arXiv:2305.03367v2 [math.PR] 9 Feb 2024

连续体中无限粒子系统的正交交织子

Stefan Wagner*†

2024年2月12日

摘要

本文聚焦于一类粘性布朗运动系统（亦称 Howitt-Warren 鞅问题）以及相关布朗运动，并证明无穷维正交多项式能够交织无限多个粒子的动力学及其 n-粒子演化。证明基于关于该模型的两个假设：有关 n-粒子动力学的可逆测度的信息，以及一致性。此外，本文还使用了多项式的显式公式，其中包括一个关于无穷维迈克斯纳多项式的新显式公式，该多项式是相对于帕斯卡过程的正交多项式。作为交织关系的一个应用，本文得到了无限粒子动力学的新可逆测度。

Keywords: 相关布朗运动；粘滞布朗运动；交织关系；正交多项式；对偶性；一致性；点过程。

Mathematics Subject Classification：60J60、60J25、82C22。

目录

1 In引言 **2**

2 相关布朗运动 **3**
2.1 模型.4 2.2 无标记动力学.5 2.3 泊松过程的多重 Wiener-Itô 积分.6 2.4 主要结果.7

3 St黏性布朗运动 **8**
3.1 模型.8 3.2 帕斯卡过程与无穷维迈克斯纳多项式.9 3.3 主要结果.11

4 证明策略 11
4.1 一致性.12 4.2 主要结果：更广阔的视角.13

5 P屋顶 1 **4**
5.1 无标记动力学与一致性.14 5.2 交织关系.16 5.3 无穷维迈克斯纳多项式：显式公式.18 5.4 n 粒子动力学的可逆测度 .21

*数学研究所，路德维希-马克西米利安-慕尼黑大学，Theresienstr. 39，80333 M¨unchen，德国。
†慕尼黑量子科学与技术中心（MCQST），Schellingstr. 4，80799 M¨unchen。

1 引言

交织关系是建立两个马尔可夫过程之间联系的有力工具。若线性算子 Λ 满足 $\Lambda P_t = Q_t \Lambda$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立，则称其将马尔可夫过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 与 $(Y_t)_{t\geq 0}$ 交织起来，其中二者的马尔可夫半群分别为 $(P_t)_{t\geq 0}$ 和 $(Q_t)_{t\geq 0}$。在马尔可夫过程背景下，交织关系的概念可追溯至 Dynkin [Dyn65]。他利用交织关系基于已有的马尔可夫半群构造新的马尔可夫半群。在 Dynkin 工作的基础上，Rogers 和 Pitman 于 [RP81]，拓展了这些思想，从而刻画了马尔可夫函数——即保持马尔可夫性质的可测映射。此外，交织关系在分析顶部到随机洗牌趋于平衡的过程中发挥着关键作用，参见 [AD86]。在 [Mic18]，中，交织关系是在相似变换这一代数概念的背景下讨论的。此外，交织关系还被用于 [BO13] 中构造无限维空间上的马尔可夫过程，并在 [DF90] 中用于研究强平稳时刻。另外， [PS12] 探讨了交织关系与分数阶算子的联系，而 [Dub04],[PS11], [AOW19] 则深入研究了其在扩散过程背景下的应用。 [MP22] 研究了 Ehrenfest、Yule 和奥恩斯坦-乌伦贝克过程的交织关系。有关交织关系的更多示例，请参阅 [Bia95] 和 [JK14]。最后， [MP21]，引入了交错关系这一概念。

交织关系与随机对偶性的概念密切相关（例如参见 [RS18，第5节。2], [Gro19，引理2。1] 以及 [CPY98]）。随机对偶性通过一个共同的可观测量——即对偶函数（例如参见 [JK14]）——建立两个马尔可夫过程之间的联系。随机对偶性已广泛应用于多个领域，包括相互作用粒子系统（例如参见 [Lig05]）、群体遗传学模型（例如参见 [EK86], [Eth06], [DG11]）以及（随机）偏微分方程（例如参见 [Mue15]）。在 [KMP82], 中，对偶性是理解 KMP 热传导模型非平衡稳态的一种工具。自对偶性，特别是借助正交多项式的自对偶性，对于研究非平衡稳态中的涨落场、玻尔兹曼–吉布斯原理和累积量尤为有用。 [DP91], [ACR18], [ACR21b] 以及 [FRS22] 对这一方法作了详细阐述。

在相互作用粒子系统领域，对偶性和自对偶性通常在格的背景下进行研究。关于正交多项式的自对偶性，已在三个著名的经典离散相互作用粒子系统中得到证明：排斥过程、包含过程和独立随机游走，相关研究见 [GKR07], [GKRV09], [FG19], [Gro19],[CFG$^+$19] 和 [FRS22]。自对偶性意味着，次数为 n 的正交多项式的时间演化可以表示为 n 个对偶粒子的时间演化。这一点至关重要，因为它使我们能够仅通过分析一个有限粒子系统来刻画一个包含无限多个粒子的系统的性质。这些系统的一个共同性质是一致性，即系统的时间演化与随机移除系统中的一个粒子的操作可交换。在 [CGR21], 中，研究了可逆系统中自对偶性与一致性之间的关系。

在 [FJRW21], a 中，相容粒子系统的研究取得了进展。作者发展了一种通用方法，说明这些系统的正交对偶仅依赖于一致性和可逆性条件。该方法不需要多项式的显式公式，不仅适用于离散空间上的粒子系统，也适用于实线 $\mathbb{R}$ 等博雷尔空间。这种方法进而利用无穷维正交多项式构造出自交织算子。

然而， [FJRW21] 的作者只考虑了粒子数有限的粒子系统。 [FJRW21] 中提出的论证在一定限制下可以适用于包含无限多个粒子的系统。具体而言，要将分析推广到这类系统，必须为其动力学找到一个可逆测度。此外，仅有一致性这一概念并不足够，因为移除单个粒子无法将无限与有限动力学联系起来。不过，值得注意的是，以广义下降阶乘多项式表述的交织关系 [FJRW21，公式 (3.5)] ，结合可逆性，可以推出以正交多项式表述的交织关系 [FJRW21，公式 (3.12)] 。

本文提出了一种研究非离散空间中粒子的无限粒子系统的新方法，克服了这些障碍。我们采用的替代框架有两个关键特点：首先，只需考虑无标记 n粒子动力学的可逆测度，这比求得无限粒子动力学的可逆测度更容易。其次，我们以一种与无限粒子数相容的方式定义一致性。根据这些

要求，我们发现，次数为 n 的无穷维多项式将无限粒子数的动力学与 n 粒子的动力学交织起来，其中 $n < \infty$。我们的证明依赖于无穷维正交多项式的显式公式。

无限多个粒子的交织算子具有实际应用。利用我们作为一致性定义所采用的交织关系，可以为无限多个相关布朗运动或粘性布朗运动的动力学获得新的不变测度。利用以无穷维多项式表示的交织关系的正交性，我们进一步强化了这一结果：我们证明这些测度实际上是可逆的。

我们通过展示强相容系统的实例来说明这一过程；Le Jan 和 Raimond 将其称为相容性 [LR04，定义 1。1]这类系统具有如下性质：过程的时间演化与移除任意一个确定性粒子的操作相交换。这一特征与柯尔莫哥洛夫扩张定理有关，使得以直接的方式构造无限动力学成为可能。此外，强相容族与随机流之间存在一一对应关系（见 [LR04]）。这些流可以解释为处于随机选定环境中的独立粒子。布朗流，例如 Arratia 流 [Arr79、BGS15], Harris 流 [Har84], 或 Howitt-Warren 流 [HW09], ，都是强相容模型的重要实例。

我们重点讨论两个例子。第一个模型是一个相关布朗运动系统。我们利用关于泊松过程分布的无穷维正交多项式，得到了交织关系。它们与多重 Wiener-Itô 积分之间的联系，已在例如 [Ogu72] or [Sur83] 中得到广泛研究。第二个例子涉及一类粘滞布朗运动系统，该系统由 Howitt 和 Warren 通过鞅问题引入（参见 [HW09]）。人们通过随机环境中的随机游走、广义排斥过程，或对称包含过程的凝聚重标度，将其观察为一种标度极限（例如参见 [RS15], [CGR 20], and [ACR21a]）。粘滞相互作用被用于材料科学中对胶体进行建模（参见 [HC17]）。此外，近期这些相互作用也受到关注，见 [DDP23]。我们聚焦于 Howitt-Warren 鞅问题的一个特殊情形，即均匀粘滞布朗运动；该情形在 [BR20] and [BW23] 中得到研究。该模型中的多粒子相互作用完全由双粒子相互作用决定。当粒子彼此分离时，该模型的动力学由相互独立的布朗运动构成。粒子相遇时，则表现出缓慢反射的相互作用行为，符合 Feller 边界分类 [Fel52]。具体而言，它们相等的时间段以正概率具有正的勒贝格测度，但不包含任何区间。对于这一模型，我们利用关于帕斯卡过程分布正交的无限维迈克斯纳多项式，研究其交织关系。对于后一族多项式，我们得到了一个新的显式公式。这两族无限维正交多项式都属于 Meixner 类（[Mei34], [Lyt03b]）。

本文结构如下。前两节介绍两个模型：相关布朗运动（第2节）和粘滞布朗运动（第3节）。我们介绍无穷维多项式，并陈述主要定理。在第 4 节中，我们将一致性的概念推广到无限多个粒子，并提出一种适用于本文所介绍的两个模型之外的模型的一般方法。在第5节中，我们证明，包括本文示例在内的强一致系统满足一致性条件。随后，我们利用无穷维多项式的显式公式建立交织关系，特别是证明迈克斯纳多项式的显式公式。最后，我们考察相关布朗运动和粘滞布朗运动的n粒子动力学的可逆测度。

2 相关布朗运动

本节聚焦于关于泊松过程的多重维纳-伊藤积分所表达的交织关系。以往研究主要关注独立粒子系统（例如参见 [Sur83], [KLR08] and [KKO$^+$09]）和一致有限粒子系统（参见 [FJRW21]）；而我们的目标是为具有相互作用的无限粒子系统寻找交织算子。

我们考虑相关布朗运动，这是[LR04]既有框架中的一个简单例子。值得注意的是，该例子因其简单性而尤为突出：与其他相关布朗运动模型（例如 Harris 流 [Har84] 或 [LR14]中介绍的模型）不同，布朗运动的相互作用在粒子相遇时并不依赖于局部相互作用。

