arXiv:2305.03330v1 [math.NA] 5 May 2023

多光谱CT中离散基函数正弦图解的存在性、唯一性与稳定性

高宇* 潘晓川† 陈冲‡

摘要

本研究探讨多光谱计算机断层成像（MSCT）中定量图像重建的条件，这仍是一个活跃的研究课题。在MSCT中，目标是从数据中获取被成像对象内给定X射线能量下线性衰减系数的空间分布，即虚拟单能图像（VMI）。由于VMI通常可分解为已知分解系数的基图像的线性组合，因此重建VMI等同于重建基图像。一种经验性的、但非常有效的数据域分解（DDD）方法已被开发出来，并广泛用于MSCT的定量图像重建。在两步DDD方法中，步骤（1）通过求解非线性变换，从数据中估计所谓的基函数正弦图；步骤（2）则根据估计得到的基函数正弦图重建基图像。随后，可通过将重建得到的基图像线性组合，直接获得VMI。由于步骤（2）涉及一个简单线性系统的求逆，步骤（1）是DDD方法的关键，其中需要对一个非线性系统求逆，以便从数据中估计基函数正弦图。本研究考虑步骤（1）中非线性系统的一种 $discrete$ 形式，并对离散非线性方程组解的存在性、唯一性和稳定性条件开展理论与数值分析，以准确估计离散基图像正弦图，进而实现MSCT中的VMI定量重建。

1 引言

多光谱计算机断层成像（MSCT）硬件与应用的进步，推动了对多光谱CT图像重建的研究兴趣不断增长。对于给定的X射线能量，人们希望在多光谱CT中定量确定扫描对象内部线性衰减系数（LAC）的空间分布，这也称为虚拟单能图像（VMI）。由于VMI被分解了

*中国科学院数学与系统科学研究院 LSEC、ICMSEC，中国北京 100190。中国科学院大学，中国北京 100049。

†美国伊利诺伊州芝加哥市芝加哥大学放射科，邮编 60637。

‡中国科学院数学与系统科学研究院 LSEC、ICMSEC，中国北京 100190。中国科学院大学，中国北京 100049。

通常可表示为已知分解系数的基图像的线性组合，因此，重建虚拟单能图像等同于重建基图像。开发用于重建多光谱计算机断层成像中基图像的算法（包括一步算法和两步算法），是计算机断层成像领域当前研究的重要课题。近年来，虽然人们已研究如何通过一步算法直接从数据 [26, 19, 6, 7, 8, 13],重建基图像，但研究两步数据域分解（DDD）方法仍具有理论和实践意义，因为该方法广泛用于双能计算机断层成像（双能计算机断层成像是多光谱计算机断层成像的一种特殊形式）中的基图像重建，而且这项研究可能为一步算法的开发带来有益启示。

在两步 DDD方法中，步骤（1）通过求解非线性变换，从数据中估计所谓的基底正弦图；步骤（2）则根据估计得到的基底正弦图重建基图像。随后，通过对重建得到的基图像进行线性组合，即可轻松获得虚拟单能图像。由于步骤（2）涉及对简单线性系统求逆，步骤（1）便构成了 DDD方法的关键环节，其中需要对非线性系统求逆，以便从数据中估计基底正弦图。因此，从理论和实践角度研究该非线性系统的解的存在性、唯一性和稳定性条件，具有重要意义。

已有研究探讨了步骤（1）中非线性系统的逆问题解的存在性、唯一性和稳定性条件，该研究以连续形式进行（见下文（3）），下文简称为连续非线性系统。Alvarez根据连续非线性系统的雅可比行列式为零，研究了其在双能CT中的可逆性 [1]。对于多光谱CT，Bal和Terzioglu [5] 最近对（3）中连续非线性系统的解的存在性、唯一性和稳定性条件进行了有趣的分析，并开展了数值研究，验证了该映射（即连续非线性系统）在某个闭矩形中是单射的。Ding等人还从连续视角为多能X射线变换的可逆性提供了一个充分条件[11]。

然而，在实际的多光谱CT中，所涉及的非线性系统和线性系统必须采用离散形式，因为基底正弦图、基图像和数据均为离散形式（见下文（7）和（8）），下文分别简称为离散线性系统和离散非线性系统。本文对离散非线性方程组（见下文（8））的解的存在性、唯一性和稳定性条件进行了理论和数值分析，以准确估计多光谱CT中的基底正弦图，因为文献中似乎缺乏此类分析。

本文结构安排如下。在上述引言之后，我们将在第2 节介绍连续和离散形式的数据模型，并在第3节介绍数学预备知识。接着，我们将在第4 节从理论上分析方程（9）中离散非线性方程组的解的存在性、唯一性和稳定性条件，然后在第5节进行数值研究，以验证理论结果。最后，我们将在第6节进行讨论并作出说明。

2 多光谱计算机断层成像中的数据模型

2.1 连续到连续（CC）数据模型

在多光谱CT中，对经过多种能谱扫描的物体进行测量，获得数据$s^{[q]}(E)$，其中$q=1,2,\ldots\ldots,Q$，且Q表示所涉及的不同谱的总数。对于给定的能谱[1]，，可沿X射线测量数据，每条射线由$l(\hat{\theta}^{[q]})$指定，其中$\hat{\theta}^{[q]}$表示射线方向。不存在其他物理因素时，测量数据可建模为

$$g_{l(\hat{\theta}^{[q]})}=\ln\int_0^{E_{\max}}s^{[q]}(E)\exp\left(-\int_{l(\hat{\theta}^{[q]})}\mu(\boldsymbol{y},E)\mathrm{d}l\right)\mathrm{d}E, \tag{1}$$

其中，能谱$s^{[q]}(E)$在能量范围内归一化，满足$\int_0^{E_{\max}}s^{[q]}(E)\mathrm{d}E=1$；$\mu(\boldsymbol{y},E)$表示空间位置$\boldsymbol{y}\in\Omega\subset\mathbb{R}^d$($d=2$或3)处感兴趣的、随能量变化的线性衰减系数，能量为$0<E<E_{\max}$，$E_{\max}$为扫描中的最大能量。线性衰减系数$\mu(\boldsymbol{y},E)$通常可分解为以下基图像的线性组合

$$\mu(\boldsymbol{y},E)=\sum_{k=1}^{K}b_k(E)f_k(\boldsymbol{y}), \tag{2}$$

其中，基图像$f_k(\boldsymbol{y})$仅是$\boldsymbol{y}$的函数，$b_k(E)$表示展开系数，$k=1,2,\ldots\ldots,K$，K为基图像的数量。例如，对于诊断双能CT中典型的X射线能量范围，通常选择$K=2$，因为光电效应和康普顿散射是导致$\mu(\boldsymbol{y},E)$的主要因素；$b_k(E)$表示第k个基材料的已知质量衰减系数（例如，水和骨）；$f_k(\boldsymbol{y})$表示第k个基材料[2, 16]的材料等效密度函数（或基图像）。

将（2）代入（1，得到

$$g_{l(\hat{\theta}^{[q]})}=\ln\int_0^{E_{\max}}s^{[q]}(E)\exp\left(-\sum_{k=1}^{K}b_k(E)x_k^{l(\hat{\theta}^{[q]})}\right)\mathrm{d}E, \tag{3}$$

其中

$$x_k^{l(\hat{\theta}^{[q]})}=\int_{l(\hat{\theta}^{[q]})}f_k(\boldsymbol{y})\mathrm{d}l. \tag{4}$$

我们将（3）称为连续到连续（CC）数据模型[7]，并将$x_k^{l(\hat{\theta}^{[q]})}$在（4）中称为连续基图像$f_k$（$\boldsymbol{y}$）的连续基正弦图，因为$\hat{\theta}^{[q]}$、$E$和$\boldsymbol{y}$均为连续变量。

利用（b_kE）和f_k（$\boldsymbol{y}$）在（2）中的知识，可以直接得到μ（$\boldsymbol{y}$，E），它也称为给定能量E下的虚拟单能图像。因此，在多光谱CT中，重建虚拟单能图像μ（$\boldsymbol{y}$，E等同于重建基图像f_k（$\boldsymbol{y}$），其中$k=1,\ldots,K$。

对于采用几何一致性扫描配置的多光谱CT，所有Q谱均使用相同的扫描几何结构采集数据，即$\hat{\theta}^{[q]}=\hat{\theta}$与$q$无关。

[1]计算机断层成像系统的有效能谱实际上是X射线管能谱与探测器能量响应的乘积。

两步DDD方法旨在用于几何一致性多层螺旋CT的图像重建，其中步骤（1）通过求解连续非线性系统（$x^{l(\hat{\theta}^{[q]})}$）来估计 k，其依据是 $g_{l(\hat{\theta}^{[q]})}$ 的知识；而步骤（2）则根据 $x^{l(\hat{\theta}^{[q]})}$）的知识，重建 f_k（$\boldsymbol{y}$），其中是通过求解连续线性系统（2）估计得到的。由于步骤（2）涉及求解连续线性系统，因此求解连续非线性系统的步骤（1）构成了DDD方法的关键组成部分。已有研究 [5, 4, 11] 报道了对连续非线性系统（3）的解的存在性、唯一性和稳定性条件的探究。

2.2 离散到离散（DD）数据模型

在实际成像中，数据只能针对离散射线和能量采集，而图像通常重建在由离散体素构成的数组上。考虑实际成像中的数据数组和图像数组，可以设计一种离散到离散（DD）数据模型 [7]，，该模型通常通过将特定的离散方案应用于式（3）中的连续到连续数据模型而建立。具体而言，采用一种离散方案，将能量范围 $[0, E_{\max}]$ 划分为 M 个大小相等的区间 Δ_E，同时将图像空间表示为大小为$I = I_x \times I_y \times I_z$ 的数组，该数组由大小为 $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$的相同立方体素组成。令$s_m^{[q]} = s\left(m\,\Delta_E\right)$ 和 $b_{km} = b_k\left(m\,\Delta_E\right)$，其中 $m = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ M$。

