arXiv:2305.03333v1 [math.FA] 5 May 2023

某些解析函数空间上的 Ces`aro 类算子

Pengcheng Tang*

*Col*湖南师范大学数学与统计学院，中国湖南长沙 410006 *a*

摘要

设 μ 是区间 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度，且 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{D})$。Ces`aro 类算子定义为

$$\mathcal{C}_\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu_n \sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n,\ z \in \mathbb{D},$$

其中，对于 $n \geq 0$, μ_n 表示测度 μ的 n 阶矩，即 $\mu_n = \int_{[0,1)} t^n d\mu(t)$。设$X$ 和 Y为 $H(\mathbb{D})$ 的子空间，本文旨在研究 $\mathcal{C}_\mu$ 在不同子空间对 (X, Y) 上的作用。本文考察的空间包括 Hardy 空间 $H^p(0 < p \leq \infty)$、Morrey 空间$L^{2,\lambda}(0 < \lambda \leq 1)$、平均 Lipschitz 空间、Bloch 型空间等。

关键词：Ces`aro 类算子、Carleson 测度、Hardy 空间；Morrey 空间。

MSC 2010：47B38，30H10

1 引言

设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘， $H(\mathbb{D})$表示 $\mathbb{D}$ 中所有解析函数构成的空间，而 $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$ 归一化面积 Lebesgue 测度。

对于 $0 < \alpha < \infty$，Bloch型空间记作 $\mathcal{B}^\alpha$，定义为

$$\mathcal{B}^\alpha = \{f \in H(\mathbb{D}) : ||f||_{\mathcal{B}^\alpha} = |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty\}.$$

如果 $\alpha = 1$，那么 $\mathcal{B}^\alpha$ 就是经典Bloch空间 $\mathcal{B}$。

*通讯作者 Pengcheng Tang:
www.tang-tpc.com@foxmail.com

设 $0 < p \leq \infty$，经典Hardy空间 H^p 由满足以下条件的函数 $f \in H(\mathbb{D})$组成

$$||f||_p = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) < \infty,$$

其中

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty,$$
$$M_\infty(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

设 $I \subset \partial\mathbb{D}$ 为一段弧，$|I|$ 表示 I 的长度。Carleson 方块 $S(I)$ 定义为

$$S(I) = \{re^{i\vartheta} : e^{i\vartheta} \in I, \ 1 - \frac{|I|}{2\pi} \leq r < 1\}.$$

设 μ 是 $\mathbb{D}$ 上的正博雷尔测度。对于 $0 \leq \beta < \infty$ 和 $0 < t < \infty$，若 μ 是 β-对数型 t-Carleson 测度（分别地，消失 β-对数型 t-Carleson 测度），则称

$$\sup_{|I| \subset \partial\mathbb{D}} \frac{\mu(S(I))(\log \frac{2\pi}{|I|})^\beta}{|I|^t} < \infty, \ \text{resp.} \ \lim_{|I| \to 0} \frac{\mu(S(I))(\log \frac{2\pi}{|I|})^\beta}{|I|^t} = 0.$$

关于对数型 Carleson 测度的更多内容，见 [31]。

通过将定义为 $\overline{\mu}$ 的测度与之对应，$[0, 1$ 上的正博雷尔测度 μ 可以视为 $\mathbb{D}$ 上的博雷尔测度

$$\overline{\mu}(E) = \mu(E \cap [0, 1)), \ \text{for any Borel subset } E \text{ of } \mathbb{D}.$$

这样，$[0, 1$ 上的正博雷尔测度 μ 是 β-对数型 t-Carleson 测度，当且仅当存在常数 $M > 0$ 使得

$$\log^\beta \frac{e}{1-t} \mu([s, 1)) \leq M(1-s)^t, \ 0 \leq s < 1.$$

令 $0 < \lambda \leq 1$，Morrey 空间 $L^{2,\lambda}(\mathbb{D})$ 是所有满足以下条件的 $f \in H^2$ 的集合:

$$\sup_{I \subset \partial\mathbb{D}} \left(\frac{1}{|I|^\lambda} \int_I |f(e^{i\theta}) - f_I|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

在范数下，空间 $L^{2,\lambda}(\mathbb{D})$ 是一个 Banach 空间

$$||f||_{L^{2,\lambda}} = |f(0)| + \sup_{I \subset \partial\mathbb{D}} \left(\frac{1}{|I|^\lambda} \int_I |f(e^{i\theta}) - f_I|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

众所周知，$L^{2,\,1} = BMOA$。Morrey 空间随参数 λ 的减小而增大，因此有以下关系

$$BMOA \subseteq L^{2,\lambda_2} \subseteq L^{2,\lambda_1} \subseteq H^2, \ 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1.$$

对于 $0 < \lambda \leq 1$ 和任意函数 $f \in L^{2,\lambda}$，它具有以下等价范数。

$$||f||_{L^{2,\lambda}} \asymp |f(0)| + \sup_{w\in\mathbb{D}} \left((1-|w|^2)^{1-\lambda} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|\sigma_w(z)|^2) dA(z) \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中，σ_w表示 M¨obious 变换 $\sigma_w(z) = \frac{w-z}{1-z\overline{w}}$。关于这一刻画，参见 [25]。众所周知，函数 $f \in BMOA$ 具有对数增长，

$$|f(z)| \leq C \log \frac{2}{1-|z|}.$$

当 $0 < \lambda < 1$ 时，$f \in L^{2,\lambda}$ 则不再成立。事实上，由 [14] 的引理 2 可知，

$$H^{\frac{2}{1-\lambda}} \subseteq L^{2,\lambda} \subseteq H^2, \ 0 < \lambda < 1.$$

已知，对于 $0 < \lambda < 1$, $f \in L^{2,\lambda}$ 满足

$$|f(z)| \lesssim \frac{||f||_{L^{2,\lambda}}}{(1-|z|)^{\frac{1-\lambda}{2}}}, \ z \in \mathbb{D} \tag{1.1}$$

由 (1.1) 可得，对于所有 $0 < \lambda \leq 1$，$L^{2,\lambda} \subseteq B^{\frac{3-\lambda}{2}}$。当 $\lambda = 1$ 时，显然该包含关系是严格的。对于 $0 < \lambda < 1$, 函数 $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} \in \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$ 表明该包含关系也严格成立。由于 h 几乎处处没有径向极限，因此对于任意 $0 < p < \infty$，都有 $h \notin H^p$，这意味着 $h \notin L^{2,\lambda}$。关于莫雷空间的更多内容，请参阅 [10, 13, 38, 39] 。

设 $1 \leq p < \infty$ 且 $0 < \alpha \leq 1$，平均 Lipschitz 空间 Λ^p_α 由满足以下条件的函数组成：$f \in H(\mathbb{D})$几乎处处存在非切向极限，且当 $t \to 0$时，$\omega_p(t, f) = O(t^\alpha)$。这里，$\omega_p(\cdot, f)$ 是函数 $f(e^{i\theta})$的 p阶积分连续模。已知（见 [27]），Λ^p_α 是 H^p 的子集，并且

$$\Lambda^p_\alpha = \left(f \in H(\mathbb{D}) : M_p(r, f') = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}} \right), \text{ as } r \to 1 \right).$$

空间 Λ^p_α 是 Banach 空间，其范数 $||\cdot||_{\Lambda^p_\alpha}$ 定义为

$$\|f\|_{\Lambda^p_\alpha} = |f(0)| + \sup_{0\leq r<1} (1-r)^{1-\alpha} M_p(r, f').$$

在 [26],中，Shapiro 和 Sledd 证明了

$$\Lambda^p_{\frac{1}{p}} \subseteq BMOA. \ 1 < p < \infty.$$

当 $p = 1$时，空间 Λ^1_1 等价于空间

$$\left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{0\leq r<1} (1-r) M_1(f'', r) < \infty \right\}. \tag{1.2}$$

有关 Lipschitz 空间及相关解析函数空间的更多内容，请参见 [24, 11] s.