2.1 模型

如果满足以下条件，我们将一族实值随机过程 $(X_{k,\,t})_{t\geq 0},\ k\in\mathbb{N}$ 定义为一族两两相关系数为 $0\leq a\leq 1$ 、从实数序列（确定性）$x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 出发的相关布朗运动：

- 族 $(X_{k,t})_{k\in\mathbb{N},t\geq 0}$ 是一个高斯过程。
- 对于所有 $t\geq 0$ 和 $k\in\mathbb{N}$： $\mathbb{E}[X_{k,t}]=x_k$。
- 对于所有 t、$s\geq 0$ 和 $k\in\mathbb{N}$：$\mathrm{Cov}\,[X_{k,t},X_{k,s}]=\min\{t,s\}$。
- 对于所有 t、$s\geq 0$ 和 k、$l\in\mathbb{N}$，满足 $k\neq l$：$\mathrm{Cov}\,[X_{k,t},X_{l,s}]=a\min\{t,s\}$。

如果 $a=0$，则 $(X_{1,\,t})_{t\geq 0}$、$(X_{2,\,t})_{t\geq 0}$、.....是相互独立的布朗运动。另一方面，如果$a=1$，它们彼此之间仅相差一个加性常数，即对于任意 $k\in\mathbb{N}$ 和 $t\geq 0$，我们都有 $X_{k,\,t}=X_{k,\,1}-x_1+x_k$ 几乎必然成立。

显式构造如下：令 $(B_t)_{t\geq 0}$、$(B_{1,\,t})_{t\geq 0}$、$(B_{2,\,t})_{t\geq 0}$、.....为相互独立且均从零开始的布朗运动。接下来，定义

$$X_{k,t}:=\sqrt{1-a}B_{k,t}+\sqrt{a}B_t+x_k,\qquad k\in\mathbb{N},t\geq 0. \tag{2.1}$$

一族相关布朗运动满足马尔可夫性质。我们定义 n 粒子半群

$$P_t^{[n]}f_n(x):=\mathbb{E}\left[f_n(\sqrt{1-a}B_{1,t}+\sqrt{a}B_t+x_1,\ldots,\sqrt{1-a}B_{n,t}+\sqrt{a}B_t+x_n)\right] \tag{2.2}$$

对于 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，其中 $f_n\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ 有界且可测。

注 2.1. 相关布朗运动的 n 粒子半群族是强相容的（ [LR04] 称之为相容性）。更准确地说，定义在 $\mathbb{R}^n,\ n\in\mathbb{N}$ 上的一族马尔可夫半群 $(P_t^{[n]})_{t\geq 0}$，若满足方程

$$P_t^{[n]}f_n(x_1,\ldots,x_n)=P_t^{[l]}g_l(x_{i_1},\ldots,x_{i_l}),\qquad x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R} \tag{2.3}$$

则称其为强相容的，其中 $l\leq n,\ i_1,\ldots,i_l\in\{1,\ldots,n\}$ 两两不同，且 $g_l\colon\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ 有界且可测；这里 $f_n\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (x_1,\ldots,x_n)\mapsto g_l(x_{i_1},\ldots,x_{i_l})$。

我们注意到，对于一般的强相容族 $(P_t^{[n]})_{t\geq 0},\ n\in\mathbb{N}$，柯尔莫哥洛夫定理蕴含了马尔可夫族 $(\Omega,\mathcal{F},(X_t)_{t\geq 0},(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^\infty})$ 的存在性，$X_t=(X_{k,t})_{k\in\mathbb{N}}$ 描述无限多个粒子的演化（例如参见 [LR04，第 1.5.3] 节）。因此，我们用 $\mathbb{R}^\infty$ 表示实数序列的集合，并赋予其柱集 σ-代数。$\mathbb{P}_x$ 对于每个 $x\in\mathbb{R}^\infty$ 和 X_k，都是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度；$_t$ 对于 $k\in\mathbb{N},\ t\geq 0$，是一个实值随机变量。 $X_0=x$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^\infty$均 $\mathbb{P}_x$-几乎必然成立，映射 $x\mapsto\mathbb{P}_x[X_t\in A]$ 对于所有可测的 $A\subset\mathbb{R}^\infty$ 和 $t\geq 0$都是可测的，并且 $(X_t)_{t\geq 0}$关于其自然滤过满足马尔可夫性质。该族具有如下性质：每个由 l 个粒子组成的有限子构型都按照 $P_t^{[l]}$ 演化。更确切地说，对于每个族i_1、.....、$i_l\in\mathbb{N}$、$l\in\mathbb{N}$中的两两不同指标，$t\geq 0$ 以及 $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^\infty$，在 $\mathbb{P}_x$ 下，$(X_{i_1,t},\ldots,X_{i_l,t})$ 的分布等于 $P_t^{[l]}((x_{i_1},\ldots,x_{i_l})\ \cdot)$。利用标准的测度论论证，该性质同样可扩展到无限多个粒子：对于每个单射 $s\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，在 $\mathbb{P}_x$ 下，$(X_{s(k),t})_{k\in\mathbb{N}}$ 的分布等于 $\mathbb{P}_{(x_{s(k)})}$下 $(X_{k,t})_{k\in\mathbb{N}}$ 的分布)$_{k\in\mathbb{N}}$。

强相容族与随机流之间的对应关系，如[LR04], 中所述，在我们的相关布朗运动示例中显而易见。事实上，令 Z 为服从标准正态分布的随机变量，并令 K_t 为随机概率核，使得对于 $v\in\mathbb{R}$ 和 $t\geq 0$，$K_t(v,\cdot)$等于期望值为 $\sqrt{at}Z+v$、方差为$(1-a)t$ 的正态分布。利用 (2.2)，我们得到

$$P_t^{[n]}f_n(x_1,\ldots,x_n)=\mathbb{E}\left[\int\cdots\int f_n(y_1,\ldots,y_n)K_t(x_1,\mathrm{d}y_1)\cdots K_t(x_1,\mathrm{d}y_1)\right]$$

对于所有 $t\geq 0$ 和 x_1，.....，$x_n\in\mathbb{R}$。

2.2 无标记动力学

接下来，我们将有标记粒子系统的记号转换为现代点过程记号，以计数测度来描述 $\mathbb{R}$ 上的粒子构型（例如参见 [LP17]），该记号不标记粒子。令 $\mathbf{N}$ 表示计数测度空间，即由可数个测度之和构成的空间，这些测度对每个可测 $B \subset \mathbb{R}$取 $\mathbb{N}_0$ 中的值。我们在 $\mathbf{N}$ 上赋予由所有满足 $\mathbf{N} \ni \mu \mapsto \mu(B)$ 可测（对每个可测 $B \subset \mathbb{R}$）的条件所生成的最小 σ- 代数 $\mathcal{N}$。由于 $\mathbb{R}$ 是博雷尔空间，每个 $\mu \in \mathbf{N}$ 都可写成 $\mu = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}$，其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $x_k \in \mathbb{R}$，这里δ_x 表示给定 $x \in \mathbb{R}$的狄拉克测度；或者等于零测度，我们将其解释为空构型，参见 [Kal17，第 1 节。1] 或 [LP17，第 6]章。特别地，$\mu(\mathbb{R})$ 对应于粒子总数。我们用 $\mathbf{N}_{<\infty} := \{\mu \in \mathbf{N} : \mu(\mathbb{R}) < \infty\}$ 表示有限构型集合，用 $\mathbf{N}_n := \{\mu \in \mathbf{N} : \mu(\mathbb{R}) = n\}$ 表示恰由 $n \in \mathbb{N}_0$ 个粒子组成的构型集合。

对于我们的目的，状态空间为 $\mathbf{N}$ 的马尔可夫族是一个集合 $(\Omega, \mathcal{F}, (\eta_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_\mu)_{\mu\in\mathbf{N}})$，由一个可测空间 $(\Omega\ \mathcal{F})$、可测映射 $\eta_t : (\Omega\ \mathcal{F}) \to (\mathbf{N}\ \mathcal{N})$、$t \geq 0$ 以及定义在 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_\mu, \mu \in \mathbf{N}$ 构成，使得

- 对于每个 $\mu \in \mathbf{N}$，$\mathbb{P}_\mu[\eta_0 = \mu] = 1$。
- 对于每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$、$t \geq 0$ 和 $A \in \mathcal{N}$，映射

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \mathbb{P}_{\iota_n(x)}[\eta_t \in A] \tag{2.4}$$

  在 $\iota_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}$, $x = (x_k)_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ 中是可测的。
- 马尔可夫性质被隐含地假定为相对于自然滤过$\mathcal{F}_t := \sigma(\eta_s : 0 \leq s \leq t)$成立。

我们使用记号 $\mathbb{E}_\mu$ 表示关于概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 的期望值。

引理 2.2. 对于每个 $0 \leq a \leq 1$，存在一个马尔可夫族 $(\Omega, \mathcal{F}, (\eta_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_\mu)_{\mu\in\mathbf{N}})$，其状态空间为 $\mathbf{N}$，使得 η_t，$t \geq 0$ 是适当的，并描述了两两相关系数为 a 的无标记布朗运动系统的演化。更确切地说，对于每个 $\mu = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}$，$x_k \in \mathbb{R}$，$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，在 $\mathbb{P}_\mu$ 下，$(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的分布等于 $\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_{k,\,t}}$ 的分布，其中每个 $(X_{k,\,t})_{t\geq 0}$ 从 x_k 开始。

若存在随机变量 $Z_k \in \mathbb{R}$、$K \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 使得以下条件成立，则称随机测度 $\zeta \in \mathbf{N}$ 是适当的

$$\zeta = \sum_{k=1}^{K} \delta_{Z_k} \tag{2.5}$$

成立。关于正规点过程的更多详情，请参阅 [LP17]。

在引理 2.2 中，当 $n = 0$ 时，求和视为零。这意味着空构型在任何时刻都保持为空。马尔可夫族可以直接构造。只需证明马尔可夫性质，证明见下文第 5.1 节。

