arXiv:2305.03305v1 [math.PR] 5 May 2023

二元随机张量均值的随机张量不等式与尾界，第二部分

Shih Yu Chang *

2023年5月8日

摘要

这是我们关于二元随机张量均值的随机张量不等式和尾界工作的第二部分。在回顾随机张量的基本事实后，我们首先研究具有更一般连接函数的尾界。然后，推导出一个适用于张量的一般李-特罗特公式，并应用该公式建立涉及张量对数的二元随机张量均值的尾界。我们在第一部分工作中研究的所有随机张量都假设为正定（PD）随机张量，即可逆张量。在本第二部分工作中，我们通过定义随机张量拓扑（RTT），并基于 RTT 发展极限方法，将二元随机张量均值的尾界从正定（PD）随机张量推广到半正定（PSD）随机张量。最后，我们应用我们的理论，建立两种张量数据处理方法——数据融合和线性变换——处理前后，二元随机张量均值的尾界和 L¨owner 序关系。

索引词—李-特罗特公式、随机张量、二元张量均值、L¨owner序、主序、张量数据处理。

1 引言

算子几何均值的 Ando-Hiai 型不等式最早在 [1] 的一项重要工作中得到证明。此后，这些不等式推动了算子理论领域的活跃研究，例如一般算子均值、多变量算子均值、量子信息等 [2, 3]。当 g 是与某个特定算子均值相关联的连接函数，且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个正可逆算子时，Ando-Hiai 型不等式可表示为：

$$\boldsymbol{A}\#_g\boldsymbol{B} \preceq \boldsymbol{I} \implies \boldsymbol{A}^q\#_g\boldsymbol{B}^q \preceq \boldsymbol{I}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\#_g\boldsymbol{B} \succeq \boldsymbol{I} \implies \boldsymbol{A}^q\#_g\boldsymbol{B}^q \succeq \boldsymbol{I}, \tag{2}$$

其中 $q \geq 1$。在我们工作的第一部分中，我们讨论了各种类型的连接函数 g 以及更广泛指数范围 q 下二元随机张量均值的尾界。本文考虑更一般的连接函数 $G_n(x)$ 对应的尾界，其中 $G_n(x)$ 由 $G_n(x) \overset{\text{定义}}{=} x^n g(x)$ 给出；为此，我们将算子视为随机张量。近年来，已有许多研究致力于随机张量相关主题 [4–10]。

李-特罗特公式是数值分析中的一项基本结果，它允许使用一系列更简单的子问题来近似微分方程的解。具体而言，该公式指出，复合微分方程系统的解可以通过应用 the

*Shih Yu Chang 任职于美国加利福尼亚州圣何塞的圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮箱：shihyu.chang@sjsu.edu）。

以顺序方式求解各个子问题。李-特罗特公式在广泛的领域中具有应用。下面讨论李-特罗特公式应用的几个示例。计算物理：李-特罗特公式用于模拟可通过微分方程建模的物理系统的行为，例如量子力学中的薛定谔方程或流体动力学中的纳维-斯托克斯方程。通过使用李-特罗特公式近似求解这些方程，研究人员可以深入了解复杂系统的行为，并预测这些系统在不同条件下的表现。分子动力学：李-特罗特公式用于模拟分子系统（如蛋白质或核酸）的行为，方法是近似求解系统中每个原子或分子的运动方程。这使研究人员能够研究这些复杂系统的行为，并根据其性质设计新药物或新材料。控制理论：李-特罗特公式用于复杂工程应用领域中控制系统的设计，例如航空航天或机器人学。通过近似求解描述这些系统行为的控制方程，工程师能够设计出可以实时稳定和优化这些系统行为的控制系统。金融数学：李-特罗特公式用于金融衍生品（如期权或期货合约）的定价，方法是近似求解描述这些金融工具行为的偏微分方程。这使交易者和投资者能够根据对这些金融工具在不同市场条件下表现的预测，对其投资做出明智的决策。总的来说，李-特罗特公式是一种强大的工具，使研究人员和工程师能够模拟复杂系统的行为，并根据对这些系统在不同条件下表现的预测做出明智的决策 [11]。在本文中，我们将应用李-特罗特公式，建立涉及张量对数的二元随机张量均值的尾界。

我们在第一部分工作中讨论的所有随机张量均假设为正定（PD）随机张量，也就是可逆张量。在本工作中，我们将把二元随机张量均值的尾界从正定（PD）随机张量推广到半正定（PSD）随机张量。我们首先定义随机张量拓扑（RTT）的概念，并基于 RTT 提出一种极限方法，将二元随机张量均值的尾界从随机正定（PD）张量推广到随机半正定（PSD）张量。李-特罗特公式的推导以及上述极限方法均基于工作 [12]。

图数据融合是将来自多个图或网络数据集的信息合并为一个统一图的过程。图数据融合的目标是利用每个单独图的优势，创建对底层数据更全面、更准确的表示。图数据融合有多种技术。首先是图合并。这种技术涉及将两个或多个图的节点和边合并到一个图中。具体做法可以是识别并合并共同的节点或边，也可以创建新的节点和边来连接不同的图。第二种是图对齐。图对齐是指在不同图中找到节点或边之间的对应关系，并使其对齐。具体做法可以是比较节点或边的属性，也可以使用图匹配算法。最后，图粗化是指通过将节点归入聚类或社群来降低图的复杂度。具体做法可以是使用聚类算法或社区检测算法。图数据融合应用于多个领域，包括社交网络分析、生物信息学和交通规划。它使研究人员和分析人员能够更全面地理解复杂系统，并基于数据做出更准确的预测 [13]。由于张量（矩阵）是对图数据执行代数运算的理想工具，因此在这项工作中，我们应用关于张量凸性的理论来推导张量均值融合不等式。

另一种应用于图数据的重要数据处理方法是对图数据进行线性变换。通过线性变换处理图数据，是指对图执行一种数学运算，将原始图转换为具有不同性质的新图，同时保留原图的某些特征。具体而言，图的线性变换是一个函数，它使用线性算子将图的邻接矩阵（张量）映射为一个新的矩阵（张量）。这个新矩阵表示经过变换后的

原图版本。下面讨论一些常见的线性变换示例。拉普拉斯变换：这种变换基于图拉普拉斯矩阵，常用于谱图论。它可用于识别图中的聚类或社群，并检测连通性和对称性等图性质。图傅里叶变换：这种变换基于图的特征值和特征向量，用于分析图的频率成分。它可用于识别图中的模式或模体，并根据图的谱性质比较不同的图。小波变换：这种变换通过将图分解为不同尺度并分别分析各个尺度，用于分析图的局部性质。它可用于识别图中的局部模式或异常，并滤除噪声或无关信息。图的线性变换在数据处理领域有许多应用，包括图像处理、信号处理和机器学习。它们可用于从图中提取有意义的特征、降低图数据的维度，并支持对大型图进行高效计算 [14]。我们应用算子（张量）Jensen 不等式，证明线性变换下双变量张量均值的张量均值不等式。

本文第二部分的组织结构概述如下。本文第一部分讨论的重要概念，如连接函数分类、康托罗维奇常数和随机张量不等式，将在第2节中重新陈述，以便内容自成一体。第3节中，我们考虑具有更一般连接函数 $F_n(x)$ 的尾界，其中 $F_n(x)$ 由 $F_n(x) \xrightarrow{\text{定义}} x^n f(x)$。第4节中，我们推导出张量的一般李-特罗特公式，并将该公式用于建立涉及张量对数的二元随机张量均值的尾界。第5节中，我们首先引入一种用于刻画随机张量极限行为的新拓扑，即随机张量拓扑（RTT），然后基于 RTT 开发一种极限方法，将二元随机张量均值的尾界从随机正定（PD）张量推广到随机半正定（PSD）张量。最后，我们通过刻画变换（数据处理）后二元随机张量均值的 L¨owner 序及尾界关系，将关于二元随机张量尾界的理论应用于张量数据处理。

2 预备知识

本节将回顾后续各节中会用到的定义和事实。我们用向量 $\vec{\lambda}(\mathcal{H}) = (\lambda_1(\mathcal{H}) \cdots, \lambda_r(\mathcal{H}))$ 按降序表示厄米特张量 $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 的厄米特特征值，其中 r 是张量 $\mathcal{H}$ 的厄米特秩。我们用 $\mathbb{R}_{\geq 0}(\mathbb{R}_{>0})$ 表示非负（正）实数集合。设 $\|\cdot\|_\rho$ 是酉不变张量范数，即 $\|\mathcal{H} \star_N \mathcal{U}\|_\rho = \|\mathcal{U} \star_N \mathcal{H}\|_\rho = \|\mathcal{H}\|_\rho$，其中 $\mathcal{U}$ 表示酉张量。设 $\rho : \mathbb{R}^r_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为相应的规范函数，该函数满足 H¨older 不等式，因此

$$\|\mathcal{H}\|_\rho = \||\mathcal{H}|\|_\rho = \rho(\vec{\lambda}(|\mathcal{H}|)), \tag{3}$$

其中 $|\mathcal{H}| \xrightarrow{\text{定义}} \sqrt{\mathcal{H}^H \star_N \mathcal{H}}$。

我们定义以下正函数集合。

$$\begin{aligned} \text{TMI} &= \{f : \text{tensor monotone increasing on } (0,\infty),\ f{>}0\}; \\ \text{TMD} &= \{g : \text{tensor monotone decreasing on } (0,\infty),\ g{>}0\}; \\ \text{TC} &= \{h : \text{tensor convex on } (0,\infty),\ h{>}0\}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{TMI}^1 &= \{f : \text{tensor monotone increasing on } (0,\infty),\ f{>}0 \text{ and } f(1){=}1\}; \\ \text{TMD}^1 &= \{g : \text{tensor monotone decreasing on } (0,\infty),\ g{>}0 \text{ and } g(1){=}1\}; \\ \text{TC}^1 &= \{h : \text{tensor convex on } (0,\infty),\ h{>}0 \text{ and } h(1){=}1\}. \end{aligned} \tag{5}$$

