arXiv:2305.03322v1 [cs.LO] 5 May 2023

简单类型理论中的斯科伦化：逻辑与理论视角

Gilles Dowek*

Peter Andrews 于1971年提出了一个问题：为简单类型理论寻找斯科伦定理的类似形式。最初的想法导出了一条朴素规则，但它仅适用于带有选择公理的简单类型理论；十多年后，Dale Miller [9, 10] 才解决了一般情形。最近，我们与 Th´er`ese Hardin 和 Claude Kirchner [7] 一起，提出了一种新方法，用以证明不同但等价的简单类型理论表述形式下的米勒定理类似形式。

在这篇不包含新技术成果的论文中，我试图说明，斯科伦化问题及其各种解决方案的历史，体现了简单类型理论的两种观点之间的张力：逻辑观点与理论观点。

1 斯科伦化

1.1 斯科伦定理

令 $\mathcal{T}$ 为一阶谓词逻辑中的一个理论，其中包含一个形如以下形式的公理。

$$\forall x_1 ... \forall x_n \exists y \ A$$

并且令 $\mathcal{T}'$ 为将该公理替换为.....后所得到的理论

$$\forall x_1 ... \forall x_n \ ((f(x_1, ..., x_n)/y)A)$$

其中，f 是一个未在 $\mathcal{T}$ 中使用的函数符号。于是，斯科伦定理断言，理论 $\mathcal{T}'$ 是理论 $\mathcal{T}$ 的保守扩张；特别是，一个理论矛盾，当且仅当另一个理论也矛盾。

1.2 将斯科伦定理扩展到简单类型论

斯科伦定理在自动定理证明中发挥着关键作用，因为它能够消除待证明或待证伪命题中的量词交替，而这种交替往往难以处理。这也解释了为什么，

*巴黎综合理工学院与法国国家信息与自动化研究所（INRIA），LIX，´巴黎综合理工学院，法国帕莱索 91128 Cedex。 gilles.dowek@polytechnique.fr

1971年，为了寻求将归结方法推广到简单类型理论， [2], Peter Andrews提出了为简单类型理论寻找斯科伦定理类比的问题。

根据一阶谓词逻辑中的斯科伦定理，我们可以尝试将形如

$$\forall x_1 ... \forall x_n \exists y\ A$$

的公理替换为，其中 x_1、...、 x_n 和 y 是类型为 T_1、...、 T_n 和 U 的变量，

$$\forall x_1 ... \forall x_n\ (((f\ x_1\ ...\ x_n)/y)A)$$

其中 f 现在是一个类型为 $T_1 \to ... \to T_n \to U$ 的新常量。遗憾的是，以这种方式得到的理论 $\mathcal{T}'$ 并不总是理论 $\mathcal{T}$ 的保守扩张。例如，无法从公理 $\forall x\ \exists y\ (P\ x\ y)$ 证明命题 $\exists g\ \forall x\ (P\ x\ (g\ x))$；因为正如 Peter Andrews 在 1972 [3], 中再次证明的，选择公理

$$(\forall x\ \exists y\ (P\ x\ y)) \Rightarrow (\exists g\ \forall x\ (P\ x\ (g\ x)))$$

在简单类型理论中不可证。但显然可以从该公理的 Skolem 化形式 $\forall x\ (P\ x\ (f\ x))$ 证明这个命题。因此，尽管这种朴素的斯科伦化可以用于扩展了选择公理的简单类型理论，却不能用于通常形式的简单类型理论，即不包含选择公理的简单类型理论。

Dale Miller 于 1983年提出了一种限制更严格的斯科伦化形式。在米勒定理中，Skolem 符号 f 不仅被赋予类型$T_1 \to ... \to T_n \to U$，还被赋予元数 $\langle T_1, ..., T_n, U\rangle$；与通常的函数类型符号不同，Skolem 符号本身并不是项。要构造一个含有元数为 $\langle T_1, ..., T_n, U\rangle$ 的 Skolem 符号 f的项，必须将其应用于类型为 $T_1, ..., T_n$的项 $t_1, ..., t_n$；这些项称为该符号 f的必要参数。这体现了一种直觉：在否定选择公理的模型中，对于每个 n-元组 $t_1, ..., t_n$，我们可能都有对象 $(f\ t_1\ ...\ t_n)$，却没有函数 f 本身作为对象。

