arXiv:2305.03357v3 [math.AT] 6 Aug 2024

偏序空间的持久同调

CameronCalk[1],Eric Goubault[2] 和 Philippe Malbos[31]马赛艾克斯大学计算机科学实验室，法国马赛，邮编 13397 Cedex。[2]巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，法国帕莱索，邮编 91128 Cedex。[3]里昂第一大学，法国国家科学研究中心，卡米耶·若尔当研究所，UMR5208，法国维勒班，邮编 69622 Cedex。

作者联系方式：cameron.calk@lis-lab.fr；
eric.goubault@polytechnique.edu；malbos@math.univ-lyon1.fr；

摘要

本文探讨自然同调与持久同调在有向空间分类中的联系。前者是有向空间的一种代数不变量，也是并发程序的一种语义模型。后者是在拓扑数据分析的背景下发展起来的；在这一领域，人们在消除噪声的同时，提取点云数据集的拓扑性质。在这两种方法中，同调性质的演变都是通过一系列通常拓扑空间之间的包含映射来追踪的。利用这种相似性，我们证明，自然同调可以视为一种持久对象，并且可以计算为沿迹的一维持久同调的余极限。

关键词：并发程序、语义模型、定向同伦、持久同调。

1 引言

近年来，几何、代数拓扑和同调代数已成为计算机科学领域的一部分，这得益于它们在近些年一系列重要的应用。拓扑数据分析旨在利用

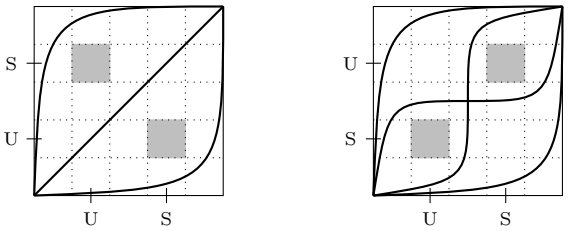
拓扑学方法 [1]。其中一项主要工具是持久同调，这是一种同调理论，能够为点云数据分析提供高效算法。它于 20 世纪 90 年代末同时出现在多项研究中 [2–4]。同一时期，类似思想也出现在编程语言语义学领域，尤其是并发理论 [5, 6] 和分布式计算 [7], 参见例如 [8–10] 相关综述。

本文在这两种方法之间建立了正式的桥梁，并通过启发性例子说明，将持久同调方法应用于并发理论和分布式计算中的问题（例如潜在行为的分类）具有重要意义。

描述并发程序可能执行过程的语义模型基于有向空间的概念。有向空间是一个拓扑空间X，配备有一组 dX 有向路径，也就是说，从单位区间到 X 的映射，并满足若干性质，见第 4.1 节和 [9, 11]。本文将以由紧致偏序空间（偏序空间）生成的有向空间为例来说明我们的结果；这些空间还将是有限前立方集合的（有向）几何实现，参见例如 [9]。紧致偏序空间是一个紧致拓扑空间 X，并配有一个偏序 $\leq$；该偏序是积拓扑下 $X \times X$ 的闭子集。X 中的有向路径是从带有标准全序的单位区间到 X 的连续递增映射。本文将考察的这类紧致偏序空间，具体由无环、非自链接的有限前立方集合的几何实现给出，其中所有 n-立方体都实现为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位 n-立方体，并赋予逐分量序 [12]。

现在让我们考虑有向空间的分类问题，即确定两个有向空间何时有向同胚（定义见第 4.1 节），也就是说，它们作为拓扑空间同胚，并且满足关于有向结构的附加条件。从并发理论的角度来看，二同胚有向空间本质上意味着并发进程之间具有相同的协调方式 [9]。

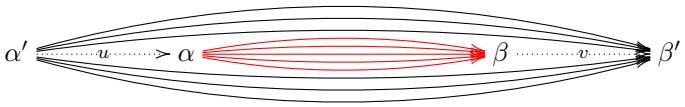
至于拓扑空间的分类问题，它本身实在过于困难，因此我们需要可处理的（有向）拓扑不变量，作为不存在二同胚的见证。其中一种不变量称为自然同调，它以同调为基础，正如经典代数拓扑中的通常做法，并已在 [13], 见第 4.3 节中得到发展。其思路是注意到，二同胚 $f\colon X \to Y$ 会对 X中的任意点 α, β，在由 X中从α到 β的有向路径构成的子空间 $dX(\alpha, \beta)$（见第 4.1 节）与由 Y中从$f(\alpha)$到 $f(\beta)$的有向路径构成的子空间 $dY(f(\alpha)\ f(\beta))$之间诱导一个同构 f^*。有向空间 X 的自然同调是一个图表（或一个由群构成的“自然系统” [14]），它将$dX(\alpha, \beta)$的所有（经典）同调群组合起来，其中 α 和 β 在 X中变化，并由诱导的“扩张映射”将它们联系起来。当 f 是一个二同胚时，f^* 的同调图是 X 与Y 的自然同调之间的一个双模拟（引理1）。



F图 1 两个本质不同但具有同胚状态空间的并发程序 .

例如，考虑图1中所示的 $\mathbb{R}^2$ 内两个采用逐分量序的紧致偏序空间。它们分别为左侧的 X 和右侧的 Y 提供语义，对应的程序分别是 $U.S \,||\, U.S$ 和 $U.S \,||\, S.U$；其中 S 表示共享内存中的扫描操作， U 表示更新操作，参见例如 [15]。作为拓扑空间， X 和Y 同胚，并且同伦等价于两个圆的楔和。不过，它们并非有向同胚的有向空间。事实上，对于 X中的 α, β ， $dX(\alpha, \beta)$只能同伦等价于一个点、两个点或三个点；而对于 Y中的 γ, δ， $dY(\gamma, \delta)$只能同伦等价于一个点、两个点或四个点。这些点确实都对应于相应并发程序的执行轨迹。这些轨迹描述了两个进程之间不同的协调性质，并可能产生不同的结果。图1展示了左侧空间中模定向同伦的三条极大有向路径，以及右侧空间中的四条极大有向路径。

更重要的是，对于 X 中任意一条从 α' 到 α 的有向路径 u ，以及 X 中任意一条从 β 到 β' 的路径 v ，我们都可以通过前复合 u 和后复合 v，得到一个连续映射 $dX\langle u, v\rangle$ from$dX(\alpha, \beta)$ 到 $dX(\alpha', \beta')$。下图以简化形式展示了这一点，其中红色箭头表示 $dX(\alpha, \beta)$ 的元素：



换言之，每一对路径（$u:\ \alpha' \to \alpha$， $v:\ \beta \to \beta'$）都确定了一个不同的连续包含映射，其起点为 $dX(\alpha, \beta)$，终点为 $dX(\alpha', \beta')$。我们将在第 4 节回顾这一概念。当 α 和 β 变化时，研究此类有向路径空间的形状，将是构造有向同胚下不变量的关键要素。

现在，持久同调的思想源自另一条思路，但我们将看到，它建立在相似的直觉之上。在对空间 $\mathbb{R}^n$ 中点云进行持久同调研究的经典“单维”方法中，我们构造一个滤过，即一系列单纯集的包含映射。通常，这一过程从点云开始，通过添加初始点之间的关系逐步发展，最终得到一个实数持久单纯复形，即由实数索引的一系列单纯复形的包含映射，我们从中提取

一系列同调不变量。该序列将见证同调生成元的出现，即诞生，以及它们的消失，即死亡，随着滤过的推进而发生。滤过方法取决于点云的性质和特征，根据这些性质和特征，可以考虑 Čech、Vietoris-Rips、见证滤过等 [1]。一般而言，这些滤过是一维的，但也存在多维类比 [16], ，其中多个参数可以发生变化，我们将在后文中简要讨论这一点。

与持久同调类似，自然同调中也有同调生成元诞生和消亡的自然概念。这促使我们研究自然同调与持久同调之间的关系。例如，当 X 是一个立方复形，如 [17], 中所示，它可以作为子有向空间嵌入 $\mathbb{R}^n$ 中，其中 $n \in \mathbb{N}$足够大，并赋予逐分量序，那么自然会考虑关于 $2n$ 个参数的多维持久性，其中 n 坐标表示起点 α ，而 n 坐标表示终点 β ，并研究 $dX(\alpha, \beta)$ 的演化。在第 2 节中，我们通过一个简单的例子说明，这种观点并不完全可行。

本文旨在克服这一困难，从而赋予自然同调以持久同调的含义。我们即将采取的视角转变，与近期多维持久性研究中的方法类似 [16]。我们将考察所有与有向空间结构相容的一维持久同调，并将这些信息整合起来。在许多方面，这与多维同调中的“探测”方法相似，参见例如 [18]。

在这项工作中，我们将这一思想应用于由有向空间描述的并发程序。在这里，我们希望通过同调持久性研究的数据不是点，而是有向空间中的迹，即 有向路径的像，它们对应于某个并发程序所有可观测的执行。

空间的有向结构使每条迹都能为相应的迹空间定义多个一维滤过。我们的目标是将所有这些滤过汇集起来，以获得所研究有向空间的有向代数拓扑性质。与经典情形不同，经典情形中滤过所依据的偏序集持久性是通过外部方法获得的，而在有向框架中，滤过则内在于研究对象本身。

除了在看似不同的研究方向之间建立理论桥梁之外，这项工作也是迈向更易处理的自然同调计算方法（例如秩不变量 [16]）的第一步，同时还为以某种条形码的形式简洁描述并发与分布式系统的语义提供了基础（参见例如 [19]）。这种方法已在工程的不同领域证明具有很强的实用性，参见例如 [1]。相关内容将在别处进一步探讨。

我们的第一个结果，即命题 1，为这项工作奠定了基础。事实上，该命题指出，对于偏序空间 $\mathcal{X}$，迹上存在一种序关系，它与 $\mathcal{X}$ 的分解范畴同构，我们随后将其称为 $\mathbb{P}(\mathcal{X})$ 的迹偏序集 $\mathcal{X}$。后者是

自然同调函子，因此特别地，命题1 指出自然同调是一个持久向量空间。

定理 1刻画了紧偏序空间的迹偏序集中的极大链，而命题 2 表明，（极大）迹的参数化通过限制自然同调函子，沿着（极大）链产生一维持久模。

最后，为了将这些一维持久模与完整的自然同调函子联系起来，我们证明了命题 3 和4，指出任意偏序集都可以作为其（极大）链所构成图表的余极限获得。随后，我们将此结果应用于定义域为偏序集的函子，并在命题5 中表明，沿链的余极限构造同样适用于这类函子。

这一切引出了我们的主要结果，即定理 2：自然同调可以作为沿（极大）迹的一维持久模的余极限获得，从而在这两种同调理论之间建立了具体的理论联系。

文章大纲。
第一节给出一个启发性例子，以介绍持久同调与自然同调之间的关系。具体而言，我们论证，对于给定的有向空间，不存在一种仅基于定向路径终止点的迹空间规范（多维）滤过。事实上，我们表明，必须考虑由与定向路径进行前拼接或后拼接所诱导的迹空间包含映射所给出的滤过。

第 3 节介绍持久同调的基本概念，统一记号并使本文内容自成一体。我们回顾持续对象和持久同调的定义，以及计算持久同调的算法；更多细节见 [1, 20, 21]。

第 4 节回顾了本文使用的有向拓扑和同调代数的主要定义。在第 4.1 节和4.2节中，我们回顾了有向空间的结构；自然同调的定义则在 4.3节回顾。在进入本文的主要结果之前，我们在第 4.4节回顾双模拟的定义，它构成了自然同调模的恰当等价概念。

论文的第一批结果见第5节。首先，我们通过命题1 证明，对于偏序空间 $\mathcal{X}$，相应自然同调函子的定义域实际上是一个偏序集$\mathbb{P}(\mathcal{X})$，因此可以将其视为一个持久对象。在第5.2节中，我们沿偏序空间中的迹定义一维持久模，然后证明定理1 和命题2，将偏序集$\mathbb{P}(\mathcal{X})$中的（极大）链与 $\mathcal{X}$中的（极大）迹联系起来。这些概念将在第5.4 节中通过第3节的启发性例子——火柴盒加以说明，并对其进行完整计算。火柴盒的自然同调之间的关系将在第5.5节中加以描述。

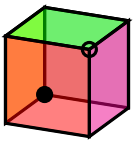
在第 6 节中，我们展示余极限构造如何使我们能够将沿迹获得的一维持久模粘合起来，以便

恢复给定偏序空间的整个自然同调图。首先，在第 6.1 节中，我们回顾关于偏序集的广为人知的结果，这些结果提供了多种将偏序集重构为其（极大）链的余极限的方法。在第 6.2 节中，我们通过命题 5 展示，这些构造可推广到定义域为偏序集的函子。最后，将这些结果与第 5 节的结果结合起来，我们在第 6.3 节中得到了本文的主要结果，即定理 2，指出偏序空间的自然同调，或其某些子图表，可由沿迹的单参数持久模得到。

最后，第 7 节通过探讨这些结果的扩展，进一步阐明自然同调与持久性之间的联系；其中，第 7.1 节讨论为所研究的偏序空间赋予度量结构时的情形，并简要涉及第 7.2 节中的算法问题。

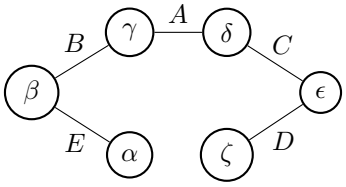
2 启发性例子

为了初步展示多维持久性与自然同调之间的密切关系，我们以如下例子说明构造，即 Fahrenberg 的火柴盒 [22]:



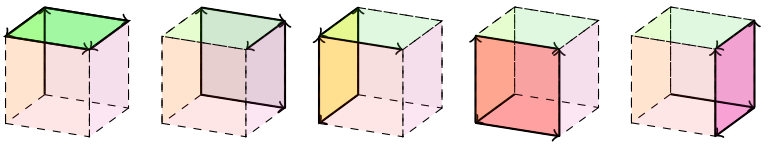
单位立方体 $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$的各个面（底面除外）构成了相应的立方复形 K，即由 5 个粘合在一起的正方形组成。火柴盒中的有向路径由连续映射给出，这些映射在每个坐标上都是递增的；这里的序是通过将图中的实心圆视为原点、将空心圆视为 (1，1，1) 来确定的。为简便起见，在本例余下部分中，我们只考虑所谓的组合双向路径，即沿着上图黑线前进的路径。迹是 p 定向路径 p 按第 4.1 节所定义的重参数化等价关系取等价类；所有这类等价类构成一个拓扑空间 $\mathfrak{T}(K)(a,\ b)$，其中起点（分别为终点）为所有 a（分别为 b）时，对于一大类预立方集的几何实现，该空间与 CW复形同伦等价。

使用 Ziemia ´nski 的构造 [23], ，与其迹空间对应的单纯集合从头到尾如下所示

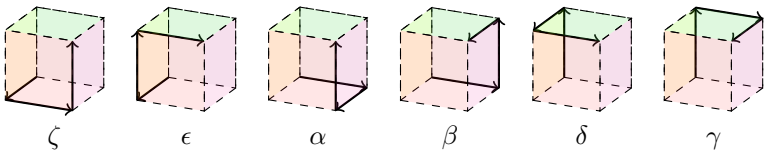


(1)

其中，边 A、 B、 C、 D 和 E 分别对应以下五条二维立方路径：



顶点 α、 β、 γ、 δ、 ϵ 和 ζ 分别对应以下六条组合双向路径：



(2)

这里 β 是 B 与 E的几何交集， γ 是 B 与 A 的几何交集，以此类推。这便得到图（1）所示的单纯集。

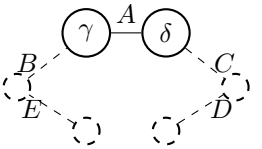
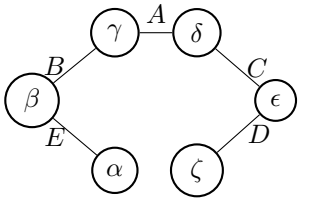
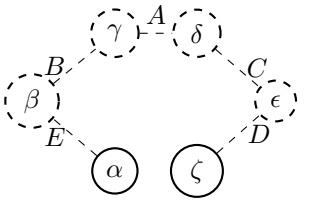
为了应用持久同调，我们需要从这个有向空间中得到图（1）所示单纯集的（多维）滤过，即一个从某个偏序集 P （例如$\mathbb{N}^2$ ）到单纯集合范畴的映射。我们可以设想，通过移动与迹空间 $\mathfrak{T}$（K）（a， b）相关联的端点 a 和 b，就能得到这样的滤过。然而，正如下文所示，一般而言并不存在获得这种滤过的规范方法；我们必须利用沿迹扩张来定义包含映射。

存在从 $\mathfrak{T}(K)(a,b)$ 到 $\mathfrak{T}(K)(a',b')$ 的映射，对于 $a \le a'$和 $b' \le b$，它们充当限制映射：它们只是“截取”组合双向路径，仅保留（如果存在）从 a' 到 b' 的部分。因此，只要 a 的任一坐标增加，或 b 的任一坐标减少，我们就得到一个单纯集合的递减序列。下面，我们表示出了由 b 的垂直坐标（终点）和 a 的垂直坐标（起始点）生成的多维滤过部分；还要记住，这里的 5 个方格是单位正方形，下方坐标为 0，上方坐标为 1。在此滤过中，作用于组合双向路径的限制映射应当对应于表示相应迹空间的单纯集合从下到上以及从左到右的包含映射。

例如，将端点 b 从垂直坐标 1 移至 0，同时保持 a 的垂直坐标为 0（见下表右列），经过 b 的坐标 0 的一维路径只有 α 和 ζ，因此所有其他顶点（及边）都必须消失。这会产生一个从两点单纯集合（α 和 ζ）向上包含映射到上方连通单纯集合的映射：这些单纯集合的 H_0 从 $\mathbf{Z}^2$ 变为 $\mathbf{Z}$；当延伸路径以到达火柴盒的端点时，这一映射会“消去”一个分支。这对应于自然同调图 $\overrightarrow{H}_1$（K）中的一部分

8 偏序空间的持久同调

图表是从 Z^2 到 Z 的投影映射，其中将 b 移至火柴盒的终点，同时保持起始点固定在初始顶点。

	a=1	a=0
b=1		
b=0	∅	

在此情况下，我们之所以能从底部到顶部得到包含映射，是因为从点 (1，1，0) 到点 (1，1，1) 存在唯一映射。当映射存在多种选择时，我们便无法再得到规范的包含映射。事实上，考虑 $a = (0, 0, 0)$ 为初始点，$b' = (1, 1, 0)$ 和 $b = (1, 1, 1)$ 为终止点的情况。从 $\mathfrak{T}(K)(b', b)$ 到 $\mathfrak{T}(K)(a, b)$ 有两个延拓映射：一个通过与 ζ 的迹前复合，另一个通过与 α 的迹前复合。应用不变量后，它们会产生不同的同调映射。

因此，不存在仅依赖于起点和终点的迹空间的规范多维滤过。更一般地，不难看出，只有当我们能够以连续的方式，为每一对点 X和 α ， β关联一条从 α 到 β的有向路径时，才存在用于研究有向空间 X 的这种多维滤过。众所周知，只有当 X 以有向的方式可缩时，这样的连续映射才确实存在，也就是说，是平凡的，参见例如 [24]。

本文的目标是应对这一困难，从而赋予自然同调以持久同调的意义。我们将要进行的视角转换类似于近期多维持久性研究中的方法。我们将考察所有与我们的有向空间结构相容的一维持久同调，并将这些信息整合起来。如上文所示，一般而言，同一对迹空间之间存在多个扩展，而这些扩展会诱导出不同的同调映射。因此，以起始点和终止点为参数的滤过不足以捕捉给定空间的全部有向同调信息；所以，我们选择考虑由扩展本身生成的滤过。这些滤过可以自然地解释为单参数持久模，并且与相关有向空间的结构密切相关。

3 持久性的概述

本节将利用 [25] 中持久模的概念，回顾持久同调的定义。我们还将回顾一种基于持久向量空间结构定理、用于计算持久同调的算法 [25]。关于持久同调的更详细介绍，请参阅 [1, 20, 21] 。

3.1 持久复形

给定一个偏序集 P，并将其视为一个范畴，则范畴$\mathcal{C}$ 中的 P-持久对象 是一个函子 $\Phi : P \to \mathcal{C}$。具体而言，它由一族以 P的元素为索引、取值于 $\mathcal{C}$ 的对象 $\{C_x\}_{x\in P}$组成；并且对于所有 P中的 $x \leq y$ ，选择一个映射 $_y : C_x \to C_y$ ，该映射属于C ϕ_x，且满足 $\phi_{y,z} \circ \phi_{x,y} = \phi_{x,z}$ ，只要$x \leq y \leq z$成立。我们用 P_{pers}(C) 表示范畴 $\mathcal{C}$中 P-持久对象的函子范畴。当 $\mathcal{C}$ 是单纯复形、链复形或群的范畴时， P_{pers}(C)中的对象分别称为 P-持久单纯复形、链复形或群。

特别地，考虑带有通常序关系的自然数偏序集 N。定义在基环 R 上的正 N-持久复形（简称持久复形）是一族定义在 R上的链复形 $C = \{C_*^i\}_{i\geq 0}$ ，并配有链映射 $f^i : C_*^i \to C_*^{i+1}$，从而在 R-模范畴中得到如下图表：

$$C_*^0 \xrightarrow{f^0} C_*^1 \xrightarrow{f^1} \cdots \longrightarrow C_*^i \xrightarrow{f^i} C_*^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

一个持久模 M 是一个集中在零次的持久复形，即一族 R-模 $\{M^i\}_{i\geq 0}$，以及映射 f^i: $M^i \to M^{i+1}$。

若持久复形 C 的每个 R-模C_k^i 都是有限生成的，且存在某个 N，使得当 $i \geq N$时映射 f^i 都是同构，则称其为有限型。

3.2 持久同调

一个单纯复形是一个集合 K，以及 K的子集的一个集族 $\mathcal{K}$ ，满足以下两个条件：

i) 对于每个 $v \in K$， $\{v\} \in \mathcal{K}$，且 $\{v\}$ 称为 K的一个顶点；**ii)** $\sigma \in \mathcal{K}$ 和 $\sigma' \subseteq \sigma$ 蕴含 $\sigma' \in \mathcal{K}$。

k K 的-单形是 $\mathcal{K}$ 的一个元素 σ ，其基数 $|\sigma|$ 等于 $k+1$。 k-单形 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_k\}$ 的定向是 σ 中 v_i 的所有排列在由偶置换生成的等价关系下所形成的等价类。带有定向的单形称为有向单形，我们用$[v_0, \ldots, v_k]$ 或 $[\sigma]$ 表示该等价类。

记 $C_k(K)$ 为由 K 的定向 k-单形生成的自由 R-模，即 k阶链模。边界算子 ∂_k : $C_k(K) \to C_{k-1}(K)$

是定义在任意单形 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_k\}$ 上的映射，其定义为

$$\partial_k(\sigma) = \sum_i (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k],$$

其中，在右侧，$\widehat{v_i}$ 表示从单形中消去顶点 v_i 。分别将 $Z_k(K) = \ker \partial_k$、$B_k(K) = \mathrm{Im}\ \partial_{k+1}$ 和 $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$记为圈、边界和同调 模。

K 的子复形是指满足 $L \subseteq K$的单纯复形 L 。滤过复形是指配有滤过的复形 K ，也就是一列嵌套的子复形:

$$K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \ldots \subseteq K^n = K.$$

给定这样的滤过，我们定义持久复形 $C(K) = \{C_*(K^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$，其中链映射 $f^{i,i+1} : C_*(K^i) \to C_*(K^{i+1})$ 由包含映射 $K^i \to K^{i+1}$ 诱导。对每个复形应用 k^{th} 同调函子H_k ，我们得到 $H_k(C(K)) := \{H_k(C(K_i)_*)\}_{i\in\mathbb{N}}$，其具有以底环 R 为基环的持久模结构。记由包含映射 $K^i \to K^{i+p}$ 诱导的映射为$\eta^i_k{}^{i+p} : H_k(K^i) \to H_k(K^{i+p})$，我们将 K^i 的 p-持久 k^{th} 同调群定义为 $\mathrm{Im}(\eta^i_k{}^{i+p})$，记作 $H^i_k{}^p(K)$，参见 [4]。

当 K 有限时，持久复形 $C(K)$ 是有限型的，因此持久同调 $H_k(C(K))$ 也是有限的。

3.3 持久模的分类与持久性算法

给定一个持久 R-模 $(M^i, \phi_{i,i+1})_i$，我们通过如下方式定义一个$R[t]$ 上的分次模:

$$\alpha(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i,$$

其中，R-模结构由其各分量的直和诱导，而 t 的作用定义为

$$t \cdot (m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots) = (0, \phi_{0,1}(m_0), \phi_{1,2}(m_1), \ldots, \phi_{n,n+1}(m_k), \ldots).$$

对应关系 α 具有函子性，并建立了有限型持久 R-模范畴与有限生成分次 $R[t]$-模范畴之间的等价。当基环为域 $\mathbb{k}$ 时，结合有限生成分次模的结构定理，我们知道持久模可以分解为

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Sigma^{k_i}\mathbb{k}[t]\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \Sigma^{l_j}\mathbb{k}[t]/(t^{h_j})\right) \tag{3}$$

对于某些 n, m 以及自然数族 $(k_i)_i$、$(l_j)_j$ 和 $(h_j)_j$，其中 Σ^k表示分次中的 k-移位。

根据这一持久模分类，可以导出一个用于计算域 [25]上持久同调的算法。该算法定义如下。设 $\{e_j\}$ 和 $\{\hat{e}_i\}$ 分别表示持久 $\Bbbk$-模 C_k 和 Z_{k-1}的齐次基。记 M_k 为 ∂_k 在这些基下的矩阵。计算同调的通常步骤是将矩阵化为史密斯标准形，并从对角元素读出 H_k 的描述。我们通过对 k使用归纳法来计算这些基和矩阵表示。对于 $k = 1$， $C_0 = Z_0$ 的标准基是齐次的，因此可以照常进行。

现在假设我们有一个关于 ∂_k 的表示 M_k，它相对于 C_k 的标准基 $\{e_j\}$ 以及 Z_{k-1}的齐次基 $\{\hat{e}_i\}$ 给出。为了进行归纳，我们必须计算 Z_k 的齐次基，并相对于 Z_k 的已计算基和 C_{k+1}的标准基来表示 ∂_{k+1}。

我们首先按次数逆序对基 $\{\hat{e}_i\}$ 进行排序，然后将矩阵 M_k 变换为列阶梯形 M_k，也称为下阶梯形。我们将一列中的第一个非零值称为主元，含有主元的行称为主元行。史密斯标准形中的对角元素与列阶梯形中的主元相同，相应基元素的次数在这两种情况下也相同 [25]。Zomorodian 和 Carlsson 在 [25] 中证明，每一行对H_{k-1} 的持久同调的贡献方式如下：

i) 如果行 i 是主元行为，且主元为 t^n，那么它贡献 $\Sigma^{\deg \hat{e}_i}\mathbf{k}[t]/t^n$，
ii) 如果行 i 不是主元行，那么它贡献 $\Sigma^{\deg \hat{e}_i}\mathbf{k}[t]$，
其中这些贡献对应于刻画式（3）中的因子，详见 [25] 以了解更多细节。

4 有向空间的自然同调

本节回顾有关有向空间的定义和构造，尤其是回顾作为其不变量的自然同调。在第 4.1 节和 4.2节中，我们回顾有向空间的定义及相关的范畴构造，以及自然系统和复合配对的概念。最后，第 4.3 节回顾 [13], 中自然同调的定义；它是通过自然系统编码的有向空间不变量。此外，我们还回顾双模拟的概念，并在引理1中给出有向同胚的有向空间与其相关自然同调图的双模拟等价之间的联系。