注 2.3。对于所有 $n < \infty$ 和 $t \geq 0$，$\mathbf{N}_n \ni \mu \mapsto \mathbb{P}_\mu[\eta_t \in A]$ 的可测性等价于 (2.4) 的可测性。对于 $n = \infty$，一般而言，(2.4) 的要求比映射的可测性更弱

$$\{\mu \in \mathbf{N} : \mu(\mathbb{R}) = \infty\} \ni \mu \mapsto \mathbb{P}_\mu[\eta_t \in A]. \tag{2.6}$$

通过这种方法，我们可以轻松地将有标号粒子的概念转换为无标号粒子的概念，而无需详细分析（2.6）的可测性这一复杂问题。特别是，在本文后续各节中，我们始终假设无标号过程初始时具有适当点过程的分布。

2.3 泊松过程的多重 Wiener-Itô 积分

为求完整起见，我们来回顾与泊松过程对应的多重 Wiener-Itˆo 积分，参见例如 [Ogu72] or [Sur83]。$\mu = \sum_{i=1}^{m} \delta_{x_i} \in \mathsf{N}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 的 k 阶乘测度（参见例如 [LP17, Eq. (4.5)]）定义为

$$\mu^{(k)} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ \text{pairwise different}}}^{m} \delta_{(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}, \tag{2.7}$$

其中，空和式视为零测度。函数 $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的对称化定义为对所有坐标置换下的 f_n 取平均值（例如参见 [Las16, Eq. (27)]）。换言之，若 $\mathfrak{S}_n$ 表示集合 $\{1,\dots,n\}$ 的所有置换构成的集合，则 f_n 的对称化定义为

$$\widetilde{f_n}(x_1,\dots,x_n) := \frac{1}{n!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} f_n(x_{s(1)},\dots,x_{s(n)}), \qquad x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

A fu函数 f_n 称为对称的，如果对于所有 $s \in \mathfrak{S}_n$ an，都有 $f_n(x_1,\dots,x_n) = f_n(x_{s(1)},\dots,x_{s(n)})$。d $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$，即 f_n 等于其对称化。

令 λ 表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。关于强度测度为 λ 的泊松过程的 n 次多重 Wiener-Itô 积分（参见 [LP17，第 12.2] 节或 [Las16]）定义为

$$\begin{aligned} I_n f_n(\mu) := &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\ &\iint \widetilde{f_n}(x_1,\dots,x_n) \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(x_{k+1},\dots,x_n)) \mu^{(k)}(\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

对于 $\mu \in \mathsf{N}_{\mathrm{lf}}$ 和 $f_n \in \mathcal{C}_n$。N_{lf} 表示局部有限的 $\mu \in \mathsf{N}$ 的集合，即，对于可测的有界 $B \subset \mathbb{R}$，有 $\mu(B) < \infty$；而 $\mathcal{C}_n$ 表示有界可测函数 $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 构成的空间，这些函数具有有界支集。此外，对 $\mu^{(0)}$ 或 $\lambda^{\otimes 0}$积分时，我们将其视为未出现。具体而言，对于 $c \in \mathcal{C}_0 := \mathbb{R}$，我们得到 $I_0 c(\mu) = c$。

正交关系

$$\int (I_n f_n)(I_m g_m)\, \mathrm{d}\pi_\lambda = \mathbb{1}_{\{n=m\}} n! \int f_n g_m \, \mathrm{d}\lambda^{\otimes n} \tag{2.10}$$

对称的 $f_n \in \mathcal{C}_n$, $g_m \in \mathcal{C}_m$ 满足 $n, m \in \mathbb{N}_0$（例如参见 [Sur84], [Las16]）。π_λ 表示强度测度为 λ 的泊松点过程的分布。因此，I_n 可唯一延拓为一个有界线性算子，将平方可积的对称函数（记为 $L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes n})$）映射到 $L^2(\pi_\lambda)$。我们定义 $L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes 0}) := \mathbb{R}$。

此外，对于每个 $F \in L^2(\pi_\lambda)$，存在唯一的序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，它属于福克空间 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes n})$，即满足 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|f_n\|^2_{L^2(\lambda^{\otimes n})} < \infty$。该序列满足 $F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n f_n$，称为混沌分解。

此外，值得注意的是，$I_n f_n$ 与 Charlier多项式有着密切的关系（例如参见 [Sur84],[LP11]），后者是独立随机游走者的自对偶函数（例如参见[RS18], [FG19]）。

对非高斯白噪声的研究自然涉及无穷维正交多项式，正如 [Ber96] 中所讨论的那样。在 [Lyt03a], 中，使用幂跳鞅进行多重随机积分的混沌分解（例如 [Sch00] 或 [NS00]）与多项式混沌之间的关系得到了深入探讨。混沌分解在分析 L´evy 白噪声以及由 L´evy 白噪声驱动的随机微分方程时具有重要意义，相关研究见 [DØP04],[LP06],[Mey08] 和 [Yab08]。在 [FJRW21 的第3节 3], 中，基于无穷维正交多项式的交织算子已用于有限粒子系统。为了定义无穷维多项式空间，我们考虑系数有界且具有有界支集的多项式，以确保其平方可积性，并将函数 u_k

定义如下，并将其中的函数视为系数。次数小于或等于 $n \in \mathbb{N}_0$ 的多项式集合定义为

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \mathbf{N}_{\mathrm{lf}} \ni \mu \mapsto u_0 + \sum_{k=1}^{n} \int u_k \, \mathrm{d}\mu^{\otimes k} : u_0 \in \mathbb{R}, u_k \in \mathcal{C}_k \right\}. \tag{2.11}$$

次数为 n 的无限维正交多项式定义为：当 $n \geq 1$ 时，$\left(\mu \mapsto \int f_n \mathrm{d}\mu^{\otimes n}\right)$ 在 $\mathcal{P}_{n-1}^{\perp}$ 上的正交投影；当 $n = 0$ 时，则定义为恒等于一的常函数。对于所有 $f_n \in \mathcal{C}_n$、$n \in \mathbb{N}_0$，它与 $I_n f_n$ π_λ 几乎必然相等。

2.4 主要结果

根据 [LP17，推论 3.7], ，存在一个适当泊松过程。因此，设 ζ 为一个强度测度由勒贝格测度 λ 给出的适当泊松过程。不失一般性，我们可以将 ζ 定义在引理 2.2 中的可测空间 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上，并赋予其概率测度 $\mathbb{P}$ 和期望值 $\mathbb{E}$。注意，由于 $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$，因此 $\mathbb{P}[\zeta(\mathbb{R}) = \infty] = 1$。

定理 2.4. 假设 $0 \leq a \leq 1$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，次数为 n 的多重 Wiener-Itô 积分将无穷多个两两相关系数为 a的相关布朗运动的动力学与其 n 粒子演化交织起来。换言之，

$$\mathbb{E}_\zeta \left[I_n f_n(\eta_t) \right] = I_n P_t^{[n]} f_n(\zeta) \tag{2.12}$$

对于所有 $t \geq 0$ 以及所有函数 $f_n \in L^2(\lambda^{\otimes n})$，以下结论几乎必然成立。

定理 2.4 的证明依赖于两个关键要素。其一是一致性的概念，我们将在下文第 4 节中定理 4.4 之后与抽象框架一同引入；其二是以下命题，该命题可直接由相关布朗运动的定义推出。

命题 2.5. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，测度 $\lambda^{\otimes n}$ 是两两相关系数为 a的 n 个相关布朗运动的可逆测度，即 $\int (P_t^{[n]} f_n) g_n \, \mathrm{d}\lambda^{\otimes n} = \int (P_t^{[n]} g_n) f_n \, \mathrm{d}\lambda^{\otimes n}$，其中 $t \geq 0$, $f_n, g_n \in \mathcal{C}_n$。

Th定理 2.4 适用于寻找无限多个粒子的可逆测度。我们 s
ay that t
若 he 测度 π_λ 对于 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ 是可逆的，则

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_\zeta \left[F(\eta_t) \right] G(\zeta) \right] = \mathbb{E}\left[F(\zeta) \mathbb{E}_\zeta \left[G(\eta_t) \right] \right] \tag{2.13}$$

对于所有可测、有界函数 F、$G : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ 和 $t \geq 0$，上述结论均成立。由于 ζ 是适当的，且 (2.4) 是可测的，因此 $\mathbb{P}_\zeta \left[F(\eta_t) \right]$ 是可测的。因此，(2.13) 中的外层期望值是定义良好的。

通过应用标准论证，我们得到以下推论。具体而言，n 粒子马尔可夫半群族经过酉变换后，得到无标记无限动力学的马尔可夫半群。这一变换是证明中唯一的关键步骤。

推论 2.6. 测度 π_λ（表示强度测度为 λ 的泊松过程的分布）对于 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ 是可逆的，其中 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ 是一个由两两相关系数为 a 的无标记相关布朗运动构成的无限系统。

证明。考虑酉算子

$$\mathfrak{U} : \mathfrak{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes n}) \to L^2(\pi_\lambda), \qquad (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n f_n,$$

并且，对于每个 $t \geq 0$，定义算子 $P_t : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto (P_t^{[n]} f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 其中 $P_t^{[0]} f_0 := f_0$, $f_0 \in \mathbb{R}$。根据命题 2.5，我们知道，对于每个 $t > 0$，P_t 都是定义良好、有界的自伴算子。因此，$\mathfrak{U} P_t \mathfrak{U}^{-1}$ 也是自伴的。于是，为了完成证明，只需证明

$$\mathfrak{U} P_t \mathfrak{U}^{-1} F(\zeta) = \mathbb{E}_\zeta \left[F(\eta_t) \right] \tag{2.14}$$

对所有 $F \in L^2(\pi_\lambda)$ 几乎必然成立。定理 2.4 意味着，对于 $F = I_n f_n$，(2.14) 成立，其中$f_n \in L^2(\lambda^{\otimes n})$。

在下文定理 4.4 的证明中，我们将证明，由 (2.14) 右端得到的算子 $L^2(\pi_\lambda) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $F \mapsto \mathbb{E}_\zeta[F(\eta_t)]$ 是一个压缩算子，见下文的 (5.5)。因此，通过逼近论证，我们得出 (2.14) 对所有 $F \in L^2(\pi_\lambda)$ 均成立。 □

