arXiv:2305.03307v1 [cs.CC] 5 May 2023

拟阵非破圈基的优化与计数

Dorna Abdolazimi*、Kasper Lindberg †和 Shayan Oveis Gharan‡

华盛顿大学

2023年5月8日

摘要

给定一个拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$，以及其元素 E 上的一个全序，断圈是指移除最小元素后的回路，而 NBC 独立集是 $\mathcal{I}$ 中不含断圈的独立集。任意拟阵 M 的 NBC 独立集构成一个称为断圈复形的单纯复形，它一直是组合学领域深入研究的对象。近期，Adiprasito、Huh 和 Katz 证明，任意断圈复形的面数构成一个对数凹序列，从而证实了 Rota 的一个长期猜想。

我们研究一般拟阵上的 NBC 基的计数与优化问题。我们发现它与独立集复形存在若干根本差异：例如，我们证明，寻找拟阵的最大权无破圈基是 NP 困难的，或者说，拟阵的无破圈基的凸包存在长度任意大的边。我们还通过证明，对于某些拟阵族，在经过特定条件化后，计算无破圈基的数量是 NP 困难的，给出了证据表明，拟阵的无破圈基空间上的自然下上游走可能无法快速混合。

1 引言

拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$ 由有限底集 E 和 E 的一个子集族 $\mathcal{I}$ 组成，称为独立集，并满足：

向下封闭性： 若 $S \subseteq T$ 且 $T \in \mathcal{I}$，则 $S \in \mathcal{I}$。

交换公理： 如果 $S, T \in \mathcal{I}$ 且 $|T| > |S|$，那么存在一个元素 $i \in T \setminus S$ 使得 $S \cup \{i\} \in \mathcal{I}$。

集合 $S \subseteq E$ 的秩是包含于 S 中的最大独立集的大小。M 的所有极大独立集，称为 M 的基，大小都相同，记为 r，称为 M 的秩。

几十年来，拟阵上的抽样与计数问题一直吸引着众多研究人员的关注，并应用于可靠性 [CP89], 市场流动性 [RGM20], 等领域。A

*dornaa@cs.washington.edu。研究工作得到美国国家科学基金会资助（项目编号 CCF-2203541）以及美国空军科学研究办公室资助（项目编号 FA9550-20-1-0212）。

†whet@cs.washington.edu。研究工作得到美国国家科学基金会资助（项目编号 CCF-2203541）。

‡shayan@cs.washington.edu。研究工作得到美国国家科学基金会资助（项目编号 CCF-2203541）、美国空军科学研究办公室资助（项目编号 FA9550-20-1-0212）以及西蒙斯研究员资助。

该领域近期的一项突破证明，拟阵基上的下上游走会快速收敛至（均匀）平稳分布，并可用于计算拟阵的基数 [Ana+19； CGM20], 解决了 Mihail 和 Vazirani 在 1989 [MV89]中提出的猜想。下上游走很容易描述：从任意一个基 B 开始，并反复执行以下两个步骤：

1. 均匀随机选择一个元素 $i \in B$ 并将其删除。
2. 在所有包含 $B \setminus \{i\}$ 的（ M 的）基中，均匀随机地选取一个。 .

自那以后，令研究人员困惑的一个核心问题是如何对拟阵 [BCT10] 的非断圈（回路）基（NBC 基）进行抽样。集合 $C \subseteq E$ 是一个回路，当且仅当 $C \setminus \{e\} \in \mathcal{I}$ 对任意 $e \in C$ 均成立。断圈（相对于全序 $\mathcal{O}$）是一个集合 $C \setminus \{e\}$，其中 $C \subseteq E$ 是一个回路，且 e 是相对于 $\mathcal{O}$ 而言 C 中最小的元素。若独立集 $S \subseteq E$ 不包含任何断圈，则称其为非断圈独立集（NBC 独立集）。NBC 独立集与若干有趣的组合对象密切相关。图拟阵中大小为 k 的 NBC 独立集的数量，等于底层图的色多项式的 $(n-1) - k$ 次项系数的绝对值，其中 n 是顶点的数量。由此可推得以下事实：

事实 1.1. 以下关于不同类别拟阵的 *NBC* 基/独立集数量的事实众所周知。

- 图拟阵的所有 *NBC* 独立集的数量等于图的无环定向数量 *[Sta73]*。
- 余图拟阵的所有 *NBC* 独立集的数量等于图的强连通定向数量（例如参见 *[GL19]*）。
- 图的非破圈生成树的数量等于相对于唯一源顶点的停车函数数量 *[BCT10]*
- 由向量 $v_1, \ldots, v_n$ 构成的线性拟阵的 *NBC* 独立集数量，等于正交超平面的交所确定的区域数量（例如参见 *[Sta07]*）。

我们强调，尽管拟阵的 NBC 独立集/基集合取决于底层全序 $\mathcal{O}$，但对于任意 k，秩为 $0 \leq k \leq r$ 的 NBC 独立集数量在 $\mathcal{O}$ [Sta07]下保持不变。据我们所知，截至目前，上述计数问题均没有已知的可计算有效算法。

给定一个拟阵 M 及其任意全序 $\mathcal{O}$，可以类似地仅在 M的 NBC 基上运行下上游走。不难看出，这条马尔可夫链是不可约的，并且会收敛到均匀平稳分布。继 [Ana+19] 的工作之后，有人猜想，任意拟阵的无破圈基上的下上游走都能快速混合 [1]。

猜想 1.2。 对于任意拟阵 M，以及 M的元素的任意全序 $\mathcal{O}$，拟阵的 *NBC* 基上的下上游走可在多项式时间内混合。

事实证明，如果上述猜想成立，它将推广[Ana+19]的结果，因为有以下事实。

[1]事实上，这一猜想在近期的多个研讨会上被提出，作为一个开放问题， 加州大学圣巴巴拉分校关于马尔可夫链最优混合的新工具：谱独立性与熵衰减的研讨会，以及 Simon 的多项式几何研讨会

事实 1.3 ([Bry77]). 对于任意拟阵 M，都可以构造另一个拟阵 M'，并为其指定一个序 $\mathcal{O}$，且仅多出一个元素，使得 M 的基与 M' 的非破圈基之间存在双射。

此外，如果上述猜想成立，那么由于拟阵在截断运算下是封闭的，还可以计算 M的所有 NBC 独立集的数量，从而解决事实 1.1中的所有开放问题。

首先，Adiprasito、Huh 和 Katz 的杰出工作为这些问题有望得到有效解决提供了一个令人信服的理由 [AHK18]：他们证明了 Rota 猜想，表明任意拟阵的断圈复形（定义见下文）的面数构成一个对数凹序列。作为对比，众所周知，任意图的匹配多项式的系数构成一个对数凹序列，而 Jerrum-Sinclair 的经典算法[JS89] 提供了一种高效算法来计算任意图的匹配数（尽管迄今为止，我们仍不知道如何高效计算一般图的 **完美** 匹配数）。