我们用大小为 I 的向量 $\boldsymbol{f}_k$ 表示离散基图像 k，并按 x、 y 和 z 的顺序进行拼接，其中第 f_{ki} 个元素表示体素 i 处离散基图像 k 的值，且 $i = 1$、2、...、I。我们还用大小为 I 的向量 $\boldsymbol{\mu}_m$ 表示能量为 m 时的虚拟单能图像，并按 x、 y 和 z 的顺序进行拼接，其中第 μ_{mi} 个元素表示体素 i 处离散虚拟单能图像 m 的值。观察式 (2)，可得离散虚拟单能图像 $\boldsymbol{\mu}_m$ 与离散基图像 $\boldsymbol{f}_k$ 之间的关系：

$$\mu_{mi} = \sum_{k=1}^{K} b_{km} f_{ki}. \tag{5}$$

我们假设，对于给定的能谱 $s^{[q]}(E)$，采集的数据包含由一组离散方向 $\hat{\theta}_j^{[q]}$ 指定的总计 J_q 条射线，其中 $j = 1$、 2、 ..... 、 J_q，而 $g_j^{[q]}$ 表示射线 j 的测量值。随后，我们可得到 DD数据模型：

$$g_j^{[q]} = \ln \sum_{m=1}^{M} s_m^{[q]} \exp\left(-\sum_{k=1}^{K} b_{km} x_{jk}^{[q]}\right) \quad \text{for } 1 \le j \le J_q, \tag{6}$$

其中 $\sum_{m=1}^{M} s_m^{[q]} \Delta_E = 1$，且

$$x_{jk}^{[q]} = \sum_{i=1}^{I} a_{ji}^{[q]} f_{ki} \tag{7}$$

称为离散基图像 k的离散基图像正弦图， $a_{ji}^{[q]}$ 表示应用于图像数组[9]中体素 i处离散基图像 k 的数值 f_{ki} 的权重，通常选为射线 j 与体素 i 的相交长度。众所周知 [20, 27, 25]，根据离散基图像正弦图

$\{x_{jk}^{[q]}\}$，可以求解式（7）中的离散线性系统，从而得到离散基图像 $\boldsymbol{f}_k$，进而可利用式（5）轻松获得离散虚拟单能图像 $\boldsymbol{\mu}_m$。

在诊断用多光谱CT和双能CT的应用中，采用几何一致的扫描配置，并针对每条射线采集所有 Q 不同的谱$s^{[q]}$（E）下的数据，即 $a_{ji}^{[q]}$ 和 J_q 对所有谱均相同，因此与谱无关。于是，我们可以用 a_{ji} 和 J 替换 $a_{ji}^{[q]}$ 和 J_q，因为它们与 q 无关，并将DD数据模型改写为

$$g_j^{[q]} = \ln \sum_{m=1}^{M} s_m^{[q]} \exp\left(-\sum_{k=1}^{K} b_{km} x_{jk}\right) \quad \text{for } 1 \le j \le J. \tag{8}$$

对于第 j条X射线，使用向量 $\boldsymbol{x}_j$ 和$\boldsymbol{g}_j$ 分别表示该射线对应的基函数正弦图和数据，其中 $\boldsymbol{x}_j = [x_{j1}, \ldots, x_{jK}]^{\mathsf{T}}$和$\boldsymbol{g}_j \ni [g_j^{[1]}, \ldots, g_j^{[Q]}]^{\mathsf{T}}$。我们将（8）重新表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{g}_j \quad \text{for } 1 \le j \le J, \tag{9}$$

其中非线性映射 $\boldsymbol{F}$: $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^Q$ 定义为 $\boldsymbol{F}$（$\boldsymbol{x}$）$= [F_1$（$\boldsymbol{x}$）.....，F_Q（$\boldsymbol{x}$）$]^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_K]^{\mathsf{T}}$，且

$$F_q(\boldsymbol{x}) := \ln \sum_{m=1}^{M} s_m^{[q]} \exp\left(-\sum_{k=1}^{K} b_{km} x_k\right).$$

2.3 方程（9）解的存在性、唯一性与稳定性

对于采用几何一致扫描配置的多光谱CT离散两步DDD方法，步骤（1）通过求解（8）或等价地（9）中的离散非线性方程组，根据离散数据 $\mathbf{g}$ $= [\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_J]^{\mathsf{T}}$ 估计离散基函数正弦图 $\mathbf{x} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_J]^{\mathsf{T}}$；步骤（2）则通过求解离散线性系统（7），根据估计得到的 $\mathbf{x}$ 重建离散基图像$\boldsymbol{f}_k$。离散两步法的挑战也在于步骤（1），因为它需要求解离散非线性方程组，而步骤（2）求解的是直接明了的离散线性系统。因此，本文着重研究离散非线性方程组（9）的解 $\boldsymbol{x}$ 的存在性、唯一性和稳定性条件。

从数学上说，存在性意味着对于给定的测量值 $\boldsymbol{g}$，存在 $\boldsymbol{x}^*$ 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$ $= \boldsymbol{g}$，这对应于满射；而唯一性等价于映射 $\boldsymbol{F}$ 的单射性，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1)$ $= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2)$ 蕴含 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$。另一方面，解的稳定性由 $\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \le \gamma \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2)\|$刻画，其中 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1)$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2)$ 表示两个测量值，γ 是一个正常数 [3]。

3 数学预备知识

我们将介绍所需的数学预备知识。请注意，式（9）中的非线性映射定义在有限维欧几里得空间上，该空间可配备内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和欧几里得范数 $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. 分别令 $\mathcal{D}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 表示映射 $\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{x}$处的雅可比矩阵，$\det(A)$ 表示方阵 A的行列式，而 $\mathtt{diag}(\boldsymbol{x})$ 表示对角线为 $\boldsymbol{x}$的对角矩阵。

定义指标集 $\langle M\rangle := \{1,2,\dots,M\}$ 和补集 $\alpha^c := \langle M\rangle \setminus \alpha$，其中 α 是 $\langle M\rangle$ 的子集。我们还用 $\#\alpha$ 表示集合 α 中元素的个数。对于矩阵 A（可以是非方阵），我们用 $A[\alpha,\beta]$ 表示其行和列分别由指标集 α 和 β 索引的子矩阵，并将 $A[\alpha,\alpha]$ 简写为 $A[\alpha]$。特别地，对于方阵 A，我们将 $A[\alpha]$ 称为 A 的主子矩阵。子矩阵的行列式 $\det(A[\alpha,\beta])$（其中 $\#\alpha = \#\beta$）称为 A 的子式，而 $\det(A[\alpha])$ 称为 A 的主子式。

定义 1。 [18] 如果 A 是一个方阵，A 如果其每个主子式均为正，则称其为P矩阵；如果 $\det(A) > 0$ 且其他每个主子式均非负，则称其为弱P矩阵。

定义 2. [22] 映射 $\boldsymbol{H}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 两个拓扑空间之间的映射称为同胚，如果它具有以下性质：

(i) $\boldsymbol{H}$ 是双射，即单射且满射（单射且映上），

(ii) $\boldsymbol{H}$ 其反函数 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 连续。

定义3。 [22] 映射 $\boldsymbol{H}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 称为局部同胚，如果对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$，$\boldsymbol{x}$ 的一个邻域都被 $\boldsymbol{H}$ 同胚地映射到 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 的一个邻域。

注记 1。显然，若 $\boldsymbol{H}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微映射，且 $\det(\mathcal{D}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))$ 非零，则根据反函数定理可知，$\boldsymbol{H}$ 是局部同胚。

当连续映射 $\boldsymbol{H}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足 fies

$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\| \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad \|\boldsymbol{x}\| \longrightarrow \infty,$$

我们称其为真映射 [22]。

命题 1. *[22]* 映射 $\boldsymbol{H}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是同胚，当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 是真映射且是局部同胚。

命题 2. *[22]* 设 $\boldsymbol{H}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 连续可微，且Ω是 $\mathbb{R}^n$中的有界矩形。假设对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，均有$\det(\mathcal{D}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})) > 0$，并进一步假设对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$，$\mathcal{D}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 都是弱P矩阵。那么 F 是单射。

命题 3. *[12]* 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是任意一个矩形，可以是闭的，也可以不是闭的，并且 $\boldsymbol{H}: \Omega \to \mathbb{R}^2$。假设 $\boldsymbol{H}$ 具有连续偏导数，且对所有 $\boldsymbol{x} \in \Omega$，$\mathcal{D}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 的所有主子式均不为零。那么 $\boldsymbol{H}$ 在Ω上是单射。

命题 4. *[15]* 设 $\boldsymbol{H}: U \to V$ 是从$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$的开子集之间的映射。假设 $\boldsymbol{H}$ 连续可微。如果 $\boldsymbol{H}$ 在闭子集 $\Omega \subset U$ 上是单射，且 $\boldsymbol{H}$ 的雅可比矩阵在 Ω的每一点都可逆，那么 $\boldsymbol{H}$ 在 Ω 的一个邻域 Ω' 内是单射，并且 $\boldsymbol{H}^{-1}: \boldsymbol{H}(\Omega') \to \Omega'$ 连续可微。

命题 5. *[24, 柯西–比内定理]* 设 A 和 B 为 $K \times M$ 矩阵，其中 $K \le M$，则

$$\det(AB^{\mathsf{T}}) = \sum_{\#\beta = K} \det(A[\langle K\rangle, \beta]) \det(B[\langle K\rangle, \beta]). \tag{10}$$

4 数学分析

本节分析非线性系统（9）的解的存在性、唯一性和稳定性。映射 $\boldsymbol{F}$ 的雅可比矩阵可计算如下：

$$\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\Lambda(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x}), \tag{11}$$

其中

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \mathtt{diag}\left(\frac{1}{\sum_{m=1}^{M} s_m^{[1]}\zeta_m(\boldsymbol{x})}, \ldots, \frac{1}{\sum_{m=1}^{M} s_m^{[Q]}\zeta_m(\boldsymbol{x})}\right),$$

$$G(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{M} s_m^{[1]}\zeta_m(\boldsymbol{x})b_{1m} & \cdots & \sum_{m=1}^{M} s_m^{[1]}\zeta_m(\boldsymbol{x})b_{Km} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{M} s_m^{[Q]}\zeta_m(\boldsymbol{x})b_{1m} & \cdots & \sum_{m=1}^{M} s_m^{[Q]}\zeta_m(\boldsymbol{x})b_{Km} \end{bmatrix},$$

$$\zeta_m(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{K} b_{km}x_k\right).$$

定义

$$S = [\boldsymbol{s}^{[1]}, \ldots, \boldsymbol{s}^{[Q]}]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{Q\times M}, \quad B = [\boldsymbol{b}^{[1]}, \ldots, \boldsymbol{b}^{[K]}]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{K\times M},$$