4.1 有向空间

回忆 [11]，一个有向空间（或有向空间）是一个对 $\mathcal{X} = (X, dX)$，其中 X 是一个拓扑空间， dX 是 X 中路径的集合，即从 $[0, 1]$ 到 X的连续映射，称为有向路径（或定向路径），并满足以下三个条件：

i) 每条常值路径都是有向的，

ii) 如果 $f \in dX$，那么对于任意连续单调映射 $\rho\colon [0,1] \to [0,1]$，都有 $f \circ \rho \in dX$。映射 ρ 称为重参数化限制；如果它是满射，则简称为重参数化

iii) dX 在拼接运算下封闭。

我们将把有向路径 f 和 g 的拼接记作 $f \star g$。有向空间的态射 $\varphi\colon (X, dX) \to (Y, dY)$ 是一个连续函数 $\varphi\colon X \to Y$，它保持有向路径不变，即，对于 dX 中的每条路径 $f\colon [0,1] \to X$，路径 $\varphi_*(p) = \varphi \circ f\colon [0,1] \to Y$ 都属于 dY。有向空间的范畴记作 dTop。

一个偏序空间，或偏序空间 $\mathcal{X} = (X, \leq_X)$，由一个豪斯多夫拓扑空间 X 和一个在积拓扑 $X \times X$下闭合的偏序 $\leq_X$ 组成。通过赋予偏序空间从带有通常序关系的单位区间到 X的递增路径 dX 集合，可以自然地将其解释为有向空间。因此，dTop 中偏序空间之间的态射就是连续的保序映射。

给定两个有向空间 X 和 Y，从 X 到 Y 的二同胚是有向空间的一个态射 $\varphi\colon X \to Y$，且存在有向空间的一个态射 $\psi\colon Y \to X$，使得 $\varphi \circ \psi = Id_Y$和 $\psi \circ \varphi = Id_X$。对于紧致偏序空间，如果 φ 和 ψ 连续、保序且互为逆映射，则可推出这一结论。在并发理论的应用中，有向同胚空间在语义上是等价的。

两个有向路径 f 和 g 重参数化等价，当且仅当存在重参数化 ρ, λ，使得 $f \circ \rho = g \circ \lambda$。有向路径 f在$\mathcal{X}$中的迹 [12]，记作 f；若不会引起混淆，也记作 f，是 f关于重参数化等价的等价类。 $\mathcal{X}$ 的有向路径拼接与此商相容，因此可定义迹的拼接 $f \star g := f \star g$，其中 f和 g是 $\mathcal{X}$, [26]的任意有向路径。对于 $\varphi\colon \overline{X} \to Y$这一有向空间的态射，略去记号上的区别，我们将迹 f的像记作 $\varphi_*(f) = \varphi_*(f)$。

对于无环路的有限几何前立方集的几何实现，已知 [27] 我们有一个完备度量空间，并且可以定义有向路径 p的 l_1弧长 $l_1(p)$。在此情形下，迹 f 总有一个代表元 f，使得沿着 f 从 $f(0)$到 $f(t)$的子路径长度为 t。

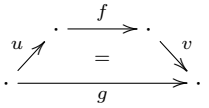
对于有向空间 $\mathcal{X} = (X, dX)$以及 $x, y \in X$，我们将 $\overrightarrow{Di}(\mathcal{X})(x, y)$记为 X 中源点为 $x = f(0)$、终点为 $y = f(1)$的有向路径 f 所构成的空间，并赋予其紧开拓扑。对于 $x, y \in X$，有向空间$\mathcal{X}$从 x到 y的迹空间 记为 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})(x, y)$，它是 $\overrightarrow{Di}(\mathcal{X})(x, y)$关于重参数化等价的商，并赋予商拓扑。

4.2 迹范畴与迹图

回忆一下，范畴 $\mathcal{C}$ 的 分解范畴 记作 FC，它是这样一个范畴：其对象是 $\mathcal{C}$ 的态射，而从 f 到 g 的态射是 $\mathcal{C}$ 中态射的一个有序对 (u, v)，且 $v \circ f \circ u = g$ 在 $\mathcal{C}$ 中成立。

$$(u,v): f \to g$$

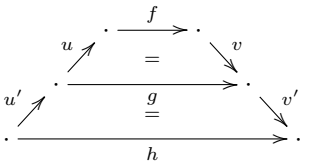
$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[dr, "v"] & \\ \cdot \arrow[ur, "u"] \arrow[rrr, "g"'] & & & \cdot \end{tikzcd}$$



复合运算由以下方式给出。

$$(u,\ v) \circ (u',\ v') = (u \circ u',\ v' \circ v)$$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[dr, "v"] & \\ & \cdot \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & & \cdot \arrow[dr, "v'"] \\ \cdot \arrow[ur, "u'"] \arrow[rrr, "h"'] & & & \cdot \end{tikzcd}$$



当有序对 u', u 和 v, v' 在 $\mathcal{C}$ 中可复合时，f 上的恒等态射为有序对 $(1_x, 1_y)$。$\mathcal{C}$ 上取值于范畴 的自然系统是一个函子 D：$F\mathcal{C} \to \mathbf{V}$。我们用 D_f（分别用 $D(u,v)$）表示 $F\mathcal{C}$ 中对象 f（分别为态射 (u,v)）的像。

有向空间可以借助迹的概念视为一个范畴，而这种对应关系具有函子性。事实上，考虑函子

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} : \mathsf{dTop} \to \mathsf{Cat}$$

取值于小范畴范畴的自然系统，它将有向空间 $\mathcal{X}$关联到 $\mathcal{X}$的迹范畴，其对象为 X中的点，态射为 $\mathcal{X}$中的迹，合成为迹的拼接。有向空间 $\mathcal{X}$ 在拓扑空间范畴 Top 中的迹图是该自然系统。

$$T(\mathcal{X}) : F\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X}) \to \mathsf{Top},$$

将一个从拓扑空间 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})(x,y)$出发的 $\mathcal{X}$ 的迹 f： $x \to y$，以及一个 $F\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X})$ 的态射 $(\overline{u}, v)$ 对应到连续映射

$$\overline{u} \star \_ \star \overline{v} : \mathfrak{T}(\mathcal{X})(x,y) \to \mathfrak{T}(\mathcal{X})(x',y'),$$

它将迹 f 映射为 $u \star \overline{f} \star v$。

回顾 [28]，取值于$\mathbf{V}$的自然系统范畴($\mathbf{V}$)，记作 opNat，定义如下：

i) 其对象是由一个范畴 $\mathcal{C}$ 和一个自然系统D：$F\mathcal{C} \to$, D构成的有序对 ($\mathcal{C}\mathbf{V}$,**ii)** 其态射是有序对

$$(\Phi, \tau) : (\mathcal{C}, D) \to (\mathcal{C}', D')$$

由一个函子 $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 和一个自然变换 τ： $D \to \Phi^* D'$组成，其中自然系统 $\Phi^* D'$： $F\mathcal{C} \to \mathbf{V}$ 定义为

$$(\Phi^* D')(f) = D'(\Phi f),$$

对于 $\mathcal{C}$中的每个态射 f，以及 $\Phi^* D'(u,v) = D'(\Phi(u)\ \Phi(v))$，对于 $\mathcal{C}$中的所有态射 u, v，

iii) 态射的复合 $(\Psi,\sigma):(\mathcal{C}',D') \to (\mathcal{C}'',D'')$ 和 $(\Phi,\tau):(\mathcal{C},D) \to (\mathcal{C}',D')$ 定义为

$$(\Psi,\sigma)\circ(\Phi,\tau) := (\Psi\circ\Phi, (\Phi^*\sigma)\circ\tau),$$

其中，$\Psi\circ\Phi$ 表示函子的复合，而自然变换（$\Phi^*\sigma$）$\circ\tau$ 在 $\mathcal{C}$ 的态射 f 处的分量为$\sigma_{\Phi(f)}\circ\tau_f$。

由有向空间 $\mathcal{X}$ 索引的函子族 $T(\mathcal{X})$ 可扩展为一个函子

$$T : \mathsf{dTop} \to \mathsf{opNat}(\mathsf{Top})$$

将一个有向空间 $\mathcal{X}$ 赋予一对 $(\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X})\ T(\mathcal{X}))$。有向空间的一个态射 φ: $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 诱导出连续映射

$$\varphi_{x,y} : \mathfrak{T}(\mathcal{X})(x,y) \to \mathfrak{T}(\mathcal{Y})(\varphi(x),\varphi(y)),$$

对所有点 x，y 都属于 X，因此可得到相应迹图之间的自然变换:

$$\overrightarrow{\varphi} : T(\mathcal{X}) \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{P}}(\varphi)^* T(\mathcal{Y}).$$

4.3 自然同调

本小节的灵感来自 [17]。对于 $n \geq 1$，n^{th} 自然同调函子 $\mathcal{X}$

$$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X}) : F\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X}) \to \mathsf{Ab}$$

是定义为以下复合的函子

$$F\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{T(\mathcal{X})} \mathsf{Top} \xrightarrow{H_{n-1}} \mathsf{Ab},$$

其中 $T(\mathcal{X})$ 是迹图，而 H_{n-1} 是 $(n-1)^{th}$ 奇异同调函子。它扩展为一个函子

$$\overrightarrow{H}_n : \mathsf{dTop} \longrightarrow \mathsf{opNat}(\mathsf{Ab}),$$

将一个有向空间 $\mathcal{X}$ 映为 $(\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X})\ \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X}))$.

有向拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的自然同调 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})$ 非常精细：它不仅记录迹 f 的局部同调群 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})f$，还记录这些群分别出现在哪些迹中。与持久同调（见第 3 节）一样，其目的是描述任意拼接 $g = u\star f\star v$（由 f 拼接而成）通过扩张 (u,v) 所产生的群 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})f$ 与 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})g$ 之间的变换，而不只是记录群 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})f$ 本身。为此，我们考察

自然系统关于双模拟这一概念的自然同调，以及更一般的Ab值函子，定义见 [13] ，下文将回顾其定义。

4.4 双模拟

给定两个小范畴 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$ 和两个函子 $F\colon \mathcal{C} \to$Ab、 $G\colon \mathcal{D} \to$ Ab，我们将 F 与 G 之间的双模拟 称为由三元组（x、 η、 y）组成的任意集合 R，其中 x 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象， y 是 $\mathcal{D}$ 的一个对象，且 $\eta\colon Fx \to Gy$ 是一个同构，满足：

i) 对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 x， R 都包含某个形式为 (x, η, y) 的三元组；对于 $\mathcal{D}$ 的每个对象 y，情况也类似；ii) 对于每个三元组 $(x, \eta, y) \in R$ 以及 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $i\colon x \to x'$，都存在一个三元组 $(x', \eta', y') \in R$ 和 $\mathcal{D}$ 中的一个态射 $j\colon y \to y'$，使得$\eta' \circ Fi = Gj \circ \eta$；反过来，对于每个 $(x, \eta, y) \in R$ 以及 $\mathcal{D}$ 中的每个态射 $j\colon y \to y'$，都存在一个三元组 $(x', \eta', y') \in R$ 和一个态射$i\colon x \to x'$，使得 $\eta' \circ Fi = Gj \circ \eta$:

$$\begin{array}{ccccc} x & & Fx & \xrightarrow{\eta} & Gy & & y \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Fi} & & \downarrow{\scriptstyle Gj} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ x' & & Fx' & \xrightarrow[\eta']{} & Gy' & & y' \end{array}$$

我们称 F 和 G 是 双模拟等价的，条件是它们之间存在双模拟 R 。这是一种等价关系。现在我们证明，有向同胚的有向空间具有双模拟的自然同调。[29] 中对此有所隐含，但迄今尚未明确阐述。

引理1。 假设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$是一个有向同胚。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，函子 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})$和 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})$ 是双模拟等价的。

<escape>*Proof* </escape>根据假设，<escape> f </escape>是有向空间的一个态射，其逆为 <escape> g </escape>：<escape> $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$</escape>。对于给定的 <escape> n </escape>（属于 N），我们需要构造 <escape> R</escape>，即一个由三元组（<escape>x</escape>,<escape> η</escape>,<escape> y</escape>）组成的集合，其中 <escape> x </escape>是 <escape>$\overrightarrow{F}$</escape>$\mathbf{P}$（<escape>$\mathcal{X}$</escape>）的一个对象，<escape> y</escape>是 <escape> $\overrightarrow{F}$</escape>$\mathbf{P}$（<escape>$\mathcal{Y}$</escape>）的一个对象，也就是说，<escape> x </escape>和 <escape> y </escape>分别是 <escape> $\mathcal{X}$</escape>和 <escape> $\mathcal{Y}$</escape>的迹，并且 <escape>η </escape>：<escape> $\overrightarrow{H}_n$</escape>（<escape>$\mathcal{X}$</escape>）<escape>$_x \to \overrightarrow{H}_n$</escape>（<escape>$\mathcal{Y}$</escape>）<escape>$_y$ </escape>是一个同构，使得这个三元组集合构成一个双模拟。

我们将 R定义为由 f和 g按如下方式得到的对象。它将包含所有满足以下条件的三元组（x， $\eta_{x,\ y}$， y）： x是 $\mathcal{X}$的任意迹， $y = f_*(x)$ 是 $\mathcal{Y}$的一个迹，并且 $\eta_{x,\ y}$是从 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_x$到 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})$ 的映射

^{y} 由 f 按如下方式诱导。

我们首先注意到，当 f是一个同胚时，其从 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$ 到 $\mathfrak{T}(\mathcal{Y})$ 的诱导映射 f_* （即第 4.1 节末尾定义的迹空间）也是一个同胚；类似地，它对 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})(\alpha, \beta)$ 的限制映射到 $\mathfrak{T}(\mathcal{Y})(f(\alpha)\ f(\beta))$，其中 $\alpha = x(0)$ 且 $\beta = y(0)$。因此， f_* 诱导了从（标准）同调 $H_{n-1}(\mathfrak{T}(\mathcal{X})(\alpha, \beta))$ 到（标准）同调 $H_{n-1}(\mathfrak{T}(\mathcal{Y})(f(\alpha)\ f(\beta)))$ 的同构。前者是 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_x$，后者是 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_y$，因为 $y(0) = f(\alpha)$ 且 $y(1) = f(\beta)$。这个同构 $\eta_{x,y}$可以明确写成如下形式。