1.1 背景

现有对拟阵基上的下上游走混合时间的分析，关键依赖于高维单纯复形理论 [Ana+19; KO18]，该理论在过去几年中已在计算机科学和数学的多个领域找到许多引人入胜的应用[GK23]。

单纯复形。 有限底集 U 上的单纯复形 X 是一个向下闭的集合系统，即如果 $\tau \in X$ 和 $\sigma \subset \tau \subseteq U$，那么 $\sigma \in X$。X 的元素称为面，极大面称为极大面。如果 X 是一个纯 d 维复形，即其所有极大面的大小均为 d，我们称其为纯复形。我们用 $X(d)$ 表示极大面的集合。加权单纯复形 (X, π) 是一个单纯复形 X，并在其极大面上配备一个概率分布 π。d-维复形 (X, π) 的极大面上的全局游走（下上游走）$P^{\vee}$ 定义如下：从一个极大面 τ 出发，通过以下两个步骤转移到下一个极大面 τ'：

1. 均匀随机选取一个 $x \in \tau$，并从 τ 中移除 x。
2. 以与 $\pi(\tau')$ 成正比的概率，随机选取一个包含 $\tau \setminus \{x\}$ 的极大面 τ'。

断圈复形。 举一个具体的例子：事实证明，任意拟阵 M（相对于任意序 $\mathcal{O}$）的 NBC 独立集构成一个称为**纯** 单纯复形的对象，即断圈复形。我们将此复形记为 BC$(M, \mathcal{O})$。其纯性表述如下。

Fa命题 1.4. 对于每个 *NBC* 独立集 I，都存在一个 *NBC* 基 B，使得 $I \subseteq B$.

复形 $BC(M, \mathcal{O})$ 的面数构成序列 $n_0, n_1, \ldots, n_r$，其中 n_i 是秩为 i 的 NBC 独立集的数量。如上所述，这个序列在 $\mathcal{O}$ 下是不变的。赋予该复形的极大面均匀分布后，其下上游走与我们先前介绍的 NBC 基上的下上游走相同。

面 $\tau \in X$ 的链接是单纯复形 $X_\tau := \{\sigma \setminus \tau : \sigma \in X, \sigma \supset \tau\}$。对于每个面 τ，我们将 X_τ 的极大面上的诱导分布 π_τ 定义为

$$\pi_\tau(\eta) = \Pr_{\sigma \sim \pi}[\sigma \supset \eta \mid \sigma \supset \tau]. \tag{1}$$

局部游走。 对于大小为 $0 \le k \le d-2$ 的任意面 τ， τ 的局部游走是定义在 X_τ 的底集上的马尔可夫链，其转移概率矩阵 P_τ 定义为

$$P_\tau(x,y) = \frac{1}{d-k-1} \Pr_{\sigma \sim \pi_\tau}[y \in \sigma \mid \sigma \supset \tau \cup \{x\}]. \tag{2}$$

对于底集 X_τ 中不同的 x， y。以下定理表明，可以通过界定复形的局部谱扩张，来界定单纯复形上全局游走 $P^\vee$ 的谱扩张。

定理 *1.5*（局部到整体定理 [*DK17*；*KO18*；*Dik*+18；*AL*20]）。若一个 d 维加权单纯复形（X， π）满足：对于每个大小为 $0 \le k \le d-2$ 的面 τ， P_τ 的第二大特征值至多为 γ_k，即 $\lambda_2(P_\tau) \le \gamma_k$，则称其为（$\gamma_0$，…， γ_{d-2}）-局部谱扩张体。

给定一个带权单纯复形 (X, π_d)，它是一个 $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{d-2})$-局部谱扩张体，则从 π 采样的向下-向上游走的谱隙下界为

$$1 - \lambda_2(P^\vee) \ge \frac{1}{d} \prod_{j=0}^{d-2} (1-\gamma_j)$$

为了证明下上游走在任意拟阵的基上都能快速混合， [Ana+19] 证明了任意拟阵的独立集复形 M 是一个$(0, 0, \ldots\ldots, 0)$-局部谱扩张体。在此基础上，证明猜想 1.2 的一种自然方法是证明，任意拟阵的断圈复形 M 其秩为 r 且对于任意全序都是一个（γ_0，……， γ_{r-2}）-局部谱扩张体，对于 $\gamma_i \le \frac{O(1)}{r-i}$。

猜想1.6。对于任意秩为 M 的拟阵 r 以及任意序 $\mathcal{O}$， M 的断圈复形是一个$(\gamma_0, \ldots, \gamma_{r-2})$-局部谱扩张体，其中某个 $\gamma_i \le \frac{O(1)}{r-i}$

1.2 我们的结果

我们的主要结果是以一种非常强的形式否定猜想1.6，具体来说，是针对（截断的）图拟阵这一类。

定理 1.7。存在一个无限的（截断的）图拟阵序列 $M_1, M_2, \ldots$ 及其序$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$，使得对于每个 $n \ge 1$， M_n 有 $poly(n)$ 个元素，并且存在一个面 τ，它属于 $X = \mathrm{BC}(M_n, \mathcal{O})$ 的断圈复形，其中在链接 X_τ 的极大面上进行的下上游走的谱隙至多为 $n^{-\Omega(n)}$。

事实上，我们甚至证明了一个更强的结论

定理1.8。 给定一个拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$、一个全序 $\mathcal{O}$ 和一个集合 $S \subseteq E$，除非 *RP=NP*，否则不存在用于计算包含 S的 M 的 *NBC* 基数量的全多项式时间随机近似方案。

尽管该定理并未推翻 猜想 1.2，但它表明，人们可能需要采用不同的技术（或者可能需要使用不同的链）来对拟阵的无破圈基进行采样或计数。事实上，人们甚至可能需要为下上游走采样拟阵的普通基的性能给出不同的证明。

为补充我们的主要结果，我们还证明了，与在拟阵的基上进行优化不同，在拟阵的无破圈基上进行优化是 NP 困难的。此外，除非 NP= RP，否则不存在用于计算拟阵在外部场约束下所有无破圈基的权重之和的全多项式时间随机近似方案，而对拟阵的基进行相同计算则有全多项式时间随机近似方案。

定理 1.9。 给定一个包含 $|E| = n$ 个元素的拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$、任意全序 $\mathcal{O}$ 以及权重 $w_1, \ldots, w_n$，求出 M 的最大权 *NBC* 基是 *NP* 困难的，其中 *NBC* 基 B 的权重为 $\sum_{i \in B} w_i$。