3 粘滞布朗运动

本节重点讨论粘滞布朗运动。与相关布朗运动类似，这一模型引出了无穷维正交多项式，具体而言，是无穷维迈克斯纳多项式。这些多项式充当交织算子，并且相对于帕斯卡过程的分布正交。作为交织关系的应用，我们为一个由无穷多个粘滞布朗运动组成的系统得到了一个新结果：帕斯卡过程的分布是可逆的。

涉及无限维迈克斯纳多项式的交织关系已在 [FJRW21 的第 5] 节中得到研究。作者考察了连续介质中对称包含过程的一个版本。

3.1 模型

Feller 在其边界分类中（见 [Fel52]）考虑了一个在原点以速率 $\theta > 0$ 具有黏性的反射布朗运动。不过，应该指出的是，这种条件更准确地说是“缓慢”反射的边界，而非“真正的”黏性。具体而言，布朗运动在零点停留的时间具有严格为正的勒贝格测度的概率为正，但这段时间不包含任何区间。相比之下，“真正的”黏性以过程在一个随机时间区间内“滞留”于零点为特征，例如 [KKR07] 对一个利率过程所展示的情形。

基于此，一对具有黏滞相互作用的布朗运动 $(X_{1,\,t},\ X_{2,\,t})_{t\geq 0}$ 可以描述如下：$(X_{1,\,t})_{t\geq 0}$ 和 $(X_{2,\,t})_{t\geq 0}$ 均为布朗运动，而 $(|X_{1,\,t} - X_{2,\,t}|)_{t\geq 0}$则是一个在零点处具有黏滞性的单一反射布朗运动，这里的黏滞性是按照 Feller 的意义定义的。当两者相互分离时，它们独立运动；当它们相遇时，则发生相互作用。根据 [HW09] 中的结果，这对 $(X_{1,\,t},\ X_{2,\,t})_{t\geq 0}$ 可以通过一个鞅问题来刻画。

Howitt 和 Warren（参见 [HW09]）将这一概念推广到实数集 $\mathbb{R}$ 上的一族 n 扩散过程，这通常称为 Howitt-Warren 鞅问题。由此得到一族 n相互独立的布朗运动：它们相距较远时各自独立运动，而单个过程相遇时则合并。引入了一个新的非负量 $\theta(i:\ j)$，可将其解释为一组 $i+j$ 粒子分裂为一组 i 粒子和一组 j 粒子的速率。此外，强一致性这一概念（参见注 2.1）对应于条件 $\theta(i+1:\ j)+\theta(i:\ j+1) = \theta(i:\ j)$； [SSS14，引理 A.4] 证明了该条件等价于存在一个定义在区间 $[0,1]$，上的有限测度 ν，称为特征测度，并且满足

$$\theta(i:j) = \int x^{i-1}(1-x)^{j-1}\nu(\mathrm{d}x), \qquad i,j \in \mathbb{N}.$$

关于利用鞅问题进行完整构造，参见 [HW09]。另一种表述见 [SSS14]。

本文研究具有黏性参数 $\theta > 0$ 且具有零漂移的均匀黏性布朗运动，该模型由 [BR20] 在大偏差分析的背景下进行了研究。该模型通过选择特征测度 $\nu = \frac{\theta}{2}\lambda_{[0,1]}$来定义，其中 $\lambda_{[0,1]}$是 $[0,1]$，上的勒贝格测度，从而得到

$$\theta(i:j) = \frac{\theta}{2}\frac{(i-1)!(j-1)!}{(i+j-2)!}.$$

对于该模型，多粒子相互作用完全由双粒子相互作用决定。 [BW23] 的作者推导了柯尔莫哥洛夫后向方程，并证明了

对于这一特定相互作用，可以利用 Bethe Ansatz（贝特拟设）精确求解。此结果用于求得 n 粒子动力学的可逆测度。为完整起见，我们给出 [SSS14 中定义 2.2] 所述的均匀黏性布朗运动的定义。

定义 3.1. 设 $n \in \mathbb{N}$。若以下条件成立，则称 $(X_t)_{t\geq 0} = (X_1, \ldots, X_n) = (X_{1,t}, \ldots, X_{n,t})_{t\geq 0}$ 是具有黏性参数 $\theta > 0$ 的 n 粒子均匀黏性布朗运动。

(i) $(X_t)_{t\geq 0}$ 是连续的平方可积半鞅。

(ii) X_k 与 X_l 的协变差由下式给出

$$[X_k, X_l]_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_{k,s}=X_{l,s}\}}\, \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0$$

对于 $k, l \in \{1, \ldots, n\}$。

(iii) 对每个 $\Delta \subset \{1, \ldots, n\}$, $f_\Delta(X_t) - \theta \int_0^t \beta_+(g_\Delta(X_s))\, \mathrm{d}s$, $t \geq 0$ 都是关于 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的自然滤过的鞅，其中

$$f_\Delta(x) := \max_{k\in\Delta} x_k, \qquad g_\Delta(x) := |\{k \in \Delta : x_k = f_\Delta(x)\}|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\beta^+(1) := 0 \text{ and } \beta^+(m) := 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \tfrac{1}{m-1},\ m \geq 2.$$

从任意初始值 $x \in \mathbb{R}^n$ 出发的 n 粒子均匀黏性布朗运动的存在性已由 [HW09, 定理 2.1.] 证明，并且其分布是唯一的。一族粘性布朗运动满足马尔可夫性质。此外，研究还证明，相应的 n 粒子半群构成一个强相容族，如注 2.1 所述。

3.2 帕斯卡过程与无穷维迈克斯纳多项式

设 $\alpha := \theta\lambda$，其中 λ 表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，且 $\theta > 0$ 为固定值。帕斯卡过程（也称为负二项过程）是一种经过广泛研究的点过程（更多细节参见 [Ser90], [Ber02] 或 [KP09] ）。我们简要回顾帕斯卡过程的构造。参数为 $0 < p < 1$ 和 α 的帕斯卡过程是满足以下性质的随机测度 $\zeta \in \mathbf{N}$。

(i) 随机变量 $\zeta(A_1) \ldots, \zeta(A_N)$ 相互独立，当且仅当集合 $A_1, \ldots, A_N \subset \mathbb{R}$ a re 可测且两两不相交。

(ii) 对于每个可测的 $A \subset \mathbb{R}$，使得 $0 < \alpha(A) < \infty$，随机变量 $\zeta(A)$ 服从参数为 p 和 $\alpha(A)$ 的负二项分布，即，

$$\mathbb{P}[\zeta(A) = k] = \alpha(A)(\alpha(A)+1)\cdots(\alpha(A)+k-1)\frac{p^k}{k!}(1-p)^{\alpha(A)}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

如果 $\alpha(A) = 0$，那么 $\zeta(A) = 0$ 几乎必然成立。如果 $\alpha(A) = \infty$，那么 $\zeta(A) = \infty$ 几乎必然成立。

帕斯卡过程是复合泊松过程。具体而言，若我们考虑实数集 $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ 上强度测度为 $\alpha \otimes \sum_{k=1}^\infty \frac{p^k}{k}\delta_k$ 的泊松过程 ξ，则 $\zeta(A) := \int_{A\times\mathbb{N}} y\xi(\mathrm{d}(x, y))$ 定义了一个帕斯卡过程。特别地，帕斯卡过程可以构造为一个适当的点过程，也就是说，它具有形式 (2.5)。关于帕斯卡过程的更多细节，另见 [Kin67] 和 [FJRW21]。

提醒一下，对称化 f_n 函数 $\widetilde{f_n}$ 的定义如式（2.8）所示。对于每个 $\mu \in \mathbf{N}_{\mathrm{lf}}$ 和 $f_n \in \mathcal{C}_n$

$$\mathcal{M}_n^{p,\alpha} f_n(\mu) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-n} \iint \widetilde{f_n}(x_1, \ldots, x_n) \kappa_{n,k}(x_1, \ldots, x_k, \mathrm{d}(x_{k+1}, \ldots, x_n))\mu^{(k)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_k)), \tag{3.1}$$

次数为 n 的无限维迈克斯纳多项式。核 $\kappa_{n,n-1}$： $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ 定义为

$$\kappa_{n,n-1}((x_1,\ldots,x_{n-1}),\cdot) := \alpha + \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_{n-1}},$$

当 $\kappa_{n,k}$ 时： $\mathbb{R}^k \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k}) \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ 由 $\kappa_{n,k} := \kappa_{k+1,k} \otimes \kappa_{k+2,k+1} \otimes \cdots \otimes \kappa_{n,n-1}$ 定义。换言之，

$$\begin{aligned}\kappa_{n,k}((x_1,\ldots,x_k),\mathrm{d}(x_{k+1},\ldots,x_n)) = (\alpha + \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_{n-1}})(\mathrm{d}x_n) \\ \cdots(\alpha + \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_{k+1}})(\mathrm{d}x_{k+2})(\alpha + \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_k})(\mathrm{d}x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

我们将 (3.1) 中 $n = k$ 的情形解释为内层积分不存在。若 $k = 0$, $\kappa_{n,\,0}$ ，则退化为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个测度；我们将外层积分解释为关于 $\mu^{(0)}$ 的积分不存在。若 $n = 0$，则令 $\mathcal{M}^{p,\,\alpha}_{n}f_0 := f_0$ 表示 $f_0 \in \mathcal{C}_0 = \mathbb{R}$。令 $\mathcal{P}_n$ 表示次数小于或等于 n 的多项式集合，其定义见 (2.11)。

下面的命题 3.2 表明，式 (3.1) 中定义的多项式 $\mathcal{M}^{p,\,\alpha}_{n}f_n$ 与关于帕斯卡过程分布的无穷维正交多项式一致。这些多项式曾在例如 [Lyt03a，第 5 节以及 6] 和 [FJRW21，第 5 节2] 中得到研究。该命题的证明见下文第 5.3 节。式 (3.1) 给出了无穷维正交多项式的一条新颖且显式的公式，其形式类似于维纳-伊藤积分 (2.9)。值得注意的是，我们的公式不同于 [Lyt03a，公式 (6.4)]，中给出的公式，后者只提供了一个递归关系。我们的显式公式对于下文定理 3.5 的证明至关重要；在该证明中，我们利用了其作为阶乘测度与核 $\kappa_{n,\,k}$ 所涉及积分之和的结构。此外，我们还在该证明以及下文推论 3.7 的证明中使用了命题 3.2；更确切地说，我们利用了下文的正交关系 (3.7)。