考虑奇异同调类 $[p]$，其中 p 是从 α 到 β 的 $\mathcal{X}$ 的迹空间中维数为 $n-1$ 的圈。更确切地说，这是某个和式 $p = \sum \lambda_i p_i$ 的同调类，其中 p_i 是维数为 $n-1$ 的奇异单形，它们是连续的

16 偏序空间的持久同调

映射 $p_i\colon\ \Delta_{n-1}\to\mathfrak{T}(\mathcal{X})(\alpha,\beta)$，其像落在从 α 开始并在 β 结束的 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$ 的迹中。然后 $\eta_{x,y}([p])$ 是

$$\eta_{x,y}([p])=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[p_i'],\tag{4}$$

其中 p_i' 是由 $p_i'(t_0,\ldots,t_{n-1})=f_*(p_i(t_0,\ldots,t_{n-1}))$ 定义的 $(n-1)$-单形，对于 $(t_0,\ldots,t_{n-1})\in\Delta_{n-1}$ 是 R^n 中的标准 $(n-1)$-单形。滥用记号，我们写作 $p_i'=f_*(p_i)$。

现在我们验证三元组集合 R 确实是一个双模拟。考虑态射 $i\colon\ x\to x'$，它属于 $F^{\to}\mathrm{P}(\mathcal{X})$，即 $i=(u,v)$，其中 u 和 v 是 $\mathcal{X}$ 中的迹。现在考虑态射 $j\colon\ y\to y'$，它属于 $F^{\to}\mathrm{P}(\mathcal{Y})$，定义为 $j=(f_*(u)\ f_*(v))$，且 $y'=f_*(u)\star y\star f_*(v)=f_*(x')$。与之前一样，$f_*$ 诱导出 $\eta_{x',y'}$ 之间的同构，它们分别属于 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})\quad_{y'}\qquad\eta_{x'\ y'}\qquad\eta_{x'}\qquad_i=\overrightarrow{H}_n\ \mathcal{Y}$ 和 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})$，并且 $(x',,,y')$ 属于 R。此外，$,_{y'}\circ\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})\,(\,)_j\circ\eta_{x,y}$，这一点我们接下来会看到。

再次设 $[p]$ 是维数为 $n-1$ 的一个（标准）同调类，它来自从 $\alpha=x(0)$ 到 $\beta=x(1)$ 的 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})(\alpha,\beta)$，即，对于某些维数为 $n-1$ 的奇异单形 p_i，$[p]$ 是圈 $p=\sum\lambda_i p_i$ 的同调类，正如我们已经看到的那样。$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i$ 对 $[p]$ 的作用是 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{x'}$ 中的同调类：

$$[q]=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[q_i]$$

其中，q_i 是 $\mathfrak{T}(\mathcal{Y})$ 中定义的（$n-1$）-单形，定义为

$$q_i(t_0,\ldots,t_{n-1})=u\star p_i(t_0,\ldots,t_{n-1})\star v,$$

对于 $(t_0,\ldots,t_{n-1})\in\Delta_{n-1}$。简写为 $q_i=u\star p_i\star v$。现在，

$$\eta_{x',y'}\circ\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i([p])=\sum_{i=1}^{k}\eta_{x',y'}([q_i]),$$

根据公式（4），这等于

$$\begin{aligned}\eta_{x',y'}\circ\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i([p])&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[f_*(q_i)],\\&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[f_*(u)\star f_*(p_i)\star f_*(v)],\end{aligned}$$

只需将该方程的左右两项分别作用于元组 $(t_0,\ldots,t_{n-1})\in\Delta_{n-1}$，即可轻松验证。

但正如我们在（4）中所见，$\eta_{x,y}([p])=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[f_*(p_i)]$。因此：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_j\circ\eta_{x,y}([p])&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[f_*(u)\star f_*(p_i)\star f_*(v)]\\&=\eta_{x',y'}\circ\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i([p]).\end{aligned}$$

反过来，考虑一个态射 $j\colon\ y\to y'\text{ in }F^{\to}\mathrm{P}(\mathcal{Y})$，满足 $j=(u',v')$。我们有 $x'=g_*(u')\star y\star g_*(v')=g_*(y')$。现在考虑 $i\colon\ x\to x'\text{ in }F^{\to}\mathrm{P}(\mathcal{X})$，满足 $i=(g_*(u')\ g_*(v'))$。与之前一样，g_* 诱导出一个同构 $\eta'_{x',y'}$（分别为 $\eta'_{x,y}$），它将 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{x'}$（分别为 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_x$）映到 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{y'}$（分别为 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_y$），显然该同构

等于 $\eta_{x',y'}$ （分别为 $\eta_{x,y}$）的逆 $\eta_{x'}^{-1}{}_{,y'}$ （分别为 $\eta_x^{-1}{}_{,y}$），因为 g_* 是 f_*的逆。

按照之前相同的计算，将 $\mathcal{X}$与 $\mathcal{Y}$、 η与 η'的角色互换，可得 $\eta'_{x',y'} \circ \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_j = \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i \circ \eta'_{x,y}$, *i.e.* $\eta_{x'}^{-1}{}_{,y'} \circ \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_j = \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i \circ \eta_x^{-1}{}_{,y}$; 再将此等式与 $\eta_{x',y'}$预复合，并与 $\eta_{x,y}$后复合，得到 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_j \circ \eta_{x,y} = \eta_{x',y'} \circ \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_i$, 以及 $(x, \eta_{x,y}, y) \in R$。

因此， R 是一个双模拟。 □

5 有向空间的持久同调

本节探讨持久同调作为有向空间不变量的用途，以及它在偏序空间背景下与自然同调的关系。首先，我们证明，对于这些有向空间，相关的自然同调模实际上是第 3 节所定义的持久对象。接着，我们定义有向空间中沿迹的持久同调，并证明该定义与将自然同调解释为持久对象相兼容。最后，我们通过火柴盒示例说明这些构造。

5.1 自然同调作为持久对象

考虑一个有向空间 $\mathcal{X} = (X, dX)$ 及其迹范畴 $\overrightarrow{\mathbf{P}}(\mathcal{X})$。我们通过如下方式定义 $\mathcal{X}$ 中迹之间的关系

$$f \leq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, u, v, \quad g = ufv, \tag{5}$$

也就是说，存在从 f 到 g 的扩张 (u, v)。

回顾一下，偏序空间 $\mathcal{X} = (X, \leq_X)$ 由一个豪斯多夫拓扑空间 X 和一个在积拓扑 $X \times X$ 中闭的偏序 $\leq_X$ 组成。下文中，我们只考虑紧偏序空间。通过赋予偏序空间从带有通常序关系的单位区间到 X 的递增路径集合 dX，可将其自然地视为有向空间。

引理 2. 在任意有向空间中，关系 $\leq$ 在（5）中定义，是一个预序。在偏序空间中，它是一个偏序关系。

Proof 由于常值路径是有向的，该关系具有自反性；由迹拼接的结合律可知它具有传递性。事实上，若 $f \leq g$ 和 $g \leq h$，则存在扩张 (u, v) 和 (u', v')，使得

$$f = ugv \qquad \text{and} \qquad g = u'hv'.$$

因此， $f = u(u'hv')v = (uu')h(v'v)$，且 $f \leq h$。对于偏序空间，我们还证明了 $\leq$的反对称性。考虑 f, $g \in dX$ 满足 $f \leq g$ 且 $g \leq f$。根据定义，存在扩展使得 $f = ugv$ 且 $g = u'fv'$。因此 $f = uu'fv'v$，所以 uu'和 vv' 具有相同的起点和端点，这意味着它们都是常值路径。事实上，给定偏序空间中的一条路径 $h: x \to x$，其中任意一点 x' 都在

图像 h 中的点都满足 $x \leq x' \leq x$。这意味着 uu' 和 $v'v$ 的图像都是单点集，也就是说，每条有向路径 u，u'，v，v' 的图像都是单点集，因此*i.e.* 它们都是常值路径，证毕。□

这个偏序集记为 $\mathbf{P}(\mathcal{X})$，称为 $\mathcal{X} = (X, \leq_X)$ 的 迹偏序集 。特别地，根据构造，我们得到以下结果：

命题1。 对于偏序空间 $\mathcal{X}$，$\mathbb{P}(\mathcal{X})$ 同构于 $F^{\rightarrow}\mathbf{P}(\mathcal{X})$。

Proof 与前述证明采用相同的论证，若 $ufv = u'fv'$，则 $u = u'$，且 $v = v'$，因为这些必须是等于 $f(0)$（分别为 $f(1)$）的常值映射。因此，在偏序空间中，任意两个迹之间至多存在一个扩张，由此得证。□

这使我们能够将自然同调解释为偏序集上的函子，即作为一个持久对象。实际上，在偏序空间 $\mathcal{X}$ 中，与 $\mathcal{X}$ 相关联的 i^{th} 自然同调图是一个 $\mathbf{P}(\mathcal{X})$-持久群。取域 $\mathbf{k}$ 上的系数，我们得到 $\mathbf{P}(\mathcal{X})$-持久 $\mathbf{k}$-向量空间。

5.2 沿迹的持久同调

这里，我们展示如何从迹的参数化中获得一维持久模。在下文中，我们固定偏序空间 $\mathcal{X}$ 中的一个迹 f 及其参数化 f。此外，我们固定 f 的像中的一点 α_f，并将满足 $f(t_0) = \alpha_f$ 的某个值记为 t_0。

下文中我们滥用记号，用 α_f 表示等于点 α_f 的常值迹，从而将其视为迹偏序集 $\mathbf{P}(\mathcal{X})$ 的一个元素。在这一视角下，我们用 $[\alpha_f, f]$ 表示迹偏序集中 α_f 与 f 之间的区间，即满足 $\alpha_f \leq p \leq f$ 且属于 $\mathbf{P}(\mathcal{X})$ 的迹 p。

给定 $[0,1]$ 中分别通过映射 $\gamma_-:[0,1] \to [0,t_0]$ 和 $\gamma_+: [0,1] \to [t_0,1]$ 对 $[0,t_0]$ 与 $[t_0,1]$ 的参数化，我们将 f 限制在 $[t_0 - \gamma_-$ 上所得的迹记为 ${}_sf_s(s)\ \gamma_+(s)]$。因此，应用迹空间函子，我们得到一个 $[0,1]$-持久拓扑空间 $\{T({}_sf_s)\}_s$。这是与迹 f 相关联的迹空间的一个滤过。注意，该滤过源自迹偏序集中的一条链 $({}_sf_s)_{s\in[0,1]}$（见下方第 5.3 节），从常值迹 α_f 到 f。当 $\alpha_f = f(0)$（分别为 $\alpha_f = f(1)$）时，我们将此类滤过称为初始（分别为终结）点滤过。取某个保序映射 $\mathbf{N} \to [0,1]$，便可由上述构造得到 $\mathbf{N}$-持久单纯复形。

所有这些都可以视为如下的 $\mathbf{R}$-持久对象：$[0,1]$-持久对象是指在负参数以及大于或等于 1 的参数上保持常数的 $\mathbf{R}$-持久对象。上文构造的 $\mathbf{N}$-持久对象可先视为分段常数的 $[0,1]$-持久对象，再将其视为 $\mathbf{R}$-持久对象。不过，在讨论可计算性时，考虑 $\mathbf{N}$-持久对象会更有用。

在上述所有情形中，我们得到区间 $[\alpha_f, f]$ 中的链 $c = (f_i)_{i\in\mathbb{R}}$，并将相对于 c 沿迹的 持久同调 f 关于 定义为一个函子

从 R（视为偏序范畴，采用通常的序关系）到阿贝尔群范畴的函子，将 $i \in \mathrm{R}$ 关联到：

$$\overrightarrow{H}_n(f,c)_i := \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{f_i}$$

在下一节中，我们将看到这个对象与所选的参数化 f, γ_- 和 γ_+ 无关。

5.3 极大迹与极大链

为了更具体地说明参数化与链之间的联系，我们将介绍迹偏序集中的极大链与沿极大迹的扩张参数化之间的关系。事实上，我们所用的链并不取决于（重新）参数化，而取决于沿迹访问的那一对端点。

回顾上一小节，对于给定的迹 f，我们使用以下数据构造一个持久模：

- f f 的参数化。
- 映像 f 中的点 $\alpha = f(t_0)$。
- 重参数化 γ_- : $[0,1] \to [0,t_0]$ 和 γ_+ : $[0,1] \to [t_0,1]$。

A 极大迹 是指无法向任一侧延伸的迹。因此，它们是 $\mathrm{P}(\mathcal{X})$ 中的极大元素。$\mathrm{P}(\mathcal{X})$ 中的极大链通过一系列延伸，将极小元素（即 常值定向路径）连接到极大迹。显然，对于迹 f，上述数据编码了迹偏序集中的一条极大链。实际上，我们得到一条链 ${}_sf_s$，从 α（视为常值迹）到 f；由于它是由连续映射 γ_+ 和 γ_- 导出的，因此是极大的。

考虑 $t \in \mathrm{P}(\mathcal{X})$ 是一个极大迹。设 $\alpha_0 := t(0) \in \mathcal{X}$ 为 t 的起始点，并考虑 $\mathrm{P}(\mathcal{X})$ 中的区间 $[\alpha_0, t]$。对于任意 $g, h \in [\alpha_0, t]$，我们都有 $g \le h$ 或 $h \le g$，因为该区间中的所有元素都是以 α_0 为起始点且为 t 的子迹的迹。因此，区间 $[\alpha_0, t]$ 本身是一个链。

由此我们推得，从 α_0 到 t 存在唯一的极大链，我们将其记为 C_t^0，即二者之间的区间。对称地可以证明，当我们考虑从 α_1 出发的链时，情况也同样成立：$= t(1)$ 是 t 的终止点，此时唯一的链记为 C_t^1，即区间 $[\alpha_1, t]$。