对于 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in H(\mathbb{D})$，Ces`aro 算子 $\mathcal{C}$定义为

$$\mathcal{C}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k) \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(tz)}{1-tz} dt, \ z \in \mathbb{D}.$$

Ces`aro 算子 $\mathcal{C}$ 在 H^p 上有界，适用于 $0 < p < \infty$。 $1 < p < \infty$ 的情形可由 Hardy 关于傅里叶级数的结果 [8] 结合 Riesz 变换推出。Siskakis [3] 给出了这一结果的另一种证明，并利用复合算子半群将其推广到 $p = 1$ 。Siskakis 在 [5]中给出了 H^1 上有界性的直接证明。Miao [15]证明了情形 $0 < p < 1$。Stempak [19] 给出了适用于 $0 < p \leq 2$的证明。Andersen [18] 和 Nowak [21] 给出了另一种适用于所有 $0 < p < \infty$的证明。在 $p = \infty$的情形下，由于 $\mathcal{C}(1)(z) = \log \frac{1}{1-z} \notin H^\infty$，因此 $\mathcal{C}(H^\infty) \nsubseteq H^\infty$。Danikas 和 Siskakis [22] 证明了 $\mathcal{C}(H^\infty) \nsubseteq BMOA$以及 $\mathcal{C}(BMOA) \nsubseteq BMOA$。关于 Ces`aro 算子 $\mathcal{C}$ 在加权伯格曼空间、Dirichlet 空间和一般混合范数空间上的作用 $H(p, q, \varphi)$，请参阅 [5, 33, 1, 28, 16]。

最近，Galanopoulos、Girela 和 Merch´an [29] 引入了作用于 $\mathcal{C}_\mu$ on$H(\mathbb{D})$ 上的 Ces`aro 型算子，这是经典 Ces`aro 算子的自然推广。它们考虑了如下推广：对于区间 $[0, 1)$ 上的正博雷尔测度 μ ，定义算子

$$\mathcal{C}_\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu_n \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k) \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(tz)}{(1-tz)} d\mu(t), \ z \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

其中， μ_n 表示 μ的 n 阶矩，即 $\mu_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$。他们研究了作用于不同解析函数空间上的算子 $\mathcal{C}_\mu$ （例如 Hardy 空间、Bergman 空间、Bloch 空间等）。

上述定义的 Ces`aro 型算子 $\mathcal{C}_\mu$ 引起了许多数学家的兴趣。Jin 和 Tang [12] 研究了 $\mathcal{C}_\mu$ 从一个 Dirichlet 型空间到另一个 Dirichlet 型空间的有界性（紧性）。Bao、Sun 和 Wulan [7] 研究了作用于 H^∞上的 $\mathcal{C}_\mu$ 的值域。他们证明， $\mathcal{C}_\mu(H^\infty) \subset \cap_{p>1} \Lambda^p_{\underline{1}}$ 当且仅当 μ 是一个 1-Carleson 测度。这回答了 ^{p} 中遗留的 [29]问题。事实上，他们研究了一个更一般的版本。就在最近，Blasco [23] 采用了不同的方法，也得到了相同的结果。基于先前的结果，自然会讨论当 μ 是一个带有$0 < \alpha < 1$的 α-Carleson 测度时，$\mathcal{C}_\mu$ 作用下 H^∞ 的值域。此外，对于测度 μ，使得 $\mathcal{C}_\mu(H^p) \subset \cap_{q>1} \Lambda^q_{\underline{1}}$的条件是什么

? We

^{q}

我们将证明以下结果的一般形式，从而回答这些问题。作为本研究的推论，我们不仅可以重新得到许多已知结论，还能获得一些新结果。

定理 1.1. 设 $0 < p \leq \infty$、 $0 < \lambda \leq 1$ 和 μ 是区间 $[0, 1)$ 上的有限正博雷尔测度。令 X 为 $H(\mathbb{D})$ 的子空间，且 $L^{2,\lambda} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$。那么， $\mathcal{C}_\mu(H^p) \subseteq X$ 当且仅当 μ 是一个$\frac{1+\lambda}{2} + \frac{1}{p}$-Carleson 测度。

定理 1.2. 设 $0 < p < \infty$、 $1 < q < \infty$ 和 μ 是区间 $[0, 1)$ 上的有限正博雷尔测度。令 X 和 Y为 $H(\mathbb{D})$的子空间，使得 $H^p \subseteq X \subseteq \mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}$且$\Lambda^q_{\underline{1}} \subseteq Y \subseteq \mathcal{B}$。 ^{q}那么，以下陈述成立

.

(1) 算子 $\mathcal{C}_\mu$从 X到 Y有界，当且仅当 μ是一个 $1 + \frac{1}{p}$-Carleson 测度。
(2) 若 μ是一个 1-对数 $1 + \frac{1}{p}$-Carleson 测度，则 $\mathcal{C}_\mu : X \to \Lambda^1_1$ 是有界的。

如果 $1 \le p < \infty$，我们知道 $\mathcal{C}_\mu$： $BMOA \to \Lambda^p_{\underline{1}}$ 当且仅当 μ 是一个 1-对数 1-Carleson$_p$测度。定理 1.2 刻画了那些使得 $\mathcal{C}_\mu$ 将 $L^{2,\lambda}$ 映射到 $\Lambda^p_{\underline{1}}$ 的 μ

在 [29], 中，作者证明了：若 X 和 Y 是单位圆盘$\mathbb{D}$上的全纯函数空间，且满足 $\Lambda^2_{\frac{1}{2}} \subseteq X$、$Y \subseteq \mathcal{B}$，那么 $\mathcal{C}_\mu$ 是从空间 X 到空间 Y的有界算子，当且仅当 μ 是一个 1-对数型 1-Carleson 测度。由于 $\Lambda^2_{\underline{1}} \subseteq BMOA = L^{2,\,1} \subseteq \mathcal{B}$，因此$_2\mathcal{C}_\mu$ 是从 X 到空间 $L^{2,\,1}$ 的有界算子，当且仅当 μ 是一个 1-对数型 1-Carleson 测度。自然会问， μ 需要满足什么条件，才能使 $\mathcal{C}_\mu$ 是从 X 到 $L^{2,\,\lambda}$的有界算子？另一方面，空间Λ^2_1 能否推广到空间 Λ^1_1？现在我们将陈述下一个结果，它推广了前面提到的结果。当 μ 是一个具有$\frac{1}{2} < s < 1$的 1-对数型 s-Carleson 测度时，我们的结果还给出了 $\mathcal{C}_\mu$ 作用下 X 的值域。

定理 1.3. 假设 $0 < \lambda \le 1$ and μ 是区间 $[0, 1)$ 上的有限正博雷尔测度。令 X and Y 为 $H(\mathbb{D})$ 的子空间，使得 $\Lambda^1_1 \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$ and $L^{2,\,\lambda} \subset Y \subset \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$。那么以下条件等价。

(1) 算子 $\mathcal{C}_\mu$ 从 X 到 Y 有界。(2) 测度 μ 是 1-对数$\frac{1+\lambda}{2}$-Carleson 测度。

