鞅最优输运的多边缘 C-凸对偶定理

JULIAN SESTER

2024年3月6日

新加坡国立大学数学系，Lower KentRidge Road 21号，邮编 119077。

arXiv:2305.03344v3 [math.PR] 5 Mar 2024

Abstract. 针对具有两个边缘分布的鞅最优输运问题，已有一项凸对偶性结果 [4]。本文将这一结果推广至多期情形。

关键词：鞅最优输运、对偶性、凸双共轭

1. Introduction

给定某个可测函数 $c\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 以及固定的边缘分布[1] $\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$，鞅最优传输问题（MOT）在于求解

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \int_{\mathbb{R}^n} c(x_1,\dots,x_n)\ \mathrm{d}\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n), \tag{1.1}$$

其中

$$\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n) := \Big\{ \mathbb{Q}\in\Pi(\mu_1,\cdots,\mu_n) \ \Big|\ \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1,\dots,x_i)(x_{i+1}-x_i)\mathrm{d}\mathbb{Q}(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \text{for all continuous bounded } H:\mathbb{R}^i\to\mathbb{R},\ \text{for } i=1,\dots,n-1 \Big\}$$

表示在 $\mathbb{R}^n$ 上具有固定边缘分布 $\mu_1,\dots,\mu_n$的鞅测度集合；在上述定义中，$\Pi(\mu_1,\cdots,\mu_n)\subset\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n$ 定义为所有 n维博雷尔概率测度的集合，其边缘分布固定为 $\mu_1,\dots,\mu_n$，更多详情请参见，例如 [21]。

鞅最优传输问题的值既可以通过（1.1）中概述的原始形式确定，也可以通过最大化以下形式的对偶表达式求得

$$\sup_{u_1,\dots,u_n} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\mathrm{d}\mu_i(x_i) \tag{1.2}$$

在某一类函数 u_i中进行，另请比较[2, 5, 6, 7, 11, 22]。

开创性论文[4] 概述了计算鞅最优传输问题值的两种对偶方法。 [4, 定理 1.1] 中给出的对偶性是在多期情形下表述并证明的，而 [4, 命题 4.4] 中的凸对偶则是在单期情形下表述的，即在 $n=2$ 情形下。

本文重新审视上述关于鞅最优传输问题的凸对偶性结果，并将其推广至多期表述。

1.1. 单期凸对偶结果。在具有两个边缘分布（无鞅约束）的经典最优输运问题中，对偶问题是在满足不等式约束 $u_1(x_1)+u_2(x_2)\le c(x_1,x_2)$ 对所有 $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 成立的函数 u_1,u_2 中最大化 (1.2)。事实证明，这等价于在函数对 (v_1,v_2) 上最大化，其中 v_1 定义为 v_2 的 c变换或 c共轭，即 $v_1(x_1):=\inf_{x_2\in\mathbb{R}}\{c(x_1,x_2)-v_2(x_2)\}$，且无需显式满足不等式约束，更多详情另见 [21, 第 5] 章。

[1]这里，$\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ 表示实数集上配备博雷尔σ代数的概率测度集合。此外，我们默认假设边缘分布按凸序递增，以确保 $\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 非空；另参见[19]。

随后在 [4, 命题 4.4] 中证明，对于双边缘鞅最优传输问题，可以建立一种类似的修正对偶表述，该表述依赖于实值函数的凸 双共轭 的概念[2]。

定义 1.1（凸双共轭）。设 $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ 是任意函数，则我们将凸双共轭 $f^{**}\colon \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ 定义为小于或等于 f 的最大下半连续[3] 凸函数，即对 $x \in \mathbb{R}$，有

$$f^{**}(x) := \sup\{h(x) \mid h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 下半连续且凸 } h(y) \leq f(y) \text{ 对所有 } y \in \mathbb{R} \}.$$