现在考虑迹 t 中的一个点 α，它既不是 t 的起点，也不是终止点。设 $t_1 \le t$ 为从 α_0 到 α 的迹，$t_2 \le t$ 为从 α 到 α_1 的迹。我们断言，区间 $[\alpha, t]$ 作为偏序集，是链 $C_{t_1}^1$ 与链 $C_{t_2}^0$ 的笛卡尔积。事实上，给定任意迹 $f \in [\alpha, t]$，我们知道 f 是经过 α 的 t 的一个子迹。因此，存在唯一的一对迹 $(f_1, f_2) \in [\alpha, t_1] \times [\alpha, t_2]$，使得 $f = f_1 \star f_2$。反过来，任意一对迹 $(f_1, f_2) \in [\alpha, t_1] \times [\alpha, t_2]$ 都可以拼接，从而得到区间 $[\alpha, t]$ 中的一条迹。因此，从 α 到 t 的任意一条链，都是乘积 $[\alpha, t_1] \times [\alpha, t_2]$ 中的一条链，其中的序关系按坐标逐一确定。

更一般地，给定 任意 完备的（即 对下确界和上确界封闭的）$\mathbf{P}(\mathcal{X})$ 中的极大链 C，我们知道它有一个极大元素，即其上确界，记为 $t_{\text{。}}$此外，由于每个迹都是 X 的紧子空间，因此它有一个极小元素 α；由 C 的极大性可知，该元素必为常值迹。因此，$\mathbf{P}(\mathcal{X})$ 中的每条极大链都属于前几段所描述的类型。

综上，我们得到以下结果：

定理 1. 设 $\mathcal{X}$ 是一个紧偏序空间，考虑其迹偏序集 $\mathbb{P}(\mathcal{X})$，并设 C 是其中一条完备极大链。那么， C 的极大元素是一个极大迹 t_C，其极小元素则是一个常值迹 α_C。此外，

- 如果 α_C 是 t_C 的起始点 α_0 或终止点 α_1，那么 C 就等于区间 $[\alpha_C, t_C]$。
- 如果不是，那么 C 就是链 $C^1_{t_1}$ 和 $C^0_{t_2}$的乘积中的一条链，其中 t_1（分别地，t_2）是 t_C 中从 α_0 到 α_C （分别地，从 α_C到 α_1）的唯一子迹。

这表明，迹偏序集中的完整极大链与我们为极大迹选择的参数化无关。事实上，给定一个极大迹 f，上面的第一项指出，从初始点或终止点出发只有一条链，而它可以由 f 的任意 参数化f 得到。第二项指出，如果我们考虑从内部点 α 出发的扩张，那么从 α 到 f 的极大链对应于笛卡尔平方 $[0,1]\times[0,1]$ 中的有向路径。这些有向路径对应于对 γ_+, γ_- 的等价类，其中等价关系将访问相同极值点对的各对视为等价。

因此，$\mathbb{R}$-持久向量空间由第5.2 节中根据参数化 f、γ_-、γ_+ 定义，与将 n阶自然同调 $\mathcal{X}$ 限制到给定极大链所得的结果相同：

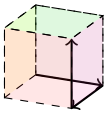
命题*2*。设 $\mathcal{X} = (X, dX)$是一个紧偏序空间，且f 是$\mathcal{X}$中的一条迹。设 C是迹偏序集的区间 $[\alpha_f, f]$ 中的一条完备极大链。设$(f_i)_{i\in\mathbb{R}}$由 f按照第 *5.2* 节中的描述得到。将自然同调函子 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})$限制到 C，得到持久 *R*-向量空间 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{f_i}$。

5.4 示例：火柴盒的持久同调

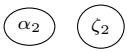
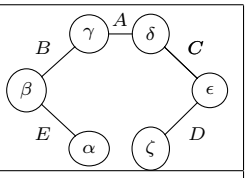
考虑第 2 节中给出的火柴盒示例。让我们沿着每条极大迹，从初始点出发并向未来延伸，计算其持久同调。我们固定一个域 $\mathbb{k}$，并采用 [25] 中提出的方法。对于每条极大迹

ζ、ϵ、α、β、δ、γ（2）中所示的迹，我们将其与一列子迹相关联，这些子迹对应于沿火柴盒中每个 1-单形对该迹进行的分解。例如，迹 α 可分解为链

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 = \alpha,$$



其中 α_0 是常值路径，恒等于 (0，0，0)，它 α_1 延伸至 (0，1，0)。这条迹进一步延伸至 (0，1，1)，得到 α_2，然后最终延伸至 (1，1，1)，得到总迹 α。对于每条极大迹，都可以找到类似的分解，我们将使用相同的索引来表示。这个迹序列给出了上图所示单纯复形的一个滤过。在 α 的情况下，我们得到以下滤过：

			
$K(\alpha_0)$	$K(\alpha_1)$	$K(\alpha_2)$	$K(\alpha_3)$

通过考虑所有 $i \geq 4$ 的 $K(\alpha_3)$ 副本，我们将这一滤过扩展为一个 N-持久单纯复形。我们将由单纯复形 $K(\alpha_i)$ 得到的 k 上的链复形记为 $C_*(K(\alpha_i))$，从而得到一个 N-持久链复形

$$C_*(K(\alpha_0)) \xrightarrow{f_{0,1}} C_*(K(\alpha_1)) \xrightarrow{f_{1,2}} C_*(K(\alpha_2)) \xrightarrow{f_{2,3}} C_*(K(\alpha_3)) \xrightarrow{f_{3,4}} \cdots$$

其中 $f_{n,n+1}$ 由滤过给出的单纯集合的包含映射诱导。对于每个自然数 p，我们将 $C_*(K(\alpha_i))$ 的 p^{th} 同调群记为 H_p^i，从而得到一列同调群

$$H_p^0 \xrightarrow{\phi_{0,1}} H_p^1 \xrightarrow{\phi_{1,2}} H_p^2 \xrightarrow{\phi_{2,3}} H_p^3 \xrightarrow{\phi_{3,4}} H_p^3 \xrightarrow{\phi_{4,5}} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-1,n}} H_p^3 \xrightarrow{\phi_{n,n+1}} \cdots,$$

其中，$\phi_{n,n+1}$ 是 $n \geq 3$ 的恒等元。事实上，这是一个 N-持久 k-向量空间。我们通过如下方式定义一个 $\mathbf{k}[t]$ 上的非负分次模。

$$H_p := \left(\bigoplus_{i=0}^{2} H_p^i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=3}^{\infty} H_p^3\right),$$

并定义 t 的作用为 $t \cdot (h_i)_i = (\phi_{i,i+1}(h_i))_i$，其中 h_i 属于 H_p^i。

我们将通过与持久链复形 ∂_k 相关联的边界映射的矩阵表示，计算持久同调的分次模

22 偏序空间的持久同调

复形 $C_*(K(\alpha_i))$，如 [25]中所述。我们计算 $H_0(\alpha)$ 中沿 0th 的持久同调 $\alpha_\circ$ 为此，我们为 Z_0 和 $\mathcal{C}_1$选定齐次基。由于$Z_0 = \mathcal{C}_0$，两种情形下我们都可以取标准基。因此，对于 $\mathcal{C}_0$，我们得到基 $\{\alpha_0, \zeta_2, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$；对于 $\mathcal{C}_1$，我们得到基 $\{A, B, C, D, E\}$。现在，我们计算 ∂_1 相对于这些基的矩阵，并注意将 $\mathcal{C}_0$ 的基按度数逆序排列：

	B	A	C	D	E
β	-1	0	0	0	1
γ	1	-1	0	0	0
δ	0	1	-1	0	0
ϵ	0	0	1	-1	0
ζ_2	0	0	0	t	0
α_0	0	0	0	0	$-t^3$

现在我们计算上述矩阵的列阶梯形，得到

	B	A	C	D	E'
β	$\boxed{-1}$	0	0	0	0
γ	1	$\boxed{-1}$	0	0	0
δ	0	1	$\boxed{-1}$	0	0
ϵ	0	0	1	$\boxed{-1}$	0
ζ_2	0	0	0	t	$\boxed{t}$
α_0	0	0	0	0	$-t^3$

其中 $E' = A+B+C+D+E$。对于沿 α 的持久同调，我们看到，前四行对 $H_0(\alpha)$ 的描述没有贡献，而最后两行分别贡献 $\Sigma^2\mathbf{k}[t]/t$ 和 $\mathbf{K}[t]$，即

$$H_0(\alpha) \cong \Bbbk \oplus \Bbbk \oplus \Bbbk^2 \oplus \Bbbk \oplus \cdots \oplus \Bbbk \oplus \cdots$$

沿 ζ 的持久同调也有类似结果。下面给出这种情况下 ∂_1 的标准形式和列阶梯形：

	B	A	C	D	E
β	-1	0	0	0	1
γ	1	-1	0	0	0
δ	0	1	-1	0	0
ϵ	0	0	1	-1	0
ζ_2	0	0	0	0	$-t$
α_0	0	0	0	t^3	0

	B	A	C	D	E'
β	$\boxed{-1}$	0	0	0	0
γ	1	$\boxed{-1}$	0	0	0
δ	0	1	$\boxed{-1}$	0	0
ϵ	0	0	1	$\boxed{-1}$	0
ζ_2	0	0	0	0	$\boxed{-t}$
α_0	0	0	0	t^3	t^3

因此，我们得到与 α 情况下相同的 $H_0(\zeta)$ 同构类：

$$H_0(\zeta) \cong \Bbbk \oplus \Bbbk \oplus \Bbbk^2 \oplus \Bbbk \oplus \cdots \oplus \Bbbk \oplus \cdots$$

另外四条定向路径产生了简单的持久同调，因为只有一个类贯穿整个序列而保持不变。例如，沿着 β， C_0 的齐次基为 $\{\beta_0, \gamma_2, \epsilon, \zeta, \delta, \alpha\}$。 C_1 的基相同，但此时 B 的次数为二，而不是三。我们得到 ∂_1 的如下矩阵表示：

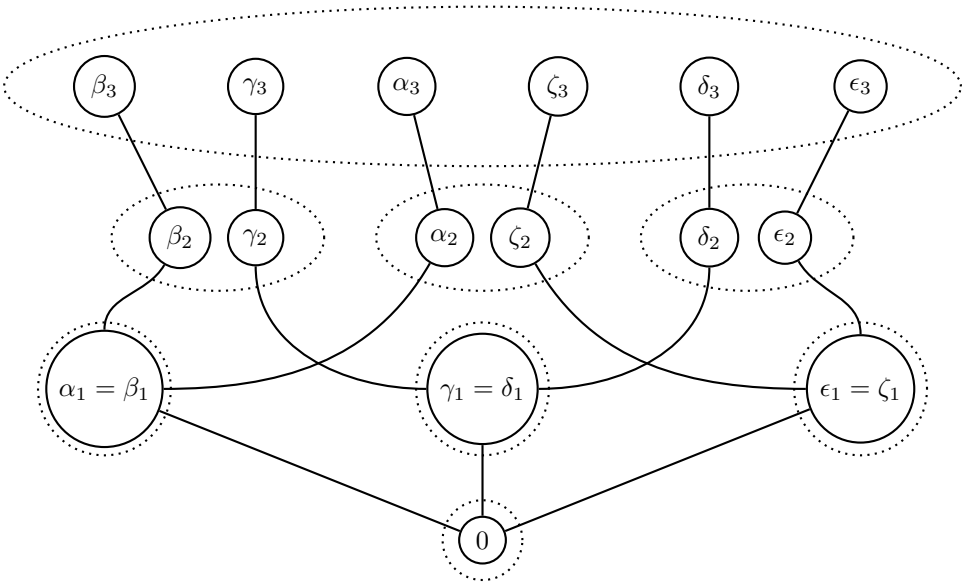
	E	A	C	D	B
α	-1	0	0	0	0
δ	0	1	-1	0	0
ζ	0	0	0	1	0
ϵ	0	0	1	-1	0
γ_2	0	$-t$	0	0	1
β_0	t^3	0	0	0	$-t^2$

	E	A	D	$A+C$	B
α	$\boxed{-1}$	0	0	0	0
δ	0	$\boxed{1}$	0	0	0
ζ	0	0	$\boxed{1}$	0	0
ϵ	0	0	-1	$\boxed{1}$	0
γ_2	0	$-t$	0	$-t$	$\boxed{1}$
β_0	t^3	0	0	0	$-t^2$

我们看到，分次模 $H_0(\beta)$ 就是 $\mathbf{k}[t]$，因为所有主元的次数都是零，并且只有一行非主元行。

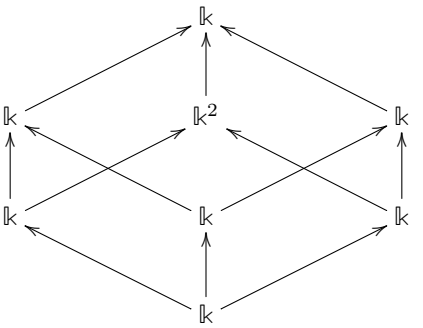
5.5 火柴盒的自然同调

现在我们描述火柴盒的自然同调图。首先，我们将其限制到 $\mathbf{P}(\mathcal{X})$ 中由初始点 $(0,\ 0,\ 0)$ 处的常值路径给出的主上集。下图描绘了该上集的哈斯图：



同一个虚线圆圈中的迹会得到相同的迹空间，即 具有相同的起点和终点。每条线对应一个扩张。自然的

同调图如下所示，其中对应于相同迹空间的 k 副本已被识别，箭头由扩张诱导:



上图中的每条长度为 3 的路径，都对应于沿某条极大迹取持久同调所得到的持久向量空间。图表中所有从 k 到 k 的映射都是恒等映射；两个从 k 到 k^2 的映射分别是到 k^2 的第一个分量和第二个分量的典范单射。从 k^2 到 k 的映射是 k^2 的两个分量之和。