定理 1.4. 假设 μ 是区间 $[0, 1)$ 上的有限正博雷尔测度。令 X 和 Y 为 $H(\mathbb{D})$ 的子空间，使得 $\Lambda^1_1 \subseteq X, Y \subseteq \mathcal{B}$。那么以下条件等价。(1) 算子 $\mathcal{C}_\mu$ 从 X 到 Y 有界。(2) 测度 μ 是 1- 对数 1-Carleson 测度。

算子 $\mathcal{C}_\mu$ 在 $BMOA$ 上的有界性已在 [29, 7, 23]中得到研究。 $BMOA$ 空间与 Morrey 空间 $L^{2,\,\lambda}$密切相关。由于 Moreey 空间 $L^{2,\,\lambda}$ 在我们的工作中自然地出现，因此研究算子 $\mathcal{C}_\mu$在参数 λ取一般值时作用于 Moreey 空间 $L^{2,\,\lambda}$ 的情形，似乎是很自然的。下面的结果给出了 $\mathcal{C}_\mu$ 在不同 Morrey 空间之间作用的有界性的完整刻画。注意， $\lambda_1 = 1$ 的情形已包含在定理 1.3 中。

定理 1.5. 设$0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 \le 1$, μ是区间$[0, 1)$上的有限正博雷尔测度。令 X和 Y为 $H(\mathbb{D})$的子空间，满足 $L^{2,\,\lambda_1} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda_1}{2}}$且 $L^{2,\,\lambda_2} \subseteq Y \subseteq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda_2}{2}}$。那么，以下陈述等价。

(1) 算子 $\mathcal{C}_\mu$从 X到 Y是有界的。(2) 测度 μ 是一个 $1 + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$-Carleson 测度。

在第 2 节中，我们将给出证明中会用到的一些基本结果。第 3 节将用于给出定理 1.1–定理 1.5 的证明，并介绍一些相关推论。需要说明的是，我们所讨论的 $H(\mathbb{D})$ 的子空间 X 和 Y 是连续嵌入在 $H(\mathbb{D})$ 中的巴拿赫空间。要证明算子 $\mathcal{C}_\mu$ 从 X 到 Y是有界的，只需利用闭图定理证明它将 X 映射到 Y。

在全文中，字母 C 将表示一个正数常数，该常数仅取决于所显示的参数（有时这些参数会被省略），但在不同位置出现时不一定具有相同的值。此外，如果存在一个常数 C 使得 $Q_1 \le CQ_2$，我们将使用记号 $Q_1 \lesssim Q_2$，而 $Q_1 \gtrsim Q_2$ 的含义与之类似。特别地，如果 $Q_1 \lesssim Q_2$ 且$Q_1 \gtrsim Q_2$，则我们记作 $Q_1 \asymp Q_2$，并称 Q_1 与 Q_2 等价。这一记号已在上文的引言中使用。

2 预备结果

引理2.1. 设 $0 < \alpha < \infty$ 和 $f \in \mathcal{B}^\alpha$。那么，对于每个 $z \in \mathbb{D}$，我们有以下不等式:

$$|f(z)| \lesssim \begin{cases} ||f||_{\mathcal{B}^\alpha}, \ if\, 0 < \alpha < 1; \\ ||f||_{\mathcal{B}^\alpha} \log \frac{2}{1-|z|}, \ if\, \alpha = 1; \\ \frac{||f||_{\mathcal{B}^\alpha}}{(1-|z|)^{\alpha-1}}, \ if\, \alpha > 1. \end{cases}$$

这个著名的引理可见于 [20]。

引理 2.2。设 $\alpha > 0$和 $f \in H(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$, $\widehat{f}(n) \geq 0$对所有 $n \geq 0$成立。那么$f \in \mathcal{B}^\alpha$ 当且仅当

$$\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} k \widehat{f}(k) < \infty.$$

该结果可由 [30] 中的推论 3.2或 [9]中的定理 2.6推出。

引理2.3。设 $0 < s < \infty$ 和 μ 是区间 $[0, 1)$ 上的有限正博雷尔测度。那么以下陈述成立:

(1) μ 是 s-Carleson 测度，当且仅当 $\mu_n = O(\frac{1}{n^s})$。(2) μ 是消失的 s-Carleson 测度，当且仅当 $\mu_n = o(\frac{1}{n^s})$。

该引理由 [6] 中的定理 2.1 和定理 2.4 得出。

下面的积分估计很有用。我们只列出所需的估计。详细证明及其他情形请参见 [35] 。

引理 2.4. 设 $r \geq 0, t \geq 0, \delta > -1, k \geq 0$. 令

$$J_{w,a} = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\delta}{|1-z\overline{w}|^t |1-z\overline{a}|^r} \log^k \frac{e}{1-|z|^2} dA(z), \quad w, a \in \mathbb{D}.$$

(1) 若 $t + r - \delta > 2, t - \delta < 2$ 且 $r - \delta < 2$，则

$$J_{w,a} \asymp \frac{1}{|1-\langle w, a\rangle|^{t+r-\delta-2}} \log^k \frac{e}{|1-\langle w, a\rangle|}.$$

(2) 若 $t - \delta > 2 > r - \delta$，则

$$J_{w,a} \asymp \frac{1}{(1-|w|^2)^{t-\delta-n-1} |1-\langle w, a\rangle|^r} \log^k \frac{e}{1-|w|^2}.$$

我们还需要以下估计。（例如参见 [20] 中的定理 1.12）

引理 2.5. 设 α 为任意实数，且 $z \in \mathbb{D}$。那么

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-ze^{-i\theta}|^\alpha} \asymp \begin{cases} 1 & if\ \alpha < 1, \\ \log \frac{2}{1-|z|^2} & if\ \alpha = 1, \\ \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha-1}} & if\ \alpha > 1, \end{cases}$$

以下结果为业内专家所熟知。我们利用双变量点的积分估计给出详细证明。这些积分估计具有实用性，也有其独特价值。有关各种积分估计，请参阅 [35, 32, 36] 。

引理 2.6. 设 $0 < \lambda < 1$，则对任意 $c \leq \frac{1-\lambda}{2}$，有

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^c} \in L^{2,\lambda}.$$

证明. 只需证明 $c = \frac{1-\lambda}{2}$ 的情形。对于 $0 < r < 1$ 和 $w \in \mathbb{D}$，由 [36] 中的命题 3.1-(7)，我们有

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{3-\lambda}|1-r\overline{w}e^{i\theta}|^2} \asymp \frac{1}{(1-r)^{2-\lambda}|1-r^2\overline{w}|^2} + \frac{1}{(1-r^2|w|)|1-r^2\overline{w}|^{3-\lambda}}.$$

容易验证

$$\frac{1}{|1-r^2\overline{w}|^2} \lesssim \frac{1}{(1-r|w|)^2} \text{ and } \frac{1-r}{(1-r^2|w|)|1-r^2\overline{w}|^{3-\lambda}} \lesssim \frac{(1-r)^{\lambda-1}}{(1-r|w|)^2}.$$

利用极坐标公式和上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
||f||_{L^{2,\lambda}} &\asymp \sup_{w\in\mathbb{D}} \left((1-|w|^2)^{1-\lambda} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|\sigma_w(z)|^2) dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_0^1 (1-r) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{3-\lambda}|1-r\overline{w}e^{i\theta}|^2} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\asymp \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{\lambda-1}}{|1-r^2\overline{w}|^2} dr + \int_0^1 \frac{1-r}{(1-r^2|w|)|1-r^2\overline{w}|^{3-\lambda}} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{\lambda-1}}{(1-r|w|)^2} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