为了沿用 [4], 中的记号，我们定义 $\mathbb{R}^n \ni (x_1,\dots,x_n) \mapsto S_i(x_1,\dots,x_n) := x_i$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的典范过程S_1, S_2)，并首先考虑一个一步随机过程 $S_1 \sim \mu_1$, $S_2 \sim \mu_2$。为方便读者，我们在下文给出 [4]中所建立的凸对偶的双边缘版本。

命题 1.2（[4], 命题 4.4）。设 $c\colon \mathbb{R}^2 \to (-\infty, \infty]$ 为下半连续函数，且$c(x, y) \geq -K(1 + |x| + |y|)$ 对所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 以及某个 $K \in \mathbb{R}$均成立。此外，假设存在某个概率测度 $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)$，使得 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1, S_2)] < \infty$。那么，我们有

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\mu_2)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1, S_2)] = \sup_{u\in L^1(\mu_2)} \mathbb{E}_{\mu_1}\left[(c(S_1, \cdot) - u(\cdot))^{**}(S_1)\right] + \mathbb{E}_{\mu_2}[u(S_2)].$$

2. Main result

借助以命题 2.1表述的主要结果，我们将命题 1.2 推广到具有 $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$ 边缘分布的多期情形。为此，我们考虑 n步鞅 $S_1, \dots, S_n$，其边缘分布固定为 $S_i \sim \mu_i$ 对所有 $i = 1, \dots, n$。

命题 2.1。设 $c\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ 为下半连续函数，且 $c(x_1, \dots, x_n) \geq -K(1 + |x_1| + \cdots + |x_n|)$ 对所有 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ 以及某个 $K \in \mathbb{R}$ 均成立。此外，假设存在某个 $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}(\mu_1, \dots, \mu_n)$，使得 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[c(S_1, \dots, S_n)] < \infty$。我们令

$$\begin{aligned} c_n\colon\ & L^1(\mu_2) \times \cdots \times L^1(\mu_n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & (u_2, \dots, u_n, x_1, \dots, x_n) \mapsto c(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=2}^{n} u_i(x_i), \end{aligned}$$

并为 $i = n-1, \dots, 1$ 归纳定义

$$\begin{aligned} c_i\colon\ & L^1(\mu_2) \times \cdots \times L^1(\mu_n) \times \mathbb{R}^i \to \mathbb{R} \\ & (u_2, \dots, u_n, x_1, \dots, x_i) \mapsto \Big(c_{i+1}(u_2, \dots, u_n, x_1, \dots, x_i, \cdot)\Big)^{**}(x_i). \end{aligned}$$

于是，我们有

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1, S_2, \dots, S_n)] = \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\dots,n}} \mathbb{E}_{\mu_1}\left[c_1(u_2, \dots, u_n, S_1)\right] + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)].$$

命题的证明2.1 见第3节。

备注 2.2。

(a) 如果 $c : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ 是上半连续的，并满足线性增长条件$c(x_1,\dots,x_n) \leq K(1 + |x_1| + \cdots + |x_n|)$，那么，通过将命题 2.1应用于 $-c$，可得到上界 $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1, S_2,\dots, S_n)]$ 关于凹双共轭的对偶表达式。[4]

[2] 注意，定义 1.1 与 [4], 中使用的定义略有不同；后者使用的不是凸双共轭，而是 *convex envelope*，其定义与之相同，唯一的区别是不要求下半连续性。我们额外要求下半连续性，以得到与函数两次应用凸共轭所得结果一致的定义，符号 f^{**} 也用于[4]。不过，命题 2.1 和 [4, 命题 4。4] 的结果对这两种定义均成立。[3] 若函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对所有 $x_0 \in \mathbb{R}$。[4] 凹双共轭表示大于 f 的最小上半连续凹函数。 $\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ 均成立，则称其为下半连续函数。

(b) 注意，也可以设定 [5] $\widetilde{c}_n \equiv c$，并递归地定义 $i = n-1, \ldots\ldots, 1$

$\widetilde{c}_i$: $\not{L}(\mu_{i+1}) \times \cdots \times L^1(\mu_n) \times \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$

$$(u_{i+1}, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_i) \mapsto \left(\widetilde{c}_{i+1}(u_{i+2}, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_i, \cdot) - u_{i+1}(\cdot)\right)^{**}(x_i).$$

