arXiv:2305.03309v1 [math.AG] 5 May 2023

¨亚纯分层双曲分支中的泰希米勒曲线

¨Martin Möller 和 Scott Mullane，附录作者为 Benjamin Bakker 和 Scott Mullane

Abstract. 我们对出现在微分亚纯分层双曲分量中的 Teichm¨üller 曲线进行了完整分类。利用一项基于 Teichm¨üller 曲线与模空间边界相交方式的不存在性判据，我们推出：除射影维数为一的分层的 Hurwitz 覆盖，以及射影维数为二的分层中零留数轨迹的 Hurwitz 覆盖之外，任何候选对象都不可能是代数的。

Contents

1. 引言 2. 显然的 Teichmüller 曲线 3. 非存在性判据 1 3 6

附录：一个 $\mathbb{R}$-线性的非代数流形 19 参考文献 21

1. Introduction

Teichm¨uller 曲线通常定义为曲线模空间中的浸入曲线 $C \to \mathcal{M}_g$，并且相对于 Teichm¨uller 度量是全测地的。它们由曲线 C所参数化的任意黎曼曲面 X 上的阿贝尔微分或二次微分生成。经过 X 的二重覆盖，我们可以（并且将会）将讨论限制在由阿贝尔微分 ω生成的曲线情形。因而，一条 Teichm¨uller 曲线定义了阿贝尔微分 ω的类型 $\mu = (m_1, \ldots\ldots, m_n)$，即一组整数，其和等于 $2g-2$，表示 ω的零点的阶数。经典情形源自 Veech [Vee89] 的发现，因而涉及一种全纯类型 的微分，其中所有 $m_i \geq 0$，并且与台球有着优美的联系。目前已有若干无穷级数的 Teichm¨uller 曲线（[War98；McM03；Cal04；McM06a；BM10；MMW17]）、低亏格情形的完整分类（[McM06b]）以及有限性结果（[MW15；BHM16]），这得益于霍奇理论和数论对这一几何问题的贡献。另请参见 [McM 21]，其中有关于 Teichm¨uller 曲线的最新综述以及许多开放问题。

M.M. 的研究得到 DFG 项目 MO 1884/2-1 以及合作研究中心 TRR 326“统一化结构的几何与算术”的资助。S.M. 的研究得到亚历山大·冯·洪堡基金会和 ERC 高级资助项目“SYZYGY”的资助。

本文将阐明亚纯微分的情形，即至少有一个 m_i 为负的情形。Teichm¨uller 曲线有几种等价定义，我们将在第 2.1 节中简要回顾。对我们而言，以下刻画最为相关，并将其作为亚纯情形下的定义：一条 $Teichm¨uller$ 曲线 是浸入代数曲线 $C \to \mathcal{M}_g$ ，它是模空间中某个二维簇 $M \to \Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 在遗忘映射下的像；该簇位于类型为 μ的平坦曲面模空间中，并且局部由周期坐标中的 $\mathbb{R}$-线性方程切出。附录给出了一个例子，说明代数性在亚纯情形下为何是一个非平凡的附加条件。

去掉此定义中的维数假设后，我们得到线性流形（也称为仿射不变子流形）这一概念。在全纯情形下，根据 Eskin-Mirzakhani 和 Mohammadi 的基础性结果，这些流形是 $GL_2(\mathbb{R})$-轨道的闭包（[EM18；EMM15]）。近年来，线性流形的分类受到了广泛关注，研究者既构造了特殊例子（[MMW17；EMMW20]），也推导出了其存在条件（例如 [MW18；AW21]）。这些条件通常通过退化论证得出：要么退化到 Mirzakhani-Wright 的边界（[MW17]），要么保留更多信息，退化到多尺度紧化（[BCGGM]）。Benirschke-Dozier-Grushevsky [BDG22] 近期的工作指出，线性流形的边界交（粗略而言）是线性流形的乘积，这一结论如今也适用于亚纯分层。探索此类边界交的可能性，是我们尝试进行分类的主要动机。

本文始终将注意力限制在双曲分层上。（我们会在第 2.2 节回顾 Boissy 对亚纯分层连通分支的分类。）正如 McMullen 的亏格二分类 [McM05], ——全纯情形中的首个分类结果——我们考虑双曲分层，以简化组合复杂性。

亚纯分层中存在一些显而易见的 Teichm¨üller 曲线。它们是某些分层的覆盖所构成的 Hurwitz 空间，这些分层的射影化维数为一，或者在对留数施加条件后射影化维数为一。我们在命题 2.2 中汇总了位于双曲分层中的这份相当简短的显而易见的 *Teichm¨üller* 曲线 清单。它类似于全纯情形中的方格铺砌曲面：它们构成一个无穷级数，覆盖次数是一个显而易见的不变因素，而对不可约分支进行精确分类很可能是一项繁琐的工作。我们的主要结果是：

定理 1.1. 亚纯微分的双曲层中，唯一存在的特克米勒曲线是显然的特克米勒曲线。

为了证明这个定理，我们需要证明：除非处于显而易见的情形之一，否则包含给定平坦曲面的 $GL_2(\mathbb{R})$-轨道的线性流形 M 既不是闭的，也不是代数的。若能在分层或代数紧化中的某点附近找到一个邻域，使其与 M 相交于无穷多个不可约分支，就足以排除这种平坦曲面，正如附录中所做的那样。实际操作中，我们发现这很难实现。因此，我们设计了一个判据（命题 3.3），其依据是[BDG22]中线性流形的边界交集结构：只需展示 M 中的一个曲面，它包含一个圆柱（例如沿垂直方向），以及一条位于所有垂直圆柱之外的非垂直鞍连接。为应用这一判据，我们在 M中使用了几条路径，分别称为“复共轭”、“坐标舞动”和“穿过圆柱”，见第 3.4 节。有趣的是，

用于推导生成 Teichmüller 曲线的平坦曲面 $(X,\ \omega)$ 约束的那些最有用的路径，M 留在其中，却离开了 $(X,\ \omega)$ 的 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-轨道闭包！

最后，我们指出，其他分层中也确实存在非显然的 Teichm¨üller 曲线。例如，Gothic 轨迹 [MMW17] 在多尺度紧化 [BCGGM], 中的闭包便是这样的例子；更准确地说，是某些边界分层的较低层分量，详见 [Sch23]。展望未来，若能像全纯情形那样，对亚纯分层中的 Teichm¨üller 曲线获得更具概念性的理解，将会很有意义。

2. Obvious Teichmüller curves

本节汇集了关于 Teichm¨üller 曲线以及亚纯微分分层的分支的背景材料，并对分层的双曲分支中的“显然”Teichm¨üller 曲线进行了分类。我们假定读者熟悉微分的分层和平坦曲面的基本概念，例如周期坐标、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-作用以及 Veech 群。相关参考资料包括综述 [Zor06；Fil22]。

2.1. **Teichmüller 曲线的¨刻画**。 由平坦曲面（X,ω）生成的、位于平坦曲面模空间全纯分层 $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 中的$Teichm¨{u}ller$ 曲线 A，具有若干种等价的刻画。

命题 2.1. 若从复曲线到曲线模空间的映射 $C \to \mathcal{M}_g$ 满足以下任一等价条件，则它是由全纯阿贝尔微分生成的$\mathrm{Teichm¨{u}ller}$ 曲线

i) 该映射是全测地曲线的浸入，其 *Teichm¨üller* 映射由一个阿贝尔微分的平方所构成的二次微分 $q = \omega^2$ 生成。 *ii)* 该曲线 C 是平坦曲面在 $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 中闭合的轨道 $SL_2(\mathbb{R})\cdot(X,\omega)$ 关于 $SO_2(\mathbb{R})$ 的商。 *iii)* 该曲线 C 是一个平坦曲面的 $SL_2(\mathbb{R})$ 轨道的像，且其 *Veech* 群是 $SL_2(\mathbb{R})$ 中的格。 *iv)* 该曲线 C 是由 $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 的周期坐标中的 $\mathbb{R}$-线性方程定义的二维子簇 M 在遗忘映射 $\Omega\mathcal{M}_g(\mu) \to \mathcal{M}_g$ 下的像。 *v)* C 上的霍奇结构变分具有一个秩为二的局部子系统；按照 *[M¨ol06]* 的意义，该子系统是极大 *Higgs*。

请注意，这个命题并不假设 C 是代数的。 C 的代数性是上半平面被余有限 Fuchs 群作用后所得商空间的一般性质。嵌入的代数性可视为 Chow 定理的推论；对于高维线性流形的情形，也可视为 Filip 定理 [Fil16] 的推论。

证明。 (i) 与 (ii) 等价，是 Teichm¨uller 定理以及 Teichm¨uller 度量就是 Kobayashi度量这一事实的推论，见 [McM03]。(ii) 与 (iii) 等价，由 Smillie-Weiss [SW04] 证明。(ii) 与 (iv) 等价几乎是显而易见的，只需从 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-轨道转到 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道。(v) 与 (iii) 等价，是 [M¨ol06] 的主要内容。□

在亚纯分层中，我们回顾一下，(ii) 和 (iii) 并不能在亚纯分层中给出有趣的对象类。

首先，正如 Valdez 在 [Val12]，中所指出的，亚纯平坦曲面的 Veech 群（在共轭和 $\pm$Id 意义下）要么是旋转群的有限子群、循环抛物群，要么是一个 2 维李群，即 $(1,0)^T$ 在 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 中的稳定子。因此，条件 (iii) 的类似情形绝不会出现。