定理 1.10。 给定一个拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$，其含有 $|E| = n$ 个元素、一个全序 $\mathcal{O}$，以及权重 $\{1 \leq \lambda_e \leq O(n)\}_{e \in E}$，除非 *NP* = *RP*，否则不存在用于计算施加于 *NBC* 独立集均匀分布的 λ-外场配分函数的 *FPRAS*，即不存在用于计算以下内容的 *FPRAS*:

$$\sum_{B \text{ NBC Base}} \prod_{e \in B} \lambda_e.$$

众所周知，一个 0/1-多面体（即某个子集的凸包 $S \subseteq \{0,1\}^n$）的所有顶点具有相同的汉明重量 r，且边的 ℓ_2 长度为$\sqrt{2}$，当且仅当该多面体是秩为 r [Gel+87] 的拟阵基多面体。此外，假设 Mihail-Vazirani 猜想成立，则存在一种高效算法，可从边长为常数的 0/1-多面体中均匀随机采样一个顶点 [MV89]。

我们证明，与拟阵不同，NBC 基多面体（即拟阵 M 的所有 NBC 基的示性向量的凸包）具有任意长的边。

定理 1.11。 对于任意 n，存在一个具有 n 个元素的图拟阵 M 和一个全序 $\mathcal{O}$，使得 M 的所有无破圈基的凸包的边长度至少为 $\Omega(\sqrt{n})$。

2 预备知识

给定一个图 $G = (V, E)$，我们将 G 中大小为 i 的独立集数量记为 $i_k(G)$。对于每个集合 $S \subseteq V$，我们定义 $N(S) := \{v \notin S : \exists u \in S, \{u, v\} \in E\}$ 为 G 中 S 的邻居集合。

定义 1（导通率）。 给定一个带权 d-正则图 $G = (V, E, w)$，其权重为 $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，对于 $S \subseteq V$，S 的导通率定义为

$$\phi(S) = \frac{w(S, \overline{S})}{d|S|},$$

其中 $w(S, \overline{S})$ 是割 $(S, \overline{S})$ 中各边权重之和。注意，由于 G 是正则的，每个顶点的加权度均为 d。G 的导通率定义为

$$\phi(G) = \min_{S: |S| \leq |V|/2} \phi(S).$$

给定一个加权图 $G = (V, E, w)$，简单随机游走是如下随机过程：给定 $X_0 = v \in V$，对每个 $u \sim v$，以概率 $\frac{w_{\{u,v\}}}{d_w v}$ () 取值 $X_1 = u$，并令 P 为该游走的转移概率矩阵。

下面的定理广为人知，可由切格不等式的简单方向推出。

定理 2.1。 对于任意正则图 $G = (V, E)$ 以及任意集合 $S \subseteq V$ 和 $|S| \leq |V|/2$

$$\frac{1 - \lambda_2(P)}{2} \leq \phi(G) \leq \phi(S) \leq \frac{|N(S)|}{|S|}$$

其中 $1 - \lambda_2(P)$ 是 G 上简单随机游走的谱隙。

图拟阵 $M=(E,\mathcal{I})$ 是定义在图 $G=(V,E)$ 的边集上的拟阵，其独立集是所有不包含任何圈的边子集。容易验证， M 的回路与 G 的圈相对应。

定义 2 （拟阵截断）。 设 $M=$ （E、 $\mathcal{I}$） 是一个秩为 r 的拟阵。将 M 截断至秩 $r'\leq r$ 会移除所有大小严格大于 r' 的独立集。容易看出，将任意拟阵 M 截断至任意 $r'\leq r$ 后仍然是一个拟阵。

设 M' 是定义在图 G的边上的、秩为 r 的图拟阵的秩 r' 截断。 M'的基对应于具有 r'条边的森林，而 M'的回路是 G 的回路以及大小为 $r'+1$的所有生成森林。

下面关于多胞体的事实可由凸性推出。

事实 2.2。 对于任意具有顶点 v_1、.....、 $v_n\in\mathbb{R}^d$、 $\{v_i,v_j\}$ 的多胞体 $P\subseteq\mathbb{R}^d$， $\{v_i,v_j\}$ 是 P的一条边，当且仅当存在一个权函数 $w\in\mathbb{R}^d$ 使得

$$\langle w,v_i\rangle=\langle w,v_j\rangle>\langle w,v_k\rangle,$$

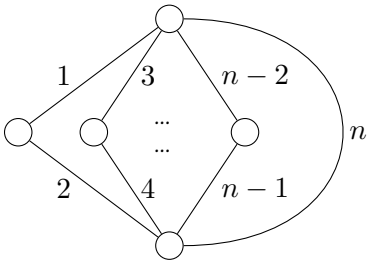
对于任意 $k\neq i$、 j。

3 结果

我们首先证明定理 1.11。

定理 1.11。 对于任意 n，存在一个图拟阵 M，它有 n 个元素，并且存在一个全序 $\mathcal{O}$，使得 M 的所有无破圈基的凸包的边长至少为$\Omega(\sqrt{n})$。

证明。 设 n 为奇数。考虑如下图拟阵 M （有 n 条边），其序$\mathcal{O}$： $1<2<\cdots<n$ 由下图的边定义：



我们证明，对于 $B=\{n\}\cup\{2i-1:\ \ 1\leq i\leq\frac{n-1}{2}\}$ 以及 $B'=\{1\}\cup\{2i:\ \ 1\leq i\leq\frac{n-1}{2}\}$，$\{B,B'\}$在记作 P_M的无破圈拟阵基多胞体中构成一条边。我们定义 $w\in\mathbb{R}^n$，然后利用事实 2.2 证明该结论。设 $w_n=\frac{n+1}{2}$，对于任意 $1\leq i\leq\frac{n-1}{2}$，令 $w_{2i}=1$ 和 $w_{2i-1}=0$。容易验证函数 $\langle w,\mathbf{1}_B\rangle=\langle w,\mathbf{1}_{B'}\rangle=\frac{n+1}{2}$，并且对于所有 NBC 基$B''\neq B,\ B'$均成立。因此 $\{B,B'\}$ 在 P_M中构成一条边。该结论由以下事实可得：$\|\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_{B'}\|_2=\sqrt{n}$。 □

接下来，我们通过从最大独立集问题归约来证明定理 1.9： 给定一个图 $G=(V,\ E)$、一个权函数 $w:\ V\to\mathbb{R}_{\geq 0}$和一个整数 k，判断 G 是否具有权重至少为 k 的独立集。

请注意， G 的独立集与 BC 复形/拟阵的独立集是两个不同的概念。为了完成证明，我们使用以下众所周知的困难性结果。

定理 3.1([Kar72])。最大独立集 是 *NP* 完全问题。

定理 1.9. 给定一个拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$，其中有 $|E| = n$ 个元素、一个任意全序 $\mathcal{O}$ 和权重 $w_1, \ldots, w_n$，求出 M 的最大权 *NBC* 基是 *NP* 困难的，其中 *NBC* 基 B 的权重为 $\sum_{i \in B} w_i$。