于是，通过对 $i = n, \ldots, 2$ 进行归纳可得 $c_i = \widetilde{c}_i - \sum_{j=2}^{i} u_j$，进而得到 $c_1 = \widetilde{c}_1$。因此，利用 $(\widetilde{c}_i)_{i=1,\ldots,n}$，可以提供一种递归构造对偶最大化解的替代方案。

(c) 与原始最小化解 $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的存在性不同，若不对 c 作额外假设（见 [4, 第 4.3] 节及 [5]），或不采用如 [6] 中的准处处表述，则无法保证鞅最优传输问题存在对偶最大化解。然而，若 [4, 定理 1.1] 中的对偶值能够达到，即存在可积函数 $u_i \in L^1(\mu_i)$，其中 $i = 1, \ldots, n$，以及连续有界函数 $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1} \in C_b(\mathbb{R})$，同时满足 (3.4) 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}[c(S_1, \ldots, S_n)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)]$,，那么我们有 $\sum_{i=1}^{n} u_i(S_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j(S_1, \ldots, S_j)(S_{j+1} - S_j) = c(S_1, \ldots, S_n)$ $\mathbb{Q}^*$-几乎处处成立，因此在命题 2.1 的证明中，不等式 (3.5) 和 (3.6) 在 $\mathbb{Q}^*$-几乎处处意义下均为等式，这意味着 $u_1(S_1) = c_1(u_2, \ldots, u_n, S_1)$ $\mathbb{Q}^*$-几乎处处成立，从而命题 2.1 中的对偶值也能达到。

(d) 注意，对于任意 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 以及任意 $u_i \in L^1(\mu_i)$，$i = 2, \ldots, n$，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_1(u_2, \ldots, u_n, S_1) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c(S_1, \ldots, S_n) \,|\, S_1\right], \tag{2.1}$$

即，命题 *2.1* 中计算出的策略，在给定 S_1的条件下，是 $\mathbb{Q}$-几乎处处的 c次对冲策略。事实上，利用鞅性质和詹森不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_1(u_2, \ldots, u_n, S_1) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(c_2(u_2, \ldots, u_n, S_1, \cdot)\right)^{**}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_2|S_1]\right) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] \\
&\le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(c_2(u_2, \ldots, u_n, S_1, \cdot)\right)^{**}(S_2) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] \\
&\le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_2(u_2, \ldots, u_n, S_1, S_2) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] \\
&\le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_3(u_2, \ldots, u_n, S_1, S_2, S_3) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1, S_2\right] \,\middle|\, S_1\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_3(u_2, \ldots, u_n, S_1, S_2, S_3) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] \\
&\le \cdots \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c(S_1, \ldots, S_n) - \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) + \sum_{i=2}^{n} u_i(S_i) \,\middle|\, S_1\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c(S_1, \ldots, S_n) \mid S_1\right].
\end{aligned}$$

2.1. 命题的讨论 **2.1** 及其与数值计算的关系。 如 [4, 第 4 节],所述，C-凸对偶定理的重要性和相关性源于这样一个事实：该结果允许构造对偶策略，而无需像 [4, 定理 11]. 中给出的次对冲对偶那样考虑不等式约束。事实上，与半静态次对冲策略相关的不等式约束给鞅最优传输问题的对偶形式的数值求解带来了障碍。因此，为了计算次对冲策略，通常要么考虑离散化形式（[12, 13]），并通过线性规划求解问题；要么在用适当的函数类（如神经网络）参数化对偶表达式中的函数时，对任何违反不等式约束的情况施加惩罚（[8, 9]）。