回忆一下，平坦曲面 (X,ω) 的核心 $\mathcal{C}(X)$ 是其鞍连接的凸包。它是 X 中由鞍连接围成的一个多边形，且其内部可能为空。

其次，正如 Tahar 在 [Tah20]，中所指出的，亚纯平坦曲面的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道是闭的，当且仅当它的所有鞍连接都彼此平行。这类曲面容易构造，在分层中随处可见但处处稠密性均不成立；其 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道恰为 $\mathbb{C}^*$-轨道，在周期坐标中是维数为 1 的线性对象。

Tahar 还指出，具有闭 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-轨道的曲面也随处可见，例如，核心的边界包含两条线性无关的鞍连-接（且 Veech 群是平凡群），或者核心由一组模数可公度的圆柱组成（且 Veech 群是循环抛物群）。同样，这些曲面随处可见且容易构造。因此，我们不考虑条件 (ii)。

因此，我们仿照引言中的条件 (iv)，定义 $Teichm\ddot{}uller$ ***曲线于亚纯分层中***，并纳入代数性假设。（附录中给出了一个违反这一代数性条件的例子。）我们也将分层中由亚纯微分构成的二维线性流形 $M \to \Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 称为 Teichm¨uller 曲线（此处对维数的说法略有滥用）。设 (X,ω) 是 M 中的一个平坦曲面。与全纯情形相反，这个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道永远不等于 M，因为它只扫过 Teichm¨uller 曲线由平行鞍连接轨迹围成的其中一个腔室。

如果亚纯平坦曲面 (X,ω) 的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道包含于一条 Teichm¨uller 曲线 M，且在 M 的某个开子集上等于 M，我们就称它为（亚纯）***Veech*** 曲面。在这种情况下，我们称 (X,ω) 是由 (X,ω) 生成的。

如果像（i）或（v）中那样从度量术语或霍奇理论的角度来刻画 Teichm¨uller 曲线，将会很有意思。

2.2. **分层的分支**。Boissy 在 [Boi15] 中对亚纯分层的连通分支进行了分类。亚纯分层 $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 中的一个双曲分支是指完全由双曲曲线组成的分支。回顾 [Boi15]，如果极点部分具有$\{-p,-p\}$或 $\{-2p\}$的形式（其中 $p \in \mathbb{N}$），且零点部分具有 $\{m,m\}$或$\{2m\}$ 的形式（其中 $m \in \mathbb{N}$），则称签名 μ 具有双曲类型。于是 Boissy 证明，亚纯分层 $\Omega\mathcal{M}_{g,\,n}(\mu)$ 中存在双曲分支，当且仅当该签名具有双曲类型。（分支的完整分类还进一步区分了自旋奇偶性，以及在亏格为一时旋转数的可除性，详情见 [Boi15] 。）

2.3. **显而易见的例子**。本节将对双曲分层中的 Teichm¨uller 曲线的显而易见的例子进行分类：如果一条 Teichm¨uller 曲线是 Hurwitz 空间与由如下留数条件规定的轨迹的交集，我们就称它为显而易见的。

回顾一下，亚纯分层具有一个留数映射 $\mathrm{res} : \Omega\mathcal{M}_g(\mu) \to \mathbb{C}^p$，其定义是通过沿极点周围的圈进行积分得到的。这里，p 是 μ中的负项数量。根据留数定理，其像包含于超曲面$\mathbb{C}^p_{\mathrm{res}}$ 中，其中坐标之和为零。由于留数映射是代数态射，

(ℝ-)线性子簇的原像是 $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 中的代数（ℝ-）线性子簇，其中包括 Teichm¨uller 曲线，前提是极点的数量足以将维数充分降低。

一般的亚纯分层中存在各种各样显然的 Teichmüller 曲线，它们取亏格零指标 μ，其中包含 n 个条目，包括 k 高阶极点，并对这些极点的留数施加$n-4$ 线性条件。（当然，这要求 $k \geq n-3$。）在双曲分支中，可能性相当有限：

命题 2.2。双曲分支中的亚纯分层显然的 *Teichmüller* 曲线是 *Hurwitz* 空间 $\mathrm{Hur}(d,\mu)$，参数化次数为 d 的覆盖

(i a) 分层 $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ 中的平坦曲面，其具有 $\mu=(m-1,m-1,-m,-m)$，在两个零点和两个极点上全分歧，并在其他地方非分歧；或 *(i b)* 分层 $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ 中的平坦曲面，其具有 $\mu=(0,0,-1,-1)$，在两个极点上全分歧，而零点的纤维中各有一个同阶的唯一分歧点；或 *(ii a)* 分层 $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ 中的平坦曲面，其具有 $\mu=(m,-m)$，且 d 为奇数，在零点和极点上全分歧，并在其他地方非分歧。*(ii b)* 分层 $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ 中的平坦曲面，其具有 $\mu=(m,-m)$，且 d 为偶数，具体分为两种情形，取决于零点和极点上是全分歧，还是各有两个分歧阶为 $d/2$ 的分歧点，并在其他地方非分歧。*(iii a)* 分层 $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ 的留数零轨迹中的平坦曲面，其具有 $\mu=(m,-m/2,-m/2)$，且 d 为奇数，在零点和极点上全分歧，并在其他地方非分歧；或 *(iii b)* 分层 $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ 的留数零轨迹中的平坦曲面，其具有 $\mu=(m,-m/2,-m/2)$，在极点上全分歧，在零点上按 $d/2$ 阶分歧，并在其他地方非分歧。

证明。不带留数条件的射影一维分层为 $\mu=(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$，其中 $\sum m_i=-2$ 属于 $g=0$，且$\mu=(m,\ -m)$ 属于 $g=1$。每个零点的原像（即 $m_i>0$）都给出一个零点，而每个极点的原像（即 $m_i<0$）都给出一个极点，且二者各至多有两个。因此，μ 中的零点可能为：一个全分歧零点、一个有两个原像且分歧阶为 $d/2$ 的零点，或两个全分歧零点。极点也有类似结论。此外，最后一种可能是某个 $m_i=0$，但此时它上方必须有分歧（否则 Hurwitz 空间就是一个点）。不过，此时的分歧型可能是一个或两个分歧原像，外加任意数量的非分歧覆盖层。对于 $g=0$，排除简单极点后，由于有四个特殊点需要处理，只剩下情形 (ia) 中的可能性 $\mu=(m-1,\ m-1,\ -m,\ -m)$。如果有简单极点，它会在覆盖下保持不变，因此不可能有任何高阶极点，只剩下情形 (ib) 中的可能性。对于 $g=1$，我们推导出了情形 (iia) 和 (iib) 中列出的所有限制。零点和极点分歧阶不同的情形由黎曼–赫尔维茨公式排除。

接下来考虑带有留数条件的分层。由于它们与在覆盖下不会消失的极点相关，因此涉及的极点至多有两个，也就至多有一个留数条件。对于 $g=0$，此时元组有五个条目，至少会有三个零点或三个极点，这对于双曲分层是不可能的。对于 $g=1$，唯一的情况是 $\mu=(m_1,\ m_2,\ m_3)$，其中 $m_1>0>m_2$ 和 $m_3<0$。The

两个极点的存在意味着它们上方都是完全分歧的，因此由双曲椭圆性可得 $m_2 = m_3$ 。这样只剩下 (iiia) 和 (iiib) 中的情形。□

分层 $\Omega\mathcal{M}_g(m, -m)$ 的几何结构已在 [Tah18] 中得到详细研究，研究依据是由亚纯微分的核心（即鞍连接的凸包）的几何结构所确定的墙与室分解。

3. A non-existence criterion

本节将给出一个判据，用于排除 Teichm¨uller 曲线。该判据基于 [BDG22], 中的一个退化结论，而该结论又基于 [BCGGM] 中良好紧化的存在性。为应用这一判据，我们先概述亚纯平坦曲面的表示方法。本节末尾将完成分类定理 1.1 的证明。

3.1. Boissy 的无限拉链矩形构造及其含圆柱的变体。我们简要回顾 [Boi15, 第 3.3] 节中关于亚纯平坦曲面的表示方法。Boissy 从一个定向的亚纯平坦曲面（X, ω）出发，使其垂直方向上不存在任何鞍连接。他的构造将曲面分解为由折线围成的半平面（这些折线实际上由鞍连接和两条无限水平分离轨线组成），以及核心曲线非垂直、边界为由鞍连接组成的折线的无限圆柱。每个简单极点对应一个这样的圆柱。此数据可由鞍连接和分离轨线的粘合组合以及鞍连接的周期来编码。这些半平面和无限圆柱称为基本区域。我们将这些基本区域边界上的鞍连接称为边界鞍连接，并在需要指明曲面切开后的两条线段时，分别记作 v_i 或 $v_i^{\pm}$ 。我们用 $\mathrm{Per}(v_i) := \int_{v_i}\omega$ 表示任意鞍连接的周期。由于这些周期给出分层的局部坐标，我们也将边界鞍连接简称为坐标。反过来，给定一组基本区域及其边配对和边界鞍连接的周期，便可唯一构造出该曲面。

Boissy 算法对曲面的分解始于 Strebel 分类对垂直轨迹的分类。它将曲面分解为半平面和半无限垂直 条带。每个左半平面在其右边界处有一个奇点。沿着从该处出发的水平分界轨迹将其切开。所得两部分分别是上半平面和下半平面的起始部分；随后通过连接垂直条带逐步构建，直到过程以一个右半平面结束。该右半平面沿着从其左边界处奇点出发的水平分界轨迹切开。剩余的垂直条带则以类似方式组装成具有非垂直核心曲线的无限圆柱。