由于符号 f 不是项，因此不能将其用作证明命题 $\exists g\ \forall x\ (P\ x\ (g\ x))$的见证。不过，这一限制还不够，因为虽然不能将符号 f 用作见证，但可以将项 $\lambda z\ (f\ z)$用作见证；规范化后会得到相同的结果： $\forall x\ (P\ x\ (f\ x))$。这解释了 Miller 为何引入第二项限制：Skolem 符号必要参数中的自由变量，不能在量词规则中替换某个变量的项内，被更高处的 λ-抽象所约束。

有了这两项限制，米勒得以给出一个类似于斯科伦定理的句法证明：任何使用该公理的证明

$$\forall x_1 ... \forall x_n\ (((f\ x_1\ ...\ x_n)/y)A)$$

且其结论中不使用符号 f，便可将其转换为使用该公理的证明

$$\forall x_1 ... \forall x_n \exists y\ A$$

2 逻辑与理论视角

简单类型理论也称为高阶逻辑。这两个名称反映了这种形式体系有时被视为一种理论，有时被视为一种逻辑。作为一种理论，它应与其他理论相比较，例如算术或集合论。作为一种逻辑，它应与其他逻辑相比较，尤其是一阶谓词逻辑；从历史上看，一阶谓词逻辑是它的一种限制形式。

从逻辑的角度来看，自然会尝试将一阶谓词逻辑中已知的定理和算法（例如 G¨odel 完备性定理、斯科伦定理、归结方法等）扩展到高阶谓词逻辑。但从理论的角度来看，更自然的做法是尝试将简单类型理论表示为一阶谓词逻辑中的公理化理论，并将这些定理和算法应用于这一特定理论。

逻辑观点与理论观点之间的这种张力，体现在 J. Alan Robinson 与 Martin Davis 于 1968 年的一次讨论中 [11, 5]。Robinson 将一阶谓词逻辑称为“受限谓词演算”，将高阶逻辑称为“完全谓词演算”；而 Davis 则回应说，将简单类型理论表述为一阶谓词逻辑中的一个理论是一件简单的事情，并将这种用一阶谓词逻辑表达的理论称为“具有标准表述的理论”。

逻辑视角一直主导着简单类型理论的发展史：Henkin 模型、高阶归结……都是专为简单类型理论设计的，而非针对一类以一阶谓词逻辑表述、简单类型理论只是其中一个实例的理论。直到最近，人们才通过用一阶谓词逻辑表述简单类型理论，为 Henkin 模型带来了新的视角；正如 Martin Davis [5], 所预见的，这种表述也为高阶合一、证明搜索算法、切消定理、构造性证明的函数解释……以及米勒定理带来了新的视角。

事实上，正如 [7], 所示，将简单类型理论表述为一阶谓词逻辑中的一个理论，就可以应用斯科伦定理，并由此重构米勒定理。

3 简单类型理论作为一阶谓词逻辑中的一个理论

我们将把简单类型理论表述为带等号的多排序一阶谓词逻辑中的一个理论。如果需要单排序表述，则可以采用常用的相对化方法。

3.1 类型

由于在简单类型理论中，函数和谓词都是对象，因此该理论的类型不仅包括简单类型理论的基类型 ι 和 o，还包括其所有类型： ι、 o、 $\iota \to \iota$、 $\iota \to o$、 $o \to o$、……

与通常的多排序一阶谓词逻辑一样，项被赋予一个排序，函数符号和谓词符号被赋予一个排序元组，称为元数或秩。如果 f 是元数为 $\langle T_1, ..., T_n, U\rangle$ 和 $t_1, ..., t_n$ 是排序为 $T_1, ..., T_n$ 的项，那么 $f(t_1, ..., t_n)$ 是一个排序为 U 的项；如果 P 是元数为 $\langle T_1, ..., T_n\rangle$ 的谓词符号，t_1 和 $t_n, ..., T_1$ 是排序为 $T_n, ..., P$ 的项，那么 $t_1(t_n, ...)$ 是一个原子命题。

