mathcal{Y}$，根据概率单调性，我们有

$$\begin{aligned} \Pr\left(\mathcal{X}\not\preceq\mathcal{C}\right) &\leq \Pr\left(\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right) \\ &\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Y}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-q}\right) \end{aligned} \tag{36}$$

其中，最后一个不等式由定理 3 得出。 □

4 基于 L¨oewner 序的双变量随机张量均值尾界

本节将基于 Loewner 序建立双变量随机张量均值的若干尾界。我们将介绍有关张量单调及其性质的基本概念。

定义在 $(0,\infty)$ 上的实连续函数 f，如果满足以下条件，则称为张量单调递增函数】【。】【”】【

$$\mathcal{A} \succeq \mathcal{B} \succ \mathcal{O} \Longrightarrow f(\mathcal{A}) \succeq f(\mathcal{B}), \tag{37}$$

其中， $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 为厄米张量。类似地，如果 $-f$ 是张量单调递增函数，则称函数 f 为张量单调递减函数。此外，如果实连续函数 f 定义在$(0,\infty)$上且满足以下条件，则称其为张量凸函数:

$$\lambda f(\mathcal{A}) + (1-\lambda) f(\mathcal{B}) \succeq f(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}), \tag{38}$$

其中 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是正定张量和 $\lambda \in [0,1]$。接下来，我们将定义三个正函数集合:

$$\begin{aligned} \text{TMI} &= \{f : \text{tensor monotone increasing on } (0,\infty),\ f{>}0\}; \\ \text{TMD} &= \{g : \text{tensor monotone decreasing on } (0,\infty),\ g{>}0\}; \\ \text{TC} &= \{h : \text{tensor convex on } (0,\infty),\ h{>}0\}. \end{aligned} \tag{39}$$

此外，我们将以下三个正函数集合定义为:

$$\begin{aligned} \text{TMI}^1 &= \{f : \text{tensor monotone increasing on } (0,\infty),\ f{>}0 \text{ and } f(1){=}1\}; \\ \text{TMD}^1 &= \{g : \text{tensor monotone decreasing on } (0,\infty),\ g{>}0 \text{ and } g(1){=}1\}; \\ \text{TC}^1 &= \{h : \text{tensor convex on } (0,\infty),\ h{>}0 \text{ and } h(1){=}1\}. \end{aligned} \tag{40}$$

4.1 连接函数来自张量单调递增[1] 或张量单调递减[1]

关于函数 $f \in$张量单调递增[1],的张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$的双变量正定张量均值，记作 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}$，定义为 [1]

$$\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{X}^{1/2} \star_N f\left(\mathcal{X}^{-1/2} \star_N \mathcal{Y} \star_N \mathcal{X}^{-1/2}\right) \star_N \mathcal{X}^{1/2}. \tag{41}$$

下面的定理讨论随机张量 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}$和 $\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q$关于指数 q的尾界。我们定义广义乘积运算，记作 $\acute{\prod}_{k=1}^n$，当指标上界小于指标下界时:

$$\acute{\prod}_{k=1}^n a_i \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \prod_{k=1}^n a_i, \text{ if } n \geq 1; \\ 1, \text{ if } n = 0. \end{cases} \tag{42}$$

其中， a_i 是第 i个实数。

若函数 f 满足以下条件，则称其具有幂单调递增（简称 pmi）性质:

$$f^q(x) \leq f(x^q), \tag{43}$$

其中 $x{>}0$且 $q{\geq}1$。另一方面，若函数 f 满足以下条件，则称其具有幂单调递减（简称 pmd）性质:

$$f^q(x) \geq f(x^q). \tag{44}$$

[1]这里，我们采用久保-安藤的张量感知算子均值 [11]。

定理 4 给定两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$, $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$，若 $q=2^nq_0\geq 1$满足 $1\leq q_0\leq 2$且 $n\in\mathbb{N}$，则我们对 $k=1,2,\cdots,n$定义 $\mathcal{Z}_{k-1}$定义 $=\mathcal{X}^{-2^{k-2}}\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}$。我们假设 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$几乎必然成立，则对于具有 $f\in$张量单调递增[1],的情形，有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\quad(45)$$

and

$$\Pr\left(\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\quad(46)$$

其中，$\Psi_{lower}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 和 $\Psi_{upper}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是由下式定义的两个正数

$$\begin{aligned}\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)&\overset{def}{=}\lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\\\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)&\overset{def}{=}\lambda_{\max}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right).\end{aligned}\quad(47)$$

$\acute{}$注意，$\acute{\prod}$ 的定义由公式（42）给出。

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\quad(48)$$

and

$$\Pr\left(\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right).\quad(49)$$

其中 $p\geq 1$。

证明：由于张量之间的所有乘法均为 $\star_N$，为简化起见，我们将在本证明中省略这些记号。我们先考虑 $q\geq 1$的情形。我们将把 $q\geq 1$区域划分为 $1\leq q\leq 2$ 和 $q\geq 2$。

对于子区域 $1\leq q\leq 2$，r定义$=2-q$，且 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q&=\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}f\left(\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-r}\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}\\&=\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}f\left(\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{X}^{\frac{-1}{2}}\mathcal{Z}_0^{-1}\mathcal{X}^{\frac{-1}{2}}\right)^r\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}\\&=\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{X}^{\frac{1-r}{2}}f\left(\mathcal{X}^{\frac{r-1}{2}}\mathcal{Z}_0\left(\mathcal{X}\#_{x^r}\mathcal{Z}_0^{-1}\right)\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{r-1}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{1-r}{2}}\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\\&=\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{X}^{1-r}\#_f\left(\mathcal{Z}_0\left(\mathcal{X}\#_{x^r}\mathcal{Z}_0^{-1}\right)\mathcal{Z}_0\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\\&\succeq_1\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[f^{1-q}(\mathcal{Z})\#_f\left(\mathcal{Z}\left(f^{-1}(\mathcal{Z})\#_{x^r}\mathcal{Z}_0^{-1}\right)\mathcal{Z}_0\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\\&=\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[f^{1-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right.\\&\succeq\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y},\end{aligned}\quad(50)$$