将上面的内容与火柴盒的迹偏序集的哈斯图进行比较，可以清楚地看出，沿着链“粘合”持久模并考虑端点，会将一维持久复形与自然同调联系起来。下一节将对此作出明确说明。

6 有向空间的同时持久性

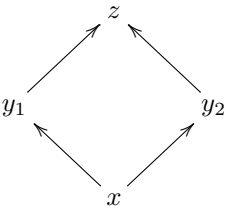
本节中，我们给出沿迹合并持久同调信息的方法。我们回顾偏序集范畴中的一些构造；在利用沿迹的持久同调恢复自然同调时，这些构造将很有用。我们用 **Pos** 表示偏序集及保序映射构成的范畴，并用 $\mathbf{Pos}_{in}$ 表示其由保序包含映射构成的宽子范畴。

6.1 偏序集中的链的余极限

为了从沿迹的持久同调中重构自然同调，我们必须整合来自迹偏序集中每条链的信息。因此，我们在此讨论如何根据一个偏序集的（极大）链来重构该偏序集。

首先请注意，一般而言，仅使用极大链不足以重构偏序集。事实上，考虑其哈斯图

如下所示:



其极大链为 (x, y_1, z) 和 (x, y_2, z)。为了将整个偏序集表示为余极限，我们还需要将 x 和 z 包含到这些链中的包含映射。

虽然一般来说，偏序集并非其极大链的余极限，但它是其所有链的余极限。给定偏序集 P，我们考虑 Pos 中由 P 的链及其包含映射构成的薄子范畴 Ch_P $\mathbf{Pos}_{in}$，称为链偏序集。与 P 相关联的链图表是包含函子$\mathcal{F}_P$:Ch $_P \to \mathbf{Pos}$。以下结果广为人知，为完整起见，我们给出一个简短证明:

命题 3. 对于任意偏序集 P,

$$\operatorname{colim} \mathcal{F}_P = P.$$

Proof P 显然是 $\mathcal{F}_P$ 的一个余锥。设 $(f_C\colon C \to Q)_{C\in \mathsf{Ch}_P}$ 是另一个余锥。定义映射 $f\colon P \to Q$，使得 $f(x) = f_{\{x\}}(x)$。于是对所有 $C \in \mathsf{Ch}_P$，都有 $f_{|C} = f_C$。事实上，由于对所有 $x \in C$，$\{x\}$ 都是 C 的子链，因此有 $f_x(x) = f_C(x)$，所以 f 与余锥的所有映射均可交换。考虑 $f_{\{x,y\}}\ x \le f_{\{x,y\}}\ y = f\ y$ f ，$y \in P$，使得 $x \le y$。则 $f()()()()$，这意味着它是一个偏序集态射。若另有这样的偏序集态射 $g\colon P \to Q$ 与余锥的映射可交换，则对所有 $x \in P$，有 $g(x) = f_x(x) = f(x)$，因此 $g = f$。□

当只考虑极大链时，我们可以通过将它们的交集添加到图表中来得到 P。考虑偏序集 P和两条极大链C_1，C_2，它们属于 P。C_1，C_2在$\mathbf{Pos}$中的拉回，对应于 P的全子偏序集，即交集 $C_1 \cap C_2$，它本身也是一条链。用 pmCh_P表示$\mathbf{Pos}_{in}$ 的子范畴，该子范畴由 P 中的极大链及其拉回组成。由于所考虑的链是极大的，这个范畴呈之字形。

命题 4。偏序集 P 是由其极大链$\mathsf{pmCh}_P \to \mathbf{Pos}$构成的图表的余极限。

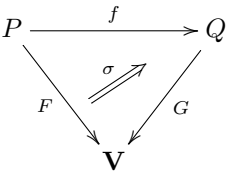
Proof 这与命题 3 的证明采用相同的模式，但使用不同的映射 f。再次考虑另一个余锥（$f_C\colon C \to Q)_{C\in \mathsf{Ch}_P}$。定义映射 f，将 $x \in P$映射到 $f_C(x)$，若 x 是唯一一个极大链 C 中的元素；若 $f_{C_1\cap C_2}(x)$，则映射到 $x \in C_1 \cap C_2$。映射 f 与余锥映射相交换，且是唯一的

根据构造，它是偏序集态射，因为如果 $x \leq y$，那么 x 和 y 属于同一个极大链（或多个极大链），因此 $f(x) = f_C(x) \leq f_C(y) = f(y)$，其中 C 是极大链或两个极大链的交集。□

6.2 图表的应用

现在我们已经汇总了关于链的余极限的信息，接下来将了解这些构造如何推广到子偏序集上的图表。我们固定一个范畴 $\mathbf{V}$。

首先，我们引入一个范畴来表示某种类型 $\mathbf{V}$ 的持久对象，而不固定索引偏序集。具体而言，该范畴记作 $Pers(\mathbf{V})$，其对象是形如 $(P, F\colon P \to \mathbf{V})$ 的对，其中 P 是一个偏序集，*i.e.* F是 $\mathbf{V}$ 中的一个 P-持久对象。从 $(P, F\colon P \to \mathbf{V})$ 到 $(Q, G\colon Q \to \mathbf{V})$ 的态射是形如 (f, σ) 的一对，其中 f 是 $\mathbf{Pos}$ 中的一个态射 $P \to Q$，而 σ 是一个自然变换 $F \Rightarrow G \circ f$



态射的复合由 $(g, \tau) \circ (f, \sigma) = (g \circ f, \tau_f \circ \sigma)$ 给出，而 (P, F) 上的恒等态射为这一对 $(1_P, id_F)$。

考虑 $\mathsf{opNat}(\mathbf{V})$ 的全子范畴，如第 4.2 节所定义，它由取值于 $\mathcal{C}$，D 的自然系统构成，其中 $\mathbf{V}$ 满足 $F\mathcal{C}$ 是偏序集。此范畴自然地嵌入图表范畴$Pers(\mathbf{V})$ 中。

设 P 为偏序集，且 $G\colon \Phi \to \mathbf{Pos}_{in}$ 为一个包含映射，其中 Φ 是由 P 的子偏序集及其包含映射构成的范畴，并且满足 $\mathsf{colim}_\Phi G = P$。假设给定一个函子 $D\colon P \to \mathbf{V}$，即 $Pers(\mathbf{V})$ 中的一个对象。由于 G 的余极限是 P，对于 Φ 中的每个 ϕ，我们都有一个包含映射 $i_\phi\colon \phi \to P$。利用这些包含映射，我们定义函子 $F\colon \Phi \to Pers(\mathbf{V})$，将每个 ϕ 映射为 D 在 ϕ 上的限制，记作 $F_\phi := (i_\phi)^* D$。

给定 Φ 中的一个包含映射 $i_{\phi,\ \phi'}\colon \phi \to \phi'$，函子 F 诱导出由 $F_{\phi,\ \phi'} = (i_{\phi,\ \phi'}, id_{F_\phi})$ 给出的持久对象态射；后者是 F_ϕ 上的恒等自然变换，因为 $F_{\phi'} \circ i_{\phi,\ \phi'} = F_\phi$。

在证明本节的主要技术结果之前，我们先证明 $\mathbf{Pos}_{in}$ 中余极限构造的一些有用性质。回顾一下，给定偏序集 P_1, P_2和 $p_i \in P_i$，带基点偏序集的包含映射 $i\colon (P_1, p_1) \to (P_2, p_2)$ 是一个包含映射$i\colon P_1 \to P_2$，满足 $i(p_1) = p_2$。此外，回顾一下，给定 $p, p' \in P$，当 $p \leq p'$ 时，我们称 p 是 p' 的下覆盖；并且任意其他满足 $p \leq q \leq p'$ 的元素 $q \in P$都等于 p 或 p'。我们有如下结论：

引理 3. 令 P、Φ 和 G 如上段所定义。我们有：*1.* 对于任意 $p \in P$，存在 Φ 中的一个子偏序集 ϕ 和一个元素 $\pi \in \phi$，使得 $i_\phi(\pi) = p$。

2. 对于任意一对(ϕ,π)、(ϕ',π')，使得 $i_\phi(\pi) = i_{\phi'}(\pi')$，存在 Φ 中一条带基点包含的之字形，如下图所示：

$$(\phi,\pi) \longleftarrow (\phi_1,\pi_1) \longrightarrow \cdots \longleftarrow (\phi_n,\pi_n) \longrightarrow (\phi',\pi').$$

3. 对于任意一对 $p,p' \in P$，若 p' 是 p 的覆盖，则存在 ϕ 属于 Φ，以及 $\pi,\pi' \in \phi$，使得 $pi \leq \pi'$, i_ϕ （π） $= p$ 且 i_ϕ （π'） $= p'$。

*Proof*对于第一点，如果不存在这样的对 (ϕ, π)，那么从 P 中移除 p 得到的偏序集 P' 将是 G 下的一个余锥，这与 P 是余极限的假设矛盾。

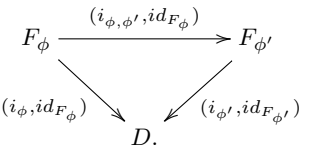
对于第二点，如果不存在这样的之字形，那么通过创建两个不同的 p 副本得到的偏序集 P' 将是 G 的一个余锥，但存在两个包含映射 $P \to P'$，这与 P 是余极限的假设矛盾。

最后，第三项成立，因为如果不存在这样的 ϕ，那么由 $P' = (P, \leq_P \setminus \{(p, p')\})$ 定义的偏序集 P' 将是 G 的一个余锥，从而再次产生矛盾。□

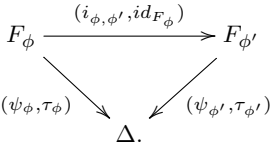
命题5。令 P、G、D 和 F 如上段所定义。我们有

$$\operatorname*{colim}_{Pers(\mathbf{V})} F = D.$$

Proof 我们证明 D 满足余极限性质。首先，它是 F的余锥，因为根据构造，对于 Φ 的任意态射$i_{\phi,\ \phi'}:\ \phi \to \phi'$，下图在 $Pers$**(V)**中交换：



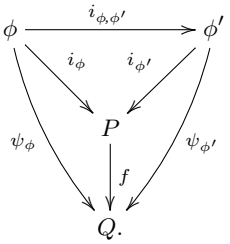
现在证明它是泛的。设 $\Delta:\ Q \to \mathbf{V}$ 是 F, *i.e.* 的另一个余锥，对于任意 $i_{\phi,\phi'}:\ \phi \to \phi'$，我们有态射 $F_\phi \to \Delta$ 和 $F_{\phi'} \to \Delta$ 在 $Pers$**(V)** 中，使得下图交换



(6)

28 偏序空间的持久同调

特别地，这意味着 Q 是 G 的余锥，因为下图中的外层三角形可交换：



特别地，我们得到偏序集 f 的唯一包含映射 $P \to Q$，使得上述图表中的所有三角形都交换。

根据引理 3 的（1），我们知道存在 (ϕ, π)，使得 $i_\phi(\pi) = p$。给定两个不同的子偏序集 (ϕ, π)、(ϕ', π')，且它们之间存在态射 $i_{\phi,\phi'}$，假设 Δ 是 F 的余锥，则以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} F_\phi(\pi) & = & D_p & = & F_{\phi'}(\pi') \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_\phi(\pi)} & & & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\phi'}(\pi')} \\ \Delta_{\psi_\phi(\pi)} & = & \Delta_{(f(p))} & = & \Delta_{\psi_{\phi'}(\pi')} \end{array}$$

因此我们有

$$\tau_\phi(\pi) = \tau_{\phi'}(i_{\phi,\phi'}(\pi)) \circ id_{F_\phi}(\pi) = \tau_{\phi'}(\pi') \circ 1_{F_\phi(\pi)} = \tau_{\phi'}(\pi'),$$

其中第一个等式成立是因为图表（6）可交换，第二个等式由定义得出，第三个等式则因为 $F_\phi(\pi) = F_{\phi'}(\pi')$.

若不存在这样的映射 $i_{\phi,\phi'}$，则由引理 3 的 (2) 可知，ϕ 和 ϕ' 必须通过这类包含映射构成的之字形相连。对这种之字形的长度作归纳，并使用上述论证可知，对于满足 $i_\phi(\pi) = p = i_{\phi'}(\pi')$ 的任意一对 (ϕ, π)、(ϕ', π')，等式 $\tau_\phi(\pi) = \tau_{\phi'}(\pi')$ 均成立。我们将 V 中这个态射记为 $\sigma_p \colon D_p \to \Delta_{f(p)}$。现在，我们必须证明 σ 定义了 D 和 $\Delta \circ f$ 之间的自然变换。

考虑满足 p 是 p' 的下覆盖的 $p, p' \in P$。由引理 3 的 (3) 可知，存在 Φ 中的 ϕ 以及 $\pi, \pi' \in \phi$，使得 $pi \leq \pi'$, $i_\phi(\pi) = p$ 且 $i_\phi(\pi') = p'$。由于 τ_ϕ 是 F_ϕ 与 $\Delta \circ \psi_\phi$ 之间的自然变换，下面左侧的图表可交换，其中竖直箭头由不等式 $\pi \leq \pi'$ 诱导。

$$\begin{array}{ccc} F_\phi(\pi) & \xrightarrow{\tau_\phi(\pi)} & \Delta_{\psi_\phi(\pi)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_\phi(\pi') & \xrightarrow[\tau_\phi(\pi')]{} & \Delta_{\psi_\phi(\pi')} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D_p & \xrightarrow{\sigma_p} & \Delta_{f(p)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{p'} & \xrightarrow[\sigma_{p'}]{} & \Delta_{f(p')} \end{array}$$

这意味着最右侧的图表必须交换，因为二者相等。现在，给定 $p \leq p'$ in P 中的任意比较关系，都存在一个链 $p \leq p_1 \leq \cdots \leq p_n \leq p'$，其中每个比较关系都是覆盖。对该链的长度使用归纳法，并结合上述论证，我们可以看到，σ 确实是一个自然变换。

总之，我们找到了一个态射 $(f, \sigma) \colon D \to \Delta$ of $Pers(\mathbf{V})$，它与余锥映射相交换。该态射是唯一的，因为 f 是通过 f的余极限性质得到的