其中，$\boldsymbol{s}^{[q]} = [s_1^{[q]}, \ldots, s_M^{[q]}]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^M$ 和 $\boldsymbol{b}^{[k]} = [b_{k1}, \ldots, b_{kM}]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^M$ 分别表示矩阵 S 的第 q 行以及矩阵 B 的第 k 行。随后，我们可以改写为

$$G(\boldsymbol{x}) = S\,\mathtt{diag}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}))B^{\mathsf{T}},$$

其中，$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}) = [\zeta_1(\boldsymbol{x})\ldots, \zeta_M(\boldsymbol{x})]^{\mathsf{T}}$。

我们还作出以下假设，该假设对于本文所考虑的实际条件似乎是适当的：

假设 1。 $S \geq 0$ 和 $B > 0$，即， S 是一个非负矩阵，而 B是一个正矩阵。进一步假设， S 的所有列都是非零向量，并且

$$\sum_{m=1}^{M} s_m^{[q]} = 1 \quad for\ 1 \leq q \leq Q,$$

以及 $Q = K \leq M$。

4.1 存在性

非线性系统（9）存在解，当且仅当对于数据 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^Q$，存在解 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}$。也就是说， $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbb{R}^Q$中的满射性。下面通过证明 $\boldsymbol{F}$ 是一个同胚来证明满射性。

首先，我们计算 $G(\boldsymbol{x})$的主子式。

引理4.1。 的主子式 $G(\boldsymbol{x})$ 在 (11) 由下式给出

$$\det\big(G(\boldsymbol{x})[\alpha]\big) = \sum_{\#\beta=\#\alpha}\left(\prod_{i\in\beta}\zeta_i(\boldsymbol{x})\right)\det(S[\alpha,\beta])\det(B[\alpha,\beta]). \tag{12}$$

证明。 $G(\boldsymbol{x})$ 的主子矩阵可改写为

$$G(\boldsymbol{x})[\alpha] = S[\alpha,\langle M\rangle]\,\mathtt{diag}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}))B[\alpha,\langle M\rangle]^{\mathsf{T}}.$$

根据命题 5，可立即得到式（12）中的结果。 □

接下来给出以下定理。

定理 4.1。 假设 $\det(SB^{\mathsf{T}}) \neq 0$，对于指标集 $\beta\subseteq\langle M\rangle$，$\#\beta = Q$， S 和 B 的以下子式的乘积满足

$$\det(S[\langle Q\rangle,\beta])\det(B[\langle Q\rangle,\beta]) \geq 0 \ (or\ \ \leq 0), \tag{13}$$

即，所有这些乘积均为非负（或非正）。那么 $\boldsymbol{F}$ 定义于 (9) 是 $\mathbb{R}^Q$中的局部同胚。

证明。 考虑 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbb{R}^Q$ 中连续可微，（11），以及引理 4.1，我们有

$$\det\big(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\big) = (-1)^Q\left(\prod_{q=1}^{Q}\langle \boldsymbol{s}^{[q]},\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})\rangle\right)^{-1} \sum_{\#\beta=Q}\left(\prod_{i\in\beta}\zeta_i(\boldsymbol{x})\right)\det(S[\langle Q\rangle,\beta])\det(B[\langle Q\rangle,\beta]).$$

特别地，当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，我们有

$$\det\big(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})\big) = (-1)^Q\sum_{\#\beta=Q}\det(S[\langle Q\rangle,\beta])\det(B[\langle Q\rangle,\beta]) = (-1)^Q\det(SB^{\mathsf{T}}).$$

由于 $\det(SB^{\mathsf{T}}) \neq 0$，至少存在一个索引，使其对应的乘积按 (13) 定义且不为零。因此我们有

$$\det\big(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\big) \neq 0, \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^Q.$$

因此，根据定义 3，我们可以证明 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbb{R}^Q$中的一个局部同胚。

□

此外，我们定义一个指标集

$$\mathcal{M}(k,l) := \arg\max_m\left\{\frac{b_{km}}{b_{lm}}\right\}, \tag{14}$$

其中 $k,l\in\langle K\rangle, k\neq l$.

定理 4.2. 如果存在指标 k_1， k_2，以及 $m_0\in\mathcal{M}(k_1,\ k_2)$ 使得$s_{m_0}^{[q]} > 0$ 对于 $1\leq q\leq Q$， $\boldsymbol{F}$ 在 (9) 中定义的不是一个真映射。

证明。 令

$$\bar{b} := \max_m \frac{b_{k_1 m}}{b_{k_2 m}} = \frac{b_{k_1 m_0}}{b_{k_2 m_0}}.$$

取

$$\boldsymbol{x} = [0, \dots, \underbrace{-r}_{k_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{r\bar{b}}_{k_2}, \dots, 0]^{\mathsf{T}},$$

其中 $r > 0$，于是我们得到 $B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$ 的第 m 个分量为

$$\begin{aligned}(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})_m = \sum_{k=1}^{K} b_{km} x_k &= -b_{k_1 m} r + b_{k_2 m} r\bar{b} \\ &\geq r\left(-b_{k_1 m} + b_{k_2 m}\frac{b_{k_1 m}}{b_{k_2 m}}\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

对于 m_0，我们有 $(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})_{m_0} = r(-b_{k_1 m_0} + b_{k_2 m_0}\bar{b}) = 0$。此外，对于所有 $1 \leq q \leq Q$，$s_{m_0}^{[q]} > 0$。因此，我们得到

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \exp(-B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to\infty} \exp(-B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}) = [0, \dots, \underbrace{1}_{m_0}, \dots, 0]^{\mathsf{T}}.$$

可能存在 $m_i \in \mathcal{M}(k_1, k_2)$，从而推出 $(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})_{m_i} = 0$；上述极限向量中也可能存在其他非零分量。因此，我们有

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| = \lim_{r\to\infty} \left\| \ln \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{s}^{[1]}, \exp(-B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})\rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{s}^{[Q]}, \exp(-B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})\rangle \end{bmatrix} \right\| = \left\| \ln \begin{bmatrix} \sum_i s_{m_i}^{[1]} \\ \vdots \\ \sum_i s_{m_i}^{[Q]} \end{bmatrix} \right\|.$$

考虑假设 1，现在我们有

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| \leq +\infty, \tag{15}$$

这意味着 $\boldsymbol{F}$ 不是一个真映射。 □

对于更一般的情形，我们有如下结果：

推论 4.1。 对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^Q$ 以及满足以下条件的指标 $m_1, m_2, \dots, m_l$

$$B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \geq 0 \quad \textit{and} \quad (B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})_{m_i} = 0,$$

其中 $1 \leq i \leq l$。若存在 m_i 使得 $s_{m_i}^{[q]} > 0$ 对于 $1 \leq q \leq Q$，则 $\boldsymbol{F}$在 (9) 中定义的映射不是一个真映射。

证明。 证明与定理4.2的证明类似。 □

定理 4.2 的结果表明， $\boldsymbol{F}$是一个真映射的必要条件。我们声称，对于二维 DECT 情形，该条件既是充分条件，也是必要条件。

定理 4.3。 设 $Q = K = 2$，则 $\boldsymbol{F}$ 在 (9) 中定义的是真映射，当且仅当存在索引 $q := q(k, l)$ 使得 $s_m^{[q]} = 0$ 对于任意 $m \in \mathcal{M}(k, l)$（其定义见 (14)），其中 $k, l \in \{1, 2\}$，$k \neq l$。

证明。 “$\Longrightarrow$”。如果条件不成立，不失一般性，存在 $m_0 \in \mathcal{M}(1,2)$，$s_{m_0}^{[q]} > 0$ 对于 $1 \leq q \leq Q$。根据定理 4.2，$\boldsymbol{F}$ 不是一个真映射，这与假设矛盾。

“$\Longleftarrow$”。使用极坐标 $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{n}$，其中 $r > 0$, $\boldsymbol{n} = [\cos\theta, \sin\theta]^\mathsf{T}$，以及 $\theta \in [0, 2\pi)$，我们可以得到

$$\begin{aligned}(B^\mathsf{T}\boldsymbol{x})_m = \sum_{k=1}^{2} b_{km}x_k = b_{1m}r\cos\theta + b_{2m}r\sin\theta \\ = r\sqrt{b_{1m}^2 + b_{2m}^2}\sin(\theta + \theta_m),\end{aligned}$$

其中 $\theta_m = \arctan(b_{1m}/b_{2m})$。假设 $\{\theta_m\}$ 按如下顺序排列

$$\theta_1 = \cdots = \theta_l > \theta_l \geq \cdots \geq \theta_p > \theta_p = \cdots = \theta_M.$$

否则，可以对它们重新排序。因此，该条件可转化为：存在 q_1，使得对于 $m \in \mathcal{M}(1, 2) = \{1, 2, \ldots, l\}$，$s_m^{[q_1]} = 0$；并且存在 q_2，使得对于 $n \in \mathcal{M}(2, 1) = \{p+1, p+2, \ldots, M\}$，$s_n^{[q_2]} = 0$。接下来，根据角 θ 的值，证明可分为三种情况。

情况 I：$0 \leq \theta < \pi - \theta_1 + \frac{\theta_1 - \theta_{l+1}}{2}$。对于任意 $m \in \mathcal{M}(1, 2)^c = \langle M\rangle \backslash \mathcal{M}(1, 2)$，有

$$0 < \theta_M \leq \theta_m \leq \theta + \theta_m < \pi - \theta_1 + \frac{\theta_1 - \theta_{l+1}}{2} + \theta_m \leq \pi - \frac{\theta_1 - \theta_{l+1}}{2} < \pi.$$

由于 $(B^\mathsf{T}\boldsymbol{n})_m = \sqrt{b_{1m}^2 + b_{2m}^2}\sin(\theta + \theta_m)$，存在 $c_1 > 0$ 使得

$$(B^\mathsf{T}\boldsymbol{n})_m \geq c_1, \quad \forall\, m \in \mathcal{M}(1, 2)^c.$$

因此，当 r 足够大时，

$$\begin{aligned}|F_{q_1}(\boldsymbol{x})| &= |\ln\langle \boldsymbol{s}^{[q_1]}, \exp(-rB^\mathsf{T}\boldsymbol{n})\rangle| \\ &= -\ln \sum_{m\in\mathcal{M}(1,2)^c} s_m^{[q_1]} \exp(-r(B^\mathsf{T}\boldsymbol{n})_m) \\ &\geq c_1 r - \ln \sum_{m\in\mathcal{M}(1,2)^c} s_m^{[q_1]} \\ &= c_1 r.\end{aligned}$$