两个张量之间的默认乘积为 $\star_N$。如果乘积不是 $\star_N$，我们将明确指定具体的乘积符号。

关于 Kantorovich 型不等式的引理 1 和引理 2 已在我们第一部分的工作中证明。

引理 1 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 为两个对称正定张量，且满足 $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$，并设 $q\in[0,1]$。则有

$$\mathcal{A}^q \succeq \mathcal{B}^q. \tag{6}$$

引理 2 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 为两个正定张量，满足

$$\begin{aligned} m_1\mathcal{I} \preceq \mathcal{A} \preceq M_1\mathcal{I}, \ \textit{and} \\ m_2\mathcal{I} \preceq \mathcal{B} \preceq M_2\mathcal{I}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $M_1>m_1>0$，且 $M_2>m_2>0$。若 $\mathcal{B}\preceq\mathcal{A}$，则有

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^p &\preceq \mathrm{K}(m_1,M_1,p)\mathcal{A}^p, \\ \mathcal{B}^p &\preceq \mathrm{K}(m_2,M_2,p)\mathcal{A}^p, \end{aligned} \tag{8}$$

其中，康托罗维奇常数 K(m, M, p) 可表示为

$$\mathrm{K}(m,M,p) = \left(\frac{(p-1)\left(M^p-m^p\right)}{p\left(mM^p-Mm^p\right)}\right)^p \frac{mM^p-Mm^p}{(p-1)(M-m)}. \tag{9}$$

下面的引理 3 根据随机张量之间的 L¨owner 序给出尾界。

引理 3 给定以下随机正定张量 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$、$\mathcal{Z}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$及其关系 $\mathcal{X}\preceq\mathcal{Y}\preceq\mathcal{Z}$，以及一个确定性正定张量 $\mathcal{C}$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{10}$$

其中 $q\geq 1$。我们还有

$$\Pr\left(\mathcal{X}\not\preceq\mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{Y}^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right). \tag{11}$$

3 广义关联函数的二元随机张量均值的尾界

本节将讨论广义连接函数的二元随机张量均值的尾界。我们将以下广义连接函数 $F_n(x)$ 定义为 $F_n(x) \triangleq x^n f(x)$，其中 $f(x)$ 来自 TMI[1]。关于 $F_n(x)$ 的二元随机张量均值可表示为

$$\mathcal{X}\#_{F_n}\mathcal{Y} = \mathcal{X}\#_{x^n f(x)}\mathcal{Y}. \tag{12}$$

然后，给定随机张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，我们有以下递归关系：

$$\mathcal{X}\#_{F_n}\mathcal{Y} = \mathcal{X}\star_N\left(\mathcal{Y}^{-1}\#_{F_{n-1}}\mathcal{X}^{-1}\right)\star_N\mathcal{X} = \mathcal{X}\star_N\mathcal{Y}^{-1}\star_N\left(\mathcal{X}\#_{F_{n-2}}\mathcal{Y}\right)\star_N\mathcal{Y}^{-1}\star_N\mathcal{X} \tag{13}$$

其中 $n\in\mathbb{N}$和 $n\geq 2$。在本节建立主要结果之前，我们将先给出几个引理。

引理 4 设 $f \in \mathrm{TMI}^1$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $g(x) \xrightarrow{\text{定义为}} (x^n f(x))$，是函数 $x^n f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上的反函数。那么，对于任意 $m \in \{0,1,2,\cdots,n\}$，$g^m(x) \in \mathrm{TMI}^1$。

证明：对于 $n=1$，根据 [15] 中的引理 5，已证明在 $f \in \mathrm{TMI}^1$ 的条件下，$(xf(x))^{[-1]} \in \mathrm{TMI}^1$。若 $n \geq 2$，则有

$$\begin{aligned} g^n(x) &= \left((x^n f(x))^{[-1]}\right)^n = \left(((xf_n(x)) \circ x^n)^{[-1]}\right)^n \\ &= \left((x^n)^{[-1]} \circ (xf_n(x))^{[-1]}\right)^n \\ &= (xf_n(x))^{[-1]}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $f_n(x) \xrightarrow{\text{定义为}} f(x^{1/n})$。由于 $f_n(x) \in \mathrm{TMI}^1$, , 我们有 $(xf_n(x))^{[-1]} \in \mathrm{TMI}^1$。于是，该引理得证。□

下面两个引理讨论 $\mathcal{X}\#_{F_{2m-1}}\mathcal{Y}$（奇数指数）和 $\mathcal{X}\#_{F_{2m}}\mathcal{Y}$（偶数指数）的二元随机张量均值，其中 $m \in \mathbb{N}$。

引理 5（奇数指数）设 $f \in \mathrm{TMI}^1$ 具有 pmi 性质，且 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m \geq 2$。对于 $q > 0$，我们还假设

$$f(\mathcal{Z}^q) \preceq M_1 f^q(\mathcal{Z}), \tag{15}$$

其中 $\mathcal{Z}$ 是任意正定张量，$M_1 \geq 1$ 是正常数。此外，我们将函数$F(x)$定义为 $F(x) \xrightarrow{\text{定义为}} x^{2m-2}f(x)$，将函数 $g(x)$ 定义为 $g(x) \xrightarrow{\text{定义为}} \left(F^{[-1]}(x^{-1})\right)^{-1}$，并将函数 $h(x)$ 定义为$h(x) \xrightarrow{\text{定义为}} xg(x)$。给定两个正定随机张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和 $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，若$\mathcal{X}\#_{x^{2m-1}f(x)}\mathcal{Y} \preceq \mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $q>0$，则有

$$\mathcal{X}^q\#_{x^{2m-1}f(x)}\mathcal{Y}^q \preceq M_1\left(\prod_{k=2}^{m}\mathrm{K}_k\right)\mathcal{I}, \tag{16}$$

其中 K_k 为 Kantorovich 常数，定义如下

$$\mathrm{K}_k \overset{def}{=} \mathrm{K}(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1}g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right), \lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1}g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right), 2q). \tag{17}$$

证明：由于张量之间的所有乘法都是 $\star_N$，为简化起见，我们将在本证明中省略这些记号。根据式 (13) 给出的递推关系，我们有

$$\mathcal{I} \succeq \mathcal{X}\#_{x^{2m-1}f(x)}\mathcal{Y} = \mathcal{X}\left(\mathcal{Y}^{-1}\#_{x^{2m-2}f(x)}\mathcal{X}^{-1}\right)\mathcal{X}, \tag{18}$$

这等价于

$$\left(\mathcal{X}^{1/2}\mathcal{Y}^{-1}\mathcal{X}^{1/2}\right)^{2m-2} f\left(\mathcal{X}^{1/2}\mathcal{Y}^{-1}\mathcal{X}^{1/2}\right) \preceq \mathcal{X}^{-1}. \tag{19}$$

根据式 (19)，我们有

$$\mathcal{X}^{-1/2}\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1/2} \succeq g(\mathcal{X}) \Longleftrightarrow \mathcal{Y} \succeq h(\mathcal{X}). \tag{20}$$

根据引理 4，两个函数 $g(x)$ 和 $h^{[1]}(x)$ 都属于 TMI^1。

对于 $n=1$、2、$\cdots$、m，我们将通过归纳法证明以下不等式。

$$\mathcal{X}^q\#_{x^{2n-1}f(x)}\mathcal{Y}^q \preceq M_1\left(\prod_{k=2}^{n}\mathrm{K}_k\right)g^{2(m-n)q}(\mathcal{X}), \tag{21}$$

其中，K_k 是由式（17）定义的康托罗维奇常数。

对于 $n=1$ 的情形，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^q\#_{xf(x)}\mathcal{Y}^q &= \mathcal{Y}^q\#_{f(1/x)}\mathcal{X}^q\\ &\preceq_1 (h(\mathcal{X}))^q\#_{f(1/x)}\mathcal{X}^q\\ &= \mathcal{X}^q f\left(g^{-q}(\mathcal{X})\right)\\ &\preceq_2 M_1\left(\mathcal{X}f\left(g^{-1}(\mathcal{X})\right)\right)^q\\ &= M_1 g^{2(m-1)q}(\mathcal{X}) \end{aligned} \tag{22}$$

其中，$\preceq_1$ 来自 $\mathcal{Y}\succeq h(\mathcal{X})$，而 $\preceq_2$ 对于 $0<q\leq 1$ 来自 f 的 pmi性质，对于 $q\geq 1$ 则来自式 (15)。假设式 (22) 给出的不等式对 $n\leq m-1$ 成立，则有

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^q\#_{x^{2n+1}f(x)}\mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^q\mathcal{Y}^{-q}\left(\mathcal{X}^q\#_{x^{2n-1}f(x)}\mathcal{Y}^q\right)\mathcal{Y}^{-q}\mathcal{X}^q\\ &\preceq_1 \mathcal{X}^q\mathcal{Y}^{-q}\left(M_1\left(\prod_{k=2}^{n}\mathrm{K}_k\right)g^{2(m-n)q}(\mathcal{X})\right)\mathcal{Y}^{-q}\mathcal{X}^q\\ &\preceq_2 \mathcal{X}^q\mathcal{Y}^{-q}\left(M_1\left(\prod_{k=2}^{n}\mathrm{K}_k\right)g^{2(m-n)q}(h^{[-1]}(\mathcal{Y}))\right)\mathcal{Y}^{-q}\mathcal{X}^q\\ &= M_1\left(\prod_{k=2}^{n}\mathrm{K}_k\right)\mathcal{X}^q\left((h^{[-1]}(\mathcal{Y}))^{-1}g^{(m-n-1)}(h^{[-1]}(\mathcal{Y}))\right)^{2q}\mathcal{X}^q\\ &\preceq_3 M_1\left(\prod_{k=2}^{n+1}\mathrm{K}_k\right)\mathcal{X}^q\left(\mathcal{X}^{-1}g^{(m-n-1)}(\mathcal{X})\right)^{2q}\mathcal{X}^q\\ &= M_1\left(\prod_{k=2}^{n+1}\mathrm{K}_k\right)g^{2(m-n-1)q}(\mathcal{X}), \end{aligned} \tag{23}$$