，并且对于自然变换的任何其他候选 σ' ，其分量在相应的子偏序集上都必须与 τ_ϕ 一致，这意味着它等于 σ。换言之， D 是 F的泛余锥，由此证明得证。□

6.3 作为余极限的自然同调

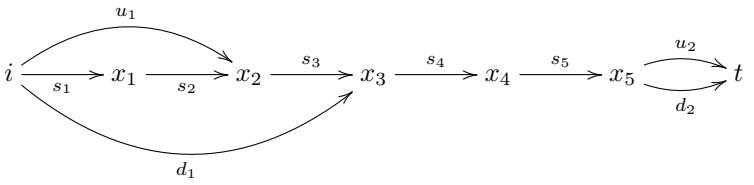
利用命题 5 以及与上述类似的构造，我们得到以下结果：

定理2。 设 $\mathcal{X} = (X, dX)$ 是一个紧偏序空间， α 是 X 中的一点，并且Vect 是$\mathbb{k}$-向量空间的范畴。

1. $\mathcal{X}$ 的自然同调是其每条迹上的持久同调在 *Pers*(Vect) 中的余极限。*2.* $\mathcal{X}$ 的自然同调是其极大迹（视为$\mathbb{P}(\mathcal{X})$中的极大链）上的持久同调在 *Pers*(Vect) 中的余极限，并以拉回补全。*3.* 在$\mathbb{P}(\mathcal{X})$ 中，将 α 的上集视为常值迹，其自然同调是经过 α 的极大链上的持久同调在 *Pers*(Vect) 中的余极限，并以拉回补全。

<escape>*Proof* </escape>这些直接由命题 5 和 3 推出。 □

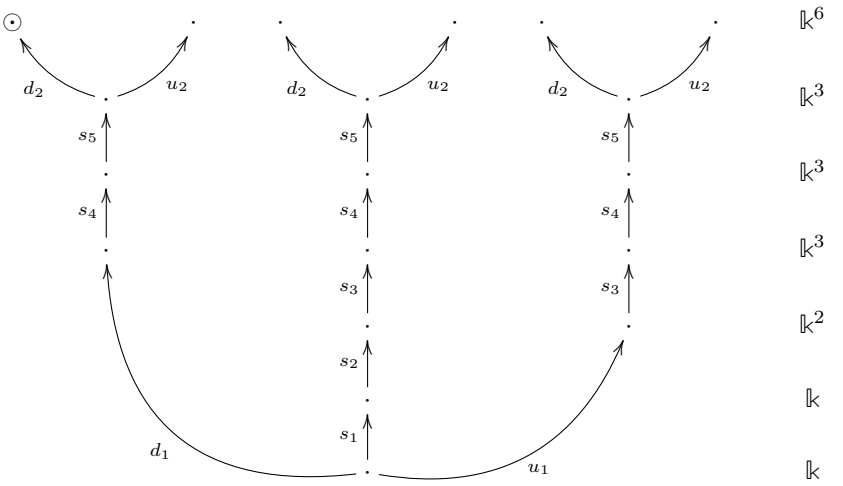
例1。这里我们以一个特定有向图为例，说明上述构造中初始点滤子的用法。考虑以下有向无环图 G:



该图包含六个极大离散迹，可视为由边上的标签组成的词。由于我们将考虑初始点滤过，下面将 i 上常值迹的上集的哈斯图描绘为迹偏序集的一个子偏序集

30 偏序空间的持久同调

迹偏序集的：



哈斯图中最底部的节点对应于 i 上的常值迹，其余节点则对应于由上图中箭头的标签构成的迹：从最底部的节点出发，终止于所讨论的节点。例如，圈出的节点对应于（极大）路径 $d_1 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot d_2$。所有高度相同的节点都对应于起点和终止点相同的路径，其次数标注在右侧。

我们首先考虑与极大迹相关联的初始滤过

$$\alpha := d_1 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot u_2 \qquad and \qquad \alpha' := d_1 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot d_2.$$

沿 α 得到的持久向量空间 $\overrightarrow{H}_0(G)_\alpha$ 为

$$\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}^3 \longrightarrow \mathbb{k}^3 \longrightarrow \mathbb{k}^3 \longrightarrow \mathbb{k}^6,$$

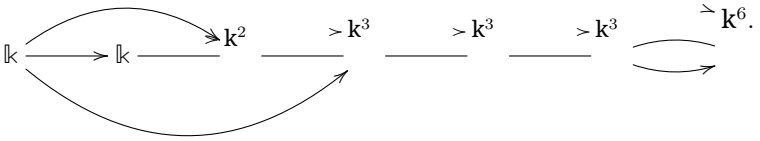
其中每个线性映射均由沿 α 的一步扩张给出，且都是单射。与 α' 相关联的持久向量空间与此相同，唯一区别是最后一个映射 $\mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^6$。事实上，沿 α 诱导的映射与沿 α' 诱导的映射在$\mathbb{k}^3$, 的两个基元素上的作用相同，但在第三个基元素上的像不同。

这意味着在余极限中，前三个映射将被视为相同，从而得到如下形式的子图表：

$$\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}^3 \longrightarrow \mathbb{k}^3 \longrightarrow \mathbb{k}^3 \rightrightarrows \mathbb{k}^6,$$

其中，我们将两个 $\mathbb{k}^6$ 副本视为相同。

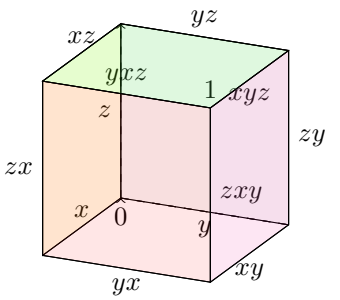
对其他极大路径应用类似的推理，我们得到的余极限如下：



我们已经识别出对应于相同端点的 $\Bbbk^n$ 个副本，以便在视觉上将自然同调图与图 G 联系起来。

沿着有向无环图中的一条路径计算持久同调，可以告诉我们在每一步有多少条平行路径到达同一个点。从这个意义上说，给定迹 α 上的持久同调中生成元的诞生，表明存在一条在该点与 α “合并”的迹。较长的“停滞”时期，即即没有发生任何诞生的区间 $[k, k']$ ，表明迹的这一部分不存在平行路径。从这个意义上说，这些“停滞”区间表明图中只有一条路径连接的部分。此外，在上述示例中，只有一个源点，即只有出边的节点，以及一个汇点，即只有入边的节点。在有限有向无环图中，源点与汇点的配对只有有限多个，对每一对应用上述方法，即可得到迹偏序集中汇点的上集所限制的自然同调图。

示例 2. 现在考虑一个维度为 3 的立方体，去掉其内部，并标记两个点，即初始点 0 和终点 1，以及十二个箭头 $x, y, z, xy, xz, yx, yz, zx, zy, xyz, yxz$ 和 zxy：



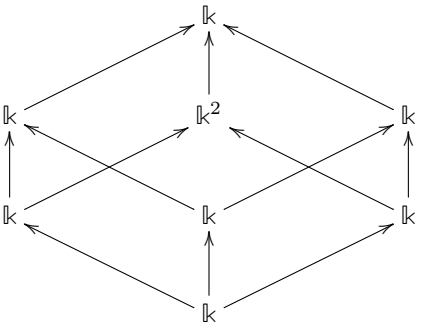
现在，我们与前一个例子一样，考虑自然同调的子图表，其中的迹从初始状态*0*开始。

我们从第一个自然同调群开始：对于任意从 *0* 开始的极大迹的任意滤过，一维持久同调值都只是 $\Bbbk$；其余极限则仅将相同的极大迹前缀所对应的所有这些 $\Bbbk$ 副本识别起来。这个余极限确实同构于立方体的维数 *1* 自然同调，也就是每条从 *0* 开始的迹对应一个 $\Bbbk$ 。

现在我们考察第二个自然同调群的情形：从 *0* 开始的任意极大迹滤过，其单维持久图为

$0 \to \Bbbk$ （$\Bbbk$ 对应于从 *0* 到 *1* 的极大迹），其余极限仅将从 *0* 到 *1* 的极大迹所对应的这些$\Bbbk$ 副本全部等同起来。这个余极限确实同构于立方体的二维自然同调，即对于从 *0* 开始、终点不是 *1* 的所有迹，它等于0 ；而对于从 *0* 到 *1* 的极大迹，它等于$\Bbbk$ 。

例 3. 考虑 *Fahrenberg* 的火柴盒，它是立方体的子空间 $[0,1]^3$，，其中去掉了立方体的内部以及底面（底面是点 $(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0)$ 和 $(1,1,0)$的凸包）。我们回顾第*5.5*节，其中 *Fahrenberg* 火柴盒示例中，维数 *1* 的自然同调的子图表（针对从初始点出发的迹）如下：



这也可以通过如下应用定理*2* 得到。对于从初始状态 $(0,0,0)$ 出发并以最终迹 $(1,1,1)$ 结束的任意极大迹，其任意滤过对应的一维持久图为：

•或者$\Bbbk$，如果迹从未与从$(1，1，0)$到$(1，1，1)$的半开线段（不包括最后一点）相交，

• 否则，$\Bbbk \to \Bbbk^2 \to \Bbbk$。

同样，余极限将最大迹的相同前缀上的$\Bbbk$ （分别是$\Bbbk^2$）的副本识别起来，从而得到上图表。

7 进一步说明

本节讨论关于迹空间持久同调及其潜在应用的两条研究方向。

7.1 自然同调上的度量结构

持久同调的一个重要特点是，它能够从空间的度量角度，而不仅仅是拓扑角度，提供有关该空间的信息。我们展示了持久同调的构造与自然同调的构造具有相似之处，二者都涉及从分解范畴到拓扑空间范畴的特定函子。我们可以进一步探讨，当我们所考虑的有向空间 X 具有度量空间结构时，是否存在一种度量结构能够应用于相应的持久模中。

对于无环路的有限几何前立方集的几何实现，正如我们在第 4.1 节中所看到的，我们可以定义有向路径 p 的 l_1-弧长 $l_1(p)$。由此，我们可以定义迹偏序集中元素之间的距离；更准确地说，我们可以如下将迹偏序集视为加权偏序集，如 [30, 31] 中所示：$w(p,q) = 0$ 若 $p \not\leq q$，否则为 $q = upv$，且 $w(p,q) = max\{l_1(u)\ l_1(v)\}$。在此类语境中，交错距离是用偏序集上的平移来表示的，而偏序集上的平移大幅推广了一维持久性中定义通常交错距离的平移 $t \mapsto t+\epsilon$。在这里，我们只简要讨论一维持久同调中的经典交错距离：该距离沿着有向空间的一条迹提取，并将由迹偏序集上的平移诱导。由自然同调导出的完整持久对象的交错距离构造留待未来工作。

取两个有向空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，它们是无环路的有限几何前立方集的几何实现；p 是 $\mathcal{X}$ 的一条迹，q 是 $\mathcal{Y}$的一条迹。我们还假设给定区间 $[p(0)\ p]$中的一条链 $(p_i)_{i\in\mathbb{R}}$，以及区间 $[q(0)\ q]$中的一条链 $(q_i)_{i\in\mathbb{R}}$。下文中，我们用 p_i（分别用 q_i）表示从 x_i^p 到 y_i^p（分别从 x_i^q 到 y_i^q）的迹，并用 $(\alpha_{i,\ j}^p,\ \beta_{i,\ j}^p)$（分别用 $(\alpha_{i,\ j}^q,\ \beta_{i,\ j}^q)$）表示从 p_i 到 p_j（分别从 q_i 到 q_j）的态射。

根据命题 2 构造一个持久性 $\Bbbk$-向量空间 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$，其指标由链 $(p_i)_{i\in\mathbb{R}}$，以及一个持久性 $\Bbbk$-向量空间 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$，其指标由链 $(q_i)_{i\in\mathbb{R}}$。特别地，我们有线性映射

$$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(\alpha_{i,j}^p,\beta_{i,j}^p)} : \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i} \to \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_j}$$
$$(\text{resp. } \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{(\alpha_{i,j}^q,\beta_{i,j}^q)} : \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i} \to \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_j}\ ).$$

$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$与 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$之间的交错距离 定义如下。若存在某个 $\epsilon \geq 0$，使得我们有线性映射族 $(\phi_i\colon \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i} \to \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_{i+\epsilon}})_{i\in\mathbb{R}}$和 $(\psi_i\colon \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i} \to \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_{i+\epsilon}})_{i\in\mathbb{R}}$，并且对所有 $i \leq j \in \mathbb{R}$ 均成立，则称 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$与 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$是 ϵ-交错的：

$$\phi_j \circ \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(\alpha_{i,j}^p,\beta_{i,j}^p)} = \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{(\alpha_{i+\epsilon,j+\epsilon}^q,\beta_{i+\epsilon,j+\epsilon}^q)} \circ \phi_i \tag{7}$$
$$\psi_j \circ \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{(\alpha_{i,j}^q,\beta_{i,j}^q)} = \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(\alpha_{i+\epsilon,j+\epsilon}^p,\beta_{i+\epsilon,j+\epsilon}^p)} \circ \psi_i \tag{8}$$
$$\psi_{i+\epsilon} \circ \phi_i = \overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(\alpha_{i,i+2\epsilon}^p,\beta_{i,i+2\epsilon}^p)} \tag{9}$$
$$\phi_{i+\epsilon} \circ \psi_i = \overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{(\alpha_{i,i+2\epsilon}^q,\beta_{i,i+2\epsilon}^q)} \tag{10}$$

那么，$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$与 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$之间的交错距离，就是所有满足 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$与 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$为 ϵ-交错的 $\epsilon \geq 0$的下确界；如果不存在这样的 ϵ，则.....。

34 偏序空间的持久同调

双模拟等价的自然同调与交错距离非无限之间存在相似之处，正如我们将在下文中展示的那样。

当存在二同胚 $f:\quad \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$时，根据引理1，我们知道它们相应的自然同调是双模拟等价的。现在我们证明，持久对象 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$ 和 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$ 之间存在特定关系。于是，对于区间 $[p(0)\ p]$ 中的任意链 $(p_i)_{i\in\mathbb{R}}$，以及 $\mathcal{X}$ 中的任意定向路径 p，$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{p_i}$ 和 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{f^*(p_i)}$ 的交错距离均为 0。