[5]这尤其意味着，c_n 不依赖于任何函数 u_i，其中 $i = 2, \ldots, n$。

基于命题 2.1 构造对冲策略的方法得到简化，这或许能为丰富鞅最优传输问题数值计算方面的研究打开新局面，并促成新数值算法的构建。

为展示如何以数值方式使用命题 2.1 中的凸对偶，我们在 https://github.com/juliansester/C-Convex 下提供了第五节[6] 中的[10, 一个示例实现。2], 在该示例中，我们考虑三个对数正态边缘分布。该实现使用命题 2.1，并通过深度 $u_i \in L^1(\mu_i)$神经网络对优化函数进行参数化， $i = 2$，3。随后，在 $Adam$优化器（[15]）和 TensorFlow框架（[1]）中对目标函数进行优化。为计算函数 f的凸双共轭，我们利用凸双共轭可表示为凸共轭作用两次这一性质[7] f^*，其形式为

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \sup_{m\in\mathbb{R}} \left\{ m \cdot x - \sup_{y\in\mathbb{R}} \{y \cdot m - f(y)\} \right\}.$$

在每次迭代中，我们随后根据表示 u_2、u_3 的深度神经网络的参数，优化 $\frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^N c_1(u_2, u_3, S_1^{(i)}) + \sum_{i=1}^N u_2(S_2^{(i)}) + \sum_{i=1}^N u_3(S_3^{(i)})\right\}$。其中，对于 $i = 1$、2、3、$j = 1$、……、N， $S_i^j \sim \mu_i$，并且 $N \in \mathbb{N}$ 表示批量大小。

另一种颇有希望的方法是求解偏微分方程（PDE），以计算命题 2.1 对偶一侧出现的凸包络/凸双共轭。为此，可以沿用 [14, 推论 2。2] 中的思路，该推论将最优输运结果推广到两个边缘测度的情形，见[20, 命题 5。48] ，并利用凸包络自然地作为某些随机控制问题的黏性解、因而也满足哈密顿–雅可比–贝尔曼方程（一个非线性偏微分方程）这一事实，建立鞅最优传输问题的解与哈密顿–雅可比–贝尔曼方程之间的联系，参见 [16] 和 [18]。我们将 [14, 推论 2。2] 推广到 n边缘测度情形的问题留待未来研究。

3. Proof of Proposition 2.1

根据凸双共轭的定义，我们得到

(3.1)

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\dots,S_n)] \\
&= \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\dots,n}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c(S_1,\dots,S_{n-1},S_n) - \sum_{i=2}^n u_i(S_i)\right] + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)] \\
&\geq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\dots,n}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(c(S_1,\dots,S_{n-1},\cdot) - \sum_{i=2}^{n-1} u_i(S_i) - u_n(\cdot)\right)^{**}(S_n)\right] + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)]
\end{aligned}$$

由（3.1），根据条件期望的塔性质和詹森不等式，我们有（3.2）

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\dots,S_n)] \\
&\geq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\dots,n}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(c(S_1,\dots,S_{n-1},\cdot) - \sum_{i=2}^{n-1} u_i(S_i) - u_n(\cdot)\right)^{**}(S_n) \,\middle|\, S_1,\dots,S_{n-1}\right]\right] \\
&\qquad + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)] \\
&\geq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\dots,n}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(c(S_1,\dots,S_{n-1},\cdot) - \sum_{i=2}^{n-1} u_i(S_i) - u_n(\cdot)\right)^{**}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n \mid S_1,\dots,S_{n-1}])\right] \\
&\qquad + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)].
\end{aligned}$$

[6]类似的例子可见[3, 第 6 节。4] 以及 [17, 例 4。3]。[7]函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的凸共轭定义为 $f^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{y\cdot x - f(y)\}$。

由（3.2）以及 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ 的鞅性质，我们得到

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\ldots,S_n)]\\
&\geq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\ldots,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(c(S_1,\ldots,S_{n-1},\cdot)-\sum_{i=2}^{n-1}u_i(S_i)-u_n(\cdot)\right)^{**}(S_{n-1})\right]+\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)]\\
&=\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\ldots,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_{n-1}(u_2,\ldots,u_n,S_1,\ldots,S_{n-1})\right]+\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)].
\end{aligned}$$