3.2 符号

众所周知，将谓词 P 变为对象，需要引入系词 $\in$，并将原先写作 $P(a)$ 的内容写成 $a \in P$。同样地，将函数 f 变为对象，需要引入应用符号 α，并将原先写作 $f(a)$ 的内容写成 $\alpha(f, a)$。

在简单类型理论中，对于每一对类型 T、U，我们需要一个元数为 $\langle T \to U, T, U\rangle$ 的函数符号 $\alpha_{T,U}$，以及一个元数为 $\langle o\rangle$ 的谓词符号 ε，以将类型为 o 的项 t 提升为命题 $\varepsilon(t)$。

例如，如果 P 是类型为 $T \to o$ 的项，而 t 是类型为 T 的项，那么通常写作 $P(t)$ 的命题并不像集合论中那样写作 $t \in P$，而是写作 $\varepsilon(\alpha_{T,o}(P, t))$：其中，先使用函数符号 $\alpha_{T,o}$ 将 P 应用于 t，构造出一个类型为 o 的项，然后再使用谓词符号 ε 将其提升为命题。同样地，通常写作 $\forall P\ (P \Rightarrow P)$ 的命题写作 $\forall p\ (\varepsilon(p) \Rightarrow \varepsilon(p))$。

接下来，我们需要用于构造表示函数和谓词的项的符号。在一阶谓词逻辑中无法引入约束符号 λ，因此我们必须对 λ 演算采用一阶编码。一种简单的解决方案是使用组合子 S 和 K。因此，对于每组三元类型 T、U、V，我们引入一个类型为 $(T \to U \to V) \to (T \to U) \to T \to V$ 的常量 $S_{T、U、V}$；对于每对类型 T、U，我们引入一个类型为 $T \to U \to T$ 的常量 $K_{T、U}$。最后，我们还需要类似的组合子来构造类型为 o 的项。因此，我们引入类型为 $T \to T \to o$、$\top$ 的常量 $\doteq_T$，以及类型为 $o \to o$、$\dot{\wedge}$、$\dot{\vee}$ 的 $\dot{\bot}$ 和类型为 $o \to o \to o$、$\forall_T$ 的 $\dot{\Rightarrow}$，还有类型为 $(T \to o) \to o$ 的 $\exists_T$。当然，其中一些符号是冗余的，可以利用德摩根定律由其他符号定义。遵循 Leon Henkin 和 Peter Andrews [8, 1] 的思想，也可以从等号 $\doteq_T$ 定义所有这些符号。

如果可以根据上下文还原指标，则可省略指标。

3.3 公理

最后，我们需要一些公理来表达这些符号的含义。除了等式公理外，我们还采用以下公理

$$\forall x \forall y \forall z\ (\alpha(\alpha(\alpha(S, x), y), z) = \alpha(\alpha(x, z), \alpha(y, z)))$$

$$\forall x \forall y\ (\alpha(\alpha(K, x), y) = x)$$

$$\forall x \forall y\ (\varepsilon(\alpha(\alpha(\doteq, x), y)) \Leftrightarrow (x = y))$$

$$\varepsilon(\dot{\top}) \Leftrightarrow \top$$

$$\varepsilon(\dot{\bot}) \Leftrightarrow \bot$$
$$\forall x\ (\varepsilon(\alpha(\dot{\neg}, x)) \Leftrightarrow \neg\varepsilon(x))$$
$$\forall x \forall y\ (\varepsilon(\alpha(\alpha(\dot{\wedge}, x), y)) \Leftrightarrow (\varepsilon(x) \wedge \varepsilon(y)))$$
$$\forall x \forall y\ (\varepsilon(\alpha(\alpha(\dot{\vee}, x), y)) \Leftrightarrow (\varepsilon(x) \vee \varepsilon(y)))$$
$$\forall x \forall y\ (\varepsilon(\alpha(\alpha(\dot{\Rightarrow}, x), y)) \Leftrightarrow (\varepsilon(x) \Rightarrow \varepsilon(y)))$$
$$\forall x\ (\varepsilon(\alpha(\dot{\forall}, x)) \Leftrightarrow \forall y\ \varepsilon(\alpha(x, y)))$$
$$\forall x\ (\varepsilon(\alpha(\dot{\exists}, x)) \Leftrightarrow \exists y\ \varepsilon(\alpha(x, y)))$$