其中 $\succeq_1$我们应用基于 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}\Longleftrightarrow\mathcal{X}\succeq f^{-1}(\mathcal{Z}_0)$ 的引理 2。若 $q\geq 2$，通过找到某个自然数 n，使得 $q=2^nq_0$，且满足 $1\leq q_0\leq 2$，并关于 q 对方程（50）所给出的关系进行二进迭代，我们得到如下关系：

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\ \succeq\ \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\prod_{k=1}^{n}\lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}.\quad(51)$$

结合公式（50）和方程（51），对于 $q \geq 1$，我们有

$$\mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right) f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right) \acute{\prod}_{k=1}^{n} \lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right) f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}. \tag{52}$$

给定任意正实数，例如 β，我们可以将方程 (51) 中的 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $\beta^{-1}\mathcal{X}$ 和 $\beta^{-1}\mathcal{Y}$，得到

$$\mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right) f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right) \acute{\prod}_{k=1}^{n} \lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right) f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}. \tag{53}$$

我们可以选择 $\beta{=}\lambda_{\max}(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y})$，将 β 与 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}$ 关联起来，并在 L¨oewner 序的意义下最大化方程 (53) 的右端。于是，我们有

$$\mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right) f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right) \acute{\prod}_{k=1}^{n} \lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right) f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right) \lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}. \tag{54}$$

将方程 (54) 中的 $f{\in}$张量单调递增[1]、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别替换为 $f^{*\text{定义}=} f^{-1}(x^{-1})$（其中 $x{\in}{\in}(0,\infty)$）、$\mathcal{X}^{-1}$ 和 $\mathcal{Y}^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{-q} \#_{f^*} \mathcal{Y}^{-q} \succeq\ & \lambda_{\min}\left(\left(f^*\right)^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n'\right) f^*\left(\mathcal{Z}_n'^{q_0}\right)\right) \acute{\prod}_{k=1}^{n} \lambda_{\min}\left(\left(f^*\right)^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}'\right)\left(f^*\right)\left(\mathcal{Z}_{k-1}'^2\right)\right) \\ & \cdot \lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}^{-1} \#_{f^*} \mathcal{Y}^{-1}\right) \mathcal{X}^{-1} \#_{f^*} \mathcal{Y}^{-1}. \end{aligned} \tag{55}$$

其中 $\mathcal{Z}_{k-1}'^{\text{定义}=} \mathcal{X}^{2^{k-2}} \mathcal{Y}^{-2^{k-1}} \mathcal{X}^{2^{k-2}}$，对 $k = 1$、2、$\cdots$、n 成立。根据 f^* 的定义，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{-1} \#_{f^*} \mathcal{Y}^{-1} &= \left(\mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}\right)^{-1}, \\ \mathcal{X}^{-q} \#_{f^*} \mathcal{Y}^{-q} &= \left(\mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q\right)^{-1}, \\ \left(f^*\right)^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n'\right) f^*\left(\mathcal{Z}_n'^{q_0}\right) &= f^{-1}\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right) f^{q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right), \\ \left(f^*\right)^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}'\right) f^*\left(\mathcal{Z}_{k-1}'^2\right) &= f^{-1}\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right) f^2\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right), \text{ for } k = 1, 2, \cdots, n; \end{aligned} \tag{56}$$

然后，将方程 (56) 应用于方程 (55)，可得：

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q \preceq\ & \lambda_{\max}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\right) \acute{\prod}_{k=1}^{n} \lambda_{\max}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right) f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right) \\ & \cdot \lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}. \end{aligned} \tag{57}$$

结合方程（54）和方程（57），对于 $q \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} \Psi_{lower}\left(q, f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\right) \lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q \\ &\preceq \Psi_{upper}\left(q, f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\right) \lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}. \end{aligned} \tag{58}$$

通过应用引理3，我们得到方程（45）和方程（46）给出的所需界。现在，我们将考虑 $0 < q \leq 1$ 的情形。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^q \#_f \mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}} f\left(\mathcal{X}^{\frac{-q}{2}}\left(\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \mathcal{Z}_0 \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right)^q \mathcal{X}^{\frac{-q}{2}}\right) \mathcal{X}^{\frac{q}{2}} \\ &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}} f\left(\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\left(\mathcal{X}^{-1} \#_{x^q} \mathcal{Z}_0\right) \mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\right) \mathcal{X}^{\frac{q}{2}} \\ &= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{X}^{-(1-q)} \#_f\left(\mathcal{X}^{-1} \#_{x^q} \mathcal{Z}_0\right)\right] \mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \\ &\preceq_1 \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[f^{(1-q)}\left(\mathcal{Z}_0\right) \#_f\left(f\left(\mathcal{Z}_0\right) \#_{x^q} \mathcal{Z}_0\right)\right] \mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[f^{1-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right] \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right. \\ &\preceq \lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right) \mathcal{X} \#_f \mathcal{Y}, \end{aligned} \tag{59}$$

其中，我们基于 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I} \Longleftrightarrow \mathcal{X}\succeq f^{-1}(\mathcal{Z})$ 并结合 $0\leq 1-q\leq 1$ 应用了引理 2。给定任意正实数，例如 β，我们也可以将方程 (59) 中的 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $\beta^{-1}\mathcal{X}$ 和 $\beta^{-1}\mathcal{Y}$，从而得到

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\beta^{q-1}\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}. \tag{60}$$

我们可以选择 $\beta{=}\lambda_{\min}(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y})$，使其与 β关联于 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}$，并按照 Loewner 序最小化方程 (60) 的右端项。于是，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}. \tag{61}$$

将方程 (61) 中的 $f\in$张量单调递增[1]、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $f^{*\,\mathrm{def}}{=}\, f^{-1}(x^{-1})$，其中 $x\in(0,\infty)$、$\mathcal{X}^{-1}$ 和 $\mathcal{Y}^{-1}$，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}. \tag{62}$$