命题 3.2。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f_n \in \mathcal{C}_n$,

$$\mathcal{M}^{p,\alpha}_{n} f_n = \textit{orthogonal projection of } \big(\mu \mapsto \mu^{\otimes n}(f_n)\big) \textit{ onto } \mathcal{P}^{\perp}_{n-1} \tag{3.3}$$

几乎必然成立于 $\rho_{p,\,\alpha}$。

注 3.3。由 (3.1) 给出的无限维迈克斯纳多项式，可以视为具有参数 $0 < p < 1$ 和$\alpha > 0$的首一单变量迈克斯纳多项式的自然推广。首一迈克斯纳多项式表示如下（例如 [KLS10]）：

$$\mathscr{M}^{p,a}_{n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k-n} (\alpha + k)^{(n-k)}(x)_k, \qquad n, x \in \mathbb{N}_0. \tag{3.4}$$

在这些多项式的无限维版本中，上升阶乘（也称为 Pochhammer 符号）$(a+k)^{(n-k)} = (a+n-1)\cdots(a+k+1)(a+k)$，其中 $(a+k)^{(0)} = 1$，转化为关于核 $\kappa_{n,\,k}$ 的积分；而下降阶乘 $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$，其中 $(x)_0 := 1$，则对应于关于阶乘测度 $\mu^{(k)}$ 的积分。这些关系表明，如果恰当地选取 f_n ，那么 (3.1) 就会化为单变量多项式的乘积，如下文引理 5.3 所示。

我们用 Σ_n 表示集合 $\{1,\ldots,n\}$ 的划分集合 σ。对于函数 f_n： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，记 $(f_n)_\sigma$： $\mathbb{R}^{|\sigma|} \to \mathbb{R}$ 为通过将属于同一 $A \in \sigma$ 的变量按出现顺序识别而得到的函数。令

$$\lambda_n := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(\prod_{A \in \sigma} (|A| - 1)! \right) \alpha_\sigma \tag{3.5}$$

其中 α_σ 是由 $\int f_n \,\mathrm{d}\alpha_\sigma = \int (f_n)_\sigma \,\mathrm{d}\alpha^{\otimes|\sigma|}$ 定义的测度。注意，

$$\lambda_n = \kappa_{n,0} = \lambda_k \otimes \kappa_{n,k} \tag{3.6}$$

对所有 $n \geq k \geq 0$。测度 λ_n 与帕斯卡过程有两方面的密切联系。首先，帕斯卡过程的定义蕴含以下命题。

命题 3.4。参数为 p、α 的帕斯卡过程的 n 阶阶乘矩测度由 $(\frac{p}{1-p})^n\lambda_n$ 给出，对每个 $n\in\mathbb{N}$，即 $\mathbb{E}\left[\zeta^{(n)}(A)\right]=(\frac{p}{1-p})^n\lambda_n(A)$ 对 $A\subset\mathbb{R}^n$ 可测。

其次，正交关系

$$\int(\mathcal{M}_n^{p,\alpha}f_n)(\mathcal{M}_m^{p,\alpha}g_m)\,\mathrm{d}\rho_{p,\alpha}=\mathbb{I}_{\{n=m\}}\frac{p^n n!}{(1-p)^{2n}}\int f_n g_m\,\mathrm{d}\lambda_n \tag{3.7}$$

对称的 $f_n\in\mathcal{C}_n$, $g_m\in\mathcal{C}_m$ 成立（参见 [Lyt03a], [FJRW21]）。因此，线性算子 $\mathcal{M}^{p,\alpha}_n$ 可以连续扩展到对称的、可测的平方可积函数，这些函数记作 $L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda_n)$。这一扩展使我们能够将任意函数 $F\in L^2(\rho_{p,\alpha})$ 分解为一个在 $L^2(\rho_{p,\alpha})$ 中收敛的级数，即 $F=\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n\,!\,\mathcal{M}^{p,\alpha}_n f_n$。序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 属于一个称为扩展任意子 Fock 空间的空间，其定义见 [Lyt03a], [Lyt03b], [BLR15]。该空间定义为满足条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n}!\,\|f_n\|^2_{L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda_n)}<\infty$ 的序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 所构成的集合，其中 $L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda_0)$ 理解为 $\mathbb{R}$。

3.3 主要结果

对于每个 $x\in\mathbb{R}^\infty$，考虑随机过程族 $(X_{k,\,t})_{k\in\mathbb{N}}$, $t\geq 0$，使得对于任意两两不同的 i_1、……、$i_n\in\mathbb{N}$，$(X_{i_1,\,t},\ \ldots\ldots,\ X_{i_n,\,t})$ 的分布 $t\geq 0$ 与从 $(x_{i_1},\ \ldots\ldots,\ x_{i_n})$ 出发、具有黏性参数 $\theta>0$ 的 n 粒子均匀粘滞布朗运动的分布相同。利用强一致性和柯尔莫哥洛夫定理，该序列确实存在。令 $(P_t^{[n]})_{t\geq 0}$ 表示具有黏性参数 θ 的 n 粒子均匀粘滞布朗运动的马尔可夫半群。考虑马尔可夫族 $(\Omega,\ \mathcal{F},(\eta_t)_{t\geq 0},(\mathbb{P}_\mu)_{\mu\in\mathfrak{N}})$，它是 $(X_{k,\,t})_{k\in\mathbb{N}}$, $t\geq 0$ 的无标签版本。该构造类似于引理 2.2 中所描述的构造。令 ζ 表示一个参数为 p 和 α 的帕斯卡过程，该过程是适当的，即具有 (2.5) 的形式。回顾一下，λ 表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。

定理 3.5. 假设 $\theta>0$并令 $\alpha=\theta\lambda$。那么，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0<p<1$，次数为 n 的无限维迈克斯纳多项式将具有黏性 θ 的无穷多个均匀黏性布朗运动的动力学与其 n粒子演化相互交织。换言之，

$$\mathbb{E}_\zeta\left[\mathcal{M}_n^{p,\alpha}f_n(\eta_t)\right]=\mathcal{M}_n^{p,\alpha}P_t^{[n]}f_n(\zeta) \tag{3.8}$$

对于所有 $t\geq 0$ 以及所有函数 $f_n\in L^2(\lambda_n)$，上述关系几乎必然成立。

与定理 2.4 类似，证明可直接由 n粒子演化的一致性和可逆性得出。

命题 3.6. 对于具有黏性 θ的无标号均匀黏性布朗运动 $(\eta_t)_{t\geq 0}$，测度 λ_n 在映射 $(x_1,\ldots,x_n)\to\delta_{x_1}+\ldots+\delta_{x_n}$ 下的推前测度是可逆的。

为证明命题 3.6，我们使用 [BW23, 定理 4.17], ，该定理给出了 n 有序均匀黏性布朗运动的一个可逆测度。

以下推论是一项新颖的结果，它为一个由无穷多个粘滞布朗运动构成的系统提供了一族可逆测度。$\rho_{p,\,\alpha}$（帕斯卡过程的分布）的可逆性，可以用与推论 2.6 的证明相同的论证来证明。在此背景下，可逆性的定义方式与（2.13）中的类似。

推论 3.7。设 $\theta>0$。那么，对于每个 $0<p<1$，参数为 p 和 $\alpha=\theta\lambda$ 的帕斯卡过程的分布是 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的一个可逆测度，其中 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是一个具有黏性 θ 的无标号均匀黏性布朗运动无限系统。

4 证明策略

我们运用相同的技巧证明相关布朗运动和粘滞布朗运动的交织关系（定理 2.4 和定理 3.5）。首先，在第4.1节中，我们将一致性的记号（例如 [CGR21] 和 [FJRW21] ）推广到无限粒子系统。随后，我们证明这两个模型——相关布朗运动和粘滞布朗运动——是

一致的，这仅基于这样一个事实：根据注 2.1， n 粒子动力学族是一个强相容族。

接下来，在第 4.2 节中，我们针对帕斯卡情形和泊松情形提出一个一般性定理：若泊松（或帕斯卡）过程的阶乘矩测度在映射 $\iota_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{N}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_n}$ 下的推前是可逆的，且马尔可夫过程是一致的，则可得到交织关系。证明使用了维纳-伊藤积分的显式表示式 (2.9) 和无限维迈克斯纳多项式的显式表示式 (3.1)。

因此，我们只需验证有限系统的可逆测度。对于相关布朗运动，这可直接由定义推出；而对于黏滞布朗运动，我们使用 [BW23]。

4.1 一致性

在 [CGR21] 和 [FJRW21], 中，一致性指的是这样一种性质：随机均匀地移除一个粒子这一操作与过程的时间演化可交换。这一性质可针对无标号粒子的粒子系统来表述。具体而言，若

$$\mathbb{E}_\mu\left[\int F(\eta_t - \delta_x)\eta_t(\mathrm{d}x)\right] = \int \mathbb{E}_{\mu-\delta_x}\left[F(\eta_t)\right]\mu(\mathrm{d}x), \qquad \mu \in \mathbf{N}_{<\infty} \tag{4.1}$$

对所有可测的 $F\colon \mathbf{N}_{<\infty} \to [0,\infty)$ 均成立，则该系统称为一致的。在（4.1）中，等式左边先演化系统，再均匀随机移除一个粒子。反之，等式右边先从初始构型中均匀随机移除一个粒子，然后从所得状态演化该过程。

在本文中，我们有意以不同的方式定义一致性，因为（4.1）对于推广到无限多个粒子并无帮助。方程（4.1）没有建立无限多个粒子的动力学与有限多个粒子的动力学之间的联系。更准确地说，如果从一个无限构型中移除一个粒子，构型中的粒子总数仍为无限；而从有限构型中移除一个粒子，剩余粒子数仍为有限。不过，我们的目标是获得能够将无限粒子数约化为有限粒子数的交织关系。根据 [FJRW21，定理 3.5，注 3.6。], 我们下面给出的新定义是传统一致性定义的自然推广，与有限粒子系统一致性的既有表述相符。

设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\eta_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_\mu)_{\mu\in\mathbf{N}})$ 是一个马尔可夫族，并且对于每个 $t \geq 0$， η_t 是适当的 .