证明。我们通过从最大独立集进行归约来证明这一点。设 $G = (V, E)$ 是一个图，顶点权重函数为 $w: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 k 是一个整数。通过先复制 G，然后添加一个新顶点 z 以及对所有 $v \in V$ 添加边 $e_v = \{z, v\}$，从 G 构造一个新图 $G' = (V', E')$。我们定义w': $E' \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，对每个 $v \in V$，令其为 $w'(e_v) = w(v)$；对每个 $e \in E$，令其为 $w'(e) = 0$。此外，考虑 E' 上如下的全序 $\mathcal{O}$：

$$E < \{e_v : v \in V\},$$

其中每个集合内部的序任意选取。设 M 是由 G' 的边定义的图拟阵，我们将考察 BC(M, $\mathcal{O}$) 的基/独立集。

命题 3.2。存在一个权重至少为 k 的 G 独立集，当且仅当存在一个权重至少为 k 的 M *NBC* 基。

我们以直接的方式证明该命题。假设存在一个 G 的独立集 $I \subseteq V$，满足 $w(I) \geq k$，并考虑由 $I' = \{e_v$ 定义的集合 $I' \subseteq E' : v \in I\}$。根据定义，$w'(I') \geq k$。我们论证 I' 不包含任何断圈。反设存在一个断圈 $C \setminus \{e\} \subseteq I'$。由于 C 对应于 G' 中的一个圈，且 $C \setminus \{e\}$ 包含于 I' 中，不难看出，对于某些 v、$v' \in I$，有 $C \setminus \{e\} = \{e_v, e_{v'}\}$，并且 $e = \{v, v'\}$ 是 G 中的一条边。但这与 I 是 G 的独立集这一事实矛盾。因此，I' 是一个 NBC 独立集。由于断圈复形是纯的（见事实 1.4），存在一个包含 I' 的 NBC 基 B，其权重 $w'(B) \geq w'(I') \geq k$。

反过来，假设我们有一个权重为 $w'(k) \geq k$ 的 NBC 基 $B' \subseteq E'$，并通过 $I = \{v$ 定义$I \subseteq V$: $e_v \in B'\}$。由于所有来自 E 的边权重均为零，因此 $w(I) = w'(B') \geq k$。为了说明 I 是 G' 的独立集，注意到如果对于某个 v，$v' \in I$ 存在一条边 $\{v, v'\}$，那么 e_v，$e_{v'} \in B'$，此时根据序 $\mathcal{O}$，$\{e_v, e_{v'}\}$ 构成一个断圈。因此，I 是 G 的独立集，其权重至少为 k。 □

需要注意的是，上述证明成立的关键前提是：序$\mathcal{O}$ 是根据权重谨慎选取的（并且在某种意义上与权重的顺序一致）。

我们可以进一步推广前述构造中的思路，从而论证 定理 1.7。具体做法是构造一个断圈复形，使得对精心选取的某个链接，其下上游走的谱隙小到呈逆指数级。

定理 1.7。存在一个无限序列的（截断）图拟阵 $M_1, M_2, \ldots$，并配有序 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$，使得对于每个 $n \geq 1$，M_n 都含有 *poly*(n) 个元素；并且存在一个面 τ，属于拟阵 $X = \mathrm{BC}(M_n, \mathcal{O})$ 的断圈复形，其中链接 X_τ 的极大面上的下上游走的谱隙至多为 $n^{-\Omega(n)}$。

证明。取完全二分图 $G = K_{n,n} = (A, B, E = A \times B)$，其中 $|A| = |B| = n$。此外，令 $V = A \cup B$。设 $\ell \geq 1$ 为稍后选取的参数，并构造一个新图

$$G' = \big(V' = V \cup \{y, z\} \cup \{z_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}, E' = E \cup \{e_0\} \cup \{e_{v,i}, f_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}\big)$$

其中 $e_0 = \{y, z\}$，$e_{v,\,i} = \{z, z_{v,i}\}$，$f_{v,\,i} = \{z_{v,i}, v\}$ (见 图 1)。作为合理性检查，请注意 $|V| = 2n$且 $|V'| = 2\ell n + 2n + 2$。

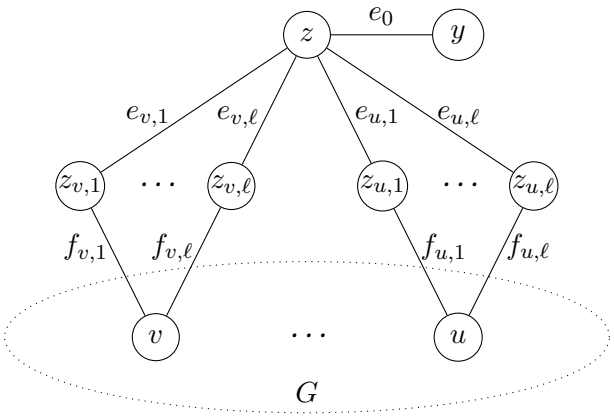


图 1：定理 G' 的证明中的 定理 1.7 和定理1.8的图示，其中 $G = K_{n,n}$ 在前者中是完全二分图，在后者中是♯INDEP-SET-INC(7, 2 19)的一个困难实例。

设 $M = (E', \mathcal{I})$ 为由 G' 截断至秩 $2\ell n + n + 1$ 所定义的图拟阵，即 M 的基是 G' 中恰好包含 $2\ell n + n + 1$ 条边的森林。现在，考虑 E' 上的以下全序 $\mathcal{O}$：

$$e_0 < E < \{e_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\} < \{f_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\},$$

其中 每个集合内的序可以任意选取。此外，令 $X := \mathrm{BC}(M, \mathcal{O})$，并定义

$$\tau = \{e_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}.$$

为简化记号，令 $F_A := \{f_{v,i} : v \in A, i \in [\ell]\}$ 且 $F_B := \{f_{v,i} : v \in B, i \in [\ell]\}$.

命题 3.3. 对于 X_τ 的任意极大面 S，要么 $S \cap F_A = \emptyset$，要么 $S \cap F_B = \emptyset$，

这是因为 G 是一个完全二分图，且 E 中的边小于$e_{v,\ i}$和$f_{u,\ j}$；因此，如果 $S \cap F_A$，$S \cap F_B \neq \emptyset$，那么它就含有一个断圈。

因此，X_τ的极大面集合可以划分为 $2n+1$ 个集合 $(\cup_{i=1}^n \mathcal{S}_{A,i}) \cup (\cup_{i=1}^n \mathcal{S}_{B,i}) \cup \mathcal{S}_0$，其中$\mathcal{S}_{A,i}$ 是所有满足 $|S \cap F_A| = i$的 S 的极大面集合，$\mathcal{S}_{B,i}$ 是所有满足 $|S \cap F_B| = i$的 S 的极大面集合，而 $\mathcal{S}_0$ 是所有满足 $|S \cap (F_A \cup F_B)| = 0$的极大面集合。令 $\mathcal{S}_A := \cup_{i=1}^n \mathcal{S}_{A,i}$，并类似地定义$\mathcal{S}_B$。我们证明 $\frac{|N(\mathcal{S}_A)|}{|\mathcal{S}_A|} \leq n^{-\Omega(n)}$），其中 $N(\mathcal{S}_A)$ 是 $\mathcal{S}_A$ 在 τ的极大面上的下上游走 $P_\tau^\vee$中的邻居集合。不失一般性，我们可以假设 $|\mathcal{S}_A|$ 至多占所有极大面的一半。应用定理2.1，可推出 $1 - \lambda_2(P_\tau^\vee) \leq n^{-\Omega(n)}$。