最后一行由条件 $s_m^{[q_1]} = 0$ 对任意 $m \in \mathcal{M}(1, 2)$ 成立且 $\sum_m s_m^{[q_1]} = 1$ 得出。

情形 II：$\pi - \theta_1 + \frac{\theta_1 - \theta_{l+1}}{2} \leq \theta < 2\pi - \theta_M - \frac{\theta_p - \theta_M}{2}$。当 $\pi - \theta_1 + \frac{\theta_1 - \theta_{l+1}}{2} \leq \theta < \pi - \theta_M$ 时，考虑到 $\theta + \theta_1$ 的取值范围，我们有

$$\pi < \pi + \frac{\theta_1 - \theta_{l+1}}{2} \leq \theta + \theta_1 < \pi - \theta_M + \theta_1 < 2\pi.$$

当 $\pi - \theta_M \le \theta < 2\pi - \theta_1$ 时，考虑 $\theta + \theta_p$ 的范围，我们有

$$\pi < \pi - \theta_M + \theta_p \le \theta + \theta_p < 2\pi - \theta_1 + \theta_p < 2\pi.$$

当 $2\pi - \theta_1 \le \theta < 2\pi - \theta_M - \frac{\theta_p - \theta_M}{2}$ 时，考虑到 $\theta + \theta_M$ 的取值范围，我们有

$$\pi < 2\pi - \theta_1 + \theta_M \le \theta + \theta_M < 2\pi - \frac{\theta_p - \theta_M}{2} < 2\pi.$$

因此，存在 $c_2 > 0$ 和索引 $m(\theta)$，使得

$$(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n})_{m(\theta)} \le -c_2.$$

在假设1下，S 的所有列都是非零向量，这表明始终存在 q，使得 $s_{m(\theta)}^{[q]} > 0$。当 r 变得足够大时，

$$\begin{aligned} |F_q(\boldsymbol{x})| &= |\ln\langle \boldsymbol{s}^{[q]}, \exp(-rB^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n})\rangle| \\ &\ge \ln s_{m(\theta)}^{[q]} \exp(-r(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n})_{m(\theta)}) \\ &\ge \tilde{c}_2 r - |\ln s_{m(\theta)}^{[q]}| \\ &\ge c_2 r. \end{aligned}$$

注意，对于给定的 S，$|\ln s_{m(\theta)}^{[q]}|$ 在假设 1 下有界。

情形 III： $2\pi - \theta_M - \frac{\theta_p - \theta_M}{2} \le \theta < 2\pi$。在此情形下，对于任意 $m \in \mathcal{M}(2,1)^c$，我们有

$$0 < \frac{\theta_p - \theta_M}{2} \le -\theta_M - \frac{\theta_p - \theta_M}{2} + \theta_m \le (\theta + \theta_m) - 2\pi < \theta_m < \theta_1 < \frac{\pi}{2}.$$

因此，存在 $c_3 > 0$ 使得

$$(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n})_m \ge c_3, \quad \forall m \in \mathcal{M}(2,1)^c.$$

类似地，当 r 变得足够大时，

$$\begin{aligned} |F_{q_2}(\boldsymbol{x})| &= |\ln\langle \boldsymbol{s}^{[q_2]}, \exp(-rB^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n})\rangle| \\ &= -\ln \sum_{m\in\mathcal{M}(2,1)^c} s_m^{[q_2]} \exp(-r(B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n})_m) \\ &\ge c_3 r - \ln \sum_{m\in\mathcal{M}(2,1)^c} s_m^{[q_2]} \\ &= c_3 r. \end{aligned}$$

我们已经证明，对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^Q$，

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_q |F_q(\boldsymbol{x})| \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{c_1, c_2, c_3\} r = c\|\boldsymbol{x}\|,$$

其中 $c := \min\{c_1, c_2, c_3\}/\sqrt{2}$。最后，我们得到

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to+\infty} \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| = +\infty,$$

由此完成证明。 □

注释 2。若 $s_{m_0}^{[q]} = 0$ 对所有 q 均成立，则取 $\boldsymbol{x} = [0, \dots, r, \dots, 0]^{\mathsf{T}}$，我们有 $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| = \sqrt{2} \nrightarrow \infty$，因此 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 不是一个真映射。因此，正如假设 1所示，S 的所有列都必须非零。

结合命题 1，我们可以进一步断言 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$上的同胚映射。因此，非线性系统 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}$ 的解的存在性和唯一性条件由以下定理给出。

定理 4.4。设 $Q = K = 2$。假设定理 4.1中的条件成立。此外，存在索引 $q := q(k, l)$ 使得 $s_m^{[q]} = 0$ 对于任意 $m \in \mathcal{M}(k, l)$，其中 $k, l \in \{1, 2\}$，$k \neq l$。那么，$\boldsymbol{F}$在 (9) 中定义的是一个同胚。

证明。根据定理 4.1，$\boldsymbol{F}$ 是局部同胚；根据定理 4.3，$\boldsymbol{F}$ 是真映射。利用命题1，我们得到了所需结果。 □

注释 3. 文献 [14]中的作者证明，连续可微映射 $\boldsymbol{H}$ 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 是微分同胚，当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 是真映射，且其雅可比行列式 $\det(\mathcal{D}\boldsymbol{H})$ 恒不为零。根据此定理，我们得出，在定理 9 中定义的映射在定理4.4的条件下是微分同胚。

4.2 唯一性

我们假设（9）中的非线性系统至少存在一个解。我们将分析该解的唯一性。首先，有以下引理。

引理 4.2。设 $\boldsymbol{H}$、$\tilde{\boldsymbol{H}}$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为两个映射，使得 $\boldsymbol{H} = A_1 \circ \tilde{\boldsymbol{H}} \circ A_2$，其中 A_1、A_2：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为可逆线性变换。那么，$\boldsymbol{H}$ 是单射，当且仅当 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 是单射。

证明。证明类似于 [5] 中命题 5 的证明。 □

接下来，我们给出映射 $\boldsymbol{F}$ 具有全局单射性质的一个充分条件。

定理 4.5。假设 $\det(SB^{\mathsf{T}}) \neq 0$，并且对于所有索引 $\alpha \subseteq \langle Q \rangle$、$\beta \subseteq \langle M \rangle$，$\#\beta = \#\alpha$，$S$ 和 B 的以下子式的乘积满足

$$\det(S[\alpha, \beta]) \det(B[\alpha, \beta]) \geq 0, \tag{16}$$

也就是说，这些乘积均为非负数。因此，$\boldsymbol{F}$ 定义于(9) 在 $\mathbb{R}^Q$上是全局单射。

证明。首先，我们考虑映射 $-\boldsymbol{F}$。由（11）和引理 4.1，对于 $\mathcal{D}(-\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x})$ 的任意主子式

$$\det\big(\mathcal{D}(-\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x})[\alpha]\big) = \det\big(\Lambda(\boldsymbol{x})[\alpha]\big) \det\big(G(\boldsymbol{x})[\alpha]\big) = \left(\prod_{q \in \alpha} \langle \boldsymbol{s}^{[q]}, \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}) \rangle\right)^{-1}$$
$$\sum_{\#\beta = \#\alpha} \left(\prod_{i \in \beta} \zeta_i(\boldsymbol{x})\right) \det(S[\alpha, \beta]) \det(B[\alpha, \beta]).$$

对于 $\alpha = \langle Q \rangle$，回顾定理 4.1的证明，可得 $\det\big(\mathcal{D}(-\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x})\big) > 0$。对于 $\alpha \subset \langle Q \rangle$，由（16），$\det\big(\mathcal{D}(-\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x})[\alpha]\big)$ 对 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^Q$非负。由命题 2，我们知道 $-\boldsymbol{F}$ 是一个单射映射，进而利用引理 4.2，$\boldsymbol{F}$ 也是单射。

□

注 4. 注意，条件（16）中的符号条件定义良好，因为当 $B = S$ 时，该条件会自动成立。

特别地，当 $Q = K = 2$ 时，根据定理 4.1 中的条件，我们还可以证明 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbb{R}^2$中是全局单射的。这对应于双能CT的情形。

定理 4.6. 设 $Q = K = 2$。假设定理 *4.1*中的条件成立。那么，$\boldsymbol{F}$ 由 (9) 定义的函数在 $\mathbb{R}^2$上是全局单射的。

证明. 与定理 4.5 的证明类似，可得

$$\det(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) \neq 0 \quad \text{for } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

根据假设 1，对于任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$，一阶主子式也从不为零。根据命题 3，可得 $\boldsymbol{F}$ 在任意矩形区域内都是单射的，这便得到了所需结果。

□

利用引理 4.2，我们研究是否存在可逆线性变换A 使得 $\mathcal{D}(-\boldsymbol{F} \circ A)$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^Q$都是（弱）P矩阵。事实上，我们有

$$\mathcal{D}(-\boldsymbol{F} \circ A)(\boldsymbol{x}) = \Lambda(\boldsymbol{x}) S \,\mathtt{diag}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})) B^{\mathsf{T}} A.$$

根据定理 4.5，这个问题等价于询问是否存在可逆线性变换 A 使得 S 和 $A^{\mathsf{T}}B$ 满足（16）或（13）中的符号条件。如果成立，$\mathcal{D}(-\boldsymbol{F} \circ A)(\boldsymbol{x})$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^Q$ 都是（弱）P矩阵。以（13）为例，我们有以下定理。

定理 4.7。 假设条件 (13) 不成立。不存在这样的可逆线性变换 A 使得 S 和 $A^{\mathsf{T}}B$ 满足条件 (13)。

证明。 不失一般性，假设存在指标集 $\beta_1,\ \beta_2 \subseteq \langle M \rangle$，$\#\beta_1 = \#\beta_2 = Q$ 使得

$$\det(S[\langle Q \rangle, \beta_1]) \det(B[\langle Q \rangle, \beta_1]) < 0, \quad \det(S[\langle Q \rangle, \beta_2]) \det(B[\langle Q \rangle, \beta_2]) > 0.$$

注意，我们有

$$\det(A^{\mathsf{T}} B[\langle Q \rangle, \beta]) = \det(A) \det(B[\langle Q \rangle, \beta]),$$