定义 4.1. 若随机过程 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 满足下式，则称其为一致的

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\left[\int F(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_n})\eta_t^{(n)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n))\right]\\ = \int \mathbb{E}_{\delta_{x_1}+\ldots+\delta_{x_n}}\left[F(\eta_t)\right]\mu^{(n)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)), \qquad \mu \in \mathbf{N}\end{aligned} \tag{4.2}$$

对所有 $t \geq 0$、可测的 $F\colon \mathbf{N}_{<\infty} \to [0,\infty)$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

我们指出，一般而言，(4.2) 式左侧或右侧的可积性均无法得到保证。在不可积的情况下，我们将该等式解释为 $\infty = \infty$。

对 (4.2) 式进行解释，左侧描述了从始于 μ 的过程的演化后状态中均匀选取的 n 个粒子。另一方面，右侧描述了从初始状态 μ 中均匀选取的 n 个粒子，然后使其在该过程中演化。

备注 4.2. 我们仅对其中每个 η_t、 $t \geq 0$ 均为适当的过程定义一致性。这一假设源于一个技术上的细微问题：一般而言，映射 $\mu \mapsto \int F\ \delta_{x_1} + \ldots + (\ )\,(\mathrm{d}(\ ,\ ,\ ))$ 对于 ，即使对于可测 δ_{x_n} $\mu^{(n)}$ x_1 … x_n $n \geq 2$ F η_t 的，也不一定是可测的。通过要求每个 均为适当的，我们确保了 $\omega \mapsto \int F(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_n})\eta_t(\omega)^{(n)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n))$ 的可测性。

我们的定义也可以借助 Lenard 引入的 K-变换解释为自交织性质（见 [FJRW21，方程（3.6）] [Len73], [Len75]）。另请参见 [KKO+09]，了解自由 Kawasaki 动力学背景下的 K-变换交织关系。

如果过程 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 保持粒子数不变，也就是说，对所有 $\mu \in \mathbf{N}$ 和 $t \geq 0$， $\eta_t(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$ 都以 $\mathbb{P}_\mu$-几乎必然的方式成立，则称该过程是守恒的。

命题 4.3. 具有两两相关系数 a 的无标记相关布朗运动，以及具有黏性 θ 的无标号粘滞布朗运动，都是一致且守恒的。

引理 2.2 和命题 4.3 的证明都仅依赖于底层 n 粒子演化族的强相容性（注 2.1 中提到）。这表明，任意强相容族都可以构造出一个一致的无标号过程。因此，强一致性这一名称恰如其分，因为它确实是比一致性更强的性质。关于有限多个构型的模型，另请参阅 [FJRW21, 第3节1]。

交织关系 (4.2) 的一个直接推论——我们将其作为一致性的定义——是，π_λ（强度测度为 λ 的泊松过程的分布）是不变测度，对应于一个具有两两相关系数 a 的无标记相关布朗运动无限系统。事实上，我们可以利用泊松过程的矩问题具有唯一解这一事实（例如，见 [LP17, 命题 4.12]）。因此，只需验证适当泊松过程 ζ 的阶乘矩测度 $\lambda^{\otimes n}$ 与 η_t 从 ζ 开始时的阶乘矩测度相同。由于 $\lambda^{\otimes n}$ 在 $\iota_n\colon (x_1,\dots,x_n)\mapsto \delta_{x_1}+\ldots+\delta_{x_n}$ 下的推前测度对于 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是不变的（见命题 2.5），我们利用一致性得到

$$\int f_n \,\mathrm{d}\lambda^{\otimes n} = \int P_t^{[n]} f_n \,\mathrm{d}\lambda^{\otimes n} = \mathbb{E}\left[\int P_t^{[n]} f_n \,\mathrm{d}\zeta^{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_\zeta\left[\int f_n \,\mathrm{d}\eta_t^{(n)}\right]\right]$$

对于可测的 $f_n\colon\ E^n\to[0,\infty)$ 且 $t\geq 0$，这意味着 π_λ 确实是 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的不变的。

我们强调，证明 π_λ 不变性的论证是一条一般原理：设一致的粒子系统的每个 n粒子动力学下，无限点过程 ζ 的第 n阶阶乘矩测度均为不变的。假设阶乘矩测度能够唯一刻画 ζ的分布。那么，ζ 的分布在无限动力学下是不变的。

因此，利用命题 3.6，我们得到，对于每个 $0<p<1$，具有参数 p 和 $\alpha=\theta\lambda$ 的帕斯卡过程的分布是具有黏性 θ 的无标号均匀黏性布朗运动无限系统的不变测度。这里，矩问题的唯一可解性由 [LP17，命题 4.12] 中提出的判据得出：固定一个有界可测集 $B\subset\mathbb{R}$。由于 $\frac{1}{2^n n!}\alpha(B)^{(n)}\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时，存在一个 $D\geq 1$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\frac{1}{2^n n!}\alpha(B)^{(n)}\leq D$。因此，我们估计阶乘矩测度如下：

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^n \lambda_n(B^n) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \alpha(B)^{(n)} \leq \left(2D\frac{p}{1-p}\right)^n n!.$$

不变性可由一致性轻易推出，而可逆性则更具挑战性。在下一节中，我们将专门利用交织关系在无限维正交多项式意义下的正交性来解决这一问题。

4.2 主要结果：更广阔的视角

一致性的定义使我们能够陈述以下定理，它揭示了定理 2.4 和定理 3.5 背后的抽象框架。设 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\eta_t)_{t\geq 0},\ (\mathbb{P}_\mu)_{\mu\in\mathbf{N}})$ 是一个马尔可夫族（描述无限多个粒子的演化），且对每个 $t\geq 0,\ \eta_t$ 都是适当的。回顾映射 $\iota_n\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbf{N},\ (x_1,\dots,x_n)\mapsto\delta_{x_1}+\ldots+\delta_{x_n}$。提醒一下，由恰好 $n\in\mathbb{N}_0$ 个粒子组成的构型集合记作 $\mathbf{N}_n:=\{\mu\in\mathbf{N}\colon\ \mu(\mathbb{R})=n\}$。注意，每个对称函数 $f_n\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 都可以通过关系 $f_n=F\circ\iota_n$ 识别为函数 $F:\mathbf{N}_n\to\mathbb{R}$。假设 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是一个守恒过程。那么，对于 $n\in\mathbb{N}$，n 粒子半群 $P_t^{[n]}$ 可按如下方式恢复：

$$P_t^{[n]} f_n(x) := \mathbb{E}_{\iota_n(x)}\left[F(\eta_t)\right],$$

其中，$x\in\mathbb{R}^n$ 和 $f_n\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个有界（或非负）、对称且可测的函数。定义算子 $P_t^{[0]}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的恒等算子。

定理 4.4. 假设 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是一致的且守恒的。

(i) 设 ζ 是一个强度测度为 λ 的适当泊松过程。假设勒贝格测度在映射 ι_n 下从 $\mathbb{R}^n$ 得到的推前测度对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 都是 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的可逆测度。那么，交织关系 $\mathbb{E}_\zeta\left[I_n f_n(\eta_t)\right]=I_n P_t^{[n]} f_n$ (ζ) 几乎必然成立，并且对所有 $t\geq 0$ 和 $f_n\in L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes n}),\ n\in\mathbb{N}_0$ 均成立。

(ii) 设 ζ 是一个参数为 $0 < p < 1$ 和 α 的适当帕斯卡过程。假设由 (3.5) 定义的 λ_n 在映射 ι_n 下的推前测度对于每个$n \in \mathbb{N}$ 都是 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的可逆测度。那么，交织关系 $\mathbb{E}_\zeta\left[\mathcal{M}_n^{p,\alpha} f_n(\eta_t)\right] = \mathcal{M}^{p,\ {}_n{}^{\alpha}} P_t^{[n]} f_n(\zeta)$ 对所有 $t \geq 0$ 和 $f_n \in L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ 均几乎必然成立。

我们在下文第5.2节中给出定理 4.4 的证明。

定理 2.4 和定理 3.5 的证明。命题 4.3 表明，相关布朗运动和粘性布朗运动的无标签版本均是一致且守恒的。利用命题 2.5（或命题 3.6），我们应用定理 4.4，得到这两个过程关于对称函数的交织关系。

如果 f_n 是一个非对称的平方可积函数，我们将定理 4.4 应用于其对称化 $\widetilde{\ }$，然后使用

$$P_t^{[n]}\widetilde{f_n} = \widetilde{P_t^{[n]} f_n},$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$这源于强一致性（如（2.3）中所定义），以及 $I_n f_n = I_n \widetilde{f_n}$（或 $\mathcal{M}^{p,\ {}_n{}^{\alpha}} f_n = \mathcal{M}^{p,\ {}_n{}^{\alpha}} \widetilde{f_n}$）。 □

推论 2.6（或推论 3.7）的证明在抽象框架下同样适用。回顾一下，π_λ 表示强度测度为 λ 的泊松过程的分布，而 $\rho_{p,\alpha}$ 表示参数为 p 和 α 的帕斯卡过程的分布。

推论4.5。在定理 4.4 的假设下，若假设条件 (i) 成立，则 π_λ 对于 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是可逆的；若假设条件 (ii) 成立，则 $\rho_{p,\ \alpha}$ 对于 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是可逆的。

注4.6。定理 4.4 和推论4.5在此针对实线上带有粒子的马尔可夫过程进行表述。然而，这两个结果在更一般的情形下同样成立。例如，若 $(E, \mathcal{E})$ 是博雷尔空间（见 [LP17]），则不必采用勒贝格测度，泊松情形和帕斯卡情形都可以选用任意的 σ-有限测度。

注4.7。定理 4.4 中的可逆性条件可以放宽，只要求满足下文的条件 (5.3)。此外，若该等式逐点成立，而非仅几乎处处成立，则交织关系 (2.12) 也逐点成立。然而，为确保积分存在，可能需要缩小构型集合。我们可以将这一思路用于博雷尔空间上的独立粒子系统：若单粒子动力学仅存在一个不变的 σ-有限测度，则 (5.3) 逐点成立。

通过更加严谨的论证，我们得到以下陈述。考虑 Borel 空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的马尔可夫半群 $(p_t)_{t\geq 0}$，其具有不变的 σ-有限测度 λ。设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\eta_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_\mu)_{\mu\in\mathbf{N}})$ 为无标号粒子的马尔可夫族，其中每个粒子都按照单粒子动力学 $(p_t)_{t\geq 0}$独立演化。该族可利用引理 2.2 中给出的论证构造。