沿用相同的论证，我们得到

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\ldots,S_n)]\\
&\geq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\ldots,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(c_{n-1}(u_2,\ldots,u_n,S_1,\ldots,S_{n-2},\cdot))^{**}(S_{n-1})\right]+\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)]\\
&\geq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\ldots,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(c_{n-1}(u_2,\ldots,u_n,S_1,\ldots,S_{n-2},\cdot))^{**}(S_{n-2})\right]+\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)]\\
&=\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\ldots,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_{n-2}(u_2,\ldots,u_n,S_1,\ldots,S_{n-2})\right]+\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)],
\end{aligned}$$

由此归纳可得

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\ldots,S_n)]\geq\sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\ldots,n}}\mathbb{E}_{\mu_1}\left[c_1(u_2,\ldots,u_n,S_1)\right]+\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)]. \tag{3.3}$$

接下来，注意到若存在可积函数 $u_i\in L^1(\mu_i)$（$i=1$ 上），……，n，以及连续有界函数 Δ_1，……，$\Delta_{n-1}\in C_b(\mathbb{R})$，使得

$$\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}(x_1,\ldots,x_n):=\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i)+\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_j(x_1,\ldots,x_j)(x_{j+1}-x_j)\leq c(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) \tag{3.4}$$

对所有 $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，则可知

$$\begin{aligned}
&u_1(x_1)+\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_j(x_1,\ldots,x_j)(x_{j+1}-x_j)\\
&=\left(u_1(x_1)+\sum_{j=1}^{n-2}\Delta_j(x_1,\ldots,x_j)(x_{j+1}-x_j)+\Delta_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})(\cdot-x_j)\right)^{**}(x_n)\\
&\leq\left(c(x_1,\ldots,x_{n-1},\cdot)-\sum_{i=2}^{n-1}u_i(x_i)-u_n(\cdot)\right)^{**}(x_n)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

对所有（$x_1,\ldots,x_n$）$\in\mathbb{R}^n$，因为（3.5）的左侧关于 x_n是线性的（因而是凸的）。令 $x_n:=x_{n-1}$，由（3.5）可得

$$u_1(x_1)+\sum_{j=1}^{n-2}\Delta_j(x_1,\ldots,x_j)(x_{j+1}-x_j)\leq c_{n-1}(u_2,\ldots,u_n,x_1,\ldots,x_{n-1}) \tag{3.6}$$

对于所有（x_1，……，x_{n-1}）$\in\mathbb{R}^{n-1}$。归纳重复导出（3.6）的论证可知，（3.4）蕴含

$$u_1(x_1)\leq c_1(u_2,\ldots,u_n,x_1)\text{ for all }x_1\in\mathbb{R}. \tag{3.7}$$

因此，由于（3.3）和（3.7），我们有[8]

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\dots,S_n)] \\
&\geq \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),\\ i=2,\dots,n}} \mathbb{E}_{\mu_1}\left[c_1(u_2,\dots,u_n,S_1)\right] + \sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)] \\
&\geq \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),i=1,\dots,n,\\ \Delta_j\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R}),j=1,\dots,n-1}:\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}\leq c} \mathbb{E}_{\mu_1}\left[c_1(u_2,\dots,u_n,S_1)\right] + \sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)] \qquad (3.8)\\
&\geq \sup_{\substack{u_i\in L^1(\mu_i),i=1,\dots,n,\\ \Delta_j\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R}),j=1,\dots,n-1}:\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}\leq c} \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\mu_i}[u_i(S_i)] = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\dots,\mu_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(S_1,\dots,S_n)],
\end{aligned}
$$

其中，最后一步用到了[4, 定理 1。1]对 [4,定理 1。1] 的适用性由施加于c上的线性增长条件和下半连续性保证。因此，式（3.8）中的所有不等式实际上都是等式，结论得证。

References

[1] Mart´ın Abadi, Paul Barham, Jianmin Chen, Zhifeng Chen, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Geoffrey Irving, Michael Isard 等。TensorFlow：一种面向大规模机器学习的系统。载于 *{USENIX} symposium on operating systems design and implementation ({OSDI} 16)* 12th 265 283, 2016 ，第 – 页。[2]