而 $\det(A)$ 可以为正，也可以为负，这意味着符号条件仍然不成立。

□

4.3 稳定性

随着映射 $\boldsymbol{F}$ 在（9）中的单射性得到确立，我们接下来讨论模型（9）在某些有界区域内的具体稳定性结果。

定理 4.8。 假设定理 *4.5*的条件 Ω 成立。设 $\boldsymbol{F}(\Omega)$ 为凸的。则对每个 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Omega$，我们有

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \leq \gamma \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2)\|.$$

这里，常数 γ 定义为

$$\gamma := Q^{\frac{Q}{2}} \left(\max_{k,m} |b_{km}|\right) \left(\min_{\beta \subset \langle n \rangle, \boldsymbol{x} \in \Omega} \frac{\prod_{i \in \beta} \zeta_i(\boldsymbol{x})}{\prod_{q=1}^{Q} \langle \boldsymbol{s}^{[q]}, \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}) \rangle} \right)^{-1} |\det(SB^{\mathsf{T}})|^{-1}.$$

证明。 根据定理4.5，我们得到 $\boldsymbol{F}$ 在 Ω 中是全局单射。因此，命题 4 表明逆映射 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 是连续可微的。对于任意 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2 \in \Omega$，令 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$。由于 $\boldsymbol{F}(\Omega)$ 是凸集，因此对 $\boldsymbol{F}^{-1}$应用中值定理可得

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| &= \|\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_2)\| \leq \|\mathcal{D}\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_t)(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)\| \\
&= \sqrt{\sum_{q=1}^{Q} \left(\mathcal{D}\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_t)[q, \langle Q \rangle](\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{q=1}^{Q} \|\mathcal{D}\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_t)[q, \langle Q \rangle]\|^2 \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|^2} \\
&= \|\mathcal{D}\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_t)\|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\| \\
&= \| \left(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t)\right)^{-1} \|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\| \\
&= |\det(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t))|^{-1} \|\mathrm{adj}(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t))\|_F \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|,
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{y}_t = t\boldsymbol{y}_1 + (1-t)\boldsymbol{y}_2$，其中 $0 \leq t \leq 1$, $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_t)$，而 $\mathrm{adj}(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t))$ 表示 $\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t)$ 的伴随矩阵。利用伴随矩阵 [21], 的弗罗贝尼乌斯范数估计可得

$$\|\mathrm{adj}(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t))\|_F \leq Q^{\frac{Q-2}{2}} \|\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t)\|_F \leq Q^{\frac{Q-2}{2}} Q \max_{k,m} |b_{km}| = Q^{\frac{Q}{2}} \max_{k,m} |b_{km}|.$$

最后一个不等式源于以下观察： $\boldsymbol{F}$ 的雅可比矩阵可改写为

$$\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\tilde{S}(\boldsymbol{x}) B^{\mathsf{T}},$$

其中

$$\tilde{S}(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} \tilde{s}_1^{[1]}(\boldsymbol{x}) & \dots & \tilde{s}_M^{[1]}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{s}_1^{[Q]}(\boldsymbol{x}) & \dots & \tilde{s}_M^{[Q]}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Q \times M} \quad \text{with} \quad \tilde{s}_m^{[q]}(\boldsymbol{x}) := \frac{s_m^{[q]} \zeta_m(\boldsymbol{x})}{\sum_{m=1}^{M} s_m^{[q]} \zeta_m(\boldsymbol{x})}.$$

对于 $\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的行列式，根据定理 4.1 的推导，我们有

$$
\begin{aligned}
|\det\big(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\big)| &= |\sum_{\#\beta=Q} \frac{\prod_{i\in\beta}\zeta_i(\boldsymbol{x})}{\prod_{q=1}^{Q}\langle \boldsymbol{s}^{[q]},\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})\rangle} \det(S[\langle Q\rangle,\beta])\det(B[\langle Q\rangle,\beta])| \\
&\geq \min_{\beta\subset\langle n\rangle,\boldsymbol{x}\in\Omega} \frac{\prod_{i\in\beta}\zeta_i(\boldsymbol{x})}{\prod_{q=1}^{Q}\langle \boldsymbol{s}^{[q]},\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})\rangle} |\sum_{\#\beta=Q} \det(S[\langle Q\rangle,\beta])\det(B[\langle Q\rangle,\beta])| \\
&= \min_{\beta\subset\langle n\rangle,\boldsymbol{x}\in\Omega} \frac{\prod_{i\in\beta}\zeta_i(\boldsymbol{x})}{\prod_{q=1}^{Q}\langle \boldsymbol{s}^{[q]},\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})\rangle} |\det\big(SB^{\intercal}\big)|.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到了所需的估计。 □

请注意，对于双能CT，定理 $F(\Omega)$ 中 4.8 不再要求凸性。根据备注 3，映射 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$上的微分同胚。因此，对于任意点 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1)$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2)$，连接这两点的线段位于 $\boldsymbol{F}$的值域内。因此可以使用中值定理。

5 数值研究

我们在下文所述的平行束几何下，对双能CT进行定量研究，以通过数值方式展示所讨论的条件；研究中使用常规牛顿法求解式（8）中的离散非线性方程组。如图1所示，研究采用数字化 Forbild 头部模体和患者躯干模体，两者均由两种基材料 $\boldsymbol{f}_k$ 组成，即水和骨。材料水和骨在能量 b_{km} 下的质量衰减系数 m 取自美国国家标准技术研究院（NIST）数据库 [17]。利用式（7），我们可以根据真实基材料图像轻松获得真实基底正弦图 $\boldsymbol{x}_j^*$。使用开源 X 射线能谱模拟器 SpectrumGUI 软件 [23], ，我们首先生成一对能谱，以模拟典型临床CT扫描仪的低千伏（例如，80 千伏）和高千伏（例如，140 千伏）能谱，如图 2a 所示。我们将其称为能谱 I。此外，我们还创建了另一对能谱，称为能谱 II，由 80 千伏能谱和经过滤波的 140 千伏能谱组成，如图 2b所示。具体而言，80 千伏能谱与图 2a中的 80 千伏能谱相同；经过滤波的 140 千伏能谱则是将 1 毫米厚的铜滤片应用于图 2a中的 140 千伏能谱后得到的。

我们使用 S_1 和 S_2 分别表示两组谱的值，并用 B表示附录A中得到的质量衰减系数值。通过直接验证，$\{S_1, B\}$ 和 $\{S_2, B\}$ 满足定理4.1 和定理4.3中的条件。根据定理4.4和定理4.6可知，对于任意测量数据，非线性系统（9）始终有唯一解，且 $\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$始终可逆。图2a 和图2b所示的两组低、高千伏谱分别用于涉及 Forbild 和躯干体模的研究。

对于数字模体，我们使用其水和骨基图像 $\boldsymbol{g}$ 生成无噪声数据 $\boldsymbol{f}_k$、水和骨的质量衰减系数，以及式（8）中图2所示的一组谱。根据生成的数据，在不失一般性的情况下，我们使用常规牛顿法对式（9）中的非线性系统进行迭代求解，其迭代过程为 [10]

$$
-\mathcal{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^n)\Delta\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^n) - \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n + \Delta\boldsymbol{x}^n, \tag{17}
$$

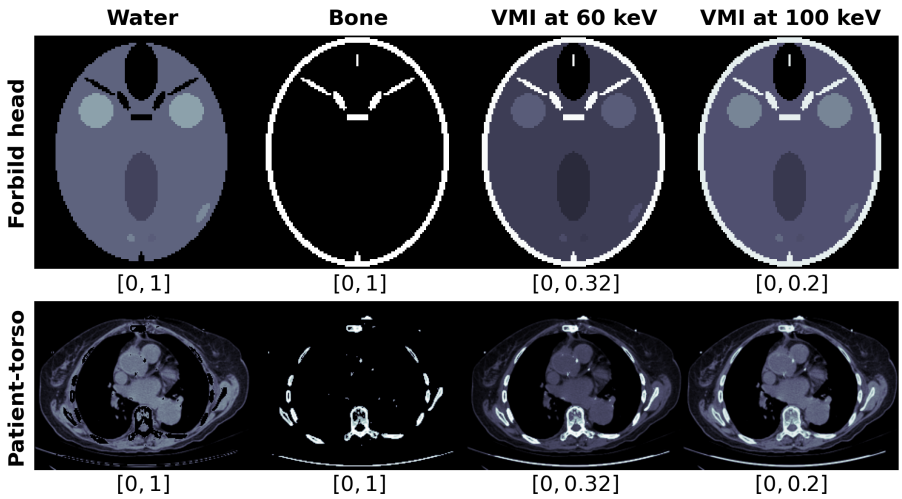


图 1：Forbild头部模体（第 1 行）和患者躯干模体（第 2 行）的水（第 1 列）和骨（第 2 列）真实基材料图像，以及能量分别为 60 千电子伏（第 3 列）和 100 千电子伏（第 4 列）的真实虚拟单能图像。

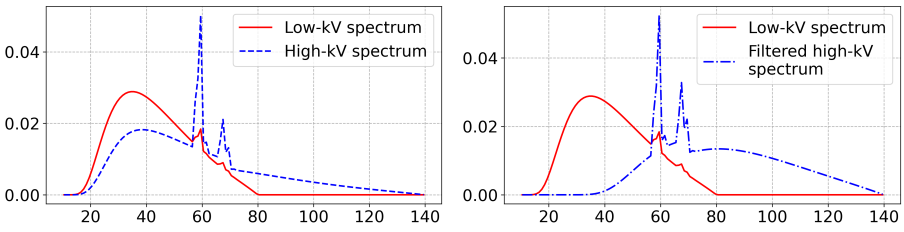


图 2：(a) 能谱 I：低千伏（红色，实线）和高千伏（蓝色，虚线）能谱；以及 (b) 能谱 II：低千伏能谱（红色，实线）与 (a) 中的低千伏能谱相同，滤波高千伏频谱（蓝色，点划线）。

其中 n 表示迭代次数。注意，(9)（或等价地，(8)）可针对每条射线独立求解，因此可同时并行求解多条射线。

我们使用以下度量指标来评估数值研究中的恢复精度：

$$\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n} := \frac{\sum_{j=1}^{J} \|\boldsymbol{x}_j^n - \boldsymbol{x}_j^*\|^2}{\sum_{j=1}^{J} \|\boldsymbol{x}_j^*\|^2},$$

其中 $\boldsymbol{x}_j^n$ 表示在第 j条射线上第 n次迭代中估计得到的基函数正弦图，而 $\boldsymbol{x}_j^*$ 表示相应的真实值基函数正弦图。该度量指标用于揭示通过求解非线性系统（9）来估计基函数正弦图时常规牛顿法的数值收敛性。不失一般性，我们选择零向量作为初始点。