因此，结合方程 (61) 和方程 (62)，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\\ &\preceq \lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y},\end{aligned} \tag{63}$$

其中 $0\leq q\leq 1$。应用引理 3，我们得到由方程 (48) 和方程 (49) 给出的所需界。 □通过假设连接函数 f 满足 pmi 或 pmd，我们可以从定理 4 推导出以下格式更简单的推论 1。

推论 1 在定理 4 所给出的相同条件下，若函数 f 满足 pmi 性质，则我们有

$$\Pr\left(\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}\right), \tag{64}$$

其中 $q{\geq}1$和 $p{\geq}1$，并且

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}\right), \tag{65}$$

其中 $0{\leq}q{\leq}1$和 $p{\geq}1$。

另一方面，如果函数 f 是 pmd 函数，则有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}\right), \tag{66}$$

其中 $q{>}1$和 $p{\geq}1$，并且

$$\Pr\left(\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}\right), \tag{67}$$

其中 $0{\leq}q{\leq}1$和 $p{\geq}1$。

证明：如果函数 f 是 pmi 函数，则对于任意正定张量 $\mathcal{D}$，有 $f(\mathcal{C}^q){\succeq}f^q(\mathcal{D})$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right) &\geq 1,\ \text{for } q{\geq}1,\\ \lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right) &\leq 1,\ \text{for } 0{\leq}q{\leq}1.\end{aligned} \tag{68}$$

对于 $q{\geq}1$，根据方程 (68) 和方程 (58)，我们有

$$\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} \preceq \mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q, \tag{69}$$

对于 $0<q\leq 1$，根据方程 (68) 和方程 (63)，我们有

$$\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} \succeq \mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q. \tag{70}$$

应用 引理 3 得出方程 (69) 和方程 (70)，我们得到方程 (64) 和方程 (65) 中所需的结果).

若函数 f 是 pmd 函数，则对于任意正定张量 $\mathcal{D}$，有 $f(\mathcal{D}^q)\preceq f^q(\mathcal{D})$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right) &\leq 1, \text{ for } q\geq 1,\\ \lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right) &\geq 1, \text{ for } 0\leq q\leq 1.\end{aligned} \tag{71}$$

对于 $q\geq 1$，由方程 (71) 和方程 (58)，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}, \tag{72}$$

对于 $0<q\leq 1$，由方程 (71) 和方程 (63)，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}. \tag{73}$$

将引理 3 应用于方程 (72) 和方程 (73)，即可证明方程 (66) 和方程 (67)。 □

定理 4 基于函数 $f\in$TMI^1。下一个定理将考虑函数 $h\in$TMD^1 的尾界。

定理 5 设有两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$、 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$。若 $q=2^nq_0\geq 1$ 且 $1\leq q_0\leq 2$，则我们设 $\mathcal{Z}_{k-1}\triangleq\mathcal{X}^{-2^{k-2}}\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}$ 对于 $k=1$、2、$\cdots$、n。我们假设 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎必然成立，且对于 $h\in$TMD^1, , 有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{74}$$

and

$$\Pr\left(\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{75}$$

其中， $\Phi_{lower}(q、h、\mathcal{X}、\mathcal{Y})$ 和 $\Phi_{upper}(q、h、\mathcal{X}、\mathcal{Y})$ 是由下式定义的两个正数

$$\begin{aligned}\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right) &\overset{def}{=} \lambda_{\min}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\min}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\\ \Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right) &\overset{def}{=} \lambda_{\max}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\right.\end{aligned} \tag{76}$$

´请注意， $\prod$ 的定义由公式（42）给出。

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{77}$$

and

$$\Pr\left(\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right). \tag{78}$$

其中 $p\geq 1$。

证明：与之前一样，为简化起见，我们将在本证明中移除 $\star_N$。我们先讨论 $q \geq 1$的情形。我们将把 $q \geq 1$的区域分为 $1 \leq q \leq 2$ 和 $q \geq 2$。

对于子区域 $1 \leq q \leq 2, r \overset{\text{def}}{=} 2-q$ 和 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} \preceq \mathcal{I}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}} h\left(\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-r}\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}} \\
&= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}} h\left(\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{X}^{\frac{-1}{2}}\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{X}^{\frac{-1}{2}}\right)^r\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}} \\
&= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{X}^{\frac{1-r}{2}} h\left(\mathcal{X}^{\frac{r-1}{2}}\mathcal{Z}_0\left(\mathcal{X}\#_{x^r}\mathcal{Z}_{)}^{-1}\right)\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{r-1}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{1-r}{2}}\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{X}^{1-r}\#_h\left(\mathcal{Z}_0\left(\mathcal{X}\#_{x^r}\mathcal{Z}_0^{-1}\right)\mathcal{Z}_0\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \\
&\preceq_1 \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[h^{1-q}(\mathcal{Z}_0)\#_h\left(\mathcal{Z}_0\left(h^{-1}(\mathcal{Z}_0)\#_{x^r}\mathcal{Z}_0^{-1}\right)\mathcal{Z}_0\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[h^{1-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y},\right.
\end{aligned} \tag{79}$$

其中 $\preceq_1$我们根据 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I} \Longleftrightarrow \mathcal{X} \preceq f^{-1}(\mathcal{Z})$ 应用引理 2。若 $q \geq 2$，通过找出某个自然数 n，使得 $q = 2^n q_0$ 满足 $1 \leq q_0 \leq 2$，并针对 q对方程 (79) 给出的关系进行二进迭代，我们得到如下关系：

$$\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\prod_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \tag{80}$$

结合方程 (79) 和方程 (80)，对于 $q \geq 1$，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \tag{81}$$

给定任意正实数，例如 β，我们可以将方程 (81) 中的 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $\beta^{-1}\mathcal{X}$ 和 $\beta^{-1}\mathcal{Y}$，得到

$$\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\beta^{q-1}\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \tag{82}$$