我们的变体允许亚纯平坦曲面（X, ω）在垂直方向上存在鞍连接，但前提是这些鞍连接围成的圆柱，其核心曲线也沿垂直方向。移除这些圆柱后，曲面的其余部分可以完全按照上述 Boissy 算法进行分解。唯一需要做的，是在组装基本区域时一致地确定如何处理垂直鞍连接：我们像上文一样，从左向右为基本区域边界上的鞍连接定向，然后要求垂直鞍连接的周期具有正虚部。由此得到：

命题 3.1。亚纯平坦曲面可以唯一分解为有限个核心曲线沿垂直方向的有限面积圆柱，以及有限组 *Boissy* 基本区域。

我们将其称为广义 *Boissy* 表示。注意，边界鞍连接的周期不再构成局部坐标：某些不同的边界鞍连接（位于某些圆柱的端点处）可能会被双曲 involution h交换，而 h-轨道的周期则构成坐标。尽管如此，我们仍将“边界鞍连接”简称为“坐标”。

3.2. **边界处线性流形的方程**。假设 $M \subset \Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ 是一个代数的线性流形，并且它与由层级图 Γ给出的边界分层相交。我们用来排除 Teichm¨üller 曲线存在性的主要判据是 [BDG22, 定理 1.5], ，该定理刻画了闭包 $M \subset \Xi\mathcal{M}_{g,n}(\mu)$ 的边界分支的一般点。对于 Teichm¨üller 曲线，边界仅由微分经 $\mathbb{C}^*$-缩放后的点组成。我们可以将他们的判据重新表述为：

命题 3.2。 *Teichm¨uller* 曲线的边界点的层级图仅具有水平节点（即只有一个层级），或具有两个层级且没有水平节点。

因此，我们排除平坦曲面（X， ω）生成 Teichm¨uller 曲线的策略，是找出一个圆柱，使得收缩该圆柱的核心曲线后，得到的曲面在较低层级上具有一个水平节点。几何上，这可如下验证。

命题3.3。 设 (X, ω) 是一个亚纯平坦曲面，并且含有一个核心曲线方向为垂直方向的圆柱。如果广义 *Boissy* 表示中的基本区域至少由一条 γ 非垂直的鞍连接界定，那么（X, ω）不会生成 *Teichm¨uller* 曲线。

等价地，如果（X, ω）在具有垂直核心曲线的圆柱的闭包之外存在一条方向为非垂直方向的鞍连接，那么（X, ω）不会生成 *Teichm¨uller* 曲线。

换言之，亚纯 Veech 曲面的候选者只有无圆柱平坦曲面和可垂直表示曲面，也就是说，后者是带有圆柱的曲面，我们可以假设该圆柱是垂直的，且基本区域的所有边界也都是垂直的。

证明。 考虑 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-轨道中 (X, ω) 的路径：在保持 γ 的周期不变的同时缩短垂直方向。根据命题 3.2，我们必须排除所得退化具有仅含一个层级且只有水平边的层级图的情况。若初始平坦曲面为 $(X, \omega) \in \Omega\mathcal{M}_{g,n}(\mu)$，则这类极限稳定曲线的正规化属于形如 $\Omega\mathcal{M}_{g',n+2(g-g')}(\mu, -1^{2(g-g')})$ 的分层。（特别地，整个极限平坦曲面都可以用 Boissy 算法绘出；不存在微分趋于零的分支。）这意味着，沿着任何趋近该极限的路径，任一简单极点的留数与任一内部鞍连接长度之比都有正的上界和正的下界。但我们最初描述的路径不满足这一性质。□

3.3. **具有简单极点的亚纯分层的双曲分量**。我们从较简单的情形开始证明定理 1.1，即存在简单极点的情形。

命题 3.4。 对于 $g \geq 1$，在有两个简单极点$\Omega\mathcal{M}_{g,2}(2g, -1, -1)$ 的双曲分层中，不存在 *Teichm ¨uller* 曲线；而在双曲分层$\Omega\mathcal{M}_{g,2}(g, g, -1, -1)$ 中，*Teichm ¨uller* 曲线是命题 *2.2* 的情形 *(i b)* 中针对 $d \geq g+1$ 给出的线性流形 $\mathrm{Hur}(d, (g, g, -1, -1))$ 的不可约分支。

在证明这个命题之前，我们先给出一个简单但有用的引理，用于刻画 Boissy 表示中的线性流形。该引理关联两个曲面：它们一般不属于同一个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道，但必定属于同一个线性流形。

引理 3.5。 如果一个曲面属于一种具有边界鞍连接 v_i 的 *Boissy* 表示，并由其周期 $(\mathrm{Per}(v_1), \ldots, \mathrm{Per}(v_k))$ 给出，且位于线性流形 M 中，那么在此表示中对周期 $(\mathrm{Per}(v_1), \ldots, \mathrm{Per}(v_k))$ 取复共轭后得到的曲面也位于 M 中。

证明。 在由具有相同组合结构的 Boissy 表示所给出的两个曲面之间，分层中的实路径 $\phi(t) = (X_t, \omega_t)$ 对于 $t \in [0,1]$，

$$\mathrm{Per}_t(v_i) := \int_{v_i} \omega_t = v_i - 2t\,\mathrm{Im}(\mathrm{Per}(v_i)) \tag{1}$$

将满足 $\phi(0)$ 所满足的所有 $\mathbb{R}$-线性方程。 □

命题 *3.4* 的证明。 设 (X, ω) 是生成 Teich- m ¨uller 曲线 M 的亚纯曲面。由于 (X, ω) 将在某个方向上可作 Boissy 分解，我们可以通过 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 作用得到 M 中的一个曲面，使其在水平方向上可分解，其中留数核心曲线也为水平且长度为一。

也就是说，我们可以假设 (X, ω) 由水平方向上的 Boissy 表示给出，其中一个无限圆柱域的坐标为 $(v_1, \ldots, v_k)$，按从左到右的顺序标记，且 $\sum_{i=1}^k \mathrm{Per}(v_i) = 1$。此外，双曲 involution 因而要求另一个区域上的鞍连接按从左到右的顺序标记为 $(v_k, \ldots, v_1)$，如图 1 所示。

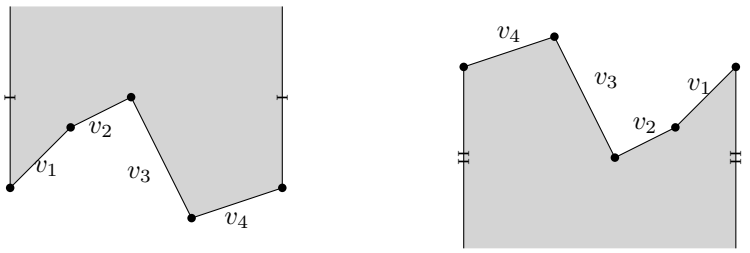

FIGURE 1. 带有简单极点的双曲曲面

如果 M 的局部方程中有任何一个形如 $\mathrm{Per}(v_i) = a\mathrm{Per}(v_{i+1})$，其中某个 $a \in \mathbb{R}$，也就是说，如果要求任意两个相邻坐标 v_i 和 v_{i+1} 平行，就会产生如下矛盾。由于并非所有坐标都能平行，不妨在重新标记后，设有三个连续的坐标，v_1 和 v_2 平行，但与 v_3不平行。此外，我们可以假设 $v_2 + v_3$

是凸的（若非如此，则考虑由引理 3.5 得到的共轭曲面）。那么该曲面包含一些圆柱，其核心曲线分别沿方向 $v_1 + 2v_2 + v_3$ 和 $v_2 + v_3$，且这两个方向不平行，因此它们不可能都与留数核心曲线平行。因此，M 包含一个具有圆柱的曲面，该圆柱的方向不同于留数核心曲线的方向；相对于留数核心曲线的方向塌缩该圆柱的核心曲线，就会与命题 3.2 矛盾。

由于任意两个相邻的 s 都不平行，因此对于任意两个相邻的坐标，有两种可能。若 $v_i + v_{i+1}$ 是凸的，则 (X, ω) 在此方向上包含一个圆柱。若 $v_i + v_{i+1}$ 是凹的，则通过对坐标取复共轭得到的曲面 (X', ω') 也属于 M，且在方向 $v_i + v_{i+1}$ 上包含一个圆柱。由于此方向必须平行于我们已归一化为实数的留数核心曲线，因此对于某个 $a_i \in \mathbb{R}$，有 $v_i + v_{i+1} = a_i$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, k-1$；并且对于某个 $a_k \in \mathbb{R}$，有 $v_k + v_1 = a_k$。由此证明，在 $\Omega\mathcal{M}_{g,2}(2g, -1, -1)$ 的双曲分支中不存在 Teichmüller 曲线，因为在这种情况下 $k = 2g + 1$ 为奇数，而上述结论必然导致矛盾：所有 $v_i \in \mathbb{R}$，这对于生成 Teichmüller 曲线的曲面而言不可能成立。