在上面的最后一步中，我们使用了积分估计

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\lambda-1}}{(1-r|w|)^2} dr \asymp \frac{1}{(1-|w|)^{2-\lambda}},$$

该估计可在文献 [37] 中找到。 □

3 主要结果的证明

首先，我们给出关于 μ 在 $[0,1$上作为对数型卡尔leson测度的正博雷尔测度的若干刻画，这将在我们的证明中用到。

命题 3.1. 设 $\beta > 0$、 $\gamma \geq 0$、 $0 \leq q < s < \infty$ 和 μ 是 $[0,1$上的有限正博雷尔测度。则以下条件等价:

(1) μ 是一个 γ-对数 s-Carleson 测度;

(2)

$$S_1 := \sup_{w\in\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{(1-|w|)^\beta \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}} d\mu(t) < \infty;$$

(3)

$$S_2 := \sup_{w\in\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{(1-|w|)^\beta \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^q|1-wt|^{s+\beta-q}} d\mu(t) < \infty.$$

(4)

$$S_3 := \sup_{w\in\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{(1-|w|)^\beta \log^\gamma \frac{e}{1-t}}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}} d\mu(t) < \infty.$$

证明。(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明很直接。事实上,

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sup_{w\in\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{(1-|w|)^\beta \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}} d\mu(t) \\ &\geq \int_{|w|}^1 \frac{(1-|w|)^\beta \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}} d\mu(t) \\ &\gtrsim \frac{\mu(|w|,1)\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-|w|)^s}. \end{aligned}$$

这就完成了 (2) $\Rightarrow$ (1) 的证明。类似地，我们可以得到 (3) $\Rightarrow$ (1) 和 (4) $\Rightarrow$ (1)。由于 (2) $\Rightarrow$ (3) 显然成立，要完成证明，我们还需证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (4)。

(1) $\Rightarrow$ (2)。这一蕴含的证明与 [7] 中命题 2.1 的证明思路相近。为完整起见，我们给出详细证明。

只需考虑 $w \in \mathbb{D}$ 满足 $\frac{1}{2} \leq |w| < 1$ 和 $q > 0$的情形。对于每个正整数$n \geq 1$，令

$$Q_0(w) = \varnothing, Q_n(w) = \{t \in [0,1) : 1 - 2^n(1-|w|) \leq t < 1\}.$$

令 n_w为满足 $1-2^{n_w}(1-|w|) \leq 0$的最小整数。那么，当 $n \geq n_w$时， $Q_n(w) = [0,1)$。如果 $t \in Q_1(w)$, 那么

$$1 - |w| \leq 1 - |w|t.$$

此外，对于 $2 \leq n \leq n_w$ 和 $t \in Q_n(w)\backslash Q_{n-1}(w)$，我们有

$$(2^{n-1}-1)(1-|w|) = |w| - (1 - 2^{n-1}(1-|w|)) \leq |w| - t \leq 1 - |w|t.$$

注意，$\beta>0$、$\gamma\geq 0$、$0<q<s<\infty$ 和 μ 是一个 γ-对数 s-Carleson 测度，结合上述不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^\beta}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}}d\mu(t)\\
=&\sum_{n=1}^{n_w}\int_{Q_n(w)\setminus Q_{n-1}(w)} \frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^\beta}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}}d\mu(t)\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{n_w}\frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^{q-s}}{2^{n(s+\beta-q)}}\int_{Q_n(w)\setminus Q_{n-1}(w)}\frac{1}{(1-t)^q}d\mu(t)\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{n_w}\frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^{q-s}}{2^{n(s+\beta-q)}}\int_0^\infty x^{q-1}\mu\big(\{t\in[1-2^n(1-|w|),1):1-\frac{1}{x}<t\}\big)dx\\
\asymp&\sum_{n=1}^{n_w}\frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^{q-s}}{2^{n(s+\beta-q)}}\int_0^{\frac{1}{2^n(1-|w|)}} x^{q-1}\mu\big([1-2^n(1-|w|),1)\big)dx\\
&+\sum_{n=1}^{n_w}\frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^{q-s}}{2^{n(s+\beta-q)}}\int_{\frac{1}{2^n(1-|w|)}}^\infty x^{q-1}\mu\big([1-\frac{1}{x},1)\big)dx\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{n_w}\frac{\log^\gamma \frac{e}{1-|w|}(1-|w|)^{q-s}}{2^{n(s+\beta-q)}}\left(\frac{2^{ns}(1-|w|)^s}{\log^\gamma\frac{e}{2^n(1-|w|)}}\int_0^{\frac{1}{2^n(1-|w|)}}x^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2^n(1-|w|)}}^\infty\frac{\log^{-\gamma}ex}{x^{s+1-q}}dx\right)\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{n_w}\frac{1}{2^{\beta n}}\frac{\log^\gamma\frac{e}{1-|w|}}{\log^\gamma\frac{e}{2^n(1-|w|)}}\lesssim\sum_{n=1}^{n_w}\frac{1}{2^{\beta n}}\left(1+\frac{n^\gamma\log 2}{\log^\gamma\frac{2}{2^n(1-|w|)}}\right)\lesssim\sum_{n=1}^{n_w}\frac{n^\gamma}{2^{\beta n}}\lesssim 1.
\end{aligned}$$

这意味着

$$S_1:=\sup_{w\in\mathbb{D}}\int_0^1\frac{(1-|w|)^\beta}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}}d\mu(t)<\infty.$$

(1) ⇒ (4)。我们只需考虑 $\gamma>0$ 的情形。对于 $0<\delta<s-q$，令

$$f(t)=(1-t)^\delta\log^\gamma\frac{e}{1-t},\ \ 0\leq t<1.$$

已知 f 是 $[0,1$ 上的正规函数。此外，我们可以选择 $b=\delta$ 和 $0<a=\varepsilon<\delta$，使得

$$\frac{f(t)}{(1-t)^b}\text{is increasing},\ \frac{f(t)}{(1-t)^a}\text{is decreasing},\ \text{as } t\to 1^-.$$

因此，由 [34] 中的引理 2.2 可得

$$\frac{f(t)}{f(r)}\lesssim\left(\frac{1-t}{1-r}\right)^\varepsilon+\left(\frac{1-t}{1-r}\right)^\delta \tag{3.1}$$

对所有 $0<t$、 $r<1$ 均成立。注意到 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 已经证明。由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(1-|w|)^\beta \log^\gamma \frac{e}{1-t}}{(1-t)^q(1-|w|t)^{s+\beta-q}}d\mu(t)\\
=&\int_0^1 \frac{(1-|w|)^{\beta+\delta} \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^{q+\delta}(1-|w|t)^{s+\beta-q}}\cdot\frac{f(t)}{f(|w|)}d\mu(t)\\
\lesssim&\int_0^1 \frac{(1-|w|)^{\beta+\delta} \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^{q+\delta}(1-|w|t)^{s+\beta-q}}\left\{\left(\frac{1-t}{1-|w|}\right)^\varepsilon+\left(\frac{1-t}{1-|w|}\right)^\delta\right\}d\mu(t)\\
\lesssim&\int_0^1 \frac{(1-|w|)^{\beta} \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^{q}(1-|w|t)^{s+\beta-q}}d\mu(t)+\int_0^1 \frac{(1-|w|)^{\beta+\delta-\varepsilon} \log^\gamma \frac{e}{1-|w|}}{(1-t)^{q+\delta-\varepsilon}(1-|w|t)^{s+\beta-q}}d\mu(t)\\
\lesssim&\,1.
\end{aligned}$$