我们可以选择 $\beta{=}\lambda_{\min}(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y})$，使 β 与 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}$ 相关联，并在 Loewner 序意义下使方程 (82) 右端最小。于是，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\max}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \tag{83}$$

将方程 (83) 中的 h、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $h^* \overset{\text{定义}}{=} h^{-1}(x^{-1})$，其中 $x{\in}(0,\infty)$、$\mathcal{X}^{-1}$ 和 $\mathcal{Y}^{-1}$，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{-q}\#_{h^*}\mathcal{Y}^{-q} \preceq\ & \lambda_{\max}\left(\left(h^*\right)^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n'\right)h^*\left(\mathcal{Z}_n'^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(\left(h^*\right)^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}'\right)\left(h^*\right)\left(\mathcal{Z}_{k-1}'^2\right)\right) \\
& \cdot\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}^{-1}\#_{h^*}\mathcal{Y}^{-1}\right)\mathcal{X}^{-1}\#_{h^*}\mathcal{Y}^{-1}.
\end{aligned} \tag{84}$$

其中 $\mathcal{Z}_{k-1}' \overset{\text{定义}}{=} \mathcal{X}^{2^{k-2}}\mathcal{Y}^{-2^{k-1}}\mathcal{X}^{2^{k-2}}$对于 $k = 1$、2、$\cdots$、n。根据 h^*的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{-1}\#_{h^*}\mathcal{Y}^{-1} &= \left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)^{-1}, \\
\mathcal{X}^{-q}\#_{h^*}\mathcal{Y}^{-q} &= \left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)^{-1}, \\
\left(h^*\right)^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n'\right)h^*\left(\mathcal{Z}_n'^{q_0}\right) &= h^{-1}\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)h^{q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right), \\
\left(h^*\right)^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}'\right)h^*\left(\mathcal{Z}_{k-1}'^2\right) &= h^{-1}\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)h^2\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right), \text{ for } k = 1, 2, \cdots, n;
\end{aligned} \tag{85}$$

然后，将方程 (85) 应用于方程 (84)，可得：

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q &\succeq \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\\ &\quad\cdot\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \end{aligned}\tag{86}$$

结合方程 (83) 和方程 (86)，对于 $q\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\\ &\preceq \Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \end{aligned}\tag{87}$$

应用引理 3，可得方程 (74) 和方程 (75) 给出的所需界 .

现在，我们将考虑 $0<q\leq 1$ 的情形。

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}}h\left(\mathcal{X}^{\frac{-q}{2}}\left(\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}_0\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right)^q\mathcal{X}^{\frac{-q}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}\\ &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}}h\left(\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\left(\mathcal{X}^{-1}\#_{x^q}\mathcal{Z}_0\right)\mathcal{X}^{\frac{1-q}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}\\ &= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{X}^{-(1-q)}\#_h\left(\mathcal{X}^{-1}\#_{x^q}\mathcal{Z}_0\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\\ &\succeq_1 \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[h^{(1-q)}\left(\mathcal{Z}_0\right)\#_h\left(h\left(\mathcal{Z}_0\right)\#_{x^q}\mathcal{Z}_0\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\\ &= \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\left[h^{(1-q)}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right]\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\\ &\succeq \lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}, \end{aligned}\tag{88}$$

其中，$\succeq_1$ 我们基于 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}\Longleftrightarrow\mathcal{X}\preceq h^{-1}(\mathcal{Z}_0)$ 应用引理 2，且 $0\leq 1-q<1$。给定任意正实数，例如 β，我们也可以将方程 (88) 中的 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $\beta^{-1}\mathcal{X}$ 和 $\beta^{-1}\mathcal{Y}$，得到

$$\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\beta^{q-1}\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}.\right.\tag{89}$$

我们可以选择 $\beta{=}\lambda_{\max}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)$，使 β 与 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}$ 相关联，并按照 L¨oewner 序最大化方程 (89) 的右端。于是，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}.\tag{90}$$

将方程 (90) 中的 $h\in$TMD[1]、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为 $h^{*\,\text{定义}=}\,h^{-1}(x^{-1})$（其中 $x\in(0,\infty)$、$\mathcal{X}^{-1}$ 和 $\mathcal{Y}^{-1}$），可得

$$\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}.\tag{91}$$

因此，结合方程 (90) 和方程 (91)，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\\ &\preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}, \end{aligned}\tag{92}$$

其中 $0\leq q\leq 1$。通过应用引理 3，我们得到了方程 (77) 和方程 (78) 给出的所需界。□

4.2 连接函数来自 TC^1

本节中，我们将考虑来自 TC^1 的连接函数。在介绍本节的主要结果之前，我们将先给出以下关于算子 Kantorovich 型不等式的引理 [17]。

引理 4 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 是两个正定张量，满足

$$\begin{aligned} &m_1\mathcal{I}\preceq\mathcal{A}\preceq M_1\mathcal{I},\ \textit{and}\\ &m_2\mathcal{I}\preceq\mathcal{B}\preceq M_2\mathcal{I}, \end{aligned} \tag{93}$$

其中 $M_1>m_1>0$ 和 $M_2>m_2>0$。若 $\mathcal{B}\preceq\mathcal{A}$ 和 $p>1$，则有

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^p &\preceq \mathrm{K}(m_1,M_1,p)\mathcal{A}^p,\\ \mathcal{B}^p &\preceq \mathrm{K}(m_2,M_2,p)\mathcal{A}^p, \end{aligned} \tag{94}$$

其中，Kantorovich 常数 K(m,M,p) 可表示为

$$\mathrm{K}(m,M,p) = \left(\frac{(p-1)\left(M^p-m^p\right)}{p\left(mM^p-Mm^p\right)}\right)^p\frac{mM^p-Mm^p}{(p-1)(M-m)}. \tag{95}$$