其中，$\preceq_1$ 来自归纳假设，$\preceq_2$ 来自引理 4，$\preceq_3$ 来自于函数 $x/g^{m-n-1}(x)\in\mathrm{TMI}^1$, 关系 $\mathcal{Y}\succeq h(\mathcal{X})$，而 $q\geq 1/2$ 则来自引理 2。对于 $0<q\leq 1/2$，$\preceq_3$ 来自引理 1。令 $n=m$，即可证明本引理。□

引理 6（偶数指数）设 $f\in\mathrm{TMI}^1$，具有 pmi性质，且 $m\in\mathbb{N}$ 满足 $m\geq 2$。对于 $q>0$，我们还假设

$$f(\mathcal{Z}^q)\preceq M_1 f^q(\mathcal{Z}), \tag{24}$$

其中，$\mathcal{Z}$ 是任意正定张量，$M_1\geq 1$ 是正常数。此外，我们定义函数$F(x)$为 $F(x)\overset{def}{=}x^{2m-1}f(x)$，函数 $g(x)$为 $g(x)\overset{def}{=}\left(F^{[-1]}(x^{-1})\right)^{-1}$，以及函数 $h(x)$为$h(x)\overset{def}{=}xg(x)$。给定两个正定随机张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$和 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，如果$\mathcal{X}\#_{x^{2m}f(x)}\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $q>0$，则有

$$\mathcal{X}^q\#_{x^{2m}f(x)}\mathcal{Y}^q\preceq M_1\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{K}_k\right)\mathcal{I}, \tag{25}$$

其中 K_k 是定义如下的康托罗维奇常数

$$\mathrm{K}_k\overset{def}{=}\mathrm{K}(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1}g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1}g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right),2q). \tag{26}$$

证明：由式（13）给出的递推关系可得

$$\mathcal{I} \succeq \mathcal{X} \#_{x^{2m} f(x)} \mathcal{Y} = \mathcal{X} \left(\mathcal{Y}^{-1} \#_{x^{2m-1} f(x)} \mathcal{X}^{-1} \right) \mathcal{X}, \tag{27}$$

这等价于

$$\left(\mathcal{X}^{1/2} \mathcal{Y}^{-1} \mathcal{X}^{1/2} \right)^{2m-1} f \left(\mathcal{X}^{1/2} \mathcal{Y}^{-1} \mathcal{X}^{1/2} \right) \preceq \mathcal{X}^{-1}. \tag{28}$$

由式 (28)，可得

$$\mathcal{X}^{-1/2} \mathcal{Y} \mathcal{X}^{-1/2} \succeq g(\mathcal{X}) \Longleftrightarrow \mathcal{Y} \succeq h(\mathcal{X}). \tag{29}$$

由引理 4，函数 $g(x)$ 和 $h^{[1]}(x)$ 都属于 TMI^1。

对于 $n = 1, 2, \cdots, m$，我们将通过归纳法证明以下不等式。

$$\mathcal{X}^q \#_{x^{2n} f(x)} \mathcal{Y}^q \preceq M_1 \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{K}_k \right) g^{2(m-n)q}(\mathcal{X}), \tag{30}$$

其中，K_k 是式 (26) 定义的康托罗维奇常数。

对于 $n = 1$ 的情形，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^q \#_{x^2 f(x)} \mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^q \mathcal{Y}^{-q} \left(\mathcal{Y}^q \#_{f(x)} \mathcal{X}^q \right) \mathcal{Y}^{-q} \mathcal{X}^q \\
&\preceq_1 \mathcal{X}^q \mathcal{Y}^{-q} \left(\mathcal{Y}^q \#_{f(x)} \left(h^{[-1]}(\mathcal{Y}) \right)^q \right) \mathcal{Y}^{-q} \mathcal{X}^q \\
&= \mathcal{X}^q \left(\mathcal{Y}^{-q} f \left(\left(\mathcal{Y}^{-1} h^{[-1]}(\mathcal{Y}) \right)^q \right) \right) \mathcal{X}^q \\
&\preceq_2 M_1 \mathcal{X}^q \left(\mathcal{Y}^{-1} f \left(\mathcal{Y}^{-1} h^{[-1]}(\mathcal{Y}) \right) \right)^q \mathcal{X}^q \\
&= M_1 \mathcal{X}^q \left((h^{[-1]}(\mathcal{Y}))^{-1} g^{m-1} \left(h^{[-1]}(\mathcal{Y}) \right) \right)^{2q} \mathcal{X}^q \\
&\preceq_3 M_1 \mathrm{K}_1 \mathcal{X}^q \left(\mathcal{X}^{-1} g^{m-1} (\mathcal{X}) \right)^{2q} \mathcal{X}^q \\
&= M_1 \mathrm{K}_1 g^{2(m-1)q} (\mathcal{X}),
\end{aligned} \tag{31}$$

其中，$\preceq_1$ 来自 $\mathcal{Y} \succeq h(\mathcal{X})$，$\preceq_2$ 在 $0 < q \leq 1$ 时来自 f 的 pmi，在$q \geq 1$时来自式（24）；$\preceq_3$ 来自这样一个事实：函数 $x/g^{m-1}(x) \in$ TMI^1, 关系 $\mathcal{Y} \succeq h(\mathcal{X})$，以及$q \geq 1/2$时的引理 2。对于 $0 < q \leq 1/2$，$\preceq_3$ 来自引理 1。

假设公式 (31) 给出的不等式对于 $n \leq m-1$ 成立，则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^q \#_{x^{2n+2} f(x)} \mathcal{Y}^q &= \mathcal{X}^q \mathcal{Y}^{-q} \left(\mathcal{X}^q \#_{x^{2n} f(x)} \mathcal{Y}^q \right) \mathcal{Y}^{-q} \mathcal{X}^q \\
&\preceq_1 \mathcal{X}^q \mathcal{Y}^{-q} \left(M_1 \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{K}_k \right) g^{2(m-n)q}(\mathcal{X}) \right) \mathcal{Y}^{-q} \mathcal{X}^q \\
&\preceq_2 \mathcal{X}^q \mathcal{Y}^{-q} \left(M_1 \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{K}_k \right) g^{2(m-n)q}(h^{[-1]}(\mathcal{Y})) \right) \mathcal{Y}^{-q} \mathcal{X}^q \\
&= M_1 \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{K}_k \right) \mathcal{X}^q \left((h^{[-1]}(\mathcal{Y}))^{-1} g^{(m-n-1)}(h^{[-1]}(\mathcal{Y})) \right)^{2q} \mathcal{X}^q \\
&\preceq_3 M_1 \left(\prod_{k=1}^{n+1} \mathrm{K}_k \right) \mathcal{X}^q \left(\mathcal{X}^{-1} g^{(m-n-1)}(\mathcal{X}) \right)^{2q} \mathcal{X}^q \\
&= M_1 \left(\prod_{k=1}^{n+1} \mathrm{K}_k \right) g^{2(m-n-1)q}(\mathcal{X}),
\end{aligned} \tag{32}$$

其中，$\preceq_1$ 来自归纳假设，$\preceq_2$ 来自引理 4，$\preceq_3$ 来自函数 $x/g^{m-n-1}(x) \in \mathrm{TMI}^1$，关系 $\mathcal{Y} \succeq h(\mathcal{X})$ 以及关于 $q \geq 1/2$ 的引理 2。对于 $0 < q \leq 1/2$，$\preceq_3$ 来自引理 1。本引理通过令 $n = m$ 得证。□

我们现在可以给出本节的以下主要定理。

定理 1 设 $f \in \mathrm{TMI}^1$ 具有 pmi 性质，且 $m \in \mathbb{N}$满足 $m \geq 2$。对于 $q > 0$，我们还假设

$$f(\mathcal{Z}^q) \preceq M_1 f^q(\mathcal{Z}), \tag{33}$$

其中，$\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ $M_1 \geq 1$ $\mathcal{X}$ 是任意正定张量，且是一个正常数。给定两个正定随机张量 $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 和 $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 以及一个确定性正定张量 $\mathcal{I}$，若 $\mathcal{X} \#_{x^m f(x)} \mathcal{Y} \preceq \mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $p \geq 1$，$q > 0$，则有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q \#_{x^m f(x)} \mathcal{Y}^q \not\preceq \mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(M_1 \left(\prod_{k=1}^{m} \mathrm{K}_k\right) \mathcal{I}\right)^p\right] \star_N \mathcal{C}^{-1}\right), \tag{34}$$

其中，K_k 是定义如下的康托罗维奇常数

$$\mathrm{K}_k \overset{def}{=} \mathrm{K}(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1} g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right), \lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1} g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right), 2q), \tag{35}$$

其中，$g(x)$ 定义为 $g(x) \overset{\text{定义为}}{=} \left(F^{[-1]}(x^{-1})\right)^{-1}$，其中函数 $F(x) \overset{\text{定义为}}{=} x^{m-1} f(x)$。

证明：由引理 5 和引理 6，可得

$$\mathcal{X}^q \#_{x^m f(x)} \mathcal{Y}^q \preceq M_1 \left(\prod_{k=1}^{m} \mathrm{K}_k\right) \mathcal{I}, \tag{36}$$