由此得到 (4)。 □

注 3.2. 对于 $\gamma\in\mathbb{R}$ 和 $0<s<\infty$，我们可以用同样的方法证明以下结果。

$$\sup_{t\in[0,1)}\frac{\log^\gamma \frac{e}{1-t}\mu([t,1))}{(1-t)^s}<\infty \Leftrightarrow (3.1)\Leftrightarrow (3.2)\Leftrightarrow (3.3).$$

现在给出定理 1.1–定理 1.5 的证明。

定理 1.1 (1) 的证明。若 $\mathcal{C}_\mu(H^p)\subseteq X$，取

$$f_a(z)=\frac{(1-a)}{(1-az)^{1+\frac{1}{p}}},\ 0<a<1.$$

则对所有 $0<p\le\infty$，都有 $f_a\in H^p$，且 $\sup_{0<a<1}||f_a||_p\lesssim 1$。这表明

$$\mathcal{C}_\mu(f_a)\in X\subseteq\mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}.$$

容易看出

$$\mathcal{C}_\mu(f_a)'(z)=\int_0^1\frac{tf_a'(tz)}{(1-tz)}d\mu(t)+\int_0^1\frac{tf_a(tz)}{(1-tz)^2}d\mu(t).$$

由于 $\mathcal{C}_\mu(f_a)\in X\subseteq\mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$，由引理2.1可得

$$|\mathcal{C}_\mu(f_a)'(a)|\lesssim\frac{1}{(1-a)^{\frac{3-\lambda}{2}}},\ a\in(0,1).$$

于是，对于 $\frac{1}{2}<a<1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-a)^{\frac{3-\lambda}{2}}}&\gtrsim\left|\int_0^1\frac{(1+\frac{1}{p})ta(1-a)}{(1-ta)(1-ta^2)^{2+\frac{1}{p}}}d\mu(t)+\int_0^1\frac{t(1-a)}{(1-ta)^2(1-ta^2)^{1+\frac{1}{p}}}d\mu(t)\right|\\
&\gtrsim\int_a^1\frac{1}{(1-ta^2)^{2+\frac{1}{p}}}d\mu(t)\\
&\gtrsim\frac{\mu([a,1))}{(1-a)^{2+\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\mu([a,1)) \lesssim (1-a)^{\frac{1+\lambda}{2}+\frac{1}{p}} \text{ for all } \frac{1}{2} < a < 1.$$

这意味着 μ 是一个 $\frac{1+\lambda}{2}+\frac{1}{p}$-Carleson 测度。

另一方面，假设 μ 是一个 $\frac{1+\lambda}{2}+\frac{1}{p}$-Carleson 测度。令 $L^{2,\lambda} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$，要证明 $\mathcal{C}_\mu(H^p) \subseteq X$，只需证明 $\mathcal{C}_\mu : H^p \to L^{2,\lambda}$ 是有界的。不失一般性，我们可以假设 $f \in H^p$ 且 $f(0) = 0$。根据 (1.3)，我们知道

$$\mathcal{C}_\mu(f)'(z) = \int_0^1 \frac{tf'(tz)}{(1-tz)} d\mu(t) + \int_0^1 \frac{tf(tz)}{(1-tz)^2} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Let

$$\delta_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & 0 < p < \infty; \\ 0 & p = \infty. \end{cases}$$

众所周知（例如参见 [27] 第 36 页）

$$|f(z)| \lesssim \frac{||f||_p}{(1-|z|)^{\delta_p}},$$

因此

$$|f'(z)| \lesssim \frac{||f||_p}{(1-|z|)^{1+\delta_p}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_\mu(f)'(z)| &\le \int_0^1 \frac{|tf'(tz)|}{|1-tz|} d\mu(t) + \int_0^1 \frac{|tf(tz)|}{|1-tz|^2} d\mu(t) \\ &\le ||f||_p \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{|1-tz|(1-t|z|)^{1+\delta_p}} + ||f||_p \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-t|z|)^{\delta_p}|1-tz|^2} \\ &\lesssim ||f||_p \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{|1-tz|(1-t|z|)^{1+\delta_p}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si由于 $0 < \lambda < 1$，我们可以选取一个正实数 $1-\lambda < \sigma < 1$，使得

$$\frac{1}{(1-t|z|)^{2+2\delta_p}} \le \frac{1}{(1-t)^{2+2\delta_p-\sigma}(1-|z|)^{\sigma}}. \tag{3.3}$$

由 (3.2)、Minkowski 不等式、(3.3)、引理 2.4 和命题 3.1，可得

$$
\begin{aligned}
||\mathcal{C}_\mu(f)||_{L^{2,\lambda}} &\asymp \sup_{w\in\mathbb{D}}\left((1-|w|^2)^{1-\lambda}\int_{\mathbb{D}}|\mathcal{C}_\mu(f)'(z)|^2(1-|\sigma_w(z)|^2)dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim ||f||_p \sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}\left(\int_{\mathbb{D}}\left(\int_0^1\frac{d\mu(t)}{|1-tz|(1-t|z|)^{1+\delta_p}}\right)^2\frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{w}|^2}dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le ||f||_p \sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}\int_0^1\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)dA(z)}{(1-t|z|)^{2(1+\delta_p)}|1-tz|^2|1-z\overline{w}|^2}\right)^{\frac{1}{2}}d\mu(t)\\
&\lesssim ||f||_p \sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}\int_0^1\frac{1}{(1-t)^{1+\delta_p-\frac{\sigma}{2}}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|)^{1-\sigma}dA(z)}{|1-tz|^2|1-z\overline{w}|^2}\right)^{\frac{1}{2}}d\mu(t)\\
&\asymp ||f||_p \sup_{w\in\mathbb{D}}\int_0^1\frac{(1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}}{(1-t)^{1+\delta_p-\frac{\sigma}{2}}|1-tw|^{\frac{1+\sigma}{2}}}d\mu(t)\\
&\lesssim ||f||_p.
\end{aligned}
$$

因此， $\mathcal{C}_\mu:\ H^p\to L^{2,\lambda}$ 是有界的。证明完毕。 □

推论 3.3. 假设 $0<\lambda\le 1$ 且 μ 是在区间 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。那么， $\mathcal{C}_\mu: H^\infty\to L^{2,\lambda}$ 有界，当且仅当 μ 是一个 $\frac{1+\lambda}{2}$-Carleson 测度。

备注 3.4. 若 $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$，则推论 3.3 表明， μ 是一个 α-Carleson 测度，当且仅当 $\mathcal{C}_\mu(H^\infty)\subseteq L^{2,2\alpha-1}$。当 $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ 且 μ 是一个 α-Carleson 测度时，由命题 3.1 可得

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{2-\alpha}|\mathcal{C}_\mu(f)'(z)| &\lesssim ||f||_{H^\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}\int_0^1\frac{(1-|z|^2)^{2-\alpha}d\mu(t)}{(1-t|z|)|1-tz|}\\
&\lesssim ||f||_{H^\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}\int_0^1\frac{(1-|z|^2)^{1-\alpha}d\mu(t)}{|1-tz|}\\
&\lesssim ||f||_{H^\infty}.
\end{aligned}
$$

这意味着 $\mathcal{C}_\mu(H^\infty)\subseteq\mathcal{B}^{2-\alpha}$.□

对于 $2<p\le\infty$，由 [39] 中的定理 9 可知，Cesr`ao 算子 $\mathcal{C}$ 是从H^p到 $L^{2,1-\frac{2}{p}}$的有界算子。作为定理 1.1 的推论，我们得到以下结果。