剩下要考虑 $\Omega\mathcal{M}_{g,2}(g, g, -1, -1)$ 的双曲分支，其中 $g \geq 1$。在这种情况下，$k = 2g + 2$，根据引理 3.5，不失一般性地可以假设 $v_1 + v_2$ 是凸的。由于 $v_i + v_{i+1}$ 对所有 i 都是实数，因此 $v_{2j+1} + v_{2j+2}$ 对于 $j = 0, \ldots, g$ 也必然是凸的，且有 $\sum_{j=0}^{g} a_{2j+1} = 1$。此外，经过重新缩放后，我们可以假设 $\mathrm{Im}(v_i) = (-1)^i$。

设 $\psi(t)$ 为抛物矩阵的作用，其中 $t \in \mathbb{R}$ 保持所有坐标的虚部不变，并作用于坐标 v_{2j+1} 的实部，对 $j = 0, \ldots, g$ 而言，其作用为

$$\psi(t)(\mathrm{Re}(\mathrm{Per}(v_{2j+1}))) = \mathrm{Re}(\mathrm{Per}(v_{2j+1})) + t \pmod{\mathrm{Per}(v_{2j+1} + v_{2j+2})}.$$

然而，$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Per}(v_i) = 1$ 和 M 是闭的，因此 $\mathrm{Per}(v_{2j+1} + v_{2j+2})$ 是有理数。对曲面取共轭后，同样的论证也适用于 $v_{2j} + v_{2j+1}$ for $j = 1, \ldots, g$，也适用于 $v_{2g+2} + v_1$。这类条件恰好描述了由 Hurwitz 空间 $\mathrm{Hur}(d, (g, g, -1, -1))$ 给出的线性流形。□

3.4. 具有高阶极点的亚纯分层的双曲分量。在本节中，我们始终讨论某个指标为 μ 的双曲分支，即具有一个零点或两个阶数相同的零点，以及一个极点或两个阶数相同的极点的情形；此外，假设极点阶数至少为二。

命题 3.6。*亚纯双曲椭圆分层中的每条 Teichm ¨uller 曲线都包含一张带有圆柱的平坦曲面。*

作为这一论断的第一步，我们证明：

引理 3.7。*如果 (X, ω) 生成一条 Teichmüller 曲线 M，并且具有一个 Boissy 表示，其中一个基本区域的边界上有两条鞍连接，且它们在 M 中的同调类线性无关，那么存在一个带有圆柱的平坦曲面 $(X', \omega') \in M$。*

证明。考虑 (X, ω) 的 Boissy 表示中这样一个基本区域：其边界上有两条鞍连接，且它们的同调类在 M 中线性无关。双曲椭圆性意味着，若 $v_1, \ldots, v_k$（$k \geq 2$）是这条半平面边界上从左到右标记的鞍连接，那么 $v_k, \ldots, v_1$ 就是

Boissy 表示中一个方向相反的半平面边界上的鞍连接。若某个 $i = 1, \dots, k-1$ 对应的鞍连接 v_i 和 v_{i+1} 构成核心 $\mathcal{C}(X)$ 中三角形 $\Delta = \Delta(ABC)$ 的两条边，那么该三角形及其双曲椭圆像会形成一个圆柱。

如果不存在一组 v_i 和 v_{i+1} 能够构成三角形的两条边（即路径v_1，……，v_k 是凹的），那么引理 3.5 表明，将所有周期共轭后得到的曲面也属于 M。该曲面与原基本区域包含具有独立方向的鞍连接这一假设，保证了对于 $i = 1$，……，$k-1$，存在某些 $\bar{v}_i$ 和$\bar{v}_{i+1}$ 在这个共轭曲面的核心中构成三角形的两条边。这个三角形及其双曲椭圆像给出一个圆柱。□

坐标舞动。下面关于沿 Boissy 表示边界上的鞍连接移动的论证，同样依赖于 Teichm¨uller 曲线中的一条路径，但会离开初始平坦曲面的 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-轨道。

选取某个 Boissy 基本域边界上的鞍连接 v_k，并令 p 为与该（区域外部的）基本区域相对应的极点。我们记 $\mathrm{Per}(v_j) = x_j + iy_j$。利用 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的作用，可以安排使 v_k 为水平的，即 $\mathrm{Per}(v_k) = x_k$ 且满足 $0 < x_k < 1$。现在拉伸垂直方向，使得对于所有满足 v_j 不水平（即不平行于 v_k）的 j，都有$|y_j| > x_j$。我们令 V为这些（“相当垂直的”）鞍连接的指标所组成的（非空）集合。现在考虑这样一条路径：将 $\mathrm{Per}(v_k)$ 替换为 $\mathrm{Per}_t(v_k) = v_k \exp(-2\pi i t)$，并且更一般地令

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}_t(v_j) := \int_{v_j} \omega(t) &= x_j \exp(-2\pi i t) + i y_j \\ &= x_j \cos(-2\pi i t) + i(x_j \sin(-2\pi i t) + y_j)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

我们将这条路径称为坐标舞动。由于 M由 $\mathbb{R}$-线性方程定义，这条路径始终处于 M 之内。事实上，我们只需验证沿路径的实部和虚部满足这些线性方程。为此，我们注意到，实部按一个公因子缩放，而虚部则是初始虚部与按一个公因子缩放的实部之和；对于这两个加数， $\mathbb{R}$-线性方程分别成立。

舞动的初始阶段——收缩并旋转，直至 $t = 1/4$——在图 2 中从第二行过渡时以鞍连接 $k = 2$为例进行了说明。

如图 2 中第三行到第四行的过渡所示，沿舞动路径前进时，一旦 v_k 越过垂直线，我们就需要沿 v_k 切开并重新粘合（同时沿所有平行于 v_1的边界鞍连接切开并重新粘合），以维持 Boissy 表示，由此得到鞍连接 v'_k。（实际上，图 2 的第四行并不完全是 Boissy 表示，因为 V 中的某些鞍连接发生了“倾斜”。）

现在可能出现两种情况。首先，如图所示，与 v_k平行的鞍连接均未接触任何近乎垂直的鞍连接。（在这种情况下，集合 V 中“倾斜”的鞍连接所进行的切开并重新粘合无论如何都会在下一步被撤销，因此为简便起见，我们保留了它们的位置。）于是，我们沿着舞动路径继续前进，到达 v'_k 穿过垂直线的位置（图 2 的第五行）。这需要再次进行切开并重新粘合，从而得到鞍连接 v''_k。

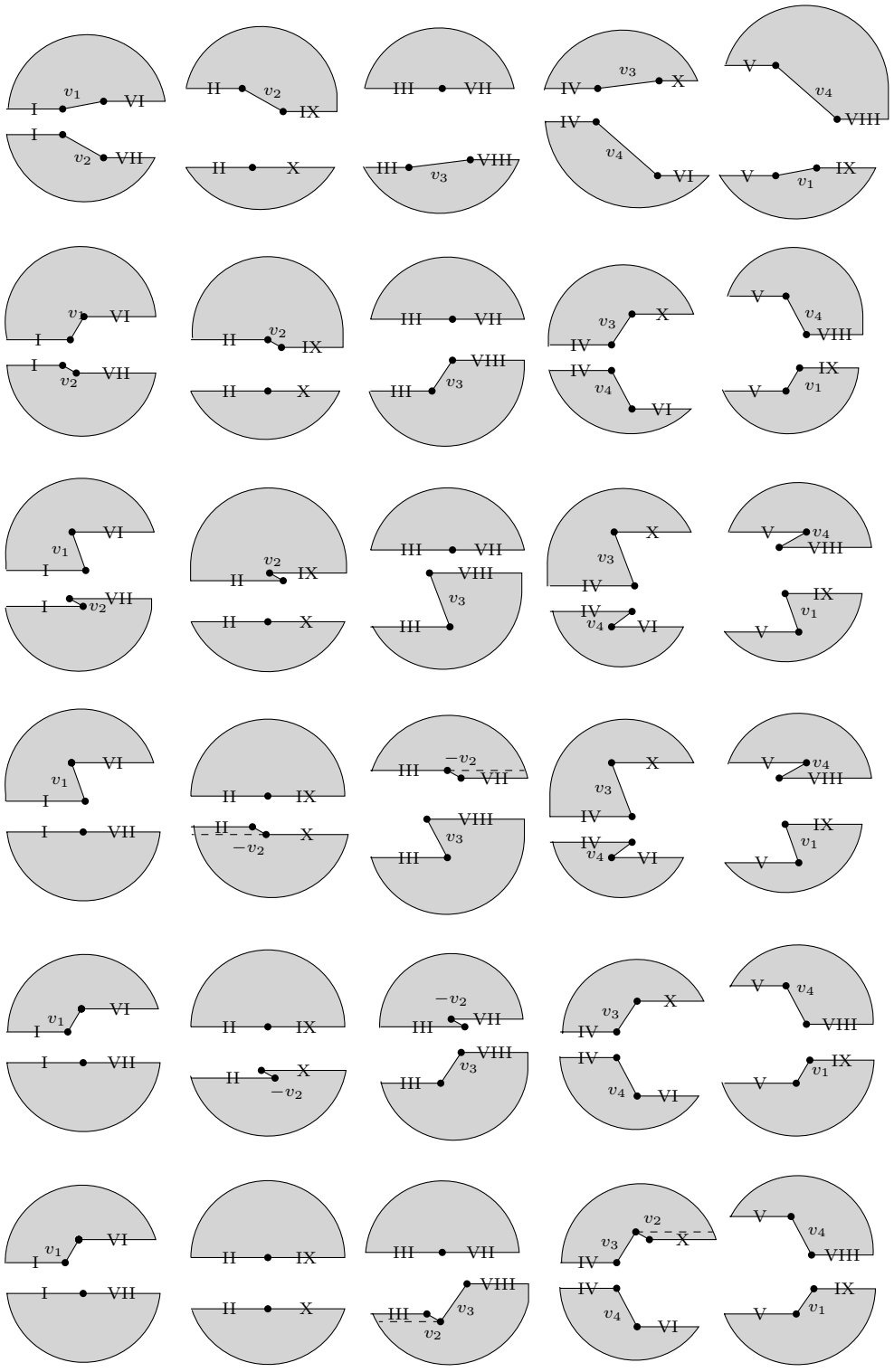

FIGURE 2. 分层 $\Omega\mathcal{M}_{2,2}(8,-6)$ 中的舞蹈坐标 v_2

总结第一种情况（图 2 的第六行）：对于 $t = 1$ 中的所有边界鞍连接，它们都回到了初始位置；而 v_k （以及所有与它平行的鞍连接）则从初始位置沿逆时针方向舞动到了角度为 2π 的半平面。