由引理 3 可证明此定理 □

W将 $f \in \mathrm{TMI}^1$ 替换为 $f \in \mathrm{TMD}^1$，由定理 1 可得以下推论。

推论1 设 $f \in \mathrm{TMI}^1$ 具有 pmd 性质，且 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m \geq 2$。对于 $q > 0$，我们还假设

$$M_2 f(\mathcal{Z}^q) \succeq f^q(\mathcal{Z}), \tag{37}$$

其中 $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ $M_2 \geq 1$ $\mathcal{X}$ 是任意正定张量，且 是一个正常数。给定两个正定随机张量 $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 和 $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times I_1 \times \cdots \times I_N}$ 以及一个确定性张量 $\mathcal{I}$，如果 $\mathcal{X} \#_{x^m f(x)} \mathcal{Y} \succeq \mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $p \geq 1$、$q > 0$，则有

$$\Pr\left(\left(M_2 \prod_{k=1}^{m} \mathrm{K}_k\right)^{-1} \mathcal{I} \not\preceq \mathcal{C}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathcal{X}^q \#_{x^m f(x)} \mathcal{Y}^q\right)^p\right] \star_N \mathcal{C}^{-1}\right), \tag{38}$$

其中 K_k 是定义如下的康托罗维奇常数

$$\mathrm{K}_k \overset{def}{=} \mathrm{K}(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1} g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right), \lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}^{-1} g^{(m-k)}(\mathcal{X})\right), 2q), \tag{39}$$

其中 $g(x)$ 定义为 $g(x) \overset{\text{定义为}}{=} \left(F^{[-1]}(x^{-1})\right)^{-1}$，其中函数 $F(x) \overset{\text{定义为}}{=} x^{m-1} f(x)$。

证明：在定理 1 中令 $x^n f(x)$ 为 $x^n f^{-1}(1/x)$，可得

$$\mathcal{X}^q \#_{x^m f(x)} \mathcal{Y}^q \succeq \left(M_2 \prod_{k=1}^{m} \mathrm{K}_k\right)^{-1} \mathcal{I}. \tag{40}$$

该定理由引理 3 证明。 □

4 张量的李-特罗特公式及其应用

4.1 张量的李-特罗特公式

本节将给出一个适用于具有连接函数的张量的一般李-特罗特公式，其中连接函数是在 $(0,\infty)$ 上一阶可微的函数。我们用 $\mathfrak{H}$ 表示厄米张量集。我们从以下引理开始。

引理 7 设 g 是定义在 $(0,\infty)$ 上的一阶可微函数，$\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 是一个厄米特张量，$M(q)$ 是定义在 $(-\epsilon_0,\epsilon_0)$ 上的 $\mathfrak{H}$ 值函数，其中 $\epsilon>0$，满足 $M(0)=0$ 且 $\lim_{q\to 0}\frac{\|M(q)\|_\rho}{|q|}=0$，其中 $\|\cdot\|_\rho$ 是由式 (3) 定义的酉不变范数。那么，存在另一个 $\mathfrak{H}$ 值函数 $\tilde{M}(q)$，使得

$$g(\mathcal{I}+q\mathcal{X}+M(q))=f(1)\mathcal{I}+qg'(1)\mathcal{X}+\tilde{M}(q), \tag{41}$$

其中 $\tilde{M}(q)$ 定义在 $(-\epsilon,\epsilon)$ 上，且存在某个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$；此外，

$$\lim_{q\to 0}\frac{\left\|\tilde{M}(q)\right\|_\rho}{|q|}=0. \tag{42}$$

证明：由于 $\lim_{q\to 0}\frac{\|M(q)\|_\rho}{|q|}=0$，我们可以找到 $a>0$ 和 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$，使得

$$\left\|\mathcal{X}+\frac{M(q)}{q}\right\|_\rho<a, \tag{43}$$

其中 $q\in(-\epsilon,\epsilon)\backslash\{0\}$。那么，对于每个 $q\in(-\epsilon,\epsilon)\backslash\{0\}$，我们可以将 $\mathcal{X}+\frac{M(q)}{q}$ 进行谱分解，得到

$$\mathcal{X}+\frac{M(q)}{q} \;=\; \int_{-a'}^{a'}\lambda dE_q(\lambda), \tag{44}$$

其中，$[-a',a']$ 是根据式 (43) 给定条件的张量 $\mathcal{X}+\frac{M(q)}{q}$ 的特征值范围，$E_q(\lambda)$ 是张量 $\mathcal{X}+\frac{M(q)}{q}$ 对应于特征值 λ 的特征张量。由式 (44)，可得张量 $g(\mathcal{I}+q\mathcal{X}+M(q))$ 的谱分解为

$$g(\mathcal{I}+q\mathcal{X}+M(q)) \;=\; \int_{-a'}^{a'}g(1+q\lambda)dE_q(\lambda). \tag{45}$$

根据中值定理，对于某个 $\theta\in(0,1)$，我们有 $g(1+q\lambda)=g(1)+q\lambda g'(1+\theta q\lambda)$。然后，我们可以将 $g(1+q\lambda)$ 表示为

$$g(1+q\lambda) \;=\; g(1)+qg'(1)+q\lambda\psi(q,\lambda), \tag{46}$$

其中 $\psi(q,\lambda)\overset{\text{def}}{=}g'(1+\theta q\lambda)-g'(1)$。注意，$\sup_{|\lambda|\le a'}|\psi(q,\lambda)|\to 0$ as $q\to 0$。由式 (45) 和式 (46) 得，我们有

$$g(\mathcal{I}+q\mathcal{X}+M(q)) \;=\; g(1)\mathcal{I}+qg'(1)\left(\mathcal{X}+\frac{M(q)}{q}\right)+q\int_{-a'}^{a'}\lambda\psi(q,\lambda)dE_q(\lambda). \tag{47}$$

由式（47）可得

$$\left\|g(\mathcal{I}+q\mathcal{X}+M(q))-g(1)\mathcal{I}-qg'(1)\mathcal{X}\right\|_\rho/|q| \quad\leq\quad |g'(1)|\frac{\|M(q)\|_\rho}{|q|}+\sup_{|\lambda|\leq a'}|\lambda\psi(q,\lambda)|. \tag{48}$$

注意到，式（48）的右端将随着 $q\to 0$ 趋近于零，这是因为当 $q\to 0$ 时，$\sup_{|\lambda|\leq a'}|\psi(q,\lambda)|\to 0$。因此，令 $M(q)$ 为下式，即可证明该引理：

$$\tilde{M}(q)\overset{\text{def}}{=}g(\mathcal{I}+q\mathcal{X}+M(q))-g(1)\mathcal{I}-qg'(1)\mathcal{X}. \tag{49}$$

□

现在我们准备给出张量的李-特罗特公式。

定理 2 设 g 是 $(0,\infty)$ 上一阶可微的函数，满足 $g(1)=1$，且 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 为两个厄米张量，则有

$$\lim_{q\to 0}\left(e^{q\mathcal{X}}\#_g e^{q\mathcal{Y}}\right)^{1/q} \quad=\quad \exp\left(g'(1)\mathcal{X}+(1-g'(1))\mathcal{Y}\right), \tag{50}$$

其中 $q\to 0$。

证明：由 $e^{q\mathcal{X}}$ 和 $e^{q\mathcal{Y}/2}$ 的泰勒展开，我们有

$$e^{-q\mathcal{Y}/2}\star_N e^{q\mathcal{X}}\star_N e^{-q\mathcal{Y}/2} \quad=\quad \mathcal{I}+q(\mathcal{X}-\mathcal{Y})+M(q), \tag{51}$$

其中 $M(q)\in\mathfrak{H}$，且 $\lim_{q\to 0}\frac{\|M(q)\|_\rho}{|q|}=0$）。根据引理 7，存在一个 $\mathfrak{H}$ 值函数 $\left\|\tilde{M}(q)\right\|_\rho$，定义在 $(-\epsilon,\epsilon)$ 上，其中某个 $\epsilon>0$ 满足

$$g(e^{-q\mathcal{Y}/2}\star_N e^{q\mathcal{X}}\star_N e^{-q\mathcal{Y}/2}) \quad=\quad \mathcal{I}+qg'(1)(\mathcal{X}-\mathcal{Y})+\tilde{M}(q), \tag{52}$$

其中 $\lim_{q\to 0}\frac{\|\tilde{M}(q)\|_\rho}{|q|}=0$）。于是，我们有

$$e^{q\mathcal{X}}\#_g e^{q\mathcal{Y}} \quad=\quad \left(\mathcal{I}+qg'(1)(\mathcal{X}-\mathcal{Y})+\tilde{M}(q)\right)e^{q\mathcal{Y}}, \tag{53}$$

对公式（53）的两边分别取对数，可得

$$\begin{aligned}\log(e^{q\mathcal{X}}\#_g e^{q\mathcal{Y}}) \quad&=\quad q\mathcal{Y}+\log\left(\mathcal{I}+qg'(1)(\mathcal{X}-\mathcal{Y})+\tilde{M}(q)\right)\\ &=_1\quad q\left(g'(1)\mathcal{X}+(1-g'(1))\mathcal{Y}\right)+\tilde{\tilde{M}}(q),\end{aligned} \tag{54}$$

$=_1$ 其中我们应用近似 $\log(1+x)\approx x$，并注意到项 $M(q)$ 满足以下条件：

$$\lim_{q\to 0}\frac{\left\|\tilde{\tilde{M}}(q)\right\|_\rho}{|q|}=0. \tag{55}$$

然后，通过根据公式 (54) 设置 $q\to 0$ 来证明该定理。 □

4.2 李-特罗特公式的应用

在本节中，我们将应用定理 2 中推导出的李-特罗特公式，为 TMI[1] 中的函数构建二元随机张量均值的新尾界。

定理3 设 $0 < q \leq 1/2$、 g 是定义在 $(0,\infty)$ 上具有 pmi性质的一阶可微函数，且 $g(1)$ 等于 1， $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 是两个厄米随机张量，则有以下尾界：

$$\Pr\left(\exp\left((m+g'(1))\log\mathcal{X}+(1-m-g'(1))\log\mathcal{Y}\right)\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathcal{X}^q\#_{x^m g(x)}\mathcal{Y}^q\right)^{r/q}\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{56}$$