首先，注意到对于每个极大面 $S \in \mathcal{S}_A$和 $T \in \mathcal{S}_B \setminus \mathcal{S}_{B,1}$，我们得到 $P^\vee(S,T) = 0$，因为 $|S \Delta T| > 2$。因此，$N(\mathcal{S}_A) \subseteq \mathcal{S}_{B,1} \cup \mathcal{S}_0$。首先，注意到$|\mathcal{S}_0| \leq \binom{|E|}{n} \leq n^{2n}$。此外，$|\mathcal{S}_{B,1}| \leq \binom{n}{1}\ell\binom{|E|}{n-1} \leq \ell n^{2n}$。这是因为 $\mathcal{S}_{B,1}$ 中的任意极大面都可以写成某个 $v \in A, i_v \in [\ell]$ 的 $\{f_{v,i_v}\} \cup \{e_0\} \cup K$，以及大小为 $n-1$ 的子集 $K \subseteq E$。最后，$|\mathcal{S}_A| \geq |\mathcal{S}_{A,n}| = \ell^n$。这是因为每一种 $\{i_v\}_{v \in A}$ 的选择都对应于 $\mathcal{S}_{A,n}$ 中的一个集合，而其中的集合形式为 $\{f_{v,i_v} : v \in V\} \cup \{e_0\}$。这些集合都不包含断圈，因为通过截断引入的回路恰好是具有 $2\ell n + n + 2$ 条边的森林。然而，$\{f_{v,i_v} : v \in V\} \cup \{e_0\}$ 的任何真超集都必须包含 e_0，因此考察由该超集引入的回路时，相应的断圈总会移除 e_0。综上，

$$1 - \lambda_2(P_\tau^\vee) \leq \frac{|N(\mathcal{S}_A)|}{|\mathcal{S}_A|} \leq \frac{n^{2n}(1+\ell)}{\ell^n} \underset{\text{assuming } \ell \geq n^3}{\leq} n^{-\Omega(n)}.$$

如我们所愿。

□

我们通过从 INDEP-SET-INC(7, $\frac{2}{19}$) 进行归约来证明 定理 1.10 和 定理1.8，其定义如下。

定义 3 (♯INDEP-SET-INC(7, $\frac{2}{19}$))。 给定一个7-正则图 $G=(V,E)$，它满足 $i_k(G) \leq i_{\lfloor \frac{2|V|}{19} \rfloor}(G)$ 对任意 $k < \lfloor \frac{2|V|}{19} \rfloor$ 均成立，其中 $i_k(G)$ 是 G 中大小为 k 的独立集，求大小为 $\lfloor \frac{2|V|}{19} \rfloor$ 的独立集的数量。

定理 3.4. 除非 NP $=$ RP，否则不存在具有常数近似比的随机算法来解决♯INDEP-SET-INC(7, $\frac{2}{19}$)。

该证明留待附录给出。现在，我们准备证明 定理1.8。证明的大致结构与 定理 1.7 的证明类似，我们将类似的构造应用于那些难以计数独立集的图（而非完全二分图）。

定理1.8。 给定一个拟阵 $M=(E,\mathcal{I})$、一个全序 $\mathcal{O}$ 和一个集合 $S \subseteq E$，除非 *RP=NP*，否则不存在用于计算包含 S的 *NBC* 基数量的全多项式时间随机近似方案（*FPRAS*）。

证明。 为简化记号，令 $\alpha := \frac{2}{19}$。我们通过从 ♯INDEP-SET-INC(7, $\frac{2}{19}$)进行归约来证明。任取一个7- 正则图 $G=(V,E)$，其大小为 $\lfloor \alpha|V| \rfloor$的独立集数量至少等于其大小为 k 的独立集数量，其中任意 $k < \lfloor \alpha|V| \rfloor$均成立。令 $n := |V|$，并令 N 表示图 G中大小为 $\lfloor \alpha n \rfloor$ 的独立集数量。此外，定义 $\ell \geq 1$ 为稍后选取的参数。

现在，构造一个新的图

$$G' = \left(V' = V \cup \{y,z\} \cup \{z_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}, E' = E \cup \{e_0\} \cup \{e_{v,i}, f_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}\right)$$

其中 $e_0 = \{y,z\}$，$e_{v,\,i} = \{z, z_{v,i}\}$，$f_{v,\,i} = \{z_{v,i}, v\}$（参见 图 1）。令 $M = (E', \mathcal{I})$ 为由 G 截断至秩 $\ell n + \lfloor \alpha n \rfloor + 1$所定义的图拟阵，即 M 的基是 G' 中恰有 $\ell n + \lfloor \alpha n \rfloor + 1$ 条边的森林。现在，考虑 $\mathcal{O}$ 在 E'上的如下序：

$$e_0 < E < \{e_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\} < \{f_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\},$$

其中每个集合内部的序可以任意选取。此外，令 $X := \mathrm{BC}(M, \mathcal{O})$，并定义

$$\tau = \{e_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}.$$

我们声称，X_τ 的极大面数至少为 $\ell^{\lfloor \alpha n \rfloor} N$，至多为 $2\ell^{\lfloor \alpha n \rfloor} N$。因此，对 X_τ的极大面数进行 1.5 倍近似，也就是计算包含 τ的 M的无破圈基数，可以得到对 N 的 3 倍近似；N是 G中大小为 $\lfloor \alpha n \rfloor$ 的独立集数。

我们使用以下关键观察：

命题 3.5. 对于 X_τ 的任意极大面 S，$\{v : \exists f_{v,\,i} \in S\}$ 是 G 的一个独立集，并且对于任意 $f_{v,\,i}$、$f_{v,\,j} \in S$，我们有 $i = j$。

反过来，对于任意 $S \subseteq \{f_{v,i} : v \in V, i \in [\ell]\}$，若集合 $\{v : \exists f_{v,\,i} \in S\}$ 是 G 中大小为 $\lfloor \alpha n \rfloor$ 的独立集，且 $f_{v,\,i}, f_{v,\,j} \in S \implies i = j$，则有 $S \cup \{e_0\}$ 是 X_τ 的一个极大面。