在第二种情况中，某条与 v_k 平行的连接在倾斜经过 中的一条鞍连接时与之接触。此时，我们必须重新粘合这条倾斜经过的鞍连接，才能得到 Boissy 表示。舞动路径到此停止，接下来的情况取决于上下文。

引理 3.8。每条 *Teichmüller* 曲线都包含一个满足引理 *3.7* 假设的曲面。

证明。设 (X, ω) 是生成 Teichmüller 曲线 M 的平坦曲面。我们断言，存在一个极点 p，使得与 p 相邻的 Boissy 区域边界上的鞍连接中，有两条在同调中线性无关。考虑整体情况：每条边界鞍连接都与一个或两个极点相邻。此外，由于 (X, ω) 生成一条 Teichmüller 曲线，边界鞍连接在上同调中张成一个二维子空间。整个曲面的连通性意味着存在某个如 p 所述的极点。

现在，我们从与 p 相邻的一条鞍连接开始坐标舞动。如果舞动在倾斜翻转的瞬间停止，我们就到达了满足引理 3.7 假设的情形。

否则，使用同一条鞍连接重复坐标舞动时，这条鞍连接会从初始位置开始，依次经过角度为 $m \cdot 2\pi$、持续 $m \in \mathbb{N}$ 的所有半平面，直到最终由于 p 的选择以及另一条鞍连接的存在而满足引理 3.7 的假设。□

命题 *3.6* 的证明 是引理 3.8 和引理 3.7 的直接推论。

由命题 3.6 可知，从现在起我们可以假设，生成 Teichm¨uller 曲线的曲面 (X, ω) 有一个圆柱，且已旋转至其核心曲线为垂直方向，简言之，即一个垂直圆柱。我们使用该曲面的广义 Boissy 表示。几何判据命题3.3 立即推出：如果带有垂直圆柱的 (X, ω) 生成一条 Teichm¨uller 曲线，那么广义 Boissy 表示中基本区域边界上的所有其他鞍连接也都是垂直的。我们将这样的表示称为纯垂直表示，并从现在起作此假设。

我们还区分构成块边界上的鞍连接。外部鞍连接 是无限半平面边界上的（垂直）鞍连接。内部鞍连接 则是其余的垂直鞍连接。它们位于仅由圆柱（带有垂直核心曲线）构成的子曲面内部。

由于双曲 involution 作用于曲面，并将 Boissy 的构成块映射为构成块，因此它也作用于外部鞍连接和内部鞍连接的集合上。因此，这些鞍连接要么在对合的作用下保持不变，要么成对互换。

引理3.9。不存在不变的内部鞍连接。

证明。任何不变的内部坐标都会出现在同一圆柱的两端，该圆柱具有垂直核心曲线。用直线连接这些鞍连接，

使其横穿初始圆柱，就会形成另一个圆柱的核心曲线。由于这些横穿直线并非垂直方向，因此这个圆柱与垂直表示中的任意其他边界鞍连接一起，便构成了对命题3.3所需的矛盾（将新方向转为垂直方向之后）。□

我们找出另一种有利于证明存在非垂直圆柱的情形：切割器 由两个具有垂直核心曲线的圆柱组成，一个简单圆柱，以及一个带有两条或更多鞍连接的圆柱；简单圆柱的两条边界曲线都与非简单圆柱的边界粘合，如图3左侧所示。初等几何表明：

引理 3.10. 切割器包含一个核心曲线非垂直的圆柱。

证明。 经过垂直抛物变换剪切后，我们不妨设非简单圆柱的开口端彼此相对，但代价是得到一个倾斜切割器。经过缩放，我们不妨设图3右侧的 S 是单位正方形，切割器扭转了 $0 \le t < 1$，其握持部长度为 a。此时，斜率为 $\lfloor t \rfloor/(1+a)$ 的方向包含一个圆柱。□

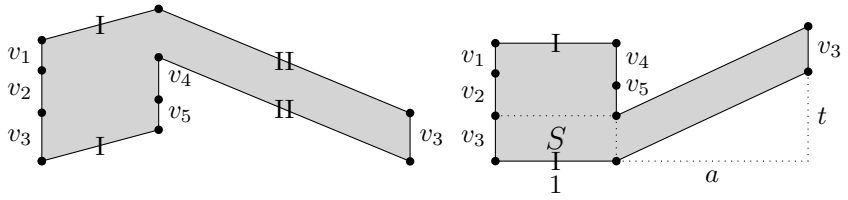

FIGURE 3. 展示水平圆柱的切割器及其剪切

引理3.11。 在纯垂直广义 *Boissy* 表示下，包含一个圆柱并生成一条 *Teichmüller* 曲线的曲面 (X,ω) 仅由 *Boissy* 基本区域（半平面）和简单 圆柱（至少一个）构成。边界鞍连接均为外部鞍连接：它们要么是不变的，要么分别在简单圆柱的两端互换。

证明。 根据前面的引理 3.10 和我们的主要判据命题3.3，我们可以排除半平面补集内包含切割器的圆柱系统。由于我们在引理3.9中排除了不变的内部鞍连接，广义 Boissy 表示中尚未排除的圆柱有以下四种类型：

a）连接两个外部鞍连接的简单圆柱，因此没有内部鞍连接。b）两个外部鞍连接和至少两个内部鞍连接。c）至少四个外部鞍连接，以及零个或更多内部鞍连接。d）零个外部鞍连接和至少四个内部鞍连接。

（正是在（d）中，我们可以排除具有两条内部鞍连接的圆柱，因为它们会形成一个切割器。）我们用列表中相同的字母表示此类圆柱的数量，用 e 表示非不变外部鞍连接的数量，用

i 表示非不变内部鞍连接的数量，用 f 表示不变（“固定的”）外部鞍连接的数量。

我们统计 Weierstraß点的数量。这些点包括极点（若唯一）、零点（若唯一）、不变（因而是外部）鞍连接的 f 中点，以及每个圆柱内部的两个点。事实上，在双曲分支中，所有圆柱都在对合下保持不变，否则我们就可以改变其中一个圆柱的大小，从而在仍属于该分层的同时破坏对合的存在性。若以 Z 表示零点的数量，以 P 表示极点的数量，并以C 表示圆柱的数量，则得到

$$2g+2 \;=\; (2-Z)+(2-P)+2C+f\,.$$

综上，我们得到第一个条件

$$\begin{aligned} a+b+c+d \;&=\; \frac{1}{2}\big(2g-2+Z+P-f\big)\\ 2a+2b+4c \;&\le\; e\\ 2b+4d \;&\le\; 2\big(2g-2-Z+P-f-e\big)\,. \end{aligned}$$

第二个条件给出非不变外部坐标的数量；这些坐标成对出现在同一圆柱的两侧（若与某个圆柱相邻）。第三个等式给出非不变内部坐标的数量，每个坐标均计数两次。右侧表示边界鞍连接的总数 $i+f+e=2g-2+Z+P$构成分层 $\Omega\mathcal{M}_{g,n}(\mu)$ 的一个坐标系。

将第二个方程和第三个方程各加两次可推出 $b=c=0$。在这种情况下，d) 中任意元素的内部坐标只能与同一个圆柱粘合，因为 a) 不提供内部坐标。这意味着 d) 中的元素构成它们自己的连通分支。由于这是不可能的，我们得出 $d=0$ 以及该引理的所有结论。□

接下来，我们限制这些边界鞍连接在 Boissy 基本区域中的分布，如图4左图所示。

引理3.12。 每个 *Boissy* 基本区域的边界要么搭配

i) 无边界鞍连接，或ii) 仅有不变的外部鞍连接，或iii) 恰好有一个不变的外部鞍连接（因此在其另一侧界定一个简单圆柱）。

证明。 假设某个基本区域在其边界上有两条相邻的非不变鞍连接。

通过垂直抛物元素进行剪切后，我们可以假设，那些以垂直核心曲线为边界、围住非不变边界鞍连接的简单圆柱没有水平鞍连接。通过切割与重新粘合，我们可以将圆柱表示为扭转量小于腰曲线长度的形式，即使得对角线将圆柱分解成两个锐角三角形，如图 4 左侧所示。该图还展示了我们正在使用的新坐标。坐标系不再包含圆柱 s_i 的腰曲线，而是包含锐角三角形的边 v_1、.....、v_4，以及（若存在）半平面边界上的其余坐标 v_5、.....、v_n。