推论 3.5. 假设 $2<p\le\infty$ 和 μ 是区间 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。那么 $\mathcal{C}_\mu: H^p\to L^{2,1-\frac{2}{p}}$ 有界，当且仅当 μ 是 1-Carleson 测度。

定理 1.2 (1) 的证明。必要性的证明与定理 1.1 类似，故略去。对于充分性，只需证明当 μ 是 $1+\frac{1}{p}$-Carleson 测度时， $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}})\subseteq\Lambda^q_{\frac{1}{q}}$。

注意，(3.2) 对所有 $f \in \mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}$ 均成立。由 (3.2)、闵可夫斯基不等式、引理 2.5 和命题 3.1 可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\mathcal{C}_\mu(f)'(re^{i\theta})|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}\\
\lesssim&\|f\|_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\frac{d\mu(t)}{|1-tre^{i\theta}|(1-tr)^{1+\delta_p}}\right)^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}\\
\lesssim&\|f\|_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\sup_{0<r<1}(1-r)^{1-\frac{1}{q}}\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-tre^{i\theta}|^q(1-tr)^{q(1+\delta_p)}}d\theta\right)^{\frac{1}{q}}d\mu(t)\\
\lesssim&\|f\|_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\sup_{0<r<1}\int_0^1\frac{(1-r)^{1-\frac{1}{q}}}{(1-tr)^{2+\delta_p-\frac{1}{q}}}d\mu(t)\\
\lesssim&\|f\|_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

这给出 $\mathcal{C}_\mu:\ \mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}\to\Lambda^q_{\underline{1}}$ 有界。$_q$

(2). 假设 μ是一个 1-对数$1+\frac{1}{p}$-Carleson 测度。令 $H^p\subseteq X\subseteq\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}$和 $f\in X$，则 $f\in X\subseteq\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}$。利用 $\mathcal{C}_\mu$的积分表示，我们看到

$$\mathcal{C}_\mu(f)''(z)=\int_0^1\frac{t^2f''(tz)}{1-tz}d\mu(t)+2\int_0^1\frac{t^2f'(tz)}{(1-tz)^2}d\mu(t)+2\int_0^1\frac{t^2f(tz)}{(1-tz)^3}d\mu(t). \tag{3.4}$$

由引理2.1可得

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_\mu(f)''(z)|&\lesssim||f||_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\int_0^1\left(\frac{(1-t|z|)^{-2-\frac{1}{p}}}{|1-tz|}+\frac{(1-t|z|)^{-1-\frac{1}{p}}}{|1-tz|^2}+\frac{(1-t|z|)^{-\frac{1}{p}}}{|1-tz|^3}\right)d\mu(t)\\
&\lesssim||f||_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\int_0^1\frac{1}{(1-t|z|)^{2+\frac{1}{p}}|1-tz|}d\mu(t).
\end{aligned}$$

根据富比尼定理、引理 2.5 和命题 3.1，我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le r<1}(1-r)M_1(\mathcal{C}_\mu(f)'',r)\\
\lesssim&||f||_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\sup_{0\le r<1}(1-r)\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{d\mu(t)}{(1-tr)^{2+\frac{1}{p}}|1-tre^{i\theta}|}d\theta\\
\lesssim&||f||_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\sup_{0\le r<1}\int_0^1\frac{1-r}{(1-tr)^{2+\frac{1}{p}}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-tre^{i\theta}|}d\mu(t)\\
\lesssim&||f||_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\sup_{0\le r<1}\int_0^1\frac{(1-r)\log\frac{e}{1-tr}}{(1-tr)^{2+\frac{1}{p}}}d\mu(t)\\
\lesssim&||f||_{\mathcal{B}^{1+\frac{1}{p}}}\lesssim||f||_X.
\end{aligned}$$

这给出$\mathcal{C}_\mu:\ X\to\Lambda^1_1$ 有界。 □

定理 1.1 和定理 1.2 得出如下结果。

推论 3.6. 设 $0 < p \leq \infty$、 $1 < q < \infty$ 和 μ 是区间 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。令 X 为 $H(\mathbb{D})$ 的一个子空间，且满足 $\Lambda^q_{\frac{1}{1}} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$。则 $\mathcal{C}_\mu : H^p \to X$ 有界 $_q$ 当且仅当 μ 是一个 $1+\frac{1}{p}$-Carleson 测度。

注 3.7. 在 *[23],* 中，Blasco 证明了 $\mathcal{C}_\eta : H^1 \to \Lambda^2_{\frac{1}{1}}$ 有界当且仅当$_2$

$$\sup_{n\geq 0}(n+1)^3\sum_{k=n}^{\infty}|\eta_k|^2 < \infty, \tag{3.5}$$

其中， η 是 $[0,1$上的复博雷尔测度。详细内容请参见 *[23]* 中的定理3.7。如果 μ 是 $[0,1$上的正博雷尔测度，那么推论3.6表明， $\mathcal{C}_\mu : H^1 \to \Lambda^2_{\frac{1}{2}}$ 有界当且仅当 μ 是一个2-Carleosn测度。当 μ 是 $[0,1$上的正博雷尔测度时，条件（3.5）等价于 μ 是一个2-Carleosn测度。事实上，

$$\infty > \sup_{n\geq 0}(n+1)^3\sum_{k=n}^{\infty}|\mu_k|^2 \gtrsim \sup_{n\geq 0}(n+1)^3\sum_{k=n}^{2n}\mu_k^2 \gtrsim \sup_{n\geq 0}(n+1)^4\mu_{2n}^2.$$

另一方面，如果 μ 是一个 2-Carleson 测度，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 0}(n+1)^3\sum_{k=n}^{\infty}|\mu_k|^2 &\lesssim \sup_{n\geq 0}(n+1)^3\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^4}\\ &\lesssim \sup_{n\geq 0}(n+1)^3\int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx \lesssim 1.\square\end{aligned}$$

对于 $0 < \lambda < 1$，令 $p = \frac{2}{1-\lambda}$ 属于定理 1.2，则我们可以得到 $\mathcal{C}_\mu$ 从 $L^{2,\ \lambda}$ 到平均 Lipschitz 空间 $\Lambda^q_{\frac{1}{1}}$ 的有界性。$_q$

推论 3.8. 假设 $0 < \lambda < 1$、 $1 < p < \infty$ 和 μ 是区间 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。令 X 为 $H(\mathbb{D})$ 的子空间，使得 $\Lambda^p_{\frac{1}{1}} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$。那么 $\mathcal{C}_\mu : L^{2,\lambda} \to X$ 有界，当且仅当 μ 是一个 $\frac{3-\lambda}{2}$-Carleson 测度。

定理 1.3 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明。令 $\Lambda^1_1 \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$ 和 $L^{2,\lambda} \subseteq Y \subseteq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$。容易验证 $g(z) = \log\frac{1}{1-z} \in X$，并且

$$\mathcal{C}_\mu(g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)z^n.$$

如果 $\mathcal{C}_\mu(X) \subseteq Y$，那么 $\mathcal{C}_\mu(g) \in Y \subseteq \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda}{2}}$。由引理2.1可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\mu_k\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)r^n \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\frac{3-\lambda}{2}}},\ \ r\in(0,1).$$

对于 $K \geq 2$，取 $r_k = 1 - \frac{1}{K}$。由于数列 $\{\mu_k\}$ 单调递减，经过简单估算可得

$$\begin{aligned} K^{\frac{3-\lambda}{2}} &\gtrsim \sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) r_K^n \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{K} k\mu_k \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) r_K^n \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{K} k\mu_k \log k r_K^n \\ &\gtrsim \mu_K \sum_{k=1}^{K} k \log k \\ &\asymp \mu_K K^2 \log K. \end{aligned}$$