证明：定理 8.3 来自 [17]。 □

下面的定理讨论来自 TC^1 的连接函数的尾界。

定理6 给定两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$, $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，以及一个正定确定性张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，我们设 $\mathcal{Z}\triangleq=\mathcal{X}^{1/2}\star_N\mathcal{Y}^{-1}\star_N\mathcal{X}^{1/2}$。若 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎必然，则令 $g\in$TC^1,，且对于 $p,q\geq1$，有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{K}_1\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}_2\mathcal{I}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right) \tag{96}$$

其中 K_1 和 K_2 定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_1 &\overset{def}{=} \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\\ \mathrm{K}_2 &\overset{def}{=} \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right). \end{aligned} \tag{97}$$

此外，若 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$ 几乎必然，则有

$$\Pr\left(\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}_2^{-1}\mathcal{I}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right) \tag{98}$$

证明：在本证明中，为了简化表述，我们将省略 $\star_N$。若定义 $f(x)$ 为 $f(x)\triangleq=g(x)/x$，其中 $x>0$，则有

$$\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{1/2}f(\mathcal{Z})\mathcal{X}^{1/2}. \tag{99}$$

我们将首先证明公式（96）。给定 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$，我们有 $f(\mathcal{Z})\preceq\mathcal{X}^{-1}$，几乎必然成立。由于我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^{q/2}f\left(\mathcal{X}^{q/2}\left(\mathcal{X}^{1/2}\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{X}^{1/2}\right)^{-q}\mathcal{X}^{q/2}\right)\mathcal{X}^{q/2}\\ &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}}f\left(\mathcal{X}^{\frac{q-1}{2}}\mathcal{Z}\mathcal{X}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}\right)^{2-q}\mathcal{X}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Z}\mathcal{X}^{\frac{q-1}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}\\ &= \mathcal{X}^{\frac{q}{2}}f\left(\mathcal{X}^{\frac{q-1}{2}}\mathcal{Z}\left(\mathcal{X}^{-1}\#_{x^{2-q}}\mathcal{Z}^{-1}\right)\mathcal{Z}\mathcal{X}^{\frac{q-1}{2}}\right)\mathcal{X}^{\frac{q}{2}}\\ &= \mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}\left(\mathcal{X}^{1-q}\#_f\left[\left(\mathcal{Z}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Z}\right)\#_{x^{2-q}}\mathcal{Z}\right]\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{100}$$

对于 q 的不同取值范围，我们将对方程（100）进行界定。

由于

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{-1} &\preceq \lambda_{\max}\left(f^{-1/2}(\mathcal{Z})\mathcal{X}^{-1}f^{-1/2}(\mathcal{Z})\right)f(\mathcal{Z}) \\ &= \lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z}),\end{aligned} \tag{101}$$

根据引理 2，我们将得到

$$\mathcal{X}^{1-q} \preceq \left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}, \tag{102}$$

其中 $1 \leq q \leq 2$。

请注意，$\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X})\ \mathcal{I} \preceq \mathcal{X}^{-1} \preceq \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X})\ \mathcal{I}$。给定 $q \geq 2$ 和引理 4，方程 (101) 可以扩展为

$$\mathcal{X}^{1-q} \preceq \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}. \tag{103}$$

由于 Kantorovich 常数 $\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X})\ \ \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X})\ \ q-1\right)$ 大于 1，我们有因为

$$\mathcal{X}^{1-q} \preceq \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}, \tag{104}$$

对于所有 $q \geq 1$。此外，由方程（101）可得，

$$\mathcal{Z}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Z} \preceq \lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{Z}^2 f(\mathcal{Z}). \tag{105}$$

在此状态下，我们可以通过 L¨owner 序将方程 (100) 上界为

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q &\preceq_1 \mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}\Big(\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}\#_f \\ &\quad \left[\left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{Z}^2 f(\mathcal{Z})\right)\#_{x^{2-q}}\mathcal{Z}\right]\Big)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}f^{q-1}(\mathcal{Z})f(\mathcal{Z}^q)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\ &\quad \star_N\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)f^{2q-1}(\mathcal{Z})\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\ &\preceq \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right) \\ &\quad \mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}f^{2q-1}(\mathcal{Z})\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\ &\preceq_2 \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right) \\ &\quad \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I},\end{aligned} \tag{106}$$

其中，我们在 $\preceq_1$ 处应用方程（104）和方程（105），并在 $\preceq_2$ 处将引理 4 应用于 $f(\mathcal{Z}) \preceq \mathcal{X}^{-1}$。公式（96）由将引理 3 应用于方程（106）得到。

现在，我们将证明方程（98）。因为，如果 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y} \succeq \mathcal{I}$ 几乎必然且 $1 \leq q \leq 2$，我们将有

$$\mathcal{X}^{1-q} \succeq \left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}. \tag{107}$$

给定 $q \geq 2$，由于 $\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X})\ \mathcal{I} \preceq \mathcal{X}^{-1} \preceq \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X})\ \mathcal{I}$ 以及引理 4，方程 (107) 可以扩展为 s

$$\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\mathcal{X}^{1-q} \succeq \left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}. \tag{108}$$

由于 Kantorovich 常数 $\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X})\ \ \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X})\ \ q-1\right)$ 大于 1，我们有因为

$$\mathcal{X}^{1-q} \succeq \left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}, \tag{109}$$

对于所有 $q \geq 1$。此外，由 $\mathcal{X}^{-1} \succeq \lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y})\ f(\mathcal{Z})$，可得

$$\mathcal{Z}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Z} \ \succeq \ \lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{Z}^2 f(\mathcal{Z}). \tag{110}$$

由方程（100），我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q \ &\succeq_1 \ \mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}\left(\left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)f(\mathcal{Z})\right)^{q-1}\#_f\left[\left(\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{Z}^2 f(\mathcal{Z})\right)\#_{x^{2-q}}\mathcal{Z}\right]\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\
&= \ \lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}f^{q-1}(\mathcal{Z})f(\mathcal{Z}^q)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\
&= \ \lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)f^{2q-1}(\mathcal{Z})\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\
&\succeq \ \lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}}f^{2q-1}(\mathcal{Z})\mathcal{X}^{q-\frac{1}{2}} \\
&\succeq_2 \ \lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}^{-1}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I},
\end{aligned} \tag{111}$$