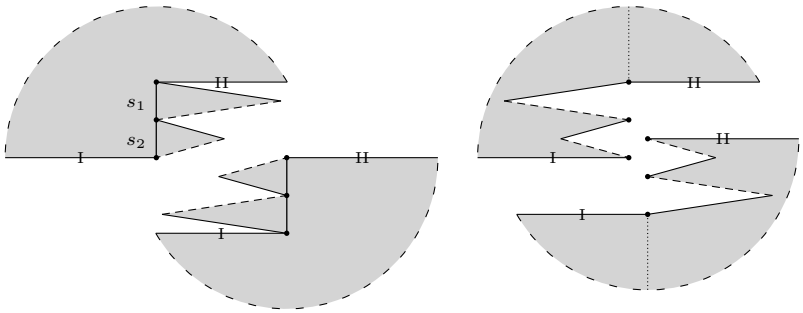

FIGURE 4. 穿过圆柱：左侧的曲面 $\Phi(0)$ 和右侧的曲面 $\Phi(1)$

我们考虑如式（1）所示的“穿过”路径 $\phi(t) = (X_t, \omega_t)$。对于 $t \in [0,1]$。这条路径始终位于包含初始曲面 $GL_2^+(\mathbb{R})$-轨道的复二维流形内。在其终点 $t = 1$，我们构造出所需的圆柱，如图5右侧所示。命题3.3适用，因此得到矛盾。

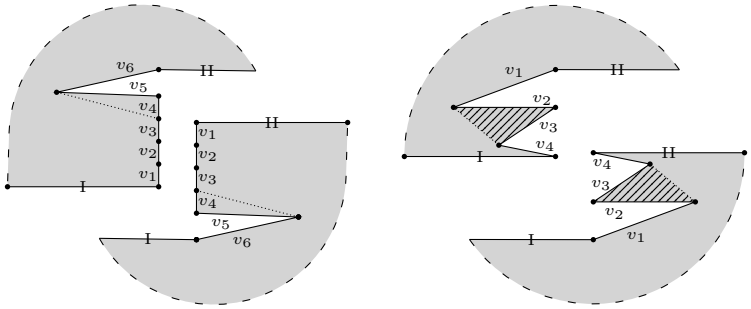

FIGURE 5. 寻找圆柱

需要排除的另一种情况是，至少有一个简单圆柱（及其相邻的）非不变外部鞍连接，位于某个不变外部鞍连接旁边。按照前一种情况中的方法“穿过圆柱”，我们得到图5左侧所示的构型。此时存在一个圆柱，其一条对角线具有这一垂直坐标；再加上围成被切出的锐角三角形、但不位于圆柱内部的那条鞍连接，就得到一种构型。应用命题3.3即可导出矛盾。□

再次旋转，开始下一场舞动。到目前为止，对于引理3.12，我们一直使用广义 Boissy 表示，即允许存在具有垂直核心曲线的圆柱。为了进一步约束鞍连接的周期，我们必须再次使用线性流形中离开 $GL_2(\mathbb{R})$-轨道的路径，也就是舞动路径或其变体。为此，考虑引理3.12中的一个曲面，并像图4右侧那样穿过圆柱（但每个基本区域只有一个圆柱或一条

不变的外部鞍连接）。沿着鞍连接折线末端的垂直线（图4右侧的虚线）切开基本区域，沿无限水平分界线重新粘合，并将图形旋转 π，即可得到标准 Boissy 表示下的平坦曲面，供我们接下来使用。

引理3.13。 *假设引理3.12的表示中的曲面(X,ω) 具有不变的外部鞍连接（如该引理的(ii)所述）。那么由(X,ω) 生成的 Teichm¨uller 曲线是命题 2.2 (iii a) 或 (iii b) 中关于满足留数条件的覆盖曲面的显然情形之一。*

证明。 根据命题 3.6，我们可以假设至少有一个圆柱。我们将这个圆柱拉过来并旋转，以进行下一次舞动，如上所述。我们选取一条不变的外部鞍连接 v_1，以应用坐标舞动。由于(X,ω)生成一条 Teichm¨uller 曲线，所有不变的外部鞍连接都彼此平行，因此会同时舞动；如果有多条连接与同一个 Boissy 区域相邻，它们就会一起舞动（即在 Boissy 区域之间移动）。这种舞动会以以下两种方式之一终止：

第一种可能性是：在经过若干条完整舞动路径（即，对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 的完整旋转 $2k\pi$）之后，一组不变坐标出现在一个基本区域上，并且末端有两个被拉过的坐标。这与事实矛盾，因为在一个基本区域上有三个或更多彼此不平行的坐标，如图5左图所示（擦除 v_2, v_3, v_4 即可得到最简单的情形）。

第二种可能性是，舞动在圆柱坐标倾斜过去的瞬间结束（即，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，旋转 $(2k+1)\pi$）。一个被拉过的坐标与相邻的不变坐标现在构成一个圆柱。因此，如果与任一 Boissy 区域相邻的不变坐标集合包含多于一个坐标，我们就得到矛盾。

设 v_2 和 v_3 是已经被拉过的鞍连接。在原曲面上，v_2+v_3 是该圆柱的腰曲线，因此必须存在关系 $\mathrm{Per}(v_2+v_3-sv_1)=0$，对于某个 $s\in\mathbb{R}$，否则命题3.3将给出矛盾。在舞动结束时，$-v_1+v_2$ 是一个圆柱的腰曲线（可能需要交换 v_2 和 v_3 的角色）。这意味着 $v_3 \in \mathbb{R}\cdot(-v_1+v_2)$，因此（可能改变 v_1 的方向）我们得到 $s=1$。

现在我们从整体上考察曲面。如果还存在其他不变坐标，它们就不可能在舞动结束时出现在各自的基本区域中，否则便会产生矛盾（将命题3.3应用于新形成的圆柱即可得到矛盾）。类似地，如果还存在其他被穿过的坐标，它们现在就会处于“倾斜”位置。将它们作为鞍连接，并结合新形成的圆柱，命题3.3将导出矛盾，除非其中一个被穿过的坐标现在与新圆柱的腰曲线平行（即与 v_3平行），而另一个则与一个不变坐标形成新的圆柱，其腰曲线必然与 v_1平行。

将这些坐标标记为 u_1, u_2, u_3，与 v_i 保持一致，我们发现 u_1 和 v_i 平行；事实上，对于某个 $k>0$，有 $u_i = kv_i$。

现在，我们按逆时针顺序为与极点相邻的（偶数个）Boissy 区域编号，并从编号为一的区域中的穿过的圆柱开始。由于上文的“第一种可能”导致矛盾，因此第一个含有不变鞍连接的 Boissy 区域编号为偶数。反向旋转后，我们发现，下一个含有穿过的圆柱的 Boissy 区域位于

编号为偶数的 Boissy 区域中。由此归纳可知，这一奇偶性约束对所有圆柱和所有不变鞍连接都成立。比较顺时针舞动和逆时针舞动时，穿过的圆柱与不变鞍连接所对应的三元组鞍连接，这表明所有两两比较因子（记作上文的 k ）都等于一，即任意两个不变鞍连接以及任意两个圆柱都具有相同的几何结构。

包含一个圆柱（不要把它拉过去！）的 Boissy 区域的奇偶性约束意味着，圆柱不能连接与同一极点相邻的 Boissy 区域。因此，恰有两个极点，因为我们处于双曲分层中。

奇偶性约束（连同由$k = 1$得出的长度一致性）也意味着，将所有圆柱（或等价地，将所有不变的外部鞍连接）堆叠在一起所定义的映射可延拓为一个良定义的覆盖映射。根据该映射的次数，我们处于情形 (iii a) 或 (iii b)。□

引理 3.14. 假设引理*3.12*的表示中，曲面 (X, ω) 没有不变的外部鞍连接（如该引理的 *(ii)* 所述）。那么由 (X, ω) 生成的 *Teichm¨uller* 曲线 M 是命题 *2.2 (i a)*、*(ii a)* 或 *(ii b)* 中显而易见的情形之一。

证明。 根据命题 3.6，我们不妨假设至少存在一个圆柱。按照前文所述，我们将这个圆柱拉伸并旋转，以进行下一次舞动。图 6 第一行展示了这一情形。现在，我们选取一条最陡鞍连接 v_i 来进行舞动，即选取使 Im(Per(v_i))/Re(Per(v_i)) 最大的鞍连接。如果在舞动开始时将该坐标归一化为竖直方向（见图 6 第二行中的坐标 v_i ），而非在原始坐标舞动中将其设为水平方向，那么舞动路径会更容易观察。（事实上，采用这种选择后，任何不与所选鞍连接平行的鞍连接，在整个舞动过程中都会始终邻接其初始基本区域。）我们沿水平方向充分拉伸（使得对于所有满足 v_k 与 v_i 平行的 k ，以及补集 H 中所有（“较为水平的”）鞍连接 j ，均有 Re(Per(v_j)) $>$ |Per(v_k)| ）。

现在，我们旋转 Per(v_i)，同时略微调整鞍连接的周期，使其保持在 M 中，正如 (2) 中所做的那样，只不过交换实部和虚部的角色。舞动过程如图 6 的其余几行所示。该过程在选定的鞍连接与另一条鞍连接出现在同一基本区域上时结束。如果一个舞动坐标到达了一个具有两个坐标的区域，那么根据域上三个坐标论证，我们便得到矛盾。