因此 $\mu_K \lesssim \frac{1}{K^{\frac{1+\lambda}{2}} \log K}$ 这意味着 μ 是一个 1-对数 $\frac{1+\lambda}{2}$-Carleson 测度。

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设 μ 是一个 1-对数 $\frac{1+\lambda}{2}$ -Carleson 测度。只需证明$\mathcal{C}_\mu$： $\mathcal{B} \to L^{2,\lambda}$ 是有界的。令 $f \in \mathcal{B}$，显然

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_\mu(f)'(z)| &\leq \int_0^1 \frac{|tf'(tz)|}{|1-tz|} d\mu(t) + \int_0^1 \frac{|tf(tz)|}{|1-tz|^2} d\mu(t) \\ &\leq ||f||_{\mathcal{B}} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{|1-tz|(1-t|z|)} + ||f||_{\mathcal{B}} \int_0^1 \frac{\log \frac{e}{1-t|z|}}{|1-tz|^2} d\mu(t) \end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned} &||\mathcal{C}_\mu(f)||_{L^{2,\lambda}} \asymp \sup_{w\in\mathbb{D}} \left((1-|w|^2)^{1-\lambda} \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{C}_\mu(f)'(z)|^2 (1-|\sigma_w(z)|^2) dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{|1-tz|(1-t|z|)}\right)^2 \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{w}|^2} dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^1 \frac{\log \frac{e}{1-t|z|} d\mu(t)}{|1-tz|^2}\right)^2 \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{w}|^2} dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &:= E_1 + E_2. \end{aligned}$$

由于 μ 是 1-对数 $\frac{1+\lambda}{2}$ -Carleson 测度，由闵可夫斯基不等式、引理 2.4 以及

由命题 3.1，我们有

$$
\begin{aligned}
E_2 &:= ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^1 \frac{\log \frac{e}{1-t|z|}}{|1-tz|^2} d\mu(t) \right)^2 \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{w}|^2} dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\log^2 \frac{e}{1-|z|} (1-|z|^2) dA(z)}{|1-tz|^4 |1-z\overline{w}|^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(t) \\
&\asymp ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{(1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \log \frac{e}{1-t}}{(1-t)^{\frac{1}{2}} |1-t\overline{w}|} d\mu(t) \\
&\leq ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{(1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \log \frac{e}{1-t}}{(1-t)^{\frac{1}{2}} (1-t|w|)^{\frac{1+\lambda}{2}+\frac{2-\lambda}{2}-\frac{1}{2}}} d\mu(t) \\
&\lesssim ||f||_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}
$$

注意到 μ 也是$\frac{1+\lambda}{2}$ -Carleson 测度。仿照定理 1.1 的证明（$\delta_p = 0$的情形），我们可以得到

$$
E_1 := ||f||_{\mathcal{B}} \sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\frac{2-\lambda}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{|1-tz|(1-t|z|)} \right)^2 \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{w}|^2} dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim ||f||_{\mathcal{B}}.
$$

因此，我们推得

$$
||\mathcal{C}_\mu(f)||_{L^{2,\lambda}} \lesssim ||f||_{\mathcal{B}}.
$$

证明完毕。 □

推论 3.9. 设 $0 < \lambda \leq 1$ 和 μ 是区间 $[0,1$上的有限正博雷尔测度。设 X 是 $H(\mathbb{D})$ 的子空间，使得 $\Lambda_1^1 \subseteq X \subseteq \mathcal{B}$。则 $\mathcal{C}_\mu : X \to L^{2,\lambda}$ 有界，当且仅当 μ 是一个 1-对数$\frac{1+\lambda}{2}$ -Carleson 测度。

定理 1.4 的证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。仿照定理 1.3 的证明，我们可以得到 μ 是一个 1-对数 1-Carleson 测度。(2) $\Rightarrow$ (1)。假设 μ 是一个 1-对数 1-Carleson 测度，且 $\Lambda_1^1 \subseteq X$, $Y \subseteq \mathcal{B}$。注意到$f \in X \subseteq \mathcal{B}$，由 (3.5) 可得

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{C}_\mu(f)''(z)| &\lesssim ||f||_{\mathcal{B}} \int_0^1 \left(\frac{(1-t|z|)^{-2}}{|1-tz|} + \frac{(1-t|z|)^{-1}}{|1-tz|^2} + \frac{\log \frac{e}{1-t|z|}}{|1-tz|^3} \right) d\mu(t) \\
&\lesssim ||f||_{\mathcal{B}} \left(\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-t|z|)^2 |1-tz|} + \int_0^1 \frac{\log \frac{e}{1-t|z|} d\mu(t)}{|1-tz|^3} \right).
\end{aligned}
$$

利用 (1.2)、富比尼定理、引理 2.5 和命题 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le r<1}(1-r)M_1(\mathcal{C}_\mu(f)'',r)\\
&\lesssim ||f||_{\mathcal{B}}\sup_{0\le r<1}(1-r)\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{d\mu(t)}{(1-tr)^2|1-tre^{i\theta}|}d\theta\\
&+||f||_{\mathcal{B}}\sup_{0\le r<1}(1-r)\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{\log\frac{e}{1-tr}d\mu(t)}{|1-tre^{i\theta}|^3}d\theta\\
&\lesssim ||f||_{\mathcal{B}}\sup_{0\le r<1}\int_0^1\frac{1-r}{(1-tr)^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-tre^{i\theta}|}d\mu(t)\\
&\quad+||f||_{\mathcal{B}}\sup_{0\le r<1}\int_0^1(1-r)\log\frac{e}{1-t}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-tre^{i\theta}|^3}d\mu(t)\\
&\lesssim ||f||_{\mathcal{B}}\sup_{0\le r<1}\int_0^1\frac{(1-r)\log\frac{e}{1-t}}{(1-tr)^2}d\mu(t)\\
&\lesssim ||f||_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{C}_\mu(f)\in\Lambda_1^1\subseteq Y$。 □

注意，对于 $1\le p<\infty$，空间 Λ_1^p；对于所有 $0<p<\infty$，空间 Q_p 均满足定理 1.4 中的 ^{p} 条件。因此，我们可以得到若干结果。

定理 1.5 的证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。令 $f(z)=(1-z)^{-\frac{1-\lambda}{12}}$，那么引理 2.6 表明 $f\in L^{2,\lambda}_{\lambda_1}\subseteq X$。注意，$\mathcal{C}_\mu(f)\in Y\subseteq\mathcal{B}^{\frac{3-\lambda_2}{2}}$ 和

$$\mathcal{C}_\mu(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{\Gamma(\frac{1-\lambda_1}{2}+j)}{\Gamma(\frac{1-\lambda_1}{2})\Gamma(j+1)}\right)z^k,$$

根据斯特林公式，

$$\frac{\Gamma(j+\frac{1-\lambda_1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\lambda_1}{2})\Gamma(j+1)}\asymp(j+1)^{-\frac{1+\lambda_1}{2}}$$

对于所有非负整数 j。结合 $\{\mu_k\}$ 随着 k 递减以及引理 2.2，我们推得

$$\begin{aligned}
1&\gtrsim n^{-\frac{3-\lambda_2}{2}}\sum_{k=1}^{n}k\mu_k\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{\Gamma(\frac{1-\lambda_1}{2}+j)}{\Gamma(\frac{1-\lambda_2}{2})\Gamma(j+1)}\right)\\
&\gtrsim n^{-\frac{3-\lambda_2}{2}}\sum_{k=1}^{n}k\mu_k\left(\sum_{j=0}^{k}(j+1)^{-\frac{1+\lambda_1}{2}}\right)\\
&\gtrsim n^{-\frac{3-\lambda_2}{2}}\mu_n\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\\
&\gtrsim \mu_n n^{1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}.
\end{aligned}$$