令 $t \geq 0$ 固定，并假设 μ 是局部有限的，即 $\mu(A) < \infty$ 对所有 $A \in \mathcal{E}$满足 $\lambda(A) < \infty$, 以及测度 μp_t，定义为 $\mu p_t(B) := \int p_t \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\mu$。我们还考虑一个可测有界函数 $f_n : E^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$，使得 $\lambda^{\otimes n}[f_n \neq 0] < \infty$。在这些条件下，我们得到以下交织关系：

$$\mathbb{E}_\mu\left[I_n f_n(\eta_t)\right] = I_n P_t^{[n]} f_n(\mu)$$

其中 I_n 表示次数为 n 的多重 Wiener-Itô 积分，该积分由不变测度 λ 构造。

5 证明

5.1 无标记动力学与一致性

首先，我们证明引理 2.2 和命题 4.3。在以下证明中，我们使用一种结合两项原则的无标记动力学构造。首先，我们结合不同的动力学

粒子数，并根据初始构型中的粒子数选择所遵循的动力学。其次，我们将标记记法 $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 映射为 $\iota_n(x) = \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}$。这些论证都是标准的：第一个很容易得出，第二个则可解释为马尔可夫映射定理。不过，由于这一构造对于交织关系至关重要，我们仍详细阐述，以供读者参考。

引理 2.2 的证明。对于每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，令 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (Z_t^n)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x^n)_{x\in\mathbb{R}^n})$ 为描述 n 粒子动力学的马尔可夫族。该族由可测空间 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$、可测映射 $Z_t^n \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$，以及定义在 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_x^n$ 构成，相应的期望值记为 $\mathbb{E}_x^n$。相对于自然滤过 $\mathcal{F}_t^n := \sigma(Z_s^n \colon 0 \leq s \leq t)$，马尔可夫性质成立。

- 我们定义 $\Omega \colon = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \{n\} \times \Omega_n$，并赋予其由集合 $\{0\}$ 和 $\{n\} \times A_n$、$A_n \in \mathcal{F}^n$、$n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{F}$
- 令 $\eta_t(n, \omega^n) \colon = \iota_n(Z_t^n(\omega^n))$，其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$、$\omega^n \in \Omega^n$，且 $\eta_t(0) \colon = 0$。
- 对于每个 $\mu \in \mathbf{N}$，我们选取一个固定的 $z(\mu) \in \mathbb{R}^n$，使得 $\iota_n(z(\mu)) = \mu$，其中 $n = \mu(E)$。接着，我们将 $\mathbb{P}_\mu$ 定义为 $\mathbb{P}_{z(\mu)}^n$ 在映射 $\omega^n \mapsto (n, \omega^n)$ 下的推前测度。

分布 $\mathbb{P}_\mu$ 取决于 $z(\mu)$ 的各个分量如何置换，但根据强一致性性质（见注 2.1），在 $\mathbb{P}_\mu$ 下，$(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的分布不受置换选择的影响。特别地，对于所有满足 $\iota_n(x) = \mu$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$，该分布都等于在 $\mathbb{P}_x$ 下 $(\iota_n(Z_t^n))_{t\geq 0}$ 的分布。

现在，我们证明对于 $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s \colon 0 \leq s \leq t)$，马尔可夫性质

$$\mathbb{P}_\mu[\eta_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}_{\eta_s}[\eta_t \in A] \qquad \mathbb{P}_\mu\text{-almost surely for all } \mu \in \mathbf{N}, A \in \mathcal{N}, t, s \geq 0$$

可通过应用过程 $(Z_t^n)_{t\geq 0}$ 的马尔可夫性质得到。事实上，固定 $A \in \mathcal{N}$、s、$t \geq 0$、$\mu = \sum_{k=1}^n \delta_{x_k} \in \mathbf{N}$、$x = (x_k)_{k=1}^n$、$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $B \in \mathcal{F}_s$。我们采用简写 $\iota = \iota_n$、$Z_t = Z_t^n$、$\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_x^n$。然后根据 $\mathcal{F}_s$ 的定义，我们可以找到一个可测集 $C \subset \{h \colon h \colon [0, t] \to \mathbf{N}\}$，使得 $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C((\eta_u)_{0\leq u\leq s})$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\left[\mathbb{1}_A(\eta_{t+s})\,\mathbb{1}_B\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_A(\iota(Z_{t+s}))\,\mathbb{1}_C\Big((\iota(Z_u))_{0\leq u\leq s}\Big)\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{Z_s}\left[\mathbb{1}_A(\iota(Z_t))\right]\mathbb{1}_C\Big((\iota(Z_u))_{0\leq u\leq s}\Big)\right] = \mathbb{E}_\mu\left[\mathbb{E}_{\eta_s}\left[\mathbb{1}_A(\eta_t)\right]\mathbb{1}_B\right]\end{aligned}$$

成立，因为 $\mathbb{1}_C\Big((\iota_n(Z_u))_{0\leq u\leq s}\Big)$ 是 $\mathcal{F}_s^n$-可测的。其余性质很容易得出。

□

命题 4.3 的证明仅依赖于强一致性（见注 2.1），并由线性性和阶乘测度的定义得出。

命题 4.3 的证明。根据定义，$(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是守恒的，因此只需证明一致性。固定 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，并考虑 $\mu = \sum_{k=1}^n \delta_{x_k} \in \mathbf{N}$，其中 $x = (x_k)_{k=1}^n$。令 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (Z_t^n)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x^n)_{x\in\mathbb{R}^n})$，$Z_t^n = (Z_{k,t}^n)_{k=1}^n$，$t \geq 0$ 表示与 n 粒子动力学相关的马尔可夫族，具体如引理 2.2 的证明中所述。通过两次应用 (2.7)，并利用强一致性和线性性，我们得到一致性：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\left[\int F(\delta_{y_1} + \ldots + \delta_{y_l})\eta_t^{(l)}(\mathrm{d}(y_1, \ldots, y_l))\right] &= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l=1 \\ \text{pairwise different}}}^n \mathbb{E}_x^n\left[F(\delta_{Z_{i_1,t}^n} + \ldots, \delta_{Z_{i_l,t}^n})\right] \\ = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l=1 \\ \text{pairwise different}}}^n \mathbb{E}_{\delta_{x_{i_1}}+\ldots+\delta_{x_{i_l}}}[F(\eta_t)] &= \int \mathbb{E}_{\delta_{y_1}+\ldots+\delta_{y_l}}[F(\eta_t)]\,\mu^{(l)}(\mathrm{d}(y_1, \ldots, y_l)).\end{aligned}$$

□

5.2 交织关系

首先，我们给出定理 4.4 第 (i) 部分的证明。回顾映射 $\iota_n : \mathbb{R}^n \to \mathbf{N}$，$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_n}$。注意到

$$\Big(\widetilde{u \otimes \mathbb{I}}\Big)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \int u \, \mathrm{d}\big(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_{n+1}}\big)^{(n)} \tag{5.1}$$

$\widetilde{}$ 对于 $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ 以及可测的 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使用记号 $^{u \otimes} \mathbb{I}$ 表示函数 $(^{u \otimes} \mathbb{I})(x_1, \ldots, x_{n+1}) := u(x_1, \ldots, x_n)$ 的对称化。采用这一记号，有限粒子数情形的一致性性质可用 $P_t^{[n]}$ 表示为

$$\begin{aligned} P_t^{[n+1]}\Big(\widetilde{\varphi \otimes \mathbb{I}}\Big)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \frac{1}{(n+1)!} \int P_t^{[n]} \varphi \, \mathrm{d}\big(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_{n+1}}\big)^{(n)} \\ &= \Big(\widetilde{(P_t^{[n]}\varphi) \otimes \mathbb{I}}\Big)(x_1, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

对于有界的对称 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。为得到这一表达式，我们对 φ 和 $P_t^{[n]}\varphi$ 均使用 (5.1)，并应用一致性条件 (4.2)。

以下证明的关键步骤如下：首先，我们利用正交多项式的显式公式 (2.9) 和 (3.1)，证明较小空间 $\mathcal{C}_n$ 中的函数满足交织关系。接着，我们通过逼近论证将这一关系推广到 $L^2(\lambda^{\otimes n})$ 中的所有函数。为此，我们利用矩问题证明 π_λ 是不变的。

定理 4.4 (i) 的证明。我们断言，对于所有 $t \geq 0$、$l \in \mathbb{N}_0$ 和可测的 $F : \mathbf{N}_{l+1} \to [0, \infty)$，以下等式成立：

$$\int \mathbb{E}_{\delta_{z_1} + \ldots + \delta_{z_l} + \delta_y}\left[F(\eta_t)\right] \lambda(\mathrm{d}y) = \int \mathbb{E}_{\delta_{z_1} + \ldots + \delta_{z_l}}\left[F(\eta_t + \delta_y)\right] \lambda(\mathrm{d}y) \tag{5.3}$$

对于 $z = (z_1, \ldots, z_l) \in \mathbb{R}^l$，该等式在 $\lambda^{\otimes l}$-几乎处处成立。$l = 0$ 的情形如下：$\int \mathbb{E}_{\delta_y}\left[F(\eta_t)\right] \lambda(\mathrm{d}y) = \int F(\delta_y) \lambda(\mathrm{d}y)$。

为证明 (5.3)，我们将等式右边和左边同时乘以任意可测函数 $\varphi : \mathbb{R}^l \to [0, \infty)$，并对 $\lambda^{\otimes l}$ 积分。由于 (5.3) 的右边和左边关于 $(z_1, \ldots, z_l)$ 都是对称的，因此只需对对称函数 φ 积分。令 $t \geq 0$，$l \in \mathbb{N}$。利用可逆性，我们得到

$$\begin{aligned} &\int \varphi(x_1, \ldots, x_l) \int \mathbb{E}_{\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_l} + \delta_y}\left[F(\eta_t)\right] \lambda(\mathrm{d}y) \lambda^{\otimes l}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_l)) \\ &= \int \widetilde{\varphi \otimes \mathbb{I}}(x_1, \ldots, x_l, y) \mathbb{E}_{\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_l} + \delta_y}\left[F(\eta_t)\right] \lambda^{\otimes (l+1)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_l, y)) \\ &= \int P_t^{[l+1]}\Big(\widetilde{\varphi \otimes \mathbb{I}}\Big)(x_1, \ldots, x_l, y) F(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_l} + \delta_y) \lambda^{\otimes (l+1)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_l, y)). \end{aligned} \tag{5.4}$$