照例，我们可以在这些公理之外加入外延性公理、无穷公理、描述公理和选择公理。

为了回顾我们采用组合子来表示项的选择，我们将该理论称为 HOL-SK。

3.4 性质

对 t 的结构进行简单归纳，可以证明：对于每个项 t，存在一个项 u，使得命题

$$\alpha(u, x) = t$$

$\hat{}$ 是可证明的。项 u 通常记作 $\lambda x\, t$。同样地，对 P 的结构进行简单归纳，可以证明：对于每个命题 P，存在一个项 u，使得命题

$$\varepsilon(u) \Leftrightarrow P$$

是可证明的。

这样，我们就可以将带有 λ-演算的简单类型理论通常表述中的所有项翻译为 HOL-SK 中的项，并证明：如果 t 是排序为 o 的项，而 t' 是其翻译，那么在简单类型理论的通常表述中，t 可证明，当且仅当在 HOL-SK 中 $\varepsilon(t')$ 可证明。然而，该定理要求将外延性公理添加到两个理论中，因为组合子 S 和 K 并不能精确地模拟 λ-演算，而只能在外延性意义下进行模拟。

4 斯科伦化

作为斯科伦定理的推论，我们得到：如果 $\mathcal{T}$ 是一个包含如下形式公理的理论

$$\forall x_1 ... \forall x_n \exists y\ A$$

其中 x_1、.....、 x_n 和 y 是类型分别为 T_1、.....、 T_n 和 U 的变量，而 $\mathcal{T}'$ 是通过将该公理替换为以下内容而得到的理论

$$\forall x_1 ... \forall x_n\ ((f(x_1, ..., x_n)/y)A)$$

那么 HOL-SK$\cup\mathcal{T}'$ 是 HOL-SK $\cup\mathcal{T}$ 的保守扩张。

符号 f 是一个元数为 $\langle T_1、.....、T_n、U\rangle$ 的函数符号，而不是类型为 $T_1 \to ... \to T_n \to U$ 的常量，首先是因为一阶谓词逻辑中的斯科伦定理引入的是函数符号而不是常量，其次是因为它忽略了类型的内部结构。因此，单独的符号 f 不是一个项，将符号 f 应用于项 $t_1、.....、t_n$ 所得到的项是 $f(t_1、.....、t_n)$，而不是格式错误的项 $\alpha(...\alpha(f,t_1)\ .....,t_n)$。相反，当类型 U 具有 $V \to W$ 的形式时，项 $f(t_1、.....、t_n)$ 可以使用应用符号进一步应用于项 t_{n+1}： $\alpha(f(t_1、.....、t_n)\ t_{n+1})$。

简而言之，Skolem 符号不在符号 S 或 K 的层次，而是在符号 $\alpha_{T,U}$ 的层次。

由此，我们证明了一个适用于 HOL-SK 的米勒定理类比版本。在这一表述中，米勒的第二个条件不复存在，因为没有绑定符 λ。剩下的只有第一个条件：Skolem 符号必须被应用这一事实。ˆ 不过请注意，对于所有包含符号 f 的项 t，项 $\lambda x\ t$ 并非都能定义；只有当变量 x 没有出现在符号 f 的某个参数中时，才能定义。

将简单类型理论表示为一阶谓词逻辑中的一个理论，其优点在于米勒定理的证明会更加简洁，因为此时该定理可作为斯科伦定理的推论得出。此外，这也表明，元数并非 Skolem 符号独有的特征；所有函数符号都有元数，尤其是符号 $\alpha_{T,U}$ 和 Skolem 符号。

5 米勒的第二个条件

我们可能会想，能否更进一步，将米勒的第二个条件重构为一阶谓-词逻辑的斯科伦定理的推论。正如我们将看到的，这是可行的，但需要对 λ-演算采用更精确的一阶编码：即 Nicolaas de Bruijn [6] 引入的、使用无名占位符的 λ-演算。