引理2.3表明， μ 是一个 $1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$-Carleson 测度。

(2) $\Rightarrow$(1)。只需证明 $\mathcal{C}_\mu$： $\mathcal{B}^{\frac{3-\lambda_1}{2}} \to L^{2,\,\lambda_2}$是有界的。令 $f \in \mathcal{B}^{\frac{3-\lambda_2}{2}}$，则由(1.3)和引理2.1可得

$$|\mathcal{C}_\mu(f)'(z)| \lesssim ||f||_{\frac{3-\lambda_1}{2}} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-t|z|)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}|1-tz|}.$$

然后仿照定理 1.1 的证明，我们可以得到所需结果。

证明完毕。 □

推论3.10。设 $0<\lambda<1$, μ 是区间 $[0,1)$ 上的有限正博雷尔测度。那么，当且仅当 μ 是 1-Carleson 测度时， $\mathcal{C}_\mu$ 是 $L^{2,\,\lambda}$ 上的有界算子。

数据可用性

本研究未使用任何数据。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

基金资助

本研究获 湖南省自然科学基金资助（编号：2022JJ30369).

参考文献

[1] A. Aleman 和 A. Siskakis, 《伯格曼空间上的积分算子》, Indiana Univ.Math. J. 46(2)（1997）337–356。[2] A. Aleman 和 J. Cima, 《H^p 上的一个积分算子与哈代不等式》, 《数学分析杂志》85（2001）157–176。[3] A. Siskakis, 《复合半群与 H^p上的 Ces`aro 算子》, 《伦敦数学会杂志》236（1）（1987）153–164。[4] A. Siskakis, 《Ces`aro 算子在 H^1上有界》, 《美国数学会会刊》110（2）（1990）461–462。[5] A. Siskakis, 《Ces`aro 算子的伯格曼空间范数》, 《数学档案》67（4）（1996）312–318。[6] G. Bao 和 H. Wulan, 《作用于狄利克雷空间的汉克尔矩阵》, 《数学分析及其应用杂志》409（2014）228–235。

[7] G. Bao、F. Sun 和 H. Wulan，Carleson 测度与作用于 H^∞ 上的 Ces`aro 类算子的值域，《数学分析与物理学》12（2022），第 142 号论文。[8] G. Hardy，《积分学若干问题札记 LXVI：傅里叶常数的算术平均》，《数学信使》58（3–4）（1929）50–52。[9] H. Wulan 和 K. Zhu，《M¨obius 不变 Q_K 空间》，柏林：Springer–Verlag，2017。[10] H. Wulan 和 J. Zhou，Q_K 与 Morrey 型空间，《芬兰科学院学报：数学》28（2013）193–207。[11] I. Ar´evalo，《混合范数空间之间包含关系的刻画》，《数学分析及其应用杂志》429（2015）942–955。[12] J. Jin 和 S. Tang，《Dirichlet 型空间上的广义 Ces`aro 算子》，《数学科学学报》42(B)（2022）212–220。[13] J. Liu 和 Z. Lou，《解析 Morrey 空间的性质及其应用》，《数学新消息》288（2015）1673–1693。[14] J. Liu 和 Z. Lou，《解析 Morrey 空间的 Carleson 测度》，《非线性分析》125（2015）423–432。[15] J. Miao，《Ces`aro 算子在 H^p 上有界，当 $0 < p < 1$》，《美国数学会会刊》116（1992）1077–1079。[16] J. Shi 和 G. Ren，《混合范数空间上 Ces`aro 算子的有界性》，《美国数学会会刊》126(12)（1998）3553–3560。[17] J. Xiao，《Hardy、BMOA 和 Bloch 空间上的 Ces`aro 型算子》，《数学档案》68（1997）398–406。[18] K. Andersen，《Hardy 空间上的 Ces`aro 平均算子》，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》126（3）（1996）617–624。[19] K. Stempak，《Ces`aro 平均算子》，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》124（1）（1994）121–126。[20] K. Zhu，《单位球中的全纯函数空间》，Springer-Verlag（GTM 226），纽约，2005。[21] M. Nowak，《Ces`aro 算子在 $H^p$ 上有界性的另一种证明》，《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学年刊 A 辑》54（2000）75–78。[22] N. Danikas 和 A. Siskakis，《有界解析函数上的 Ces`aro 算子》，《分析》13（1993）295–299。[23] O. Blasco，《Hardy 空间上的 Ces`aro 型算子》，《数学分析及其应用杂志》（2023），第 127017 号论文。Doi:10.1016/j.jmaa.2023.127017[24] O. Blasco、D. Girela 和 M. M´arquez，《解析函数导数的平均增长、有界平均振荡与正规函数》，《印第安纳大学数学杂志》47（1998）893–912。[25] P. Li、J. Liu 和 Z. Lou，《解析 Morrey 空间上的积分算子》，《中国科学：数学》57(9)（2014）1961–1974。

[26] P. Bourdon、J. Shapiro 和 W. Sledd，傅里叶级数、均值 Lipschitz 空间与有界均值振荡，载于：Analysis at Urbana，第 I 卷，Urbana，IL，1986–1987，载于：London Math. Soc. Lecture Note Ser.，第 137 卷，1989 年，第 81–110 页。[27] P. Duren，《H^p 空间理论》，Academic Press，纽约，1970 年。[28] P. Galanopoulos，狄利克雷空间上的 Ces`aro 算子，Acta Sci. Math.（Szeged）67（2001）411–420。[29] P. Galanopoulos、D. Girela 和 N. Merch´an，作用于解析函数空间的 Ces`aro 类算子，Anal. Math. Phys. 12（2022），论文编号 51。[30] P. Tang、X. Zhang，作用于加权 Bloch 空间的广义积分型 Hilbert 算子。（2022）。arXiv:2208.11452。[31] R. Zhao，关于对数 Carleson 测度，Acta Sci. Math.（Szeged）69（3–4）（2003）605–618。[32] S. Li、X. Zhang、S. Xu，$F(p,q,s)$ 型空间上的 Bergman 型算子，C^n，Chin. J. Contemp. Math. 38(4)（2017）303–316。[33] V. Miller 和 T. Miller，Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 上的 Ces`aro 算子，《数学档案》78（2002）409–416。[34] X. Zhang、L. Xi、H. Fan 和 J. Li，C^n中 μ-Bergman 空间的原子分解，Acta Math. Sci. 34B（3）（2014）779–789。[35] X. Zhang、S. Li、Q. Shang 和 Y. Guo，单位球中 $F(p,q,s,k)$ 空间的积分估计与等价范数，Acta Math. Sci. 38B（2018）1861–1880。[36] X. Zhang、R. Lv 和 P. Tang，C^n中单位球上一般 Hardy 型空间的若干等价刻画，Chin. J. Contemp. Math. 40(2)（2019）101–114。[37] X. Zhang、Y. Guo、Q. Shang 和 S. Li，C^n单位球中 $F(p,q,s)$ 型空间上的 Gleason 问题，Complex Anal. Oper. Theory 12（2018）1251–1265。[38] Z. Wu 和 C. Xie，Q 空间与 Morrey 空间，J. Funct. Anal. 201（2003）282–297。[39] Z. Wu，Carleson 测度的一种新刻画及其若干应用，Integr. Equ. Oper. Theory. 71（2011）161–180。