此外，为了通过数值方式展示解的稳定性（9），我们通过向无噪声数据添加白高斯噪声来生成含噪数据 $\boldsymbol{g}$。观察方程（9）的解的性质，我们可以得出结论，对于任意射线 j,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^n - \boldsymbol{x}_j^*\| &\leq \|\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^n - \boldsymbol{F}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{g}}_j)\| + \|\boldsymbol{F}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{g}}_j) - \boldsymbol{x}_j^*\| \\ &\leq \underbrace{\|\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^n - \boldsymbol{F}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{g}}_j)\|}_{Error\ 1} + \gamma \underbrace{\|\widetilde{\boldsymbol{g}}_j - \boldsymbol{g}_j\|}_{Error\ 2}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中，$\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^n$ 表示在第 n次迭代中根据含噪数据 $\widetilde{\boldsymbol{g}}_j$估计的该射线的基函数正弦图，而 $\boldsymbol{F}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{g}}_j)$是与 $\widetilde{\boldsymbol{g}}_j$对应的正弦图。常数$\gamma$ 根据定理4.8中的稳定性结果可知是有限的。项误差*1*由求解非线性系统所用的算法决定，而误差*2*是测量数据的噪声水平。

5.1 使用 Forbild头部模体进行数值研究

首先，我们使用二维 Forbild头部模体进行数值研究。该模体由水和骨的真实基材料图像组成，这些图像显示在由一组 128×128形状相同的正方形像素构成的阵列上，覆盖面积为 $[-5,5]\times[-5,5]$ 厘米^2，，如图1第1行所示。使用式（5）中的真实基材料图像，我们生成能量为 60 千电子伏和 100 千电子伏的真实虚拟单能图像，也见图1第1行。对于所考虑的几何一致扫描配置，每个视角均包含 181 条平行射线投影，在 $[-7.05, 7.05]$ 厘米范围内均匀采样；180 个视角均匀分布在 $180°$范围内。利用式（4），可以直接得到图3第1列中的真实基底正弦图。此外，对于图2所示的每一对谱，将扫描几何参数、低千伏谱和高千伏谱、从 NIST数据库获得的质量衰减系数，以及图1 第1行中的真实基材料图像代入式（6）和（7），即可生成一组无噪声数据。

使用（17）中的牛顿法，我们分别对生成基底正弦图所用的两组无噪声数据应用（9）中的 DD 数据模型。度量指标 $\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 首先以迭代次数为自变量显示在图 4a 中，展示了这两组无噪声数据的结果。可以观察到，度量指标在数值上收敛至所用计算机的双精度浮点精度水平。迭代 10^2 次后得到的基底正弦图显示在图 3的第 2 列和第 3 列中。

收敛度量指标 $\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 的数值结果以及估计得到的基底正弦图表明，在所讨论的条件下，（9）中的 DD 数据模型，

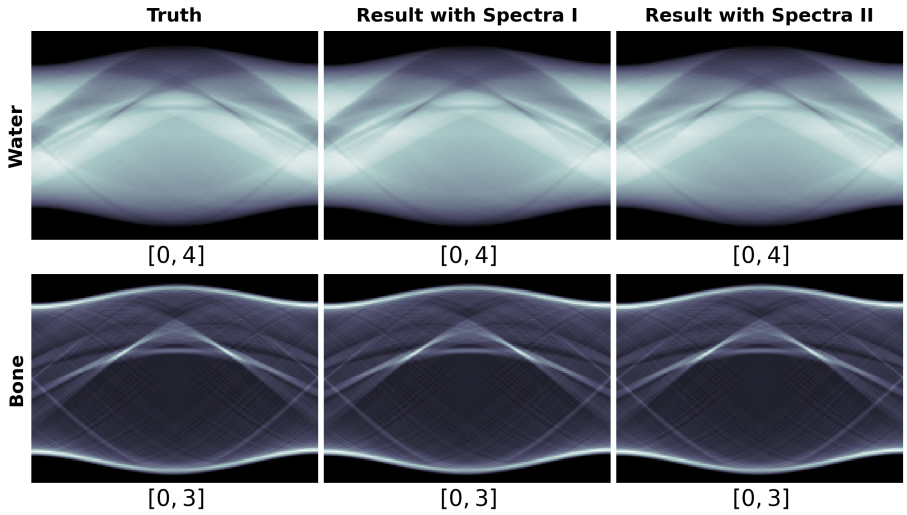
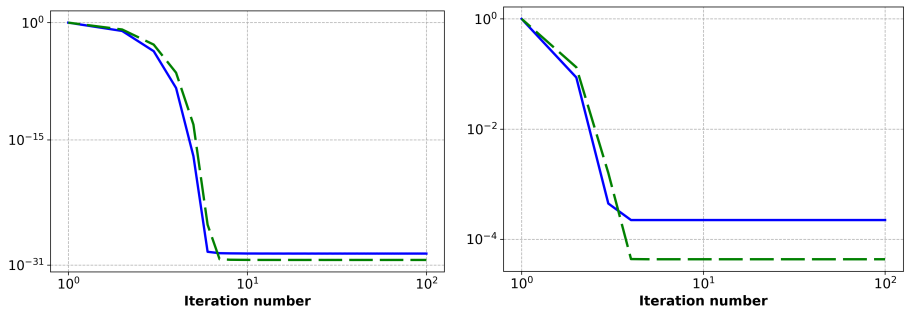


图 3： Forbild头部模体的水（第 1 行）和骨（第 2 行）基底正弦图：真实值（第 1 列）与估计值（第 2、3 列），数据为无噪声数据。第 2、3 列分别使用图 2a和图 2b中的能谱对得到。



(a) (b)

图 4： 度量指标 $\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 以双对数尺度绘制，作为常规牛顿法迭代次数的函数；常规牛顿法分别使用图 2a （实线）和图 2b（虚线）中的能谱对，并分别采用Forbild头部模体的无噪声数据（a）和含噪数据（b）。

可以通过使用常规牛顿法准确求解。此外，从图 4 可以观察到，图 2b 中的一对谱，其重叠程度低于图 2a 中的另一对谱，可能有利于求解非线性系统（9）。

我们还应用滤波反投影（FBP）算法，根据估计得到的相应基函数正弦图重建基图像。在图5中，我们展示了两组谱对应的重建基图像，以及使用（2）获得的 60 千电子伏和 100 千电子伏虚拟单能图像。

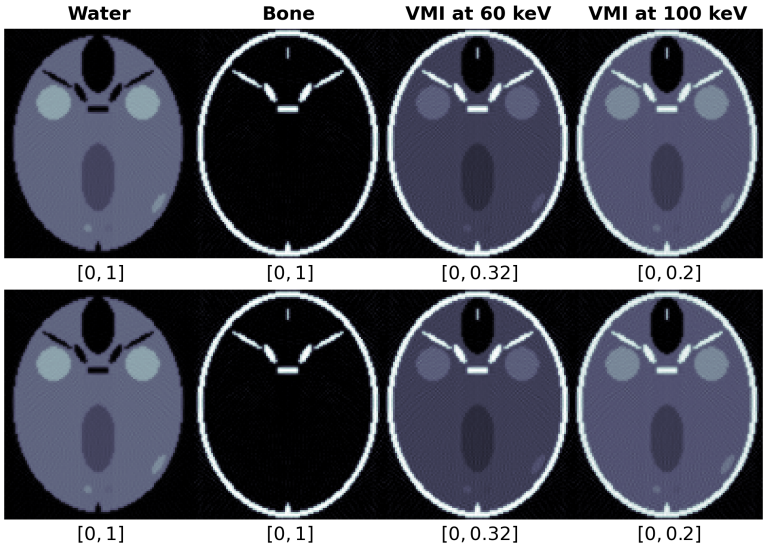


图5：分别使用图2a 中的能谱对（第一行）和图2b 中的能谱对（第二行），从Forbild头部模体的无噪声数据中重建得到的水和骨的基图像（分别为第1列和第2列），以及能量分别为60千电子伏（第3列）和100千电子伏（第4列）的虚拟单能图像。

为了研究数值稳定性，我们为图中所示的两组谱生成了两组包含高斯噪声的数据集，其信噪比 (SNR) 分别为 27.4 dB 和 27.1 dB。2。如图所示，4b，度量指标 RE_x^n 收敛至主要由数据噪声水平决定的常数。由含噪数据在第 10^2 次迭代得到的基函数正弦图如图所示。6。在图 7中，我们展示了由含噪数据得到的基图像以及 60 千电子伏和 100 千电子伏下的虚拟单能图像。这些结果表明，基函数正弦图可以通过数值方法稳定地估计。

5.2 使用患者躯干模体进行数值研究

我们还对数字化躯干体模进行了数值研究，该体模源自患者的计算机断层成像图像，因此具有逼真的人体躯干解剖结构。如图 1第 2 行所示，其水和骨的真实基材料图像呈现在由 256×256 个覆盖面积为 $[-5,5] \times [-5,5]$ 厘米^{2}的相同方形像素组成的阵列上。此外，利用（5）中的真实基材料图像，我们可以获得能量为 60 千电子伏和 100 千电子伏的真实虚拟单能图像，这些图像同样显示在图 1第 2 行中。我们假设采用几何一致的扫描配置

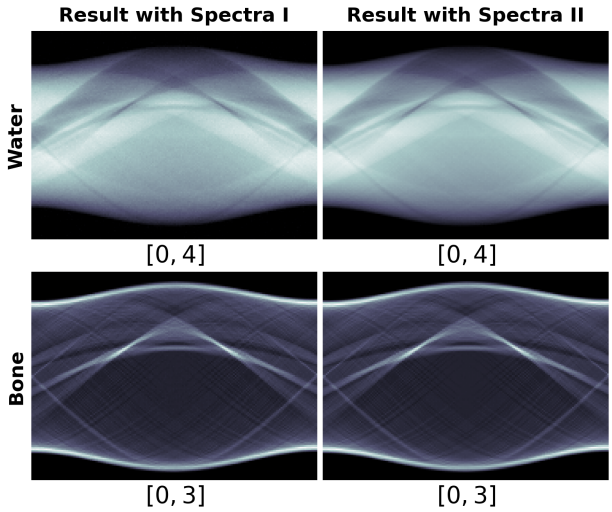


图 6：从含噪数据中估计得到的 Forbild头部模体的水（第 1 行）和骨（第 2 行）基函数正弦图。第 1 列和第 2 列分别使用图 2a 和图 2b中的能谱对获得。对应的真实基底正弦图显示在图 3的第 1 列中。