证明直接由以下事实得出：E 的边比 $e_{v,\ i}$ 的边更小，而 $f'_{u,\ j}{}^s$ 在 $\mathcal{O}$ 中。根据该断言的第二部分，我们可以写作

$$|X_\tau(\lfloor \alpha n \rfloor + 1)| = \ell^{\lfloor \alpha n \rfloor} N + |\{S \in X_\tau(\lfloor \alpha n \rfloor + 1) : S \cap E \neq \emptyset\}| \geq \ell^{\lfloor \alpha n \rfloor} N. \tag{3}$$

定义 $i_k := i_k(G)$ 为图 G中大小为 k 的独立集数量。根据上述断言的第一部分，我们可以写出：

$$|\{S \in X_\tau(\lfloor \alpha n \rfloor + 1) : S \cap E \neq \emptyset\}| \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n \rfloor - 1} \ell^k \cdot i_k \cdot \binom{|E|}{\lfloor \alpha n \rfloor - k} \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n \rfloor - 1} \ell^k \cdot i_k \cdot |E|^{\lfloor \alpha n \rfloor - k} \tag{4}$$

$$\underset{\text{using } i_k \leq N}{\leq} N|E|^{\lfloor \alpha n \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n \rfloor - 1} (\ell/|E|)^k \tag{5}$$

$$\underset{\text{assuming } \ell \geq 2|E|}{\leq} N|E|^{\lfloor \alpha n \rfloor} (\ell/|E|)^{\lfloor \alpha n \rfloor} \leq N\ell^{\lfloor \alpha n \rfloor} \tag{6}$$

将这些结果与（3）结合起来，即完成证明。 □

定理 1.10. 给定一个拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$，它有 $|E| = n$ 个元素、一个全序 $\mathcal{O}$ 和权重$\{1 \leq \lambda_e \leq O(n)\}_{e \in E}$，除非 ***NP*** = ***RP***，否则不存在用于计算施加于 ***NBC*** 独立集均匀分布的 λ-外场配分函数的全多项式时间随机近似方案；也就是说，不存在用于计算以下量的全多项式时间随机近似方案：

$$\sum_{B \text{ NBC Base}} \prod_{e \in B} \lambda_e.$$

证明。 为简化记号，令 $\alpha := \frac{2}{19}$。证明与通过归约自 #INDEP-SET-INC(7, 2 19) 证明定理1.8 的方法类似。任取一个 7-正则图 $G = (V, E)$，其有$n := |V|$ 个顶点，并且对于任意 $k < \lfloor \alpha |V| \rfloor$，其大小为 $\lfloor \alpha |V| \rfloor$ 的独立集数量至少等于大小为 k 的独立集数量。构造一个新图

$$G' = (V' = V \cup \{y, z\}, E' = E \cup \{e_0 = \{y, z\}\} \cup \{e_v = \{v, z\} : v \in V\})$$

令 $M = (E',\ \mathcal{I})$ 为由 G' 截断至秩 $\lfloor \alpha n \rfloor + 1$ 得到的图拟阵，并考虑 E'' 上的如下序 $\mathcal{O}$：

$$e_0 < E < \{e_v : v \in V\},$$

其中，通常每个集合内部的序是任意的。定义权重 λ： $E' \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如下：

$$\lambda_e = \begin{cases} \ell & \text{if } e = e_v \text{ for some } v \in V, \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases},$$

对于稍后选定的某个 ℓ。我们论证

$$\lambda^{\lfloor \alpha n \rfloor} N \leq \sum_B \prod_{e \in B} \lambda_e \leq 2\lambda^{\lfloor \alpha n \rfloor} N.$$

其中，此处（以及下文）的求和是对 M 的 NBC 基上的 B 进行的，因此配分函数（即中间的量）的 1.5-近似是 N 的 3-近似。与前一个定理类似，我们有如下断言。

断言 3.6。 对于 M 的任意 ***NBC*** 基 B，都有 $\{v :\ e_v \in B\}$ 是 G 的独立集。反之，对于任意大小为 $|I| = \lfloor \alpha n \rfloor$ 的 G 的独立集 I，$\{e_0\} \cup \{e_v :\ v \in I\}$ 是 M 的 ***NBC*** 基。

So,

$$\sum_B \prod_{e\in B} \lambda_e = \sum_{B:B\cap E\neq\emptyset} \prod_{e\in B} \lambda_e + \sum_{B:B\cap E=\emptyset} \prod_{e\in B} \lambda_e \tag{7}$$
$$= \sum_{B:B\cap E\neq\emptyset} \prod_{e\in B} \lambda_e + \ell^{\lfloor \alpha n\rfloor} |\{S\subseteq V : S \text{ independent set of } G, |S| = \lfloor \alpha n\rfloor\}|$$

定义 i_k 为图 G 中大小为 k 的独立集的数量。我们有

$$\sum_{B:B\cap E\neq\emptyset} \prod_{e\in B} \lambda_e \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n\rfloor -1} \ell^k i_k \binom{|E|}{\lfloor \alpha n\rfloor - k} \underset{\substack{\text{using } i_k\leq N,\\ \text{assuming } \ell\geq 2|E|}}{\leq} \ell^{\lfloor \alpha n\rfloor} N$$

其中，最后一个不等式可由与式（4）中相同的计算得到。 □

参考文献

[AHK18] Karim Adiprasito、June Huh 和 Eric Katz。《组合几何的霍奇理论》。2018年。arXiv：1511.02888 [math.CO]（引自第3页）。[AL20] Vedat Levi Alev 和 Lap Chi Lau。“高阶随机游走的改进分析及其应用”。载于：第52届 ACM 计算理论年会论文集（STOC）。2020年（引自第4页）。[Ana+19] Nima Anari、Kuikui Liu、Shayan Oveis Gharan 和 Cynthia Vinzant。“对数凹多项式 II：高维游走与拟阵基计数的全多项式时间随机近似方案”。载于：第51届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集。2019年，第1–12页（引自第2–4页）。[BCT10] Brian Benson、Deeparnab Chakrabarty 和 Prasad Tetali。《停车函数、无环定向与生成树》。2010年。arXiv：0801.1114 [math.CO]（引自第2页）。[Bry77] Tom Brylawski。“断回路复形”。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 234.2（1977），第417–433页（引自第3页）。[CGM20] Mary Cryan、Heng Guo 和 Giorgos Mousa。《强对数凹分布的修正对数 Sobolev 不等式》。2020年。arXiv：1903.06081 [math.PR]（引自第2页）。[CP89] Charles J Colbourn 和 William R Pulleyblank。“拟阵 Steiner 问题、Tutte 多项式与网络可靠性”。载于：Journal of Combinatorial Theory, Series B 47.1（1989年），第20–31页。ISSN：0095-8956。DOI：https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90062-2（引自第1页）。[Dik+18] Yotam Dikstein、Irit Dinur、Yuval Filmus 和 Prahladh Harsha。“高维扩张器上的布尔函数分析”。载于：近似、随机化与组合优化：算法与技术（APPROX/RANDOM 2018）。第116卷。Leibniz 国际信息学会议录（LIPIcs）。2018年，38:1–38:20。ISBN：978-3-95977-085-9（引自第4页）。[DK17] I. Dinur 和 T. Kaufman。“高维扩张器蕴含一致性扩张器”。载于：2017 IEEE 第58届计算机科学基础年会（FOCS）。2017年，第974–985页（引自第4页）。[DP21] Ewan Davies 和 Will Perkins。“有界度图中给定大小的独立集的近似计数”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2102.04984（2021年）（引自第13页）。