因此，舞动必定以一个舞动的坐标落在仅有另一个坐标的区域上而告终。然而，这意味着最初位于该区域的另一个坐标必定已经舞动过，因此与我们的最陡鞍连接平行。如果该鞍连接现在单独位于一个区域中，就会产生矛盾，因为这样我们就得到一个腰曲线不平行于该鞍连接的圆柱（可能需要先进行穿越）。因此，这个鞍连接坐标必定已经舞动到恰好还有另一条鞍连接的区域中。然而，这意味着最初位于该区域的一条鞍连接必定已经舞动。沿着曲面追踪这一论证，我们看到每个圆柱

都贡献了一条经过穿越的鞍连接；这条鞍连接舞动过，因此与选定的鞍连接平行。

标记鞍连接 v_1，……，v_d，其中 $d = 2g+|\mu|-2$，使得 v_{2j-1}，并且v_{2j}对于 $j = 1$，……，$d/2$ 而言，是从上方基本区域中各个圆柱由左至右拉出的坐标，并且舞动的结果是在带有 v_{2j+2} 的区域上出现 v_{2j-1}（指标按 d 取模）。上述论证给出了 $v_{2j-1} = k_j v_1$，其中 $k_j \in \mathbb{R}$ 以及 $j = 2$，……，$d/2$。类似地，改为沿满足 Im(Per(v_i)) /Re(Per(v_i)) 最小的方向舞动鞍连接，可得 $v_{2j} = \ell_j v_2$，其中 $\ell_j \in \mathbb{R}$ 以及 $j = 2$，……，$d/2$。

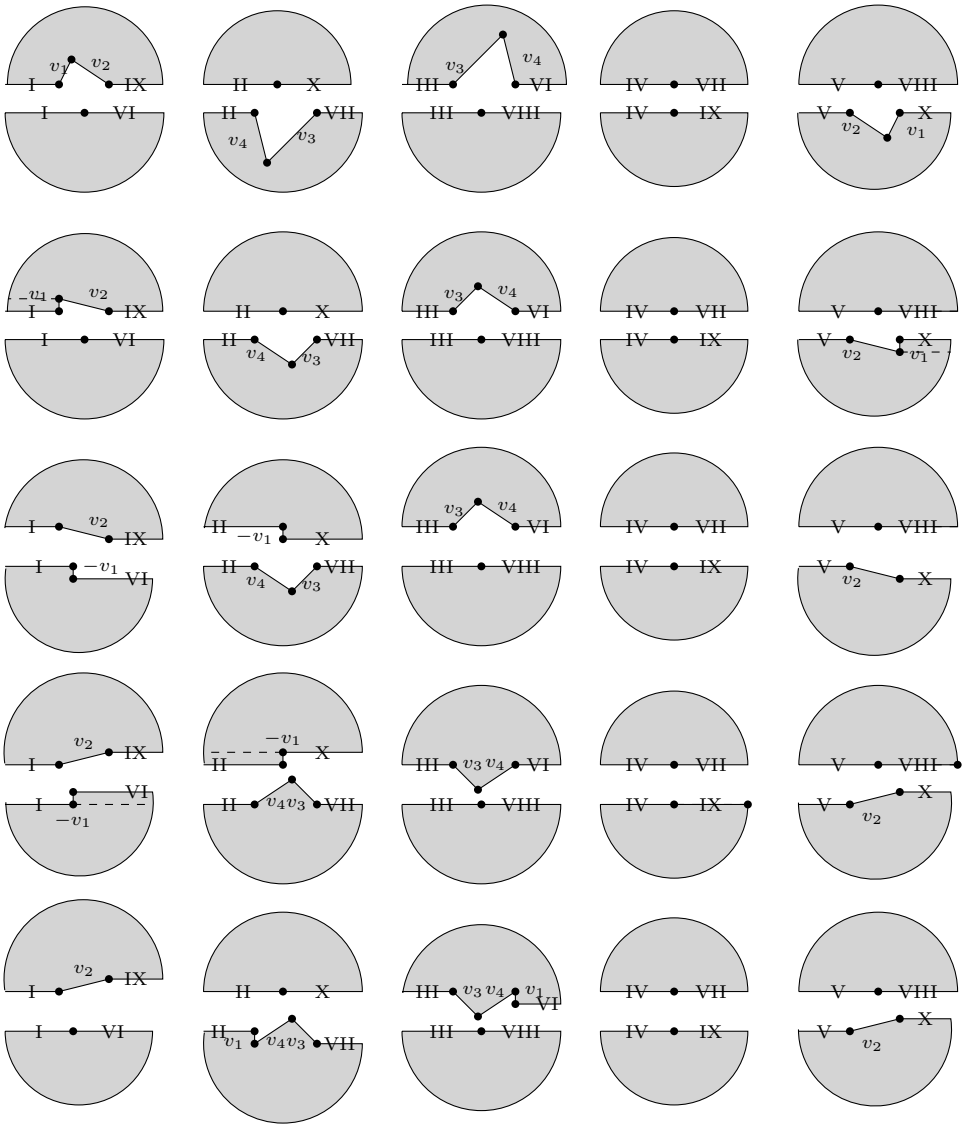

FIGURE 6. 沿着最陡鞍连接起舞

在（X，ω）中，腰曲线必然彼此平行，因此施加了条件 $v_{2j-1}+v_{2j}=m_j$(
v_1+v_2)，其中 $m_j\in\mathbb{R}$。类似地，舞动之后，我们通过拉出创建圆柱，这意味着对于 $n_j\in\mathbb{R}$ 和 $j=1,\ldots\ldots,\ d/2$，有 $v_{2j-1}+v_{2j+2}=n_j$(v_1+v_4)。

这些方程的唯一解是 $k_j=l_j=m_j=n_j=1$，对所有 j 均成立。因此，由 M 参数化的所有平坦曲面都存在一个覆盖映射，将其映到一个平坦曲面；该曲面的 Boissy 区域边界上恰有两条鞍连接。因此，由 (X，ω) 生成的 Teichm¨uller 曲线属于命题中列出的显而易见的情形之一；这些情形根据覆盖映射的像中零点（和极点）的数量以及覆盖次数加以区分。□

定理 *1.1* 的证明结合第 3.3 节中的命题 3.4 和本节（第 3.4 节）的一系列引理，即告完成。

附录：一个 $\mathbb{R}$-线性非代数流形

作者：Benjamin Bakker和 Scott Mullane

$\mathbb{R}$-线性流形是微分分层中的一个子流形，其局部由周期坐标中的齐次实线性方程定义。它们的重要性源于多方面的联系，包括多边形台球、具有实乘法的雅可比簇以及动力学刚性。在本附录中，我们给出一个亚纯分层中 $\mathbb{R}$-线性流形的简单例子，它不是代数的，从而表明，[Fil16] 全纯分层中这些轨迹的代数性并不能推广到亚纯情形。

对于 $\mu=（m_1，\ldots\ldots，\ m_n）$ 这一 $2g-2$ 的整数分拆，μ 型微分的分层在集合论意义上是平坦曲面或带标记光滑曲线与 μ 型亚纯微分构成的配对的模空间，

$$\Omega\mathcal{M}_{g,n}(\mu):=\{(X,\omega,p_1,\ldots,p_n)\mid(X,p_1,\ldots,p_n)\in\mathcal{M}_{g,n},\ (\omega)_0-(\omega)_\infty=\sum m_ip_i\}.$$

虽然这些分层作为 Hodge 丛的分层继承了代数结构，但对微分 ω 积分后，会得到 X 的表示：它在 ω 的极点处穿孔，并呈现为复平面中的多边形，边与边之间通过平行识别粘合。因此，在一点处，选取相对同调 $H_1（X\backslash P，\ Z，\ \mathbb{Z}）$ 的一组基，即可得到复解析拟轨形结构，其中 Z 和 P 分别是 ω 的零点和极点。这组基通过平坦联络在局部延拓，而通过对微分沿这组基积分，便可得到称为周期坐标的局部拟轨形坐标。

例如，图 7 展示了分层 $\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2)$ 中三个不同平坦曲面的多边形表示。在这种情况下，Z 和 P 都是单点集，而该分层中的平坦曲面可以表示为两个折线形半平面，其平行边按如下方式粘合。线段对 a 和 b 按标记进行粘合，向左延伸的两条无穷半射线彼此粘合，向右延伸的两条无穷半射线也彼此粘合。由此得到一个顶点，其锥角为 6π，它是微分的唯一二重零点；曲面在无穷远处有一个穿孔，该处是微分的唯一二重极点。在 $\mathbb{C}$ 中改变 a 和 b，并满足条件 Re(a),Re(b) >0，即可为分层 $\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2)$ 中的一个局部图提供周期坐标。图 7 右侧的平坦曲面