5.1 DeBruijn 指标

在一个 λ-项中，我们可以为每个约束变量的出现附加一个自然数，用以表示将该出现与其绑定者分隔开的抽象数量。例如，为项添加指标

$$\lambda x \lambda y\ (x\ \lambda z\ (y\ x\ z))$$

得到

$$\lambda x \lambda y\ (x^2\ \lambda z\ (y^2\ x^3\ z^1))$$

确实，变量 z 这次出现的指标是 1，因为绑定符 λz 在项中恰好高一层；而变量 x 第二次出现的指标是 3，因为绑定符 λx 在高三层的位置。一旦这些指标

以这种方式添加后，绑定变量的名称便无关紧要，可以省略。于是我们得到项

$$\lambda\lambda\ (_^2\ \lambda\ (_^2\ _^3\ _^1))$$

请注意，项 $\lambda x \lambda y\ (x\ \lambda z\ (y\ x\ z))$ 是闭项，但其子项 $\lambda y\ (x\ \lambda z\ (y\ x\ z))$ 含有一个自由变量 x。同样，在项 $\lambda\lambda\ (^2\ \lambda(^2\ ^3\ ^1))$ 中，所有德布鲁因指标都指向某个绑定子，但其子项 $\lambda\ (^2\ \lambda\ (^2\ ^3\ ^1))$ 包含两个“自由指标”，它们超出了其上方绑定子的数量，并对应于变量 x 先前出现的位置。

带德布鲁因指标的 λ-演算是一种一阶语言，因为去掉变量名后，符号 λ 不再是绑定子。这种语言由无限多个常量 $^1, ^2, ^3, ...$、用于应用的二元函数符号 α 以及一元函数符号 λ 构成。闭项（如 $\lambda\ (^2\ \lambda\ (^2\ ^3\ ^1))$ 或 $_1$）可能含有自由指标，即超出其上方绑定子数量的指标。

5.2 类型

对一个开放的 λ-项 `进行丘奇式类型检查时，也就是说，绑定变量都显式标注了类型，例如

$$\lambda y_{((\iota\to\iota)\to\iota)\to\iota\to\iota}\ (x\ \lambda z_\iota\ (y\ x\ z))$$

必须有一个上下文来定义自由变量的类型，例如x。事实上，如果 x 被赋予类型 $(\iota \to \iota) \to \iota$，那么该项就是类型良构的；但如果赋予它例如 ι 这样的类型，则不是。

同样，对可能含有自由德布鲁因指标的项进行类型检查时，即使该项是闭合的（也就是说不含命名变量），我们也需要一个上下文来定义那些超出其上方绑定子数量的德布鲁因指标的类型。这个上下文是一个有限类型列表：超出其上方绑定子数量 1 的指标的类型、超出 2 的指标的类型，依此类推。例如，项

$$\lambda_{((\iota\to\iota)\to\iota)\to\iota\to\iota}\ (_^2\ \lambda_\iota\ (_^2\ _^3\ _^1))$$

在上下文 $[(\iota \to \iota) \to \iota]$ 中具有类型 $(((\iota \to \iota) \to \iota) \to \iota \to \iota) \to \iota$。

因此，即使它是闭项，一个项 t 也只能相对于一个上下文 Γ被赋予类型 T。换句话说，可以绝对地为它赋予一个由上下文 Γ 和类型 T组成的有序对。我们将这样的有序对写作 $\Gamma \vdash T$。

当我们将简单类型理论表达为一阶理论时，使用带有德布鲁因指标的 λ 演算作为 λ 演算的一阶编码时，排序不仅仅是简单类型（如 HOL-SK 中那样），而是由一个简单类型列表 Γ 和一个简单类型 T 构成的此类对 $\Gamma \vdash T$。

在此表述中，与经过 λ 抽象的变量不同，量化变量不会被德布鲁因指标替换，而是如同所有以一阶谓词逻辑表达的理论一样，保留为标准的命名变量，并被赋予形如 $\vdash T$ 的排序，其中上下文为空列表。