其中 $r \geq 1$。

设 $0 < q \leq 1/2$、 f 是定义在 $(0,\infty)$ 上具有 pmd 性质的一阶可微函数，且 $f(1)$ 等于 1， $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 是两个厄米随机张量，则有以下尾界：

$$\Pr\left(\left(\mathcal{X}^q\#_{x^m f(x)}\mathcal{Y}_q\right)^{1/q}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left((m+f'(1))\log\mathcal{X}+(1-m-f'(1))\log\mathcal{Y}\right)^r\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{57}$$

其中 $r \geq 1$。

证明：根据定理 2 的证明以及条件 $0 < q \leq 1/2$，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_{x^m g(x)}\mathcal{Y}^q\preceq\mathcal{I}, \tag{58}$$

这等价于以下形式

$$\left(\mathcal{X}^p\#_{x^m g(x)}\mathcal{Y}^p\right)^{1/p}\preceq\left(\mathcal{X}^q\#_{x^m g(x)}\mathcal{Y}^q\right)^{1/q}, \tag{59}$$

其中 $0 < p \leq q/2$。令 $p \to 0$ 并在式 (59) 中应用定理 2，可得

$$\exp\left((m+g'(1))\log\mathcal{X}+(1-m-g'(1))\log\mathcal{Y}\right)\preceq\left(\mathcal{X}^q\#_{x^m g(x)}\mathcal{Y}^q\right)^{1/q}. \tag{60}$$

将引理 3 应用于式 (60)，可得式 (56)。

根据推论1的证明以及条件 $0 < q \leq 1/2$，我们有

$$\mathcal{X}^q\#_{x^m f(x)}\mathcal{Y}^q\succeq\mathcal{I}, \tag{61}$$

这等价于以下形式

$$\left(\mathcal{X}^p\#_{x^m f(x)}\mathcal{Y}^p\right)^{1/p}\succeq\left(\mathcal{X}^q\#_{x^m f(x)}\mathcal{Y}^q\right)^{1/q}, \tag{62}$$

其中 $0 < p \leq q/2$。取 $p \to 0$ 并将定理 2 应用于公式 (62)，可得 e

$$\exp\left((m+f'(1))\log\mathcal{X}+(1-m-f'(1))\log\mathcal{Y}\right)\succeq\left(\mathcal{X}^q\#_{x^m f(x)}\mathcal{Y}^q\right)^{1/q}. \tag{63}$$

将引理 3 应用于式 (60)，即可得到式 (57)。 □

5 L¨oewner 与二元随机张量均值的主序（含不可逆张量）

5.1 随机张量拓扑（RTT）下的极限方法

此前的讨论均基于具有正定性质的张量。本节将通过极限运算，运用随机张量拓扑（RTT）的概念，从正定张量处理半正定张量。关于 RTT 的概念由以下定义给出。

定义1 若满足下式，则称随机张量序列 $\mathcal{X}_n$ 在 RTT 意义下关于张量范数 $\|\cdot\|_\rho$ 收敛到随机张量 $\mathcal{X}$：

$$\mathbb{E}\left(\|\mathcal{X}_n\|_\rho\right) \quad exists, \tag{64}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\|\mathcal{X}_n-\mathcal{X}\|_\rho\right)=0. \tag{65}$$

我们用记号 $\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}_n=\mathcal{X}$ 表示随机张量 $\mathcal{X}_n$ 在 RTT 意义下关于张量范数 $\|\cdot\|_\rho$ 收敛到随机张量 $\mathcal{X}$。

给定两个半正定张量 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$，我们将在 RTT 下通过 $\lim_{\epsilon\to0^+}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\,\#_g\,(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})$ 确定项 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}$。我们先给出若干引理，以供后续定理证明使用。

引理8 对于 任意函数 $g>0$，令 $h(x)\overset{定义}{=}xg(x^{-1})$，我们有以下等价条件。 :

(i) $g\in$ 算子凸函数类 and $g(0^+)=0$;

(ii) $g(0^+)=0$且连接函数 g 是联合张量凸的，即，

$$\left(\lambda\mathcal{X}_1+\overline{\lambda}\mathcal{X}_2\right)\#_g\left(\lambda\mathcal{Y}_1+\overline{\lambda}\mathcal{Y}_2\right)\preceq\lambda\mathcal{X}_1\#_g\mathcal{Y}_1+\overline{\lambda}\mathcal{X}_2\#_g\mathcal{Y}_2, \tag{66}$$

其中 $\overline{\lambda}\overset{定义}{=}1-\lambda$，且 $\mathcal{X}_1$、$\mathcal{X}_2$、$\mathcal{Y}_1$、$\mathcal{Y}_2\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 均为正定张量;

(iii) 对于任意正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，运算 $\#_g$ 是右张量递减的，即，

$$\mathcal{O}\prec\mathcal{Y}_1\preceq\mathcal{Y}_2\Rightarrow\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}_1\succeq\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}_2; \tag{67}$$

(iv) 给定 a 对于正定张量 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，运算 $\#_h$ 是左张量递减的，即 .,

$$\mathcal{O}\prec\mathcal{X}_1\preceq\mathcal{X}_2\Rightarrow\mathcal{X}_1\#_h\mathcal{Y}\succeq\mathcal{X}_2\#_h\mathcal{Y}. \tag{68}$$

证明：将张量视为算子，可在 [16] 中的定理 2.2 找到 (i) 与 (ii) 的等价性。由于 $h\overset{定义}{=}xg(x^{-1})$，根据.....可得 (i) 与 (iv) 等价

$$h(\mathcal{X})=\mathcal{Y}^{-1/2}\star_N\left((\mathcal{Y}^{1/2}\star_N\mathcal{X}\star_N\mathcal{Y}^{1/2})\#_h\mathcal{Y}\right)\star_N\mathcal{Y}^{-1/2}. \tag{69}$$

最后，等价性 （iii）与（iv）之间的差异源于以下关系，因为 $h(x)\overset{定义为}{=}xg(x^{-1})$:

$$\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\quad=\quad\mathcal{Y}\#_g\mathcal{X}. \tag{70}$$

□

给定两个半正定张量 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$，且对于某个 $c>0$，有 $\mathcal{X}\preceq c\mathcal{Y}$，则存在唯一的正定张量，记作 $\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，使得 $\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})(\mathcal{I}-\mathrm{PR}(\mathcal{Y}))=\mathcal{O}$ 且 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}^{1/2}\star_N\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\star_N\mathcal{Y}^{1/2}$，其中 $\mathrm{PR}(\mathcal{Y})$ 是到 $\mathcal{Y}$ 的值域闭包上的正交投影。注意，当 $\mathcal{Y}\succ\mathcal{O}$时，$\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 将简化为 $\mathcal{Y}^{-1/2}\star_N\mathcal{X}\star_N\mathcal{Y}^{-1/2}$。下一个引理将证明 $\lim_{\epsilon\to0^+}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})$ 的存在性。

引理 9 令 $g\in$ 属于算子凸函数类 TC，则我们有以下等价条件：

（i）对于任意满足 $\mathcal{X}\preceq c\mathcal{Y}$的半正定随机张量 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$（其中 $c>0$），我们有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) \;=\; \mathcal{Y}^{1/2}\star_N g(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\star_N\mathcal{Y}^{1/2}; \tag{71}$$

（ii） $g(0^+)<\infty$。

Pr证明：对于方向（i）$\Rightarrow$（ii），令 $\mathcal{X}=x\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{Y}=y\mathcal{I}$ 满足 x、$y\geq0$，我们有 e

$$(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) \;=\; (y+\epsilon)g\left(\frac{x+\epsilon}{y+\epsilon}\right)\mathcal{I}. \tag{72}$$

若令 $x=0$ 和 $y=1$，则有 $(1+\epsilon)\;g\;(\frac{\epsilon}{1+\epsilon})\;\to g\;(0^+)$，其中 $\epsilon\to0^+$。

现在证明方向（ii）$\Rightarrow$（i）。根据 [17], 中的定理 8.1，我们可以将一个张量（算子）凸函数 $g(x)$ 表示为

$$g(x) \;=\; a_0+a_1x+a_2x^2+\int_0^\infty\left(\frac{x}{1+s}-\frac{x}{x+s}\right)d\mu(s), \tag{73}$$

其中 a_0、$a_1\in\mathbb{R}$、$a_2>0$ 和 $\mu(s)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上、满足以下条件的正测度。

$$\int_0^\infty(1+s)^{-2}<\infty. \tag{74}$$

通过设置

$$\psi_s(x)\stackrel{\text{def}}{=}\left(\frac{x}{1+s}-\frac{x}{x+s}\right), \tag{75}$$

我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) \;=\;& a_0(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})+a_1(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})+a_2(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{x^2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})\\ &+\int_0^\infty(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{\psi_s(x)}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})\,d\mu(s).\end{aligned} \tag{76}$$

根据假设 $\mathcal{X}\preceq c\mathcal{Y}$ 对于任意 $c>0$，我们有 $\frac{cx+\epsilon}{x+\epsilon}\leq\tilde{c}$ 对所有 $x\geq0$ 及任意 $\epsilon>0$ 均成立，其中 $\tilde{c}=c$ 当 $c\geq1$ 时成立，且 $\tilde{c}=1$ 当 $c<1$ 时成立。然后，我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2} \;&\preceq\; (\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}(c\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}\\ &=\; (c\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\\ &\preceq\; \tilde{c}\mathcal{I},\end{aligned} \tag{77}$$