[Gel+87] I.M Gelfand、R.M Goresky、R.D MacPherson 和 V.V Serganova。“组合几何、凸多面体与舒伯特胞腔”。载于：Advances in Mathematics 63.3（1987年），第301–316页。ISSN：0001-8708。DOI：https://doi.org/10.1016/0001-8708(87) 90059-4（引自第5页）。[GK23] Roy Gotlib 和 Tali Kaufman。《进无可进，唯有向高：关于高维扩张器的观点》。2023年。arXiv：2304.10106 [math.CO]（引自第3页）。[GL19] Emeric Gioan 和 Michel Las Vergnas。“图的活跃双射”。载于：Advances in Applied Mathematics 104（2019年），第165–236页。ISSN：0196-8858。DOI：https://doi.org/10.1016/j.aam.2018.11.001（引自第2页）。[G ˇSV16] Andreas Galanis、Daniel ˇStefankovi ˇc 和 Eric Vigoda。“反铁磁 Ising 模型与硬核模型的配分函数不可近似性”。载于：Combinatorics, Probability and Computing 25.4（2016年），第500–559页（引自第13页）。[JS89] Mark Jerrum 和 Alistair Sinclair。“永久式的近似计算”。载于：SIAM Journal on Computing 18.6（1989年），第1149–1178页。DOI：10.1137/0218077。电子印本：https://doi.org/10.1137/0218077（引自第3页）。[Kar72] Richard M. Karp。“组合问题之间的可约性”。载于：《计算复杂性：计算复杂性专题研讨会论文集》，研讨会于1972年3月20–22日在纽约州约克镇高地的 IBM Thomas J. Watson 研究中心举行，由美国海军研究办公室数学项目、IBM World Trade Corporation 和 IBM 研究院数学科学部赞助。编者：Raymond E. Miller、James W. Thatcher 和 Jean D. Bohlinger。波士顿，马萨诸塞州：Springer US，1972年，第85–103页。ISBN：978-1-4684-2001-2。DOI：10.1007/978-1-4684-2001-2_9（引自第7页）。[KO18] Tali Kaufman 和 Izhar Oppenheim。“高阶随机游走：超越谱隙”。载于：APPROX/RANDOM。2018年，47:1–47:17（引自第3、4页）。[MV89] Milena Mihail 和 Umesh Vazirani。“关于 0-1 多胞体的扩张性”。载于：预印本 3461（1989年）（引自第2、5页）。[RGM20] Geoffrey Ramseyer、Ashish Goel 和 David Mazi`eres。“受限代理人的信贷网络流动性”。载于：2020年万维网大会论文集。ACM，2020年4月。DOI：10.1145/3366423.3380276（引自第1页）。[Sly10] Allan Sly。“唯一性阈值处的计算转变”。载于：2010 IEEE 第51届计算机科学基础年会。IEEE。2010年，第287–296页（引自第13页）。[SS14] Allan Sly 和 Nike Sun。“d 正则图上双自旋模型的计数”。载于：Annals of Probability 42.6（2014年），第2383–2416页（引自第13页）。[Sta07] Richard P. Stanley。“超平面配置导论”。载于：2007年（引自第2页）。[Sta73] Richard P. Stanley。“图的无环定向”。载于：Discrete Mathematics 5.2（1973年），第171–178页。ISSN：0012-365X。DOI：https://doi.org/10.1016/0012-365X(73) 90108-8（引自第2页）。

定理3.4的证明

本节证明定理 3.4。我们通过归约来证明：当逸度高于临界阈值时，计算 Hardcore 模型配分函数的问题是困难的。定义 $\sharp\mathrm{HC}(\Delta, \lambda)$ 如下：给定一个 Δ-正则图 $G=(V, E)$，计算配分函数$Z_G(\lambda) = \sum_I \lambda^{|I|}$，其中求和遍历 G 的独立集族 $I \subseteq V$。临界阈值定义为 $\lambda_c(\Delta) := \frac{(\Delta-1)^{\Delta-1}}{(\Delta-2)^{\Delta}}$。

定理 A.1 ([Sly10; SS14; GŠV16])。对任意固定的 $\epsilon > 0$、整数 $\Delta \geq 3$ 和$\lambda > \lambda_c(\Delta)$，除非 *NP=RP*，否则对任意 $\lambda > \lambda_c(\Delta)$，都不存在多项式时间算法来近似$\sharp\mathrm{HC}(\Delta, \lambda)$，使其误差不超过 $1+\epsilon$ 乘法因子。

我们给出一种多项式时间算法：给定 $e^{\pm\epsilon/2}$-近似算法来处理 $\sharp\text{INDEP-SET-INC}(7, \frac{2}{19})$(参见 定义 3)，即可对 $\sharp\mathrm{HC}(7, \frac{2}{3})$进行近似，误差至多为 $e^{\pm\epsilon}$-乘法误差。由于 $\frac{2}{3} > \lambda_c(7) = \frac{6^6}{5^7} \geq 0.6$，这就完成子 定理 3.4的证明。我们的归约是对[DP21]中定理 16 的一种修改。

定理 A.2。存在一种多项式时间算法，对于任意给定的 $\epsilon \leq 1$，满足以下性质：

1. 给定问题 $\sharp\mathrm{HC}(7, \frac{2}{3})$ 的一个实例 $G=(V, E)$，该算法构造问题 $\sharp\text{INDEP-SET-INC}(7, \frac{2}{19})$ 的一个实例 $G'=(V', E')$，其规模关于$|G|$为多项式规模。*2.* 给定 G' 中大小为 $\lfloor \frac{2|V'|}{19} \rfloor$ 的独立集数量的 $e^{\pm\epsilon/2}$-乘法近似，可在多项式时间内计算出 $Z_G(\frac{2}{3})$ 的 $e^{\pm\epsilon}$-近似。

证明。给定一个 7-正则图 $G=(V, E)$，我们将 G' 定义为 G 与 r 个完全图 K_8 的副本的不交并，其中 $n=|V|$，而 $c>1$ 将在后文选定。为简化记号，令 $N := |V'| = n + 8r$, $\alpha := \frac{2}{19}$, $\lambda := \frac{2}{3}$。只需证明 G'是 $\sharp\text{INDEP-SET-INC}(7, \frac{2}{19})$ 的一个实例，并且

$$e^{-\epsilon/2} \frac{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(G')}{\binom{r}{\lfloor \alpha N \rfloor} 8^{\lfloor \alpha N \rfloor}} \leq Z_G(\lambda) \leq e^{\epsilon/2} \frac{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(G')}{\binom{r}{\lfloor \alpha N \rfloor} 8^{\lfloor \alpha N \rfloor}}, \tag{8}$$