构造这一理论的最后一步是引入显式替换，因此它得名为 HOL-$\lambda\sigma$。这里我不想深入探讨这些细节，有兴趣的读者可以参阅 [7]。不过，我想强调两点。第一，这一理论有意与通常采用 λ-演算的简单类型理论表述等价，即使不假设外延性公理也是如此。第二，如上所述，类型是对 $\Gamma \vdash T$，也就是说，它们包含作用域信息。尤其是，类型为 $\vdash T$ 且上下文为空的项是德布鲁因闭合的，也就是说，它们不包含可能在项中更高处由 λ-抽象绑定的指标。

5.3 斯科伦化

作为Skolem定理的推论，我们得到：如果 $\mathcal{T}$ 是一个包含如下形式公理的理论

$$\forall x_1 ... \forall x_n \exists y \ A$$

其中，x_1、...、x_n 和 y 是类型为 $\vdash T_1$、...、$\vdash T_n$ 和 $\vdash U$ 的变量，而 $\mathcal{T}'$ 是通过将该公理替换为

$$\forall x_1 ... \forall x_n \ ((f(x_1, ..., x_n)/y)A)$$

那么，HOL-$\lambda\sigma \cup \mathcal{T}'$ 是 HOL-$\lambda\sigma \cup \mathcal{T}$ 的保守扩张。符号 f 是一个元数为 $\langle \vdash T_1, ..., \vdash T_n, \vdash U \rangle$ 的函数符号。因此，不仅 f 是一个函数符号，而且是一个参数不得包含可能被项中更高位置的 λ-抽象绑定的指标的函数符号。这样我们就得到了恰好是米勒条件的条件。第一条被改述为 f 是一个函数符号这一事实，第二条则被改述为这些函数符号的参数必须具有上下文为空的排序这一事实。

这样，我们便得到了 HOL-$\lambda\sigma$ 的米勒定理的另一种证明，它是斯科伦定理的推论。

米勒定理的一个难点在于，项和命题的一般构造规则，与量词规则中代入变量的项所遵循的较严格规则之间存在差异。正如我们所见，Skolem 符号的必要参数中自由出现的变量，不能在代入变量的项中被约束。但这一限制并不适用于一般的项和命题；因为如果适用，经过斯科伦化的公理本身就不符合良构条件，因为该公理中 Skolem 符号的参数是全称量化绑定变量。

在 HOL-$\lambda\sigma$ 中，情况略有不同。量词规则中替换变量的项，其构造规则与其他项相同。但对 λ 约束变量和量化变量的处理方式有所不同。正如我们所见，λ 约束变量会被替换为德布鲁因指标，而量化变量则保留为命名变量，这与所有用一阶谓词逻辑表达的理论一样。因此，λ 约束变量不能出现在 Skolem 符号的参数中，但量化变量可以；这样一来，Skolem 化后的公理便是良构的。

6 从理论角度看

通过这个斯科伦化的例子，我们看到了从简单类型理论的理论视角出发的两个优势。首先，定理的证明得到了简化，因为我们可以利用已经为一阶谓词逻辑证明过的类似定理。其次，这些定理中的一些难点也因此得到了解释。

我们还可以列举其他一些通过这种方式得到简化和阐释的定理与算法。例如，亨金完备性定理（Martin Davis 于 1968 年已提及）、独立性结果，尤其是外延性公理的独立性结果、切消定理（包括基于模型的方法和基于约简的方法）、证明搜索算法，以及构造性证明的函数解释。

关于简单类型理论的这些不同观点本身，就是科学发展过程中一种常见的反复往复运动的例证：首先，人们发现了新的对象和新的结果，这些发现打破了旧有框架，而旧有框架原本被认为无法容纳它们。随后，经过一般框架可能发生的演变，这些新对象又被重新纳入其中。我们可以尝试理解，为了整合简单类型理论，一阶谓词逻辑需要或应当经历何种演变。

第一个演变是从单排序一阶谓词逻辑向多排序一阶谓词逻辑的转变。尽管始终可以将多排序理论相对化为单排序理论，但表达简单类型理论的自然框架是多排序一阶谓词逻辑。有趣的是，早期关于多排序一阶谓词逻辑的论文，例如 [12]，已经以希望借助多排序一阶谓词逻辑来表达简单类型理论为由，论证了引入多排序一阶谓词逻辑的合理性。