此外，对于函数 $\psi_s(x)$，我们还有以下界限：

$$\frac{-1}{(1+s)^2}\leq\psi_s(x)\leq\psi_s(\tilde{c}), \tag{78}$$

其中 $x \in [0, \tilde{c}]$。那么，我们有

$$\frac{-1}{(1+s)^2}\mathcal{I} \preceq \psi_s((\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}) \preceq \psi_s(\tilde{c})\mathcal{I}. \tag{79}$$

若 $\epsilon \in (0,1)$，公式（79）给出以下界

$$\frac{-(\lambda_{\max}(\mathcal{Y})+1)}{(1+s)^2}\mathcal{I} \preceq \psi_s((\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}) \preceq \psi_s(\tilde{c})(\lambda_{\max}(\mathcal{Y})+1)\mathcal{I}. \tag{80}$$

假设以下两个极限在 RTT 意义下存在：

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{x^2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) \;=\; \mathcal{Y}^{1/2}\eta^2(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2}, \tag{81}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{\psi_s(x)}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) \;=\; \mathcal{Y}^{1/2}\psi_s(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}; \tag{82}$$

那么，根据公式（80）、$\int_0^\infty (1+s)^{-2}d\mu(s) < \infty$、$\int_0^\infty \psi_s(\tilde{c})d\mu(s) < \infty$以及勒贝格收敛定理，我们得到

$$\int_0^\infty \mathcal{Y}^{1/2}\psi_s(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}d\mu(s) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^\infty (\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{\psi_s(x)}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})d\mu(s). \tag{83}$$

因此，根据公式（76）、（81）和（83），我们通过以下方式证明陈述 (i)：

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) &= a_0\mathcal{Y}+a_1\mathcal{X}+a_2\mathcal{Y}^{1/2}\eta^2(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2} \\
&\quad + \int_0^\infty \mathcal{Y}^{1/2}\psi_s(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}d\mu(s) \\
&= \mathcal{Y}^{1/2}\Big(a_0\mathcal{I}+a_1\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})+a_2\eta^2(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \\
&\quad + \int_0^\infty \psi_s(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))d\mu(s)\Big)\mathcal{Y}^{1/2} \\
&= \mathcal{Y}^{1/2}g(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{84}$$

我们的最后任务是证明公式（81）和公式（82）。由于 $\mathcal{X} \preceq c\mathcal{Y}$，我们可以取一个有界张量$\mathcal{U}$，满足 $\|\mathcal{U}\|_\rho \le c^{1/2}$，使得 $\mathcal{U}(\mathcal{I}-\mathrm{PR}(\mathcal{Y})) = \mathcal{O}$且 $\mathcal{X}^{1/2} = \mathcal{U}\mathcal{Y}^{1/2} = \mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{U}_{\mathrm{H}}$。于是，我们有$\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathcal{U}^{\mathrm{H}}\mathcal{U}$，并且可以将张量 $\mathcal{X}$表示为 $\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，如下所示：

$$\mathcal{X} \;=\; \mathcal{Y}^{1/2}\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2}. \tag{85}$$

为了证明公式（81），我们将按如下方式展开 $(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{x^2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})$：

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{x^2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) &= (\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I}) \\
&= \underbrace{\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\mathcal{X}}_{A} + \underbrace{\epsilon\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}}_{B} \\
&\quad + \underbrace{\epsilon(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\mathcal{X}}_{C} + \underbrace{\epsilon^2(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\mathcal{I}}_{D}.
\end{aligned} \tag{86}$$

对于对应于 B 的项，若对 $\mathcal{Y}=\int^{\lambda_{\max}(\mathcal{Y})}{}_0 \quad \lambda dE(\lambda)$ 进行谱分解，则有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|\epsilon\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\right\|_\rho\right] &=_1 \mathbb{E}\left[\left\|\epsilon\mathcal{Y}^{1/2}\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\right\|_\rho\right]\\ &\le c\mathbb{E}\left[\lambda_{\max}(\mathcal{Y}^{1/2})\left\|\epsilon\mathcal{Y}^{1/2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\right\|_\rho\right]\\ &\le c\mathbb{E}\left[\lambda_{\max}(\mathcal{Y}^{1/2})\int_0^{\lambda_{\max}(\mathcal{Y})}\frac{\epsilon\lambda^{1/2}}{\lambda+\epsilon}d\left\|E(\lambda)\right\|_\rho\right], \end{aligned} \tag{87}$$

其中 $=_1$ 来自公式（85）。由公式（87），由于 $\frac{\epsilon\lambda^{1/2}}{\lambda+\epsilon}\to 0$ 当 $\epsilon\to 0^+$ 时，我们有 $\left\|\epsilon\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\right\|_\rho\to 0$，当 $\epsilon\to 0^+$ 时亦然，即 $\epsilon\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\to\mathcal{O}$ 在 RTT 中，当 $\epsilon\to 0^+$ 时亦然。利用公式（87）的类似论证可表明，公式（86）中的项 C 和 D 在 RTT 中，当 $\epsilon\to 0^+$ 时趋于零张量。

对于对应于 A 的项，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\mathcal{X} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\mathcal{X}^{1/2}\mathcal{U}\mathcal{Y}^{1/2}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{U}^{\mathrm{H}}\mathcal{X}^{1/2}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\mathcal{X}^{1/2}\mathcal{U}\mathcal{Y}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\mathcal{U}^{\mathrm{H}}\mathcal{X}^{1/2}\\ &=_1 \mathcal{X}^{1/2}\mathcal{U}\mathrm{PR}(\mathcal{Y})\mathcal{U}^{\mathrm{H}}\mathcal{X}^{1/2}\\ &= \mathcal{Y}^{1/2}\mathcal{U}^{\mathrm{H}}\mathcal{U}\mathcal{U}^{\mathrm{H}}\mathcal{U}\mathcal{Y}^{1/2}\\ &= \mathcal{Y}^{1/2}\eta^2(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2}\end{aligned} \tag{88}$$

其中 $=_1$ 来自 RTT 中 $\mathcal{Y}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1}\to\mathrm{PR}(\mathcal{Y})$，当 $\epsilon\to 0^+$ 时。因此，我们证明了公式（81）。

为证明公式（82），我们对 $(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{\psi_s(x)}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})$ 作如下展开，其中 s

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{\psi_s(x)}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) &= \underbrace{\frac{\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I}}{1+s}}_{A}-\\ &\quad \underbrace{\left[(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}+s\mathcal{I}\right]^{-1}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I}),}_{B}\end{aligned} \tag{89}$$

并在式 (89) 中取 $\epsilon\to 0$，我们声称式 (89) 变为:

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_{\psi_s(x)}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) &= \mathcal{Y}^{1/2}\frac{\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{1+s}\mathcal{Y}^{1/2}-\mathcal{Y}^{1/2}(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})+s\mathcal{I})^{-1}\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2}\\ &= \mathcal{Y}^{1/2}\psi_s(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}.\end{aligned} \tag{90}$$

公式（89）中 A 部分的上界可由公式（85）得到 $\underbrace{\mathcal{Y}^{1/2}\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})}_{1+s}\mathcal{Y}^{1/2,)}$。对于公式（89）中的 B 部分，我们考虑

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\left\|\left((\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})^{-1/2}+s\mathcal{I}\right)^{-1}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})-(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})+s\mathcal{I})^{-1}\mathcal{X}\right\|_\rho\right]\\ &=_1\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\left\|(\eta(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I},\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})+s\mathcal{I})^{-1}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})-(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})+s\mathcal{I})^{-1}\mathcal{X}\right\|_\rho\right]\\ &\le_2\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{\epsilon\left\|\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\right\|_\rho+\epsilon s\left\|\mathcal{I}\right\|_\rho+\left\|\mathcal{X}\right\|_\rho\left\|\eta(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I},\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})-\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\right\|_\rho}{(s+\lambda_{\min}(\eta(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I},\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})))(s+\lambda_{\min}(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})))\left\|\mathcal{I}\right\|_\rho}\right]=_3 0\end{aligned} \tag{91}$$

其中，$=_1$ 来自公式（85），$\leq_2$ 来自范数 $\|\cdot\|_\rho$ 的三角不等式以及范数 $(\eta(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I},\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})+s\mathcal{I})(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})+s\mathcal{I})$ 的下界，$=_3$ 来自分子中的每一项都有界。由公式（91）可知，取 $\epsilon\to 0$ 时，公式（89）中的 B 部分为 $(\mathcal{Y}^{-1/2}\mathcal{X}\mathcal{Y}^{-1/2}+s\mathcal{I})^{-1}\mathcal{X}$。因此，我们证明了公式（82）。□

我们准备给出以下定理，利用正定张量序列来描述二元张量均值的极限方法。

定理 4 设函数 $g\in$ 属于算子凸函数类 TC，定义在 $(0,\infty)$ 上，且 $g(0^+)<\infty$；另设两个半正定随机张量 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，满足 $\mathcal{X}\preceq c\mathcal{Y}$ 几乎处处成立，其中某个 $c>0$。若正定张量序列 $\{\mathcal{A}_n\}$ 满足 $\|\mathcal{A}_n\|_\rho\to 0$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}\#_g(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\mathcal{X}\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})\\ &= \mathcal{Y}^{1/2}\star_N g(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\star_N\mathcal{Y}^{1/2}.\end{aligned}\tag{92}$$

证明：由引理 9 可得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathcal{X}\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}) = \mathcal{Y}^{1/2}g(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}.\tag{93}$$

对于项 $\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}\#_g(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)$，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}\#_g(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n) &= \lim_{n\to\infty}(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{1/2}g((\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{-1/2}\mathcal{X}(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{-1/2})(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{1/2}\\ &=_1 \lim_{n\to\infty}(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{1/2}g((\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{-1/2}\mathcal{Y}^{1/2}\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathcal{Y}^{1/2}(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{-1/2})\\ &\quad\star_N(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{1/2}\\ &=_2 \mathcal{Y}^{1/2}g(\mathrm{PR}(\mathcal{Y})\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y})\mathrm{PR}(\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2}=\mathcal{Y}^{1/2}g(\eta(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\mathcal{Y}^{1/2},\end{aligned}\tag{94}$$