Anna Aksamit、Shuoqing Deng、Jan Ob l´oj 和 Xiaolu Tan。离散时间金融市场中美式期权的稳健定价—对冲对偶性。 *Mathematical Finance*，29(3):861–897，2019年。[3] Aur´elien Alfonsi、Jacopo Corbetta 和 Benjamin Jourdain。凸序下的一维概率测度采样及稳健期权价格界的计算。 *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 22 03 1950002, 2019 ，( ): 。[4]

Mathias Beiglb¨ock、Pierre Henry-Labord`ere 和 Friedrich Penkner。期权价格的模型无关界——一种质量输运方法。 *Finance and Stochastics*，17(3):477–501，2013年。[5] Mathias Beiglb¨ock、Tongseok Lim 和 Jan Ob l´oj。鞅输运问题的对偶可达性。*Bernoulli*，25(3):1640–1658，2019年。[6] Mathias Beiglb¨ock、Marcel Nutz 和 Nizar Touzi。直线上的鞅最优输运完全对偶性。*The Annals of Probability*，第3038–3074页，2017年。[7] Patrick Cheridito、Matti Kiiski、David J Pr¨omel 和 H Mete Soner。鞅最优输运对偶性。*Mathematische Annalen*，379:1685–1712，2021年。[8] Stephan Eckstein、Gaoyue Guo、Tongseok Lim 和 Jan Ob l´oj。多种资产期权的稳健定价与对冲及其数值计算。 *SIAM Journal on Financial Mathematics*，12(1):158–188，2021年。[9] Stephan Eckstein 和 Michael Kupper。通过惩罚方法和神经网络计算最优输运及相关对冲问题。 *Applied Mathematics & Optimization*，83:639–667，2021年。[10] Stephan Eckstein 和 Michael Kupper。齐次股票运动下的鞅输运。*Finance* 21 2 271 280, 2021 *Quantitative* ，( ): – 。

[11] Nathael Gozlan、Cyril Roberto、Paul-Marie Samson 和 Prasad Tetali。一般输运成本下的 Kantorovich 对偶性及其应用。 *Journal of Functional Analysis*，273(11):3327–3405，2017年。[12] Gaoyue Guo 和 Jan Ob l´oj。鞅最优输运问题的计算方法。 *The Annals of Applied Probability* 29 6 3311 3347, 2019 ，( ): – 。[13] Pierre Henry-Labordere。自动期权定价：数值方法。 *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 16 08 1350042, 2013 ，( ): 。[14]

Pierre Henry-Labord`ere。 *Model-free hedging: A martingale optimal transport viewpoint*。CRC Press，2017年。[15] Diederik P Kingma 和 Jimmy Ba。Adam：一种随机优化方法。 *arXiv preprint arXiv:1412.6980*，2014年。[16] Huyˆen Pham。随机控制近期的一些进展及其应用。 *Probability Surveys [electronic only]* 2 506 549, 2005 ，: – 。[17]

Julian Sester。马尔可夫模型中衍生品价格的稳健界。 *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 23 03 2050015, 2020 ，( ): 。[18] H

Mete Soner 和 Nizar Touzi。随机目标问题、动态规划与黏性解。 *SIAM Journal on Control and Optimization* 41 2 404 424, 2002 ，( ): – 。[19]

Volker Strassen。具有给定边缘分布的概率测度的存在性。 *The Annals of Mathematical Statistics* 36 2 423 439, 1965 ，( ): – 。[20] C´

edric Villani。 *Topics in optimal transportation*，第58卷。American Mathematical Soc.，2003年。[21] C´edric Villani 等。 *Optimal transport: old and new*，第338卷。Springer，2009年。[22] Danila A Zaev。带附加线性约束的 Monge–Kantorovich 问题。 *Mathematical Notes*，98 725 741，2015年：–。

[8]记号 $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \leq c$ 表示对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，都有 $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}(x) \leq c(x)$。