其中，我们在 $\succeq_1$ 处应用方程（109）和方程（110），并在 $\succeq_2$ 处将引理 4 应用于 $f(\mathcal{Z})\succeq\mathcal{X}^{-1}$。

将引理 3 应用于方程（111），可得到方程（98）给出的尾界，对任意 $p\geq 1$ 均成立。 □

以下推论基于定理6，通过变换 g 的函数得到。

推论2 给定两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$, $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，以及一个正定确定性张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，我们将设置 $\mathcal{Z}_{\text{定义}}=\ \mathcal{X}^{1/2}\star_N\mathcal{Y}^{-1}\star_N\mathcal{X}^{1/2}$。令 $h\in\mathrm{TMD}^1$，若 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎必然成立，且 $p,q\geq 1$，则我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{K}_1\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(h^{-q}(\mathcal{Z})h(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}_2\mathcal{I}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right) \tag{112}$$

其中 K_1 和 K_2 设为

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1 \ &\overset{def}{=} \ \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{Y}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{Y}\right),q-1\right) \\
\mathrm{K}_2 \ &\overset{def}{=} \ \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{Y}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{Y}\right),2q-1\right).
\end{aligned} \tag{113}$$

此外，如果 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$ 几乎必然成立，我们有

$$\Pr\left(\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(h^{-q}(\mathcal{Z})h(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}_2^{-1}\mathcal{I}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right). \tag{114}$$

证明：如果函数 $h(x)$ 表示为 $h(x)\ _{\text{def}}=xg(x^{-1})$，那么我们有

$$\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\#_h\mathcal{X}. \tag{115}$$

$$g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)=(\mathcal{Z}g(\mathcal{Z}^{-1}))^{-q}\mathcal{Z}^q g(\mathcal{Z}^{-q})=h^{-q}(\mathcal{Z}^{-1})g(\mathcal{Z}^{-q}). \tag{116}$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned}
\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right) \ &= \ \lambda_{\max}\left(h^{-q}(\mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Y}^{1/2})g^q(\mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Y}^{1/2})\right) \\
&= \ \lambda_{\max}\left(h^{-q}(\mathcal{X}^{-1/2}\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1/2})g^q(\mathcal{X}^{-1/2}\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1/2})\right);
\end{aligned} \tag{117}$$

and

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right) \ &= \ \lambda_{\min}\left(h^{-q}(\mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Y}^{1/2})g^q(\mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Y}^{1/2})\right) \\
&= \ \lambda_{\min}\left(h^{-q}(\mathcal{X}^{-1/2}\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1/2})g^q(\mathcal{X}^{-1/2}\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1/2})\right).
\end{aligned} \tag{118}$$

存在。因此，利用公式(115)、(116)、(117)和(118)，可由定理6证明该推论 . □

Ψ_{upper} 和 Ψ_{lower} 的某些 f的界

Re记得， $\Psi_{lower}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$和 $\Psi_{upper}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$是定义为 b y

$$\begin{aligned}\Psi_{lower}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}) &\overset{\text{def}}{=} \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}(\mathcal{Z}_n)\,f(\mathcal{Z}_n^{q_0})\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\min}\left(f^{-2}(\mathcal{Z}_{k-1})\,f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^{2}\right)\right)\\ \Psi_{upper}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}) &\overset{\text{def}}{=} \lambda_{\max}\left(f^{-q_0}(\mathcal{Z}_n)\,(f(\mathcal{Z}_n^{q_0})\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(f^{-2}(\mathcal{Z}_{k-1})\,f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^{2}\right)\right). \quad (119)\end{aligned}$$

其中 $q=2^n q_0 \geq 1$。

如果函数 f满足 log $f(e^x)$ 在 $x\in(-\infty,\infty)$ 上是凸函数，则我们有以下关于 Ψ_{upper} 和 Ψ_{lower} 的界估计引理。为便于后续表述，我们还定义以下术语:

$$\psi(q,f,\mathcal{Z}) \overset{\text{def}}{=} \max\left(\frac{f(\lambda_{\min}^{q}(\mathcal{Z}))}{f^{q}(\lambda_{\min}(\mathcal{Z}))},\frac{f(\lambda_{\max}^{q}(\mathcal{Z}))}{f^{q}(\lambda_{\max}(\mathcal{Z}))}\right). \quad (120)$$

引理 5 给定函数 f，其满足 log $f(e^x)$ 在 $x\in(-\infty,\infty)$ 上是凸函数，则有

$$\Psi_{lower}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}) \geq 1. \quad (121)$$

对于 $\Psi_{upper}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$，有

$$\Psi_{upper}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}) \leq \psi(q_0,f,\mathcal{Z}_n)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\psi(2,f,\mathcal{Z}_{k-1}), \quad (122)$$

其中 $\mathcal{Z}_{k-1}$定义= $\mathcal{X}^{-2^{k-2}}\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}$。

证明: 由于函数 log $f(e^x)$ 在 $x\in(-\infty,\infty)$ 上是凸函数，因此我们有

$$\frac{\log f(e^x)}{dx}\geq 0. \quad (123)$$

于是，我们有

$$\frac{\frac{d\left(\frac{f(e^{qx})}{f^q(e^x)}\right)}{dx}}{\frac{f(e^{qx})}{f^q(e^x)}} = q\left(\frac{d(\log f(e^{qx}))}{dx}-\frac{d(\log f(e^x))}{dx}\right). \quad (124)$$

根据方程 (124)， $f_{(x^q)}\ f^{q(x)}$ 是关于 $0<q\leq 1$ 的递减函数，而 $f_{(x^q)}\ f^{q(x)}$ 是关于 $q\geq 1$ 的递增函数。因此，我们有

$$\mathcal{I} \preceq f^{-q_0}(\mathcal{Z}_n)\,f(\mathcal{Z}_n^{q_0}) \preceq \psi(q_0,f,\mathcal{Z}_n), \quad (125)$$