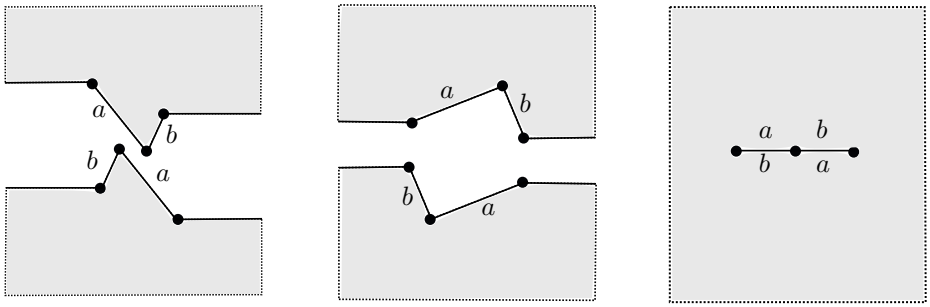

FIGURE 7. $\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2)$ 中的三个平坦曲面

是通过在此图中设定 $a=b=1$ 并粘合无穷半射线得到的。于是，该平坦曲面的多边形表示为一个无限平面，其中有两条狭缝，其相对两侧按标记粘合。

现在考虑分层 $\Omega\mathcal{M}_{1,4}(2,-2,0,0)$，它进一步允许两个虚零点，并令 π 为到 $\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2)$ 的遗忘映射，该映射会遗忘这两个点。我们得到图 7 右侧平坦曲面上 π 的纤维的周期坐标 $(\mathbb{C}\backslash\{0,1,2\})^2\backslash\Delta$，其中 Δ 表示对角线，并将 a 和 b 分别识别为开区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$。令$u-v=1$，即可得到一个局部 $\mathbb{R}$-线性条件，接下来需要考虑闭包。唯一的单值化来自让虚零点穿过狭缝通道，即当点穿过通道 $(0,1)\cup(1,2)$ 时，坐标 (u,v) 会发生变化。例如，图 8 展示了对于任意 $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 和 $k\neq -1$，轨迹 $u-v=k$ 和 $u-v=k+1$ 如何相连。此外，同时让两个虚零点穿过狭缝，可使轨迹$u-v=-1$ 和 $u-v=1$ 相连。因此，在分层 $\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2,0,0)$ 中，我们得到一个不可约的 $\mathbb{R}$-线性流形 $\mathcal{T}$，它是由 $u-v\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 切出的轨迹的 $\mathbb{C}^*$-轨道。

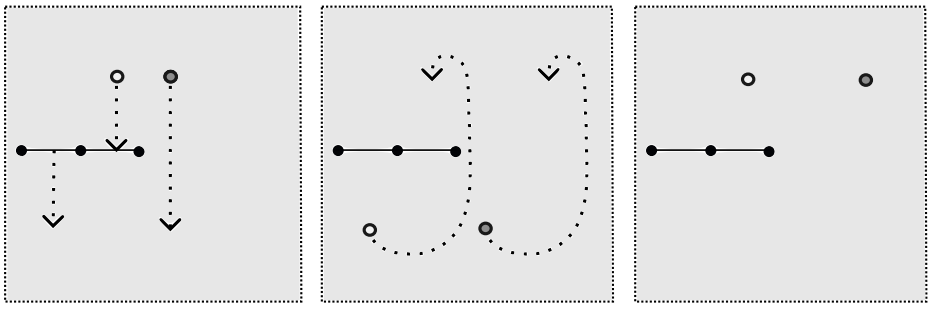

FIGURE 8. 在线性流形 $\mathcal{T}$ 内部

然而，遗忘映射 $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ 经过一个仅含一个虚零点的分层进行分解，也就是说，先遗忘 p_4，然后再遗忘 p_3:

$$\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2,0,0)\xrightarrow{\pi_1}\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2,0)\xrightarrow{\pi_2}\Omega\mathcal{M}_{1,2}(2,-2)$$

固定 $a = b = 1$ 和 $u = c \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1, 2\}$，并允许 v 在 $\mathbb{C}\backslash\{0, 1, 2, c\}$ 中变化，我们得到 π_2 的一个纤维，因此它是代数的。然而，该纤维与 $\mathcal{T}$ 相交于无穷多个点，这些点由 $u = c$、$a = b = 1$、$v = c + k \neq 0$,1,2 给出，其中 $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，这与 $\mathcal{T}$ 的代数性相矛盾。

References

[AW21] P. Apisa 和 A. Wright.《平移曲面上的标记点》。载于：Geom. Topol. 25.6（2021），第 2913–2961 页。[BCGGM] M. Bainbridge、D. Chen、Q. Gendron、S. Grushevsky 和 M. M¨oller。《多尺度微分的模空间》。预印本，2019。arXiv：1910.13492。[BDG22] F. Benirschke、B. Dozier 和 S. Grushevsky.《微分分层的线性子簇方程》。载于：Geom. Topol. 26.6（2022），第 2773–2830 页。[BHM16] M. Bainbridge、P. Habegger 和 M. M¨oller.《三次曲面上的 Teichmüller 曲线与 $G_m^n \times G_a^n$ 中的几乎必然交》。载于：Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 124（2016），第 1–98 页。[BM10] I. Bouw 和 M. M¨oller.《Teichmüller 曲线、三角群与李雅普诺夫指数》。载于：Ann. of Math. (2) 172.1（2010），第 139–185 页。[Boi15] C. Boissy.《亚纯微分模空间分层的连通分支》。载于：Comment. Math. Helv. 90.2（2015），第 255–286 页。[Cal04] K. Calta.《二次曲面上的 Veech 曲面与完全周期性》。载于：J. Amer. Math. Soc. 17.4（2004），第 871–908 页。[EM18] A. Eskin 和 M. Mirzakhani.《模空间上 SL(2, $\mathbb{R}$) 作用的不变测度与平稳测度》。载于：Publ. Math. Inst. Hautes´Etudes Sci. 127（2018），第 95–324 页。[EMM15] A. Eskin、M. Mirzakhani 和 A. Mohammadi.《模空间上 SL(2, $\mathbb{R}$) 作用的孤立性、等分布与轨道闭包》。载于：Ann. Math. (2) 182.2（2015），第 673–721 页。[EMMW20] A. Eskin、C. McMullen、R. Mukamel 和 A. Wright.《台球、四边形与模空间》。载于：J. Amer. Math. Soc. 33.4（2020），第 1039–1086 页。[Fil16] S. Filip.《仿射不变子流形上的混合霍奇结构分裂》。载于：Ann. Math. (2) 183.2（2016），第 681–713 页。[Fil22] S. Filip.《平移曲面：动力学与霍奇理论》。载于：（2022）。电子版：https: / /math .uchicago .edu / ~sfilip / public _files/surf_surv.pdf。[McM03] C. McMullen.《希尔伯特模曲面上的台球与 Teichmüller 曲线》。载于：J. Amer. Math. Soc. 16.4（2003），第 857–885 页。[McM05] C. McMullen.《二次曲面上的 Teichmüller 曲线：判别式与自旋》。载于：Math. Ann. 333.1（2005），第 87–130 页。[McM06a] C. McMullen.《Prym 簇与 Teichmüller 曲线》。载于：Duke Math. J. 133.3（2006），第 569–590 页。[McM06b] C. McMullen.《二次曲面上的 Teichmüller 曲线：挠除子与正弦比》。载于：Invent. Math. 165.3（2006），第 651–672 页。

[McM21] C. McMullen.《台球与 Teichmüller 曲线》。预印本，2021。电子版：https://people.math.harvard.edu/~ctm/papers/index.html。[MMW17] C. McMullen、R. Mukamel 和 A. Wright.《三次曲线与模空间中的全测地子簇》。载于：Ann. of Math. (2) 185.3（2017），第 957–990 页。[M¨ol06] M. M¨oller.《Teichmüller 曲线的霍奇结构变分》。载于：J. Amer. Math. Soc. 19.2（2006），第 327–344 页。¨MW[C. Matheus 和 A. Wright.《霍奇–Teichmüller 平面与 Teichmüller 曲线的有限性结果》。载于：Duke Math. J. 164.6（2015），第 1041–1077 页。¨MW[M. Mirzakhani 和 A. Wright.《仿射不变子流形的边界》。载于：Invent. Math. 209.3（2017），第 927–984 页。[MW18] M. Mirzakhani 和 A. Wright.《满秩仿射不变子流形》。载于：Duke Math. J. 167.1（2018），第 1–40 页。[Sch23] J. Schwab.《Gothic 轨迹的多尺度边界与拓扑不变量》。载于：（2023）。准备中。[SW04] J. Smillie 和 B. Weiss.《模空间上流的极小集》。载于：Israel J. Math. 142（2004），第 249–260 页。[Tah18] G. Tahar.《模曲线 $X_1(N)$ 的室结构》。载于：Arnold Math. J. 4.3-4（2018），第 459–481 页。[Tah20] G. Tahar.《带极点平坦曲面的 Veech 群》。载于：Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 29.1（2020），第 57–78 页。[Val12] F. Valdez.《Veech 群、无理台球与稳定阿贝尔微分》。载于：Discrete Contin. Dyn. Syst. 32.3（2012），第 1055–1063 页。[Vee89] W. Veech.《模空间中的 Teichmüller 曲线、艾森斯坦级数及其在三角形台球中的应用》。载于：Invent. Math. 97.3（1989），第 553–583 页。[War98] C. Ward.《有理三角形台球相关 Fuchsian 群的计算》。载于：Ergodic Theory Dynam. Systems 18.4（1998），第 1019–1042 页。[Zor06] A. Zorich.《平坦曲面》。载于：Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. 第 1 卷：On random matrices, zeta functions and dynamical systems。柏林：Springer-Verlag, 2006，第 439–586 页。

M. Möller: Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt, Robert-Mayer-Str. 6-8, 60325 Frankfurt am Main, Germany
Email address: moeller@math.uni-frankfurt.de

S. Mullane: Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Germany
Email address: scott.mullane@hu-berlin.de

B. Bakker: Dept. of Mathematics, Statistics, and Computer Science, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA.
Email address: bakker.uic@gmail.com