第二种演变是考虑将项和命题视为在归约下等价。HOL-SK（以及 HOL-$\lambda\sigma$）的公理可以很容易地转化为重写规则：

$$\alpha(\alpha(\alpha(S,x),y),z) \longrightarrow \alpha(\alpha(x,z),\alpha(y,z))$$

$$\alpha(\alpha(K,x),y) \longrightarrow x$$

$$\varepsilon(\alpha(\alpha(\doteq,x),y)) \longrightarrow x = y$$

$$\varepsilon(\dot{\top}) \longrightarrow \top$$

$$\varepsilon(\dot{\bot}) \longrightarrow \bot$$

$$\varepsilon(\alpha(\dot{\neg},x)) \longrightarrow \neg\varepsilon(x)$$

等等，与其保留这些公理本身，不如识别等价命题，这样更自然；正如在简单类型理论的通常表述中，将项和命题化为 β 规范形式，比将 β 转换保留为公理更自然。这一想法促成了模推演的发展，而模推演最初同样是为了在其中表达简单类型理论。

第三个发展是在一阶谓词逻辑中引入绑定子。尽管这近期已成为热门话题，但可以公允地说，我们尚未得到一个完全令人满意的、包含此类绑定子的扩展一阶谓词逻辑。

最后，我想提及 Peter Andrews 的著作、课程和书籍 [4], 对简单类型理论理论观点兴起的影响（不过，除了我自己，我不会把任何观点归于其他人）。首先，值得注意的是，在他的课程中，Peter Andrews 不仅将简单类型理论与一阶谓词逻辑相比较，还特别将其与集合论相比较；他坚持认为，这两种理论都是对朴素且不一致的、具有完全概括公理的集合论所作的限制。从更技术的角度来说，Peter Andrews 给出的 Henkin 模型的另一种刻画 [3]，为摆脱 Henkin 模型中那些神秘的条件——即所有 λ 项都必须有指称——指明了出路，转而采用一个标准条件：公理 S 和 K 必须有效。由此便产生了这样的想法：Henkin 模型不过是某个以一阶谓词逻辑表达的理论的模型。

7 致谢

作者谨此感谢 Claude Kirchner 和 Dale Miller 对本文早期版本提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Peter B. Andrews。《命题类型理论公理的简化》。Fund. Math., 52:345–350，1963 年。[2] Peter B. Andrews。《类型论中的归结》。《符号逻辑杂志》，36(3):414–432，1971 年。[3] Peter B. Andrews。《类型论中的一般模型、描述与选择》。《符号逻辑杂志》，37(2):385–394，1972 年。[4] Peter B. Andrews。《数理逻辑与类型论导论：通过证明走向真理》。学术出版社，1986 年。[5] Martin Davis。对 [11]的特邀评论。载于《信息处理 68》，1968 年 IFIP 大会论文集，第 67–68 页。North-Holland，1969 年。[6] Nicolaas G. de Bruijn。《无名占位符的 λ 演算记法：一种自动公式处理工具及其在 Church-Rosser 定理中的应用》。《Indagationes Mathematicae》，34(5):381–392，1972 年。[7] Gilles Dowek、Th´er`ese Hardin 和 Claude Kirchner。《HOL-lambda-sigma：高阶逻辑的一种内涵式一阶表达》。《计算机科学中的数学结构》，11:1–25，2001 年。

[8] Leon Henkin. 命题类型论. Fund. Math., 52:323–344, 1963.[9] Dale Miller. 高阶逻辑中的证明. 博士论文，卡内基梅隆大学，1983年.[10]Dale A. Miller. 证明的紧凑表示. Studia Logica, 46(4):347–370, 1987.[11] J. Alan Robinson. 机械定理证明的新方向. 见信息处理 68，1968 年 IFIP 大会论文集，第 63–67 页. North-Holland, 1969.[12] Hao Wang. 多排序理论的逻辑. The Journal of Symbolic Logic, 17(2):105–116, 1952.