其中 $=_1$ 来源于公式（85），而对于 $=_2$，我们使用以下事实：

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n &\to \mathcal{Y},\ \text{in RTT as } \mathcal{A}_n\to\mathcal{O}\\ (\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{-1/2}\mathcal{Y}^{1/2} &\to \mathrm{PR}(\mathcal{Y}),\ \text{in RTT as } \mathcal{A}_n\to\mathcal{O}\\ \mathcal{Y}^{1/2}(\mathcal{Y}+\mathcal{A}_n)^{-1/2} &\to \mathrm{PR}(\mathcal{Y}).\ \text{in RTT as } \mathcal{A}_n\to\mathcal{O}\end{aligned}\tag{95}$$

□

对于张量对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，根据张量 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的序关系，我们定义以下两个集合。

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\preceq} &\overset{\text{def}}{=} \{(\mathcal{X},\mathcal{Y}):\mathcal{X}\preceq c\mathcal{Y}\text{ for some }c>0\},\\ \mathfrak{S}_{\succeq} &\overset{\text{def}}{=} \{(\mathcal{X},\mathcal{Y}):c\mathcal{X}\succeq\mathcal{Y}\text{ for some }c>0\}.\end{aligned}\tag{96}$$

那么，我们有如下关于集合 $\mathfrak{S}_{\preceq}$ 和 $\mathfrak{S}_{\succeq}$ 上联合张量凸性的定理 .

定理 5 若 $g\in$ 属于算子凸函数类，且 $g(0^+)=0$，则 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})\to\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}$ 在 $\mathfrak{S}_{\preceq}$ 上具有联合张量凸性。另一方面，若 $g'(\infty)<\infty$，则 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})\to\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}$ 在 $\mathfrak{S}_{\succeq}$ 上具有联合张量凸性。

证明：对于 $g(0^+)<\infty$ 的情形，根据 [16] 中的引理 9 和定理 2.2，$(\mathcal{X},\mathcal{Y})\to\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}$ 在 $\mathfrak{S}_{\preceq}$ 上具有联合张量凸性。

定义 $\tilde{g}(x)\overset{\text{定义}}{=}xg(x^{-1})$ 后，我们得到以下关系 $\tilde{g}'(\infty)=g(0^+)$ 和 $\mathcal{X}\#_{\tilde{g}}\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\#_g\mathcal{X}$。将引理 9 和定理 4 应用于 $\tilde{g}(x)$，可得以下等价条件：

(i) 对于任意半正定张量 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$，若存在某个 $c>0$ 使得 $c\mathcal{X}\succeq\mathcal{Y}$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^{+}}\left(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}\right)\#_{\tilde{g}}\left(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I}\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathcal{Y}\#_{\tilde{g}}(\mathcal{X}+\mathcal{A}_n)\\ &= \mathcal{X}^{1/2}\star_N\tilde{g}(\eta(\mathcal{Y},\mathcal{X}))\star_N\mathcal{X}^{1/2},\end{aligned}\tag{97}$$

其中 $\left\|\mathcal{A}_n\right\|_{\rho}\to\mathcal{O}$ 对于 $n\to\infty$;

(ii) $\tilde{g}'(\infty)<\infty$.

对于 $g'(\infty)<\infty$ 的情形，$(\mathcal{X},\mathcal{Y})\to\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}$ 根据上述等价条件以及 [16] 中的定理 2.2，在 $\mathfrak{S}_{\succeq}$ 上是联合张量凸的，因为 $\tilde{g}(x)$ 是凸函数。□

5.2 G从第一部分对二元随机张量均值尾界的推广

通过假设 $\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\preceq c\mathcal{X}^{2^{k-1}}$对于 $k=1$、2、$\cdots$、n，根据关于半正定张量 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$的公式（85）的构造，我们可以将 $\mathcal{Z}_{k-1}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\mathcal{X}^{-2^{k-2}}$表示为 $\eta(\mathcal{Y}^{2^{k-1}},\mathcal{X}^{2^{k-1}})$。因此，我们可以基于第5.1节所讨论的极限方法，通过允许使用半正定随机张量，扩展第一部分中给出的那些定理和推论。

$\acute{}$当指标上限小于指标下限时，我们将广义乘积运算定义为 $\prod_{k=1}^{n}$:

$$\acute{\prod_{k=1}^{n}}a_i\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}a_i,\ \text{if } n\geq 1;\\ 1,\ \text{if } n=0.\end{cases}\tag{98}$$

其中，a_i 是第 i 个实数。

下面的定理是我们第一部分工作中定理 4 的推广。

定理 6 设有两个随机半正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$、$\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$。若 $q=2^nq_0\geq 1$，且 $1\leq q_0\leq 2$ 和 $n\in\mathbb{N}$，则我们假设 $\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\preceq c\mathcal{X}^{2^{k-1}}$ 对于 $k=1$、2、$\cdots$、n 成立，并定义 $\mathcal{Z}_{k-1}\overset{\text{定义}}{=}\eta(\mathcal{Y}^{2^{k-1}},\ \mathcal{X}^{2^{k-1}})$。我们还假设 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$ 几乎处处成立。结合 $f\in\text{TMI}^{1},$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \operatorname{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)^{p}\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\tag{99}$$

and

$$\Pr\left(\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \operatorname{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\tag{100}$$

其中，$\Psi_{lower}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 和 $\Psi_{upper}(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是两个由下式定义的正数

$$\begin{aligned}\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right) &\overset{def}{=} \lambda_{\min}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod_{k=1}^{n}}\lambda_{\min}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^{2}\right)\right)\\ \Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right) &\overset{def}{=} \lambda_{\max}\left(f^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\right)\acute{\prod_{k=1}^{n}}\lambda_{\max}\left(f^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)f\left(\mathcal{Z}_{k-1}^{2}\right)\right).\end{aligned}\tag{101}$$

$\acute{}$注意，$\acute{\prod}$ 的定义见式 (98)。

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \operatorname{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^{q}\right)\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)^{p}\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right)\tag{102}$$

and

$$\Pr\left(\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^{q}\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \operatorname{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right).\tag{103}$$

其中 $p\geq 1$。

以下定理是我们第一部分工作中定理 5 的扩展。

定理 7 给定两个随机半正定张量 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，以及一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$，若 $q=2^n q_0\geq 1$ 且 $1\leq q_0\leq 2$，我们设定 $\mathcal{Z}_{k-1}\triangleq\eta(\mathcal{Y}^{2^{k-1}},\mathcal{X}^{2^{k-1}})$，并假设对于$k=1$、2、$\cdots$、$n$，$\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\preceq c\mathcal{X}^{2^{k-1}}$。我们假设 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $h\in\mathrm{TMD}^{1,}$，则有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\quad(104)$$

and

$$\Pr\left(\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\quad(105)$$

其中，$\Phi_{lower}(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 和 $\Phi_{upper}(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是由以下公式定义的两个正数。

$$\begin{aligned}\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)&\overset{def}{=}\lambda_{\min}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\min}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right)\\\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)&\overset{def}{=}\lambda_{\max}\left(h^{-q_0}\left(\mathcal{Z}_n\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_n^{q_0}\right)\right)\acute{\prod}_{k=1}^{n}\lambda_{\max}\left(h^{-2}\left(\mathcal{Z}_{k-1}\right)h\left(\mathcal{Z}_{k-1}^2\right)\right).\end{aligned}\quad(106)$$

$\acute{}$请注意，$\acute{\prod}$ 的定义由公式（98）给出。

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right),\quad(107)$$

and

$$\Pr\left(\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\not\preceq\mathcal{C}\right)\ \leq\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right).\quad(108)$$

其中 $p\geq 1$。

以下定理是我们第一部分工作中定理 6 的推广。

定理 8 给定一个正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$、一个半正定张量 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，我们将设定 $\mathcal{Z}_{def}=\eta^{-1}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$，并假设 $\mathcal{Y}\preceq c\mathcal{X}$且张量 $\eta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 可逆。若 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $p,q\geq 1$，则对于 $g\in$算子凸函数类^{1,}，我们有。

$$\Pr\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{K}_1\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}_2\mathcal{I}\right)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right)\quad(109)$$

其中 K_1 和 K_2 设为

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_1&\overset{def}{=}\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\\\mathrm{K}_2&\overset{def}{=}\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right).\end{aligned}\quad(110)$$

此外，如果 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$ 几乎处处，则有

$$\Pr\left(\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}_2^{-1}\mathcal{I}\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q)^p\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right)\quad(111)$$

以下推论是我们第一部分工作中推论 3 的扩展。

推论2 给定两个随机半正定张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$, $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$，若 $q=2^nq_0\geq 1$ 满足 $1\leq q_0\leq 2$，我们通过假设 $\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\preceq c\mathcal{X}^{2^{k-1}}$ 对于 $k=1,2,\cdots,n$，定义 $\mathcal{Z}_{k-1}=\eta(\mathcal{Y}^{2^{k-1}},\mathcal{X}^{2^{k-1}})$。我们假设 $\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $f\in$TMI[1]。那么，我们有

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right),\tag{112}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{lower}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Psi_{upper}\left(q,f,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right).\tag{113}$$

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right),\tag{114}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_f\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(f^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(f\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_f\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right).\tag{115}$$

以下推论是对我们第一部分工作中推论4的扩展。

推论 3 给定两个随机半正定张量 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个正定确定性张量 $\mathcal{C}$，若 $q=2^nq_0\geq 1$ 且 $1\leq q_0\leq 2$，我们通过假设 $\mathcal{Y}^{2^{k-1}}\preceq c\mathcal{X}^{2^{k-1}}$ 对于$k=1$、2、$\cdots$、n，将 $\mathcal{Z}_{k-1}=\eta(\mathcal{Y}^{2^{k-1}},\mathcal{X}^{2^{k-1}})$ 设为。我们假设 $\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎处处成立，且 $h\in$TMD[1]。那么，我们有