并且，对于 $k=1$、2、$\cdots$、n，我们也有

$$\mathcal{I} \preceq f^{-2}(\mathcal{Z}_k)\,f\left(\mathcal{Z}_k^{2}\right) \preceq \psi(2,f,\mathcal{Z}_k). \quad (126)$$

由方程 (125) 和方程 (126) 结合方程 (119)，即可证明此引理。 □

引理 5 中给出的结果可以让我们更轻松地评估定理 4 和推论 1 中的尾界，但精度会有所降低。

5 基于主序关系的双变量随机张量均值尾界

本节将基于双变量随机张量均值之间的主序关系，推导特征值求和与乘积的尾界关系。

设 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$、$\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为两个向量，其分量满足以下顺序关系 $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ 和 $y_1 \geq \cdots \geq y_n$。向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 之间的弱主序（记作 $\mathbf{x} \lhd_w \mathbf{y}$）要求满足以下关系：

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \tag{127}$$

其中 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$。向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 之间的主序（记作 $\mathbf{x} \lhd \mathbf{y}$）要求满足以下关系：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} x_i &\leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \ \text{for } 1 \leq k < n; \\ \sum_{i=1}^{r} x_i &= \sum_{i=1}^{r} y_i, \ \text{for } k = n. \end{aligned} \tag{128}$$

对于满足 $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ 和 $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ 的 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 之间的弱对数主序（记作 $\mathbf{x} \lhd_{w \log} \mathbf{y}$）要求满足以下关系：

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \leq \prod_{i=1}^{k} y_i, \tag{129}$$

其中 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 之间的对数主序记为 $\mathbf{x} \lhd_{\log} \mathbf{y}$，要求满足方程 (129) 中 $k = n$ 的等式。

我们需要以下引理来确定具有 L¨所有者序的不同双变量随机张量均值的尾界之间的关系。

引理6 给定以下三个随机正定张量 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$，它们几乎必然满足关系 $\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y} \preceq \mathcal{Z}$，其特征值排列如下：

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathcal{X}) \geq \lambda_2(\mathcal{X}) \geq \cdots \geq \lambda_{\prod_{i=1}^{N} I_i}(\mathcal{X}), \\ \lambda_1(\mathcal{Y}) \geq \lambda_2(\mathcal{Y}) \geq \cdots \geq \lambda_{\prod_{i=1}^{N} I_i}(\mathcal{Y}), \\ \lambda_1(\mathcal{Z}) \geq \lambda_2(\mathcal{Z}) \geq \cdots \geq \lambda_{\prod_{i=1}^{N} I_i}(\mathcal{Z}). \end{aligned} \tag{130}$$

N那么，对于任意正数 κ 和$1 \leq k \leq \prod I_i$，我们有$i=1$

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{X}) \geq \kappa\right) \leq \Pr\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{Y}) \geq \kappa\right) \leq \Pr\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{Z}) \geq \kappa\right), \tag{131}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{X}) \geq \kappa\right) \leq \Pr\left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{Y}) \geq \kappa\right) \leq \Pr\left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{Z}) \geq \kappa\right). \tag{132}$$

证明：由于 $\mathcal{X}$ 是一个厄米张量，根据Courant-Fisher定理，我们有

$$\lambda_i(\mathcal{X}) \quad = \quad \min_{\boldsymbol{U}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}, \tag{133}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是根据 [18], 中的第2.2节从张量 $\mathcal{X}$ 展开得到的展开矩阵，而 N N矩阵 $\boldsymbol{U}$遍历所有满足 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_r$ 的 $r \times \prod_{j=1}^{N} I_j$复矩阵。注意，$1 \leq r \leq \prod_{j=1}^{N} I_j$。那么，$j=1$ $j=1$对于$1\leq i\leq \prod_{j=1}^{N} I_j$，我们得到以下关系：

$$\lambda_i(\mathcal{X}) \leq \lambda_i(\mathcal{Y}) \leq \lambda_i(\mathcal{Z}), \tag{134}$$

由于 $\mathcal{X}\preceq\mathcal{Y}\preceq\mathcal{Z}$。由于所有 $\lambda_i(\mathcal{X})$ $\lambda_i(\mathcal{Y})$ 和 $\lambda_i(\mathcal{Z})$ 都是正数，因此由方程（134）可证此引理。□

根据定理 4 可得到以下推论，用以确定 $q>0$下双变量随机张量均值 $\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q$和 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}$的尾界之间的关系。

推论3 给定两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$, $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$，若 $q=2^n q_0\geq 1$且 $1\leq q_0\leq 2$，则我们设 $\mathcal{Z}_{k-1}\text{定义}=\mathcal{X}^{-2^{k-2}}\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}$，其中 $k=1,2,\cdots,n$。我们假设 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$几乎必然满足 $f\in$张量单调递增[1]。那么，我们有

$$\begin{aligned}\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)&\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\\&\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right),\end{aligned} \tag{135}$$

and

$$\begin{aligned}\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)&\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\\&\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right).\end{aligned} \tag{136}$$

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)&\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\\&\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right),\end{aligned} \tag{137}$$

and

$$\begin{aligned}\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)&\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\\&\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right).\end{aligned} \tag{138}$$

证明：由方程 (58) 以及条件 $q \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \\ &\preceq \Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}. \quad (139)\end{aligned}$$

通过将引理6应用于方程(139)，可得方程(135)和方程(136)。

根据方程(63)以及条件 $0 < q \leq 1$，有

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q \\ &\preceq \lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}.\end{aligned} \quad (140)$$

通过将引理6应用于方程(140)，可得方程(137)和方程(138)。 □

根据定理 5，可得到以下推论，用于确定双变量随机张量均值 $\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q$ 和 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}$ 在 $q > 0$ 下的尾界之间的关系。

推论4 给定两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$、 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$，若 $q = 2^n q_0 \geq 1$ 且 $1 \leq q_0 \leq 2$，我们令 $\mathcal{Z}_{k-1}\overset{定义}{=}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}$ 对于$k = 1$、2、$\cdots$、n。我们假设 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎必然，且 $h\in$TMD[1]。那么，有