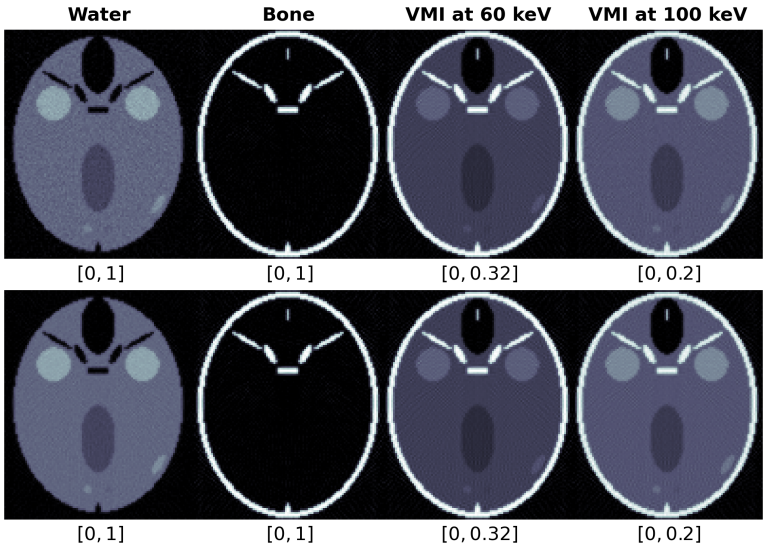


图 7：分别使用图 2a （第 1 行）和图 2b （第 2 行）中的能谱对，从 Forbild头部模体的含噪数据中重建得到的水基图像（第 1 列）、骨基图像（第 2 列），以及能量为 60 千电子伏（第 3 列）和 100 千电子伏（第 4 列）的虚拟单能图像。

在 $[-7.05, 7.05]$ cm 上均匀采样 360 条平行射线投影，每个 180° 上均匀分布 360 个视角；真实基底正弦图见图 8 第 1 列。此外，对于图 2 中所示的每一对谱，我们将扫描几何参数、低千伏谱和高千伏谱、从 NIST数据库 获得的质量衰减系数，以及图 1 第 2 行中的真实基材料图像代入式（6）和式（7），生成一组无噪声数据。

使用式（17）中的牛顿法，我们利用生成基函数正弦图所用的两组无噪声数据，求解式（9）中的 DD数据模型。度量指标 $\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 首先在图 9a 中显示为迭代次数的函数，针对两组无噪声数据分别绘制。可以观察到，度量指标在数值上收敛至所用计算机的双精度浮点精度。迭代 10^2 次得到的基底正弦图见图 8 的第 2 列和第 3 列。

收敛度量 RE 的数值结果$_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 以及所估计的基底正弦图表明，在所讨论的条件下，(9) 中的 DD数据模型可以通过常规牛顿法得到准确求解。此外，从图9可以观察到，图2b 中的一对谱，其重叠程度低于图2a 中的另一对谱，可能有利于求解非线性系统(9)。

我们还应用 FBP 算法，根据相应的基底正弦图重建基图像。在图10中，我们展示了利用两对谱重建的基图像，以及使用(2)在 60 千电子伏和 100 千电子伏能量下获得的虚拟单能图像。

为研究数值稳定性，我们分别为图2中的两对谱生成了包含高斯噪声、信噪比水平分别为 24.7 dB 和 24.3 dB 的两组数据。如图9b所示，度量指标 $\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 收敛到主要由数据噪声水平决定的常数。从含噪数据中在迭代 10^2 处获得的基底正弦图如图11所示。在图12中，我们展示了从含噪数据中获得的 60 千电子伏和 100 千电子伏下的基图像及虚拟单能图像。这些结果表明，基底正弦图可以在数值上得到稳定估计。

6 讨论与结论

两步DDD方法广泛用于几何一致性多层螺旋CT中的定量图像重建。我们研究了几何一致性多层螺旋CT中DD数据模型(8)或(9)的解的存在性、唯一性和稳定性。我们推导出了使(9)中的非线性映射成为局部同胚的充分条件，也推导出了该映射为真映射、进而为同胚的必要条件；同胚意味着解的存在性。特别是对于双能CT，我们证明相应映射是真映射，这为解的存在性提供了充分条件。我们还推导出了(9)中非线性映射具有全局单射性的充分条件，这等价于解的唯一性条件。此外，我们确定了一些有界区域，可在这些区域内对离散模型进行特定的稳定性估计。

此外，我们开展了定量研究，以数值方式验证所提出条件的有效范围。使用无噪声理想数据进行普通牛顿法计算的结果表明，真实基底正弦图

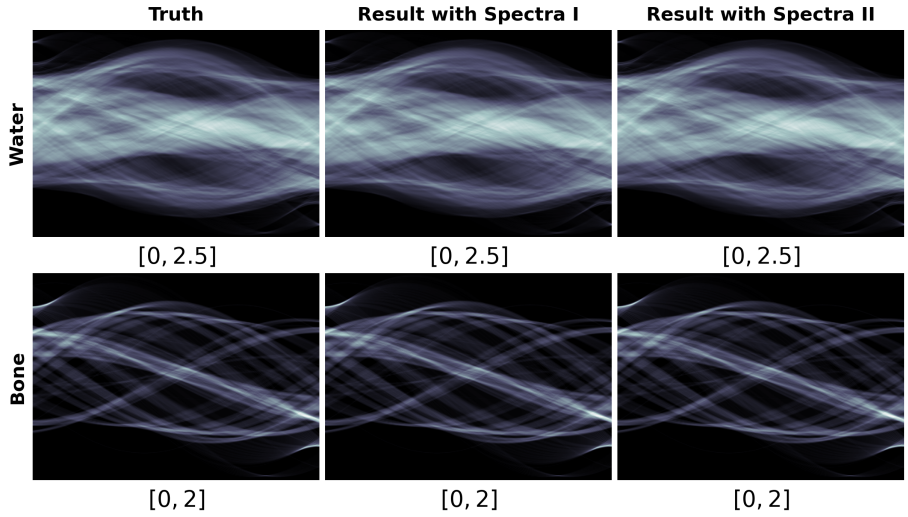
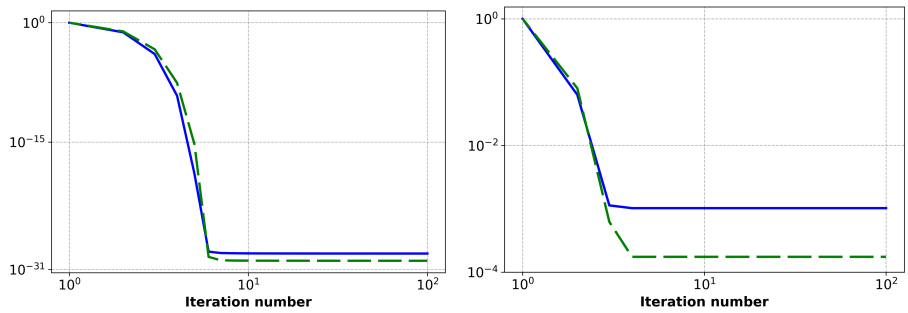


图 8： 躯干体模的水（第 1 行）和骨（第 2 行）基底正弦图：真实值（第 1 列）和估计值（第 2、3 列），由无噪声数据得到。第 2、3 列分别使用图 2a 和图 2b中的能谱对得到。



(a) (b)

图 9： 度量指标 $\mathrm{RE}_{\boldsymbol{x}}^{n}$ 以双对数尺度绘制，显示常规牛顿法的迭代次数函数；所用能谱对分别见图 2a （实线）和图 2b（虚线）。结果分别来自躯干体模的无噪声数据（a）和含噪数据（b）。

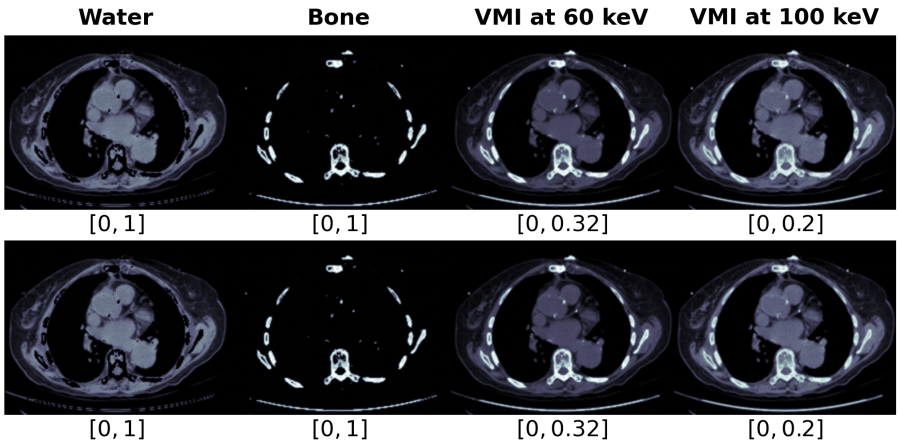


图 10：分别使用图 2a （第 1 行）和图 2b （第 2 行）中躯干体模的能谱对，从无噪声数据重建得到的水（第 1 列）和骨（第 2 列）的基图像，以及能量为 60 千电子伏（第 3 列）和 100 千电子伏（第 4 列）的虚拟单能图像。

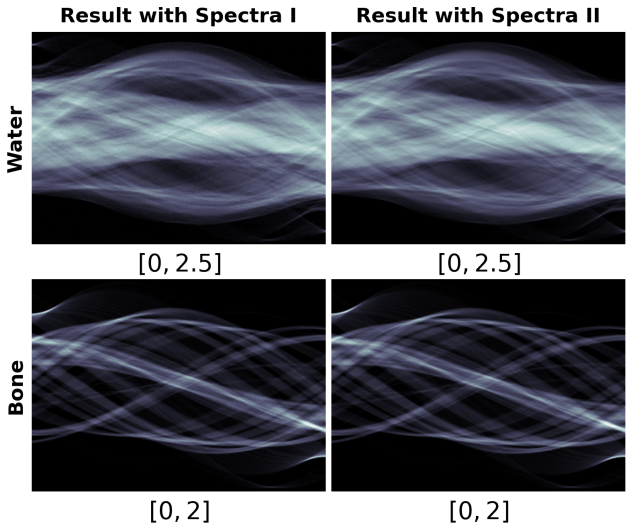


图 11：由躯干体模的含噪数据估计得到的水（第 1 行）和骨（第 2 行）的基底正弦图。第 1 列和第 2 列分别使用图 2a 和图2b中的能谱对获得。对应的真实基底正弦图显示在图 8中第 1 列。