事实上，对于每个 $(\ )_{p_t}$，我们取

$$\phi_t \qquad \mathcal{X} \qquad \mathcal{Y}_{f^*\ p_t} \qquad [f^*\ x\ ], \qquad [x] \in: \ \overrightarrow{H}_n(\ )$$

$\overrightarrow{H}_n\ \mathcal{X}$ $f^*\ x$ $[x]$ x $_{p_t} \to \overrightarrow{H}_n(\ )\ (\ )$ 为 $(\ )$，即从 $p_t(0)$ 到 $p_t(1)$ 的 $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$ 中任意圈的同调类所对应的同调类。由于 $(f^{-1})^* \circ f^* = f^* \circ (f^{-1})^*$，且映射 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(\alpha^p_{i,i},\beta^p_{i,i})}$ 和 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{(\alpha^{f^*(p)}_{i,i},\beta^{f^*(p)}_{i,i})}$ 都是恒等映射，因此方程（9）和（10）显然成立（因为 α^p_i、$_i$、β^p_i、$_i$、$\alpha^{f^*}(p)_{\ i}$、$_i$ 以及 $\beta^{f^*}_i(p)$、$_i$ 都是常值定向路径）。同样，由于映射 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(\alpha^p_{i,i},\beta^p_{i,i})}$、$\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{(\alpha^{f^*(p)}_i}$

$_{,i}$ $,\beta^{f^*(p)}_{i,i})}$ 是恒等映射。

以类似的方式，我们可以证明，对于区间 $[q(0)\ q]$ 中的任意链 $(q_i)_{i\in\mathbb{R}}$，对于任意定向路径 q in $\mathcal{Y}$, $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{X})_{(f^{-1})^*(q_i)}$ 和 $\overrightarrow{H}_n(\mathcal{Y})_{q_i}$，它们的交错距离为 0。

7.2 算法方面的考量

在本节中，我们概述与定理2所对应的持久模的实际计算方法，即自然同调，重点讨论并发理论中产生的有向空间情形，这也是本研究最初的研究动机。已有研究表明，例如 [9]，共享内存PV语言等并发语言可以在预立方集中赋予语义，从而得到一个有向空间。这一方法已在 ALCOOL[32] 和 oplate [33]等软件中得到实现。已有研究表明，在某些假设条件下，对于PV语言等此类并发语言，在预立方集上计算的自然同调 K，即迹空间图的同调 $\mathfrak{T}(K)(f)$，对于所有 a，b 中的顶点 K_0，以及 f 从 a 到 b 中 K_1的定向路径，均与有向空间的自然同调双模拟等价，而该有向空间是 K的几何实现 [13]。

对于有限预立方集合，Raussen [34] 和 Ziemianski [23] 证明了，诸如 $\mathfrak{T}(K)(a,\ b)$ 的迹空间的奇异同调群是可计算的（该空间同构于所有 $\mathfrak{T}(K)(f)$，即从 a 到 b的 f 定向路径），方法是计算迹空间的有限表示（乘积单纯、单纯或 CW- 复形），然后利用矩阵的史密斯标准形计算同调。这一方法也已在例如 [35] 中实现。

对于“良好”的前立方集 X，例如由 PV语言（不含环路）给出的前立方集，以及对于 X中的任意两个顶点 a 和 b，存在一种方法可以构造一个有限组合模型 $T(X)(a,\ b)$（有限 CW复形或有限单纯集），它与从 a 到b的 X 的迹空间同伦等价 $\mathfrak{T}(X)(a,\ b)$，并且该构造关于 X、a、b 既具有函子性，又是.....中最小的。

此类函子 [23]。算法上，这依赖于将 CW复形的胞腔识别为 X中的某些组合路径，正如第 2节所示。该算法可构造 CW复形（或与之同伦等价的单纯集）的（偏序集）滤过 $T(X)(a,b)$，从而计算每个 a 和 b 在 X中的同调。因此，该算法可以构造前立方集 X的持久模或自然同调。当然，这是一个相当朴素的算法，因为我们针对每一对点分别计算同调。关于类似秩不变量计算的非朴素算法，我们留待未来的文章讨论。

8 未来工作

在 [28], 中，我们将自然同伦——一种与有向空间相关联的同伦群自然系统——与某个范畴中的群对象联系起来。这是通过复合配对这一概念实现的，该概念由 Porter 引入，并在很大程度上受到松函子的启发。自然同调中也存在这种复合配对的额外结构，我们认为，这类“同调”运算在持久同调中或许也有有趣的对应形式，我们计划在未来的工作中对其进行研究。

在混合系统理论中，存在一种对动力系统进行自然层论表述的方法，它从 [36], put in action（尤其关注时序逻辑公式和验证）出发，并在 [37, 38] 中得到扩展。这种形式化与有向空间的自然同调有相似之处，但它采用层论视角，因此得到的是逆变函子，而非协变函子。

考虑幺半群 (R+, +)，将其视为单对象范畴 R。其分解范畴 $\mathcal{F}$R 的对象是 $l \in$ R 的区间 $[0,l]$，态射则是将此类区间包含到更大区间 $[0,l']$中的包含映射，并由某个值$k \leq l'-l$平移。在 $\mathcal{F}$R 上的预层可以赋予一种格罗滕迪克拓扑，即 Johnstone拓扑 [39],，使得层对应于动力系统（在某些方面，就是局部由不同长度的路径粘合而成、并在子路径上相互一致的“连续图”）。

因此，某些度量空间 X 上的动力系统被视为特殊的预层，即 函子 $D:\mathcal{F}\mathrm{R}\to Set$，它描述每个长度 l对应的路径集合，以及对于 $[0,l]$ 到$[0,l']$ 中的每个包含映射 Tr_k（其中 $[k,k+l]$，且 $k\leq l'-l$），从长度为 l'的路径到长度为 $l\leq l'$ 的路径的限制映射。

当然，对于实连续动力系统，我们还有额外的结构，即 X 上的路径集合是一个拓扑空间，带有紧开拓扑（等价地，一致收敛）。因此，我们实际拥有的是一个预层 $D:\mathcal{F}\mathrm{R}\to$ 拓扑空间范畴，其中拓扑空间范畴是一个方便的拓扑空间范畴。

这意味着 D 属于某个 ∞-拓扑斯 [40],，但目前要注意的是，D 特别给出了从 R_- 到 Top的一族拓扑空间的滤过，其中 $X_{-l}=D([0,l])$，并且当 $-l'\leq -l$时有映射 $X_{-l'}\to X_{-l}$，

我们可以选择将其设为 $D(Tr_0 : X_{-l'} \to X_{-l})$。因此，该滤过通过依次考察 X 上较小的初始路径集合，来研究一个动力系统。

类似地，取加法幺半群 N，相同的层构造给出了通常的图范畴，而我们一直讨论的滤过从 X 中最大长度的拓扑空间开始，并继续延伸到长度较小的路径。

这些滤过的持久同调是动力系统的一个有趣不变量，并且具有由 X 上的度量诱导的度量信息，我们计划在未来工作中对其进行研究。

参考文献

[1] Carlsson, G.：Topology and data. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **46**(2), 255–308（2009）。https://doi.org/10.1090/S0273-0979-09-01249-X[2] Barannikov, S.A.：带框架的 Morse 复形及其不变量。载于：奇点与分岔，第 93–115 页。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯（1994）[3] Frosini, P., Landi, C.：尺度理论作为计算机视觉的拓扑工具。Pattern Recognition and Image Analysis **9**(4), 596–603（1999）[4] Edelsbrunner, H., Letscher, D., Zomorodian, A.：拓扑持久性与简化。第 28 卷，第 511–533 页（2002）。https://doi.org/10.1007/s00454-002-2885-2[5] Goubault, E.：几何与并发：用户指南。Math. Struct. Comput. Sci. **10**(4), 411–425（2000）[6] Goubault,E.：G´eom´etrie du parall´elisme。博士论文，巴黎综合理工学院（1995）[7] Herlihy, M., Shavit, N.：异步可计算性的拓扑结构。Journal of the ACM (JACM)**46**(6), 858–923（1999）[8]Grandis, M.：强非阿贝尔环境中的同调代数。World Scientific Publishing Company，新加坡（2013）[9]Fajstrup, L., Goubault, E., Haucourt, E., Mimram, S., Raussen, M.：有向代数拓扑与并发。Springer，柏林（2016）[10] Herlihy, M., Kozlov, D., Rajsbaum, S.：通过组合拓扑实现分布式计算。Elsevier Science，阿姆斯特丹（2013）[11]Grandis, M.：有向代数拓扑：不可逆世界的模型。剑桥大学出版社，剑桥（2009）

[12] Fajstrup, L., Raußen, M., Goubault, E.：《代数拓扑与并发》。Theor. Comput. Sci. 357(1)，241–278（2006）。https://doi.org/10. 1016/j.tcs.2006.03.022[13] Dubut, J., Goubault, E., Goubault-Larrecq, J.：《自然同调》。载于：自动机、语言与程序设计——第42届国际研讨会，ICALP 2015，日本京都，2015年7月6日至10日，论文集，第二部分，第171–183页（2015）[14] Baues, H.-J., Wirsching, G.：《小范畴的上同调》。Journal of Pure and Applied Algebra 38(2–3)，187–211（1985）。https://doi.org/10. 1016/0022-4049(85)90008-8[15] Goubault, ´E., Mimram, S.,Tasson, C.：《异步可计算性的几何与组合视角》。Distributed Comput. 31(4)，289–316（2018）。https://doi.org/10.1007/s00446-018-0328-4[16] Carlsson, G., Zomorodian, A.：《多维持久性的理论》。Discrete Comput. Geom. 42(1)，71–93（2009）[17] Dubut, J., Goubault, ´E., Goubault-Larrecq, J.：《有向同调理论与艾伦伯格-斯廷罗德公理》。Applied Categorical Structures，1–33（2016）[18] Curry, J., Mukherjee, S., Turner, K.：《多少个方向才能确定一个形状，以及其他关于两个拓扑变换的充分性结果》（2021年）[19]Lesnick, M., Wright, M.：《二维持久模的交互式可视化》。预印本，arXiv 1512.00180（2015）[20] Edelsbrunner, H., Harer, J.：《持久同调——综述》。载于：离散与计算几何综述。Contemp. Math.，第453卷，第257–282页。Amer. Math. Soc.，罗德岛州普罗维登斯（2008）。https://doi.org/10. 1090/conm/453/08802[21] Edelsbrunner, H., Harer, J.L.：《计算拓扑》。American Mathematical Society，罗德岛州普罗维登斯（2010）。https://doi.org/10.1090/mbk/ 069[22]Fahrenberg, U.：《有向同调》。Electronic Notes in Theoretical Compututer Science 100，111–125（2004）[23] Ziemia´nski, K.：《预立方集上的有向路径空间》。Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 28，497–525（2017）

38 偏序空间的持久同调[24] Goubault, E., Farber, M., Sagnier, A.：有向拓扑复杂度。J Appl. and Comput. Topology 4, 11–27 (2020). https://doi.org/10.1007/ s41468-019-00034-x[25] Zomorodian, A., Carlsson, G.：计算持久同调。离散与计算几何 33(2), 249–274 (2005). https://doi.org/10. 1007/s00454-004-1146-y[26] Fahrenberg, U., Raussen：连续路径的重参数化。J. Homotopy Relat. Struct. 2, 93–117 (2007)[27] Goubault, E., Mimram, S.：非正曲率空间中的定向同伦，1–55 (2016). https://doi.org/10.2168/LMCS[28] Calk, C., Goubault, E., Malbos, P.：并发系统的时间反转同伦性质。Homology Homotopy Appl. 22(2), 31–57 (2020). https://doi.org/10.4310/hha.2020.v22.n2.a2[29]Dubut, J.：真实并发几何模型的定向同伦与同调理论。博士论文（2017年9月）[30] Botnan, M.B., Curry, J., Munch, E.：交错的相对理论。arXiv 2004.14286 (2020) [31] Bubenik, P., de Silva, V., Scott, J.：广义持久模的度量。计算数学基础 15(6), 1501–1531 (2014). https://doi.org/10.1007/s10208-014-9229-5[32] Bonichon, R., Canet, G., Correnson, L., Goubault, E., Haucourt, E., Hirschowitz, M., Labb´e, S., Mimram, S.：工业控制软件无并发故障的严格证据。载于：Flammini, F., Bologna, S., Vittorini, V.（编）《计算机安全、可靠性与安全性——第30届国际会议 SAFECOMP 2011》，意大利那不勒斯，2011年9月19–22日。会议论文集。《计算机科学讲义》，第6894卷，第85–98页。Springer，柏林、海德堡（2011）[33] Haucourt, E.：有向拓扑的一些不变量：面向处理细粒度并发的静态分析器的理论基础。指导研究资格论文 `a diriger des recherches，巴黎第七大学——丹尼·狄德罗（2016年9月）´https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01429492[34] Raussen, M.：迹空间的单纯形模型 II：一般高维自动机。代数与几何拓扑 12(3), 1741–1762 (2012)[35] Fajstrup,L., Goubault,E.,Haucourt,E., Mimram, S., Raußen, M.：迹空间：一种高效的新型状态空间约简技术。载于：Seidl, H.

（编）程序语言与系统——第21届欧洲研讨会论文集。计算机科学讲义丛书，第7211卷，第274–294页。Springer，柏林、海德堡（2012）

[36]Lawvere, F.W.：《状态范畴与响应函子》。预印本（1986）。
https://github.com/mattearnshaw/lawvere/blob/master/pdfs/1986-state-categories-and-response-functors.pdf

[37]Schultz, P., Spivak, D.I., Vasilakopoulou, C.：《动力系统与层》（2019）
https://arxiv.org/abs/1609.08086 [math.CT]

[38] Schultz, P., Spivak, D.I.：时态类型理论 **29**，235（2019）。一种关于系统与行为的拓扑斯理论方法[39]Johnstone, P.：关于离散 conduch´e 纤维化的一则注记。《范畴理论及其应用》**5(1)**，1–11（1999）[40]Lurie, J.：《高阶拓扑斯理论》（AM-170）。《数学研究年刊》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，美国（2009）