其中，按惯例，$i_k(G)$ 表示 G 中大小为 k 的独立集数量，并且

$$\binom{r}{\lfloor \alpha N \rfloor} 8^{\lfloor \alpha N \rfloor} = i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(rK_8).$$

这里，rK_8 是一个简写，表示由 r 个 K_8 的副本构成的不交并图。我们首先证明 式（8）成立。注意

$$i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(G') = \sum_{j=0}^{n} i_j(G) i_{\lfloor \alpha N \rfloor - j}(rK_8) = i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(rK_8) \sum_{j=0}^{n} i_j(G) \frac{i_{\lfloor \alpha N \rfloor - j}(rK_8)}{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(rK_8)}.$$

因此，要证明式 (8)，只需证明对于每个 $1 \leq j \leq n$,

$$e^{-\epsilon/2} \cdot \frac{i_{\lfloor \alpha N \rfloor - j}(rK_8)}{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(rK_8)} \leq \lambda^j \leq e^{\epsilon/2} \cdot \frac{i_{\lfloor \alpha N \rfloor - j}(rK_8)}{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(rK_8)}. \tag{9}$$

我们可以写成

$$\frac{i_{\lfloor \alpha N \rfloor - j}(rK_8)}{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(rK_8)} = \frac{\binom{r}{\lfloor \alpha N \rfloor - j} 8^{\lfloor \alpha N \rfloor - j}}{\binom{r}{\lfloor \alpha N \rfloor} 8^{\lfloor \alpha N \rfloor}} = \frac{1}{8^j} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lfloor \alpha N \rfloor - i}{r - \lfloor \alpha N \rfloor + j - i}. \tag{10}$$

为证明上界，首先注意到

$$\frac{\alpha N}{r - \alpha N + j} \underset{\alpha N \geq 8\alpha r}{\geq} \frac{8\alpha r}{r(1-8\alpha) + n} \underset{\substack{n=\sqrt{\epsilon r}/c \\ \alpha = 2/19}}{=} \frac{16}{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{19\sqrt{\epsilon}}{3c\sqrt{r}}} \right). \tag{11}$$

这意味着 $\frac{\alpha N}{r - \alpha N + j} \geq 1$。因此，对于每个 $i < r - \lfloor \alpha N \rfloor + j$，$\frac{\alpha N}{r - \alpha N + j} \leq \frac{\lfloor \alpha N \rfloor - i}{r - \lfloor \alpha N \rfloor + j - i}$。所以，

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^j} \cdot \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lfloor \alpha N \rfloor - i}{r - \lfloor \alpha N \rfloor + j - i} &\geq \frac{1}{8^j} \cdot \left(\frac{\alpha N}{r - \alpha N + j} \right)^j \\ &\underset{\substack{Eq.\ (11) \\ j \leq n = \sqrt{\epsilon r}/c}}{\geq} \frac{1}{8^j} \cdot (\tfrac{16}{3})^j \left(\frac{1}{1 + \frac{19\sqrt{\epsilon}}{3c\sqrt{r}}} \right)^{\sqrt{\epsilon r}/c} \geq (\tfrac{2}{3})^j e^{-\epsilon/2} = \lambda^j e^{-\epsilon/2}, \end{aligned}$$

当其足够大时 $c > 1$。将其与式（10）结合，我们得到式（9）中的上界。为证明下界，注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^j} \cdot \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lfloor \alpha N \rfloor - i}{r - \lfloor \alpha N \rfloor + j - i} &\underset{j - i \geq 0}{\leq} \frac{1}{8^j} \cdot \left(\frac{\lfloor \alpha N \rfloor}{r - \lfloor \alpha N \rfloor} \right)^j \underset{\lfloor \alpha N \rfloor = \lfloor \frac{16r}{19} + \frac{2\sqrt{\epsilon r}}{19c} \rfloor}{\leq} \frac{1}{8^j} \cdot \left(\frac{\frac{16r}{19}(1 + \frac{\sqrt{\epsilon}}{8c\sqrt{r}})}{\frac{3r}{19}(1 - \frac{2\sqrt{\epsilon}}{3c\sqrt{r}})} \right)^j \\ &\leq (\tfrac{2}{3})^j e^{\epsilon/2} = \lambda^j \cdot e^{\epsilon/2}, \end{aligned}$$

当其足够大时 $c > 1$。将其与式（10）以及式（9）中的下界结合，即可得到（8）。

剩下需要证明的是，G' 是 ♯INDEP-SET-INC(7, 2 19) 的一个实例，即对于任意 $k < \lfloor \alpha N \rfloor$，$i_k(G') \leq i_{\lfloor \alpha N \rfloor}(G')$。对于任意 $k < \lfloor \alpha N \rfloor$，以及原图 G中的任意独立集 S，令 $T_{S,k}$表示 G' 中所有大小为 k 且与 G 的顶点的交为 S的独立集的集合。只需证明存在一个常数 n_0，使得当 $n \geq n_0$ 时，对于 G 的每个独立集 $S \subseteq V$ 以及 $k < \lfloor \alpha N \rfloor$，均有 $|T_{S,k}| \leq |T'_{S,\lfloor \alpha N \rfloor}|$。我们证明一个更强的结论：存在一个常数 n_0，使得当 $n \geq n_0$时，对于任意固定的独立集 $S \subseteq V$，$k|$ 作为 k 的函数对所有 $k \leq \lfloor \alpha N \rfloor$均递增。只需证明，对于任意$|S| \leq k \leq \alpha N$，$\frac{|T_{S\,k}|}{|T_S}$ 、$_{k-1|} \geq 1$。注意到 $|T_{S,k}| = \binom{r}{k-|S|} 8^{k-|S|}$。因此我们有

$$\frac{|T_{S,k}|}{|T_{S,k-1}|} = \frac{\binom{r}{k-|S|} 8^{k-|S|}}{\binom{r}{k-1-|S|} 8^{k-1-|S|}} = 8 \cdot \frac{r - k + |S| + 1}{k - |S|} \geq 8 \cdot \frac{r-k}{k} \geq 8 \frac{\frac{3r}{19} - n}{\frac{16r}{19} + n},$$

其中，最后一个不等式来自以下事实：$k \leq \frac{2N}{19} = \frac{2}{19}(8r + n) \leq \frac{16r}{19} + n$。但由于 $r = \frac{c^2 n^2}{\epsilon}$，存在一个常数 n_0使得对于 $n \geq n_0$，我们有 $\frac{\frac{3r}{19} - n}{\frac{16r}{19} + n} \geq \frac{1}{8}$。这表明 $\frac{|T_{S\,k}|}{|T_S} {}_{,,k-1|} \geq 1$，从而完成证明。

□