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \\ &\quad\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right), \quad (141)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \\ &\quad\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right). \quad (142)\end{aligned}$$

对于 $0 < q \leq 1$，我们有

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \\ &\quad\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right), \quad (143)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \\ &\quad\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right). \quad (144)\end{aligned}$$

证明：由方程 (87) 及条件 $q \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} \Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \\ &\preceq \Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \end{aligned} \tag{145}$$

将引理6应用于方程（145），可得方程（141）和方程（142）。

根据方程（92）和条件 $0 < q \leq 1$，可得

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y} &\preceq \mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q \\ &\preceq \lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}. \end{aligned} \tag{146}$$

将引理6应用于方程（146），可得方程（143）和方程（144）。 □

根据定理6，可得到以下推论，用于确定 $q > 0$ 时双变量随机张量均值 $\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q$ 和 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}$ 的尾界之间的关系。

推论 5 给定两个随机正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$、 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，令 $\mathcal{Z} \triangleq \mathcal{X}^{1/2}\star_N\mathcal{Y}^{-1}\star_N\mathcal{X}^{1/2}$。若 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y} \preceq \mathcal{I}$ 几乎必然成立，且 $q \geq 1$，则令 $g\in\mathsf{TC}^1$,。于是，我们有

$$\begin{aligned} \Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \leq \Pr\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(&\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right) \\ &\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg), \end{aligned} \tag{147}$$

and

$$\begin{aligned} \Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \leq \Pr\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(&\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right) \\ &\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg) \end{aligned} \tag{148}$$

此外，若 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y} \succeq \mathcal{I}$ 几乎必然成立，则有

$$\begin{aligned} \Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \geq \Pr\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(&\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right) \\ &\mathrm{K}^{-1}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg), \end{aligned} \tag{149}$$

and

$$\begin{aligned} \Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right) \geq \Pr\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(&\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right) \\ &\mathrm{K}^{-1}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg). \end{aligned} \tag{150}$$

证明：由方程 (106) 及条件 $q \geq 1$，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^q \#_g \mathcal{Y}^q \preceq & \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X}), \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X}), q-1\right) \lambda_{\min}^{1-q}(\mathcal{X} \#_g \mathcal{Y}) \lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z}) g(\mathcal{Z}^q)\right) \\ & \mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X}), \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X}), 2q-1\right) \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{151}$$

通过将引理6应用于方程（151），我们得到方程（147）和方程（148）。

由方程 (111) 和条件 $0 < q \leq 1$，我们得到

$$\mathcal{X}^q \#_g \mathcal{Y}^q \succeq \lambda_{\min}^{1-q}(\mathcal{X} \#_g \mathcal{Y}) \lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z}) g(\mathcal{Z}^q)\right) \mathrm{K}^{-1}\left(\lambda_{\max}^{-1}(\mathcal{X}), \lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{X}), 2q-1\right) \mathcal{I}, \tag{152}$$

将引理6应用于方程（152），即可得到方程（149）和方程（150）。 □

参考文献

[1] M. Ouerfelli, M. Tamaazousti 和 V. Rivasseau，“用于张量分解的随机张量理论”，载于《AAAI人工智能会议论文集》，第36卷，第7期，2022年，第7913–7921页。[2] O. Evnin，“梅洛尼主导性与大型随机张量的最大特征值”，《数学物理快报》，第111卷，第3期，第66页，2021年。[3] J. A. Tropp 等，“矩阵集中不等式导论”，《机器学习基础与趋势》，第8卷，第1-2期，第1–230页，2015年。[4] S. Y. Chang 和 H.-C. Wu，“张量维纳滤波器”，《IEEE信号处理汇刊》，第70卷，第410–422页，2022年。[5] S. Y. Chang，“随机双张量积分”，arXiv预印本 arXiv:2204.01927，2022年。[6] S. Y. Chang 和 Y. Wei，“T-乘积张量——第二部分：随机T-乘积张量之和的尾界”，《计算与应用数学》，第41卷，第3期，第99页，2022年。[7] ——，“T-平方张量——第一部分：不等式”，《计算与应用数学》，第41卷，第1期，第62页，2022年。[8] ——，“随机张量求和的一般尾界：主序方法”，《计算与应用数学杂志》，第416卷，第114533页，2022年。[9] S. Y. Chang 和 H.-C. Wu，“张量卡尔曼滤波器及其应用”，《IEEE知识与数据工程汇刊》，2022年。[10] ——，“张量量化：高维数据压缩”，《IEEE视频技术电路与系统汇刊》，第32卷，第8期，第5566–5580页，2022年。[11] F. Kubo 和 T. Ando，“正线性算子的均值”，《数学年刊》，第246卷，第205–224页，1980年。[12] T. Ando 和 F. Hiai，“对数主序与互补Golden-Thompson型不等式”，《线性代数及其应用》，第197卷，第113–131页，1994年。[13] S. Wada，“Ando–Hiai不等式何时成立？”，《线性代数及其应用》，第540卷，第234–243页，2018年。

[14] F. Hiai、Y. Seo 和 S. Wada，《算子均值与算子透视的 Ando–Hiai型不等式》，《国际数学杂志》，第31卷，第01期，第2050007页，2020年。[15] E. Effros 和 F. Hansen，《非交换透视》，《泛函分析年鉴》，第5卷，第2期，第74–79页，2014年。[16] G. Ni，《厄米张量与量子混合态》，arXiv预印本 arXiv:1902.02640，2019年。[17] T. Furuta 和 J. M. Hot，《算子不等式中的 Mond-Pecaric方法》，《希尔伯特空间上有界自伴算子的不等式》，Element，萨格勒布，2005年。[18] M. Liang 和 B. Zheng，《张量 Moore-Penrose逆的进一步结果及其在张量近邻问题中的应用》，《计算机与数学及其应用》，第77卷，第5期，第1282–1293页，2019年3月。