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right),\tag{116}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{lower}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\Phi_{upper}\left(q,h,\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right).\tag{117}$$

对于 $0<q\leq 1$，我们有

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right),\tag{118}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\min}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\max}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_h\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)$$
$$\leq\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\lambda_{\max}\left(h^{-q}\left(\mathcal{Z}_0\right)\left(h\left(\mathcal{Z}_0^q\right)\right)\lambda_{\min}^{q-1}\left(\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\mathcal{X}\#_h\mathcal{Y}\right)\geq\kappa\right).\tag{119}$$

下面的推论是我们第一部分工作中推论5的推广。

推论4 给定一个正定随机张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$ 和一个半正定随机张量 $\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，以及一个正定确定性张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，假设 $\mathcal{Y}\preceq c\mathcal{X}$ 且张量 $\eta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 可逆，我们将设定 $\mathcal{Z}=\eta^{-1}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$。设 $g\in$ 为算子凸函数类 [1]，若 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\preceq\mathcal{I}$ 几乎处处成立且 $q\geq 1$，则有

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)$$
$$\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg),\tag{120}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\leq\Pr\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),q-1\right)\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)$$
$$\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)\mathrm{K}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg)\tag{121}$$

此外，如果 $\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\succeq\mathcal{I}$ 几乎处处成立，则我们有

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\geq\Pr\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)$$
$$\mathrm{K}^{-1}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg),\tag{122}$$

and

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mathcal{X}^q\#_g\mathcal{Y}^q\right)\geq\kappa\right)\geq\Pr\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(\lambda_{\min}^{1-q}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\lambda_{\max}\left(g^{-q}(\mathcal{Z})g(\mathcal{Z}^q)\right)$$
$$\mathrm{K}^{-1}\left(\lambda_{\max}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathcal{X}\right),2q-1\right)\mathcal{I}\Big)\geq\kappa\Bigg).\tag{123}$$

6 应用：张量数据处理

在本节中，我们将在两种张量数据处理方法下推导二元张量均值的两个新尾界：数据融合和线性变换。

在定理9中，我们将研究在进行张量均值运算之前通过加法进行张量数据融合，即 $(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)\#_g(\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2)$，与进行张量均值运算之后，即 $\mathcal{X}_1\#_g\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_2\#_g\mathcal{Y}_2$，二者之间的关系。

定理9（张量均值融合不等式）给定 g 是定义在 $(0,\infty)$ 上的算子凸函数，且满足 $g(0^+)<\infty$，以及四个随机半正定张量 $\mathcal{X}_1$、$\mathcal{Y}_1$、$\mathcal{X}_2$、$\mathcal{Y}_2\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，其中 $(\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1)$、$(\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2)\in\mathfrak{S}_{\preceq}$，则有

$$(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)\#_g(\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2)\preceq\mathcal{X}_1\#_g\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_2\#_g\mathcal{Y}_2, \tag{124}$$

此外，给定一个正定张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，有

$$\Pr\left((\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)\#_g(\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2)\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[(\mathcal{X}_1\#_g\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_2\#_g\mathcal{Y}_2)^q\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{125}$$

其中 $q\geq 1$。

证明：
由引理8和定理 5，可得

$$(\lambda\mathcal{X}_1+\overline{\lambda}\mathcal{X}_2)\#_g(\lambda\mathcal{Y}_1+\overline{\lambda}\mathcal{Y}_2)\preceq\lambda\mathcal{X}_1\#_g\mathcal{Y}_1+\overline{\lambda}\mathcal{X}_2\#_g\mathcal{Y}_2, \tag{126}$$

于是，令 $\lambda=1/2$，并利用性质 $(\lambda\mathcal{X})\#_g(\lambda\mathcal{Y})=\lambda(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y})$，其中 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 为任意张量，可得式 (124)。将引理 3 应用于式 (124)，即可得到式 (125)。

注意，式 (124) 和式 (125) 对于 $(\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1)$、$(\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2)\in\mathfrak{S}_{\succeq}$ 也成立。 □

二元张量均值不等式的另一个重要尾界，是张量数据在线性变换下的单调性。

定理 10（线性变换下的张量均值不等式）设 g 是 $(0,\infty)$ 上的算子凸函数，满足 $g(0^+)<\infty$；给定两个随机半正定张量 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，满足 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})\in\mathfrak{S}_{\preceq}$，以及张量之间的线性变换 $\mathfrak{L}$，则有

$$\mathfrak{L}\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\ \succeq\ \mathfrak{L}(\mathcal{X})\#_g\mathfrak{L}(\mathcal{Y}), \tag{127}$$

并且，给定一个正定张量 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$，我们有

$$\Pr\left(\mathfrak{L}(\mathcal{X})\#_g\mathfrak{L}(\mathcal{Y})\not\preceq\mathcal{C}\right)\leq\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left[\mathfrak{L}^q\left(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}\right)\right]\star_N\mathcal{C}^{-1}\right), \tag{128}$$

其中 $q\geq 1$。

证明：我们先假设两个随机张量 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 均为正定张量。于是，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathcal{X}\#_g\mathcal{Y}) &= \mathfrak{L}^{1/2}(\mathcal{Y})\left[\mathfrak{L}^{-1/2}(\mathcal{Y})\mathfrak{L}\left(\mathcal{Y}^{1/2}g(\mathcal{Y}^{-1/2}\mathcal{X}\mathcal{Y}^{-1/2})\mathcal{Y}^{1/2}\right)\mathfrak{L}^{-1/2}(\mathcal{Y})\right]\mathfrak{L}^{1/2}(\mathcal{Y})\\ &\succeq_1 \mathfrak{L}^{1/2}(\mathcal{Y})g\left(\mathfrak{L}^{-1/2}(\mathcal{Y})\mathfrak{L}\left(\mathcal{X}\right)\mathfrak{L}^{-1/2}(\mathcal{Y})\right)\mathfrak{L}^{1/2}(\mathcal{Y})\\ &= \mathfrak{L}(\mathcal{X})\#_g\mathfrak{L}(\mathcal{Y}),\end{aligned} \tag{129}$$

其中 $\succeq_1$ 来自算子詹森不等式。

若两个随机张量 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 均为半正定张量，则可分别用正定张量近似 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，即 $(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})$ 和 $(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})$。因此，我们有

$$\mathfrak{L}\left((\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I})\right)\ \succeq\ \mathfrak{L}(\mathcal{X}+\epsilon\mathcal{I})\#_g\mathfrak{L}(\mathcal{Y}+\epsilon\mathcal{I}), \tag{130}$$

并且，由引理 9 可得等式 (127)。

式 (128) 是通过将引理 3 应用于式 (129) 得到的。 □

参考文献

[1] T. Ando 和 F. Hiai，《对数主序与互补型 Golden–Thompson 不等式》，《线性代数及其应用》，第197卷，第113–131页，1994年。[2] F. Hiai，《与 Rényi 散度相关的对数主序》，《线性代数及其应用》，第563卷，第255–276页，2019年。[3] F. Hiai 和 M. Mosonyi，《不同的量子 f-散度与量子操作的可逆性》，《数学物理评论》，第29卷，第07期，文章编号1750023，2017年。[4] S. Y. Chang 和 H.-C. Wu，《张量维纳滤波器》，《IEEE信号处理汇刊》，第70卷，第410–422页，2022年。[5] S. Y. Chang，《随机双张量积分》，arXiv预印本，arXiv:2204.01927，2022年。[6] S. Y. Chang 和 Y. Wei，《T-积张量——第二部分：随机T-积张量之和的尾界》，《计算与应用数学》，第41卷，第3期，文章编号99，2022年。[7] ——，《T-平方张量——第一部分：不等式》，《计算与应用数学》，第41卷，第1期，文章编号62，2022年。[8] ——，《随机张量求和的一般尾界：主序方法》，《计算与应用数学杂志》，第416卷，文章编号114533，2022年。[9] S. Y. Chang 和 H.-C. Wu，《张量卡尔曼滤波器及其应用》，《IEEE知识与数据工程汇刊》，2022年。[10] ——，《张量量化：高维数据压缩》，《IEEE视频技术电路与系统汇刊》，第32卷，第8期，第5566–5580页，2022年。[11] E. Ahn、S. Kim 和 Y. Lim，《扩展的 Lie–Trotter公式及其应用》，《线性代数及其应用》，第427卷，第2–3期，第190–196页，2007年。[12] F. Hiai、Y. Seo 和 S. Wada，《算子均值与算子透视函数的 Ando–Hiai型不等式》，《国际数学杂志》，第31卷，第01期，文章编号2050007，2020年。[13] A. Cichocki，《大数据处理时代：通过张量网络和张量分解实现的新方法》，arXiv预印本，arXiv:1403.2048，2014年。[14] C. Zhang、D. Florêncio 和 P. A. Chou，《图信号处理——一种概率框架》，微软研究院，美国华盛顿州雷德蒙德，技术报告 MSR-TR-2015-31，2015年。[15]T. Ando，《范数比较 $|||f(a)-f(b)|||$和 $|||f(|a-b|)|||$》，《数学杂志》，第197卷，第3期，第403–409页，1988年。[16] A. Ebadian、I. Nikoufar 和 M. Eshaghi Gordji，《矩阵凸函数的观点》，《美国国家科学院院刊》，第108卷，第18期，第7313–7314页，2011年。[17] F. Hiai、M. Mosonyi、D. Petz 和 C. B´eny，《量子 f-散度与纠错》，《数学物理评论》，第23卷，第07期，第691–747页，2011年。