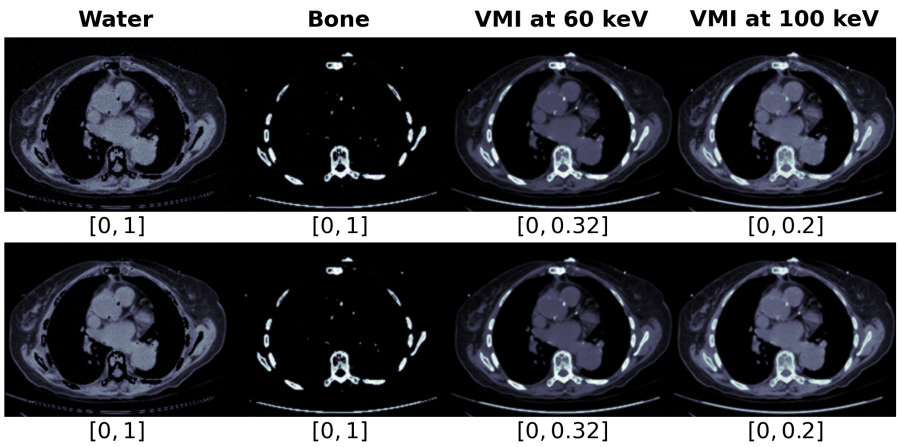


图 12: 分别使用躯干体模的图 2a （第 1 行）和图 2b （第 2 行）中的能谱对，从含噪数据重建得到的水（第 1 列）和骨（第 2 列）的基图像，以及能量为 60 千电子伏（第 3 列）和 100 千电子伏（第 4 列）的虚拟单能图像。

可以在数值上准确恢复。我们还通过使用含噪数据，在数值上展示了解的稳定性。

据我们所知，这是首项针对几何一致性多层螺旋CT中的离散基正弦图至DD数据模型（8）的存在性、唯一性和稳定性的具体明确条件进行研究的工作。所讨论的条件取决于所用能谱的分布以及基图像的展开系数。对于具有实际诊断意义的双能CT能谱和基材料衰减系数，无需知道特定解，即可轻松预先验证DD数据模型解的存在性、唯一性和稳定性。

如第2.2节所示，DD数据模型（8）或（9）与图像空间和数据空间所采用的具体离散化方案无关。因此，本文的解分析可直接应用于其他离散化形式。这些特点表明，所提出的条件在实际多光谱CT的一般物理情形中具有广阔的应用前景。对解的理论和数值研究也可能为设计能够直接求解DD数据模型的一步算法提供见解。

A 补充数据

我们给出了数值研究中使用的具体谱对和质量衰减系数，分别记为 S 和 B，定义见（11）。 S_1^{T}的第一列和第二列分别为图2a所示的低千伏谱和高千伏谱，而 S_2^{T} 的第一列和第二列分别为图2b所示的低千伏谱和高千伏谱。

$$S_1^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 6.07397e-09 & 1.33388e-09 \\ 7.10972e-02 & 2.69644e-02 \\ 2.75239e-01 & 1.65195e-01 \\ 2.75638e-01 & 1.98221e-01 \\ 1.99787e-01 & 1.69333e-01 \\ 1.23729e-01 & 1.56827e-01 \\ 5.45098e-02 & 7.83202e-02 \\ 0.00000e+00 & 6.44024e-02 \\ 0.00000e+00 & 5.06969e-02 \\ 0.00000e+00 & 3.78745e-02 \\ 0.00000e+00 & 2.66297e-02 \\ 0.00000e+00 & 1.69125e-02 \\ 0.00000e+00 & 8.18109e-03 \\ 0.00000e+00 & 4.43064e-04 \end{bmatrix}, S_2^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 6.07397e-09 & 0.00000e+00 \\ 7.10972e-02 & 0.00000e+00 \\ 2.75239e-01 & 6.63807e-05 \\ 2.75638e-01 & 1.42761e-02 \\ 1.99787e-01 & 8.19111e-02 \\ 1.23729e-01 & 1.77453e-01 \\ 5.45098e-02 & 1.38680e-01 \\ 0.00000e+00 & 1.49775e-01 \\ 0.00000e+00 & 1.40374e-01 \\ 0.00000e+00 & 1.17542e-01 \\ 0.00000e+00 & 8.91056e-02 \\ 0.00000e+00 & 5.94650e-02 \\ 0.00000e+00 & 2.97105e-02 \\ 0.00000e+00 & 1.64171e-03 \end{bmatrix}.$$

矩阵 B^{T} 的第一列和第二列分别是水和骨材料的质量衰减系数。

$$B^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 4.76251e+00 & 2.55327e+01 \\ 7.75665e-01 & 3.78214e+00 \\ 3.64996e-01 & 1.26821e+00 \\ 2.65875e-01 & 6.50013e-01 \\ 2.25389e-01 & 4.16057e-01 \\ 2.05162e-01 & 3.11231e-01 \\ 1.92592e-01 & 2.55515e-01 \\ 1.83292e-01 & 2.21535e-01 \\ 1.76097e-01 & 1.99266e-01 \\ 1.70448e-01 & 1.84934e-01 \\ 1.65911e-01 & 1.76111e-01 \\ 1.62055e-01 & 1.70366e-01 \\ 1.58449e-01 & 1.65270e-01 \\ 1.55060e-01 & 1.59231e-01 \end{bmatrix}.$$

参考文献

[1] R. E. Alvarez. 双能X射线数据变换的可逆性。医学物理学, 46:93–103, 2019.[2] R. E. Alvarez and A. Macovski. X射线计算机断层成像中的能量选择性重建。物理学与医学中的物理学, 21(5):733–744, 1976.[3] G. Bal. 反问题导论。应用物理与应用数学系讲义，哥伦比亚大学，纽约, 2012.[4] G. Bal, R. Gong, and F. Terzioglu. p函数的反演算法及其在多能计算机断层成像中的应用。反问题, 38(3):035011, 2022.[5] G. Bal and F. Terzioglu. 多能计算机断层成像中的唯一性准则。反问题, 36(6):065006, 2020.[6] R. Barber, E. Sidky, T. Schmidt, and X. Pan. 一种用于谱计算机断层成像数据约束单步反演的算法。医学与生物学中的物理学, 61(10):3784, 2016.[7] B. Chen, Z. Zhang, E. Sidky, D. Xia, and X. Pan. 优化算法支持的多谱计算机断层成像图像重建与扫描配置。物理学与医学中的物理学, 62:8763–8793, 2017.[8] B. Chen, Z. Zhang, D. Xia, E. Sidky, and X. Pan. 用于谱计算机断层成像图像重建的非凸原始-对偶算法。计算机化医学成像与图形学, 87:101821, 2021..[9] C. Chen, R. Wang, C. Bajaj, and O. Oktem. 一种高效计算X射线变换的算法。国际计算数学杂志, 99(7):1325–1343, 2022.[10] P. Deuflhard. 非线性问题的牛顿法：仿射不变性与自适应算法. Springer Publishing Company, Incorporated, 2011.[11] Y. Ding, E. Clarkson, and A. Ashok. 多能X射线变换的可逆性。医学物理学, 48(10):5959–5973, 2021.[12] D. Gale and H. Nikaido. 映射的雅可比矩阵与全局单射性。数学年刊, 159:81–93, 1965.[13] Y. Gao, X. Pan, and C. Chen. 非凸问题的扩展原始-对偶算法框架：在谱计算机断层成像图像重建中的应用。反问题, 38(8):085011, 2022.[14] W. B. Gordon. 欧几里得空间的微分同胚。美国数学月刊, 79:755–759, 1972.[15] V. Guillemin and A. Pollack. 微分拓扑, 第370卷。美国数学学会，2010。

[16] J. Hsieh。《计算机断层成像：原理、设计、伪影与最新进展》。SPIE Press，美国华盛顿州贝灵厄姆，第三版，2015 年。[17] J. H. Hubbell 和 S. M. Seltzer。《元素 Z= 1至 92 及另外 48 种剂量学相关物质在 1 千电子伏至 20 兆电子伏范围内的 X 射线质量衰减系数和质量能量吸收系数表》。技术报告，美国国家标准与技术研究院（NIST），美国马里兰州盖瑟斯堡，1995 年。[18] C. Johnson、R. Smith 和 M. Tsatsomeros。《矩阵正性》。剑桥数学论丛。剑桥大学出版社，2020 年。[19] Y. Long 和 J. A. Fessler。《用于谱 CT 的统计图像重建多材料分解》。IEEE 医学成像汇刊，33(8):1614–1626，2014 年。[20] K. Marc、B. Timo、S. Philip 和 A. Willi。《用于锥束计算机断层成像的经验双能校准（EDEC）》。2006 年 IEEE 核科学研讨会会议记录，4:2546–2550，2006 年。[21] L. Mirsky。《伴随矩阵和逆矩阵的范数》。Archiv der Mathematik，7:276–277，1956 年。[22] T. Parthasarathy。《关于全局单射定理》。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林和海德堡，1983 年。[23]D. Philippe。SpectrumGUI。https://sourceforge.net/projects/ spectrumgui/，2015 年。[24] A. Richard 和 S. Hans。《行列式恒等式：Gauss、Schur、Cauchy、Sylvester、Kronecker、Jacobi、Binet、Laplace、Muir 和 Cayley》。Linear Algebra and its Applications，52-53:769–791，1983 年。[25] R. Zhang、J. Thibault、C. A. Bouman、K. D. Sauer 和 J. Hsieh。《基于联合二次似然模型的双能 X 射线计算机断层成像模型迭代重建》。IEEE 医学成像汇刊，33(1):117–134，2014 年。[26] Y. Zhao、X. Zhao 和 P. Zhang。《一种用于双谱 CT 的扩展代数重建技术（E-ART）》。IEEE 医学成像汇刊，34(3):761–768，2015 年。[27] Y. Zou 和 M. Silver。《使用预重建分解技术分析双能 CT 中的快速 kV 切换》。Proc SPIE，6913，2008 年 4 月。