应用（5.2），并再次利用可逆性，可将（5.4）变换为

$$\begin{aligned} &\int \Big(\widetilde{(P_t^{[l]}\varphi) \otimes \mathbb{I}}\Big)(x_1, \ldots, x_l, y) F(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_l} + \delta_y) \lambda^{\otimes (l+1)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_l, y)) \\ &\quad = \int P_t^{[l]}\varphi(x_1, \ldots, x_l) \int F(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_l} + \delta_y) \lambda(\mathrm{d}y) \lambda^{\otimes l}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_l)) \\ &\quad = \int \varphi(x_1, \ldots, x_l) \int \mathbb{E}_{\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_l}}\left[F(\eta_t + \delta_y)\right] \lambda(\mathrm{d}y) \lambda^{\otimes l}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_l)). \end{aligned}$$

由此可得（5.3）。

令 ζ 为强度测度为 λ 的适当泊松过程。方程 (5.3)使我们能够证明交织关系 (2.12)。令 $f_n \in \mathcal{C}_n$ 为对称的，并选取 $F : \mathbf{N}_n \to \mathbb{R}$，使得

$f_n = F \circ \iota_n$。因此，利用 (2.9) 和一致性，我们得到如下结果。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\zeta\left[I_n f_n(\eta_t)\right] \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathbb{E}_\zeta\left[\iint f_n(x_1,\dots,x_n) \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(x_{k+1},\dots,x_n)) \eta_t^{(k)}(\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k)) \right] \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \iint \mathbb{E}_{\delta_{x_1}+\dots+\delta_{x_k}}\left[F(\eta_t + \delta_{x_{k+1}} + \dots + \delta_{x_n})\right] \\
&\qquad\qquad \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(x_{k+1},\dots,x_n)) \zeta^{(k)}(\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k)).
\end{aligned}$$

对 $n-k$ 反复使用 (5.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{E}_{\delta_{x_1}+\dots+\delta_{x_k}}\left[F(\eta_t + \delta_{x_{k+1}} + \dots + \delta_{x_n})\right] \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(x_{k+1},\dots,x_n)) \\
&\qquad= \int \mathbb{E}_{\delta_{x_1}+\dots+\delta_{x_n}}\left[F(\eta_t)\right] \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(y_{x+1},\dots,x_n)) \\
&\qquad= \int P_t^{[n]} f_n(x_1,\dots,x_n) \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(x_{k+1},\dots,x_n))
\end{aligned}$$

对于 $\lambda^{\otimes k}$-几乎所有的 $(y_1,\dots,y_k)$。由于 $\lambda^{\otimes k}$ 是强度测度为 λ 的泊松过程的第 k 阶阶乘矩测度，因此对 ζ 的第 k 阶阶乘测度积分是有定义的，结果为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\zeta\left[I_n f_n(\eta_t)\right] \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \iint P_t^{[n]} f_n(x_1,\dots,x_n) \lambda^{\otimes(n-k)}(\mathrm{d}(x_{k+1},\dots,x_n)) \zeta^{\otimes k}(\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k)) \\
&\quad= I_n P_t^{[n]} f_n(\zeta)
\end{aligned}$$

几乎必然。

接下来，我们将 (2.12) 推广至包含 $f_n \in L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes n})$。在第4.1节中，我们观察到，在定理 4.4 (i) 的假设下，测度 π_λ 对 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 不变。因此，期望值 $\mathbb{E}_\zeta\left[F(\eta_t)\right]$ 对于 π_λ 下的等价类是良好定义的。此外，我们有

$$\left\|\mathbb{E}_\zeta\left[F(\eta_t)\right]\right\|_{L^2} \leq \|F\|_{L^2(\pi_\lambda)}, \qquad F \in L^2(\pi_\lambda) \tag{5.5}$$

其中 $L^2 := L^2(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 和 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 表示定义 ζ 的概率空间。由于 $\mathcal{C}_n$ 在 $L^2(\lambda^{\otimes n})$ 中稠密，存在一个序列 $f_n^k \in \mathcal{C}_n$，使得当 $k \to \infty$ 时 $f_n^k \to f_n$。由于 f_n 是对称的，我们也可以选择每个 f_n^k 为对称的。利用 (5.5) 和正交关系 (2.10)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{E}_\zeta\left[I_n f_n(\eta_t)\right] - I_n P_t^{[n]} f_n(\zeta)\right\|_{L^2} \\
&\qquad\leq \left\|\mathbb{E}_\zeta\left[I_n f_n(\eta_t) - I_n f_n^k(\eta_t)\right]\right\|_{L^2} + \left\|I_n P_t^{[n]} f_n(\zeta) - I_n P_t^{[n]} f_n^k(\zeta)\right\|_{L^2} \\
&\qquad\leq \sqrt{n}\left\|f_n - f_n^k\right\|_{L^2(\lambda^{\otimes n})} + \sqrt{n}\left\|P_t^{[n]} f_n - P_t^{[n]} f_n^k\right\|_{L^2(\lambda^{\otimes n})} \\
&\qquad\leq 2\sqrt{n}\left\|f_n - f_n^k\right\|_{L^2(\lambda^{\otimes n})} \to 0, \qquad k \to \infty.
\end{aligned}$$

在第三个不等式中，我们利用了 $P_t^{[n]}$ 是 $L^2_{\mathrm{sym}}(\lambda^{\otimes n})$ 上的压缩算子这一性质；这直接源于 $\lambda^{\otimes n}$ 在 ι_n 下的推前测度具有不变性。因此，$\mathbb{E}_\zeta\left[I_n f_n(\eta_t)\right] = I_n P_t^{[n]} f_n(\zeta)$ 几乎必然成立。

□

回忆一下，$(a)^{(k)} := a(a+1)\cdots(a+k-1)$，$(a)^{(0)} := 1$，即上升阶乘；以及 $(a)_k := a(a-1)\cdots(a-k+1)$，$(a)_0 := 1$，即下降阶乘。

定理 4.4 (ii) 的证明。该证明与泊松情形的证明类似，仅有少量改动：对于帕斯卡情形，方程 (5.3) 具有类似的形式，即由下式给出。

$$\int \mathbb{E}_{\delta_{z_1}+\ldots+\delta_{z_l}+\delta_y}\left[F(\eta_t)\right](\delta_{z_1}+\ldots+\delta_{z_l}+\alpha)(\mathrm{d}y) = \mathbb{E}_{\delta_{z_1}+\ldots+\delta_{z_l}}\left[\int F(\eta_t+\delta_y)\,(\eta_t+\alpha)(\mathrm{d}y)\right]$$

对于 $t \geq 0$、$l \in \mathbb{N}_0$、可测 $F\colon \mathbf{N}_{l+1} \to [0,\infty)$ 和 $z = (z_1, \ldots, z_l) \in \mathbb{R}^l$ λ_l-几乎处处。

□

命题 $3\,4$ ζ p α $A = A_1^{d_1} \times \cdots \times A_N^{d_N}$ $A_1 \ldots A_N \subset \mathbb{R}$ $d_1 + \ldots + d_N = n$ 的证明。设为具有参数 和 的帕斯卡过程，并固定 ，其中 ， 、 是互不相交的可测集，且 。首先，注意到（例如参见 [FJRW21，方程 (3.4)]）

$$\int \mathbb{1}^A \,\mathrm{d}\mu^{(n)} = (\mu(A_1))_{d_1} \cdots (\mu(A_N))_{d_N}. \tag{5.6}$$

其次，下面的引理 5.2 意味着

$$\int \mathbb{1}^A \,\mathrm{d}\lambda_n = (\alpha(A_1))^{(d_1)} \cdots (\alpha(A_N))^{(d_N)}. \tag{5.7}$$

通过结合 (5.6) 和 (5.7)，并利用参数为 p 和 a 的负二项分布的 k 阶阶乘矩为 $\left(\frac{p}{1-p}\right)(a)^{(k)}$ 这一事实，我们得到 $\mathbb{E}\left[\int \mathbb{1}^A \,\mathrm{d}\mu^{(n)}\right] = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \lambda_n(A)$。利用标准的测度论论证，可以将此等式推广到 $\mathbb{R}^n$ 的所有可测子集。

□

5.3 无穷维迈克斯纳多项式：一个显式公式

本节证明命题 3.2。证明策略如下：一方面，正如注 3.3 中所述，$\mathcal{M}^{p}{}_{,n}{}^{\alpha} f_n$ 由 (3.1) 定义的、针对特定 f_n 的对象可化为单变量迈克斯纳多项式的乘积。我们将在下文的命题 5.3 中证明这一性质，为此先陈述两个预备引理。另一方面，众所周知（参见 [FJRW21，命题 5.3]，另见 [Lyt03b，引理 3.1]），由 (3.3) 右端定义的无穷维正交多项式对于该 f_n具有相同的乘积结构。随后通过标准的测度论论证即可得到等式。

固定由 $\mathbb{R}$ 的可测集合 B_1、.....、B_N构成的一个划分 $n < m$、z_1、.....、$z_n \in \mathbb{R}$，并对 $k \in \{1, \ldots, N\}$ 置 $c_k := (\delta_{z_1} + \ldots + \delta_{z_n})(B_k)$。

引理 5.1. 设 $i_{n+1}, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, N\}$ 并令 $e_k := \sum_{l=n+1}^{m} \mathbb{1}^{\{i_l = k\}}$ 对于 $k \in \{1, \ldots, N\}$。那么，

$$\int \mathbb{1}^{B_{i_{n+1}} \times \ldots \times B_{i_m}}(y_{n+1}, \ldots, y_m)\, \kappa_{m,n}(z_1, \ldots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \ldots, y_m)) = \prod_{k=1}^{N} (\alpha(B_k) + c_k)^{(e_k)}$$

成立。

Thereby, we put $\infty^{(k)} := \infty$ for $k \geq 1$ and $\infty^{(0)} := 0$.

证明。我们通过对 m 进行归纳来证明该方程。对于 $m = n+1$，该陈述是 $\kappa_{n+1,\,n}$ 定义的直接推论。假设该陈述对于某个固定的 $m > n$ 成立。令

$$\sum_{l=n+1}^{m+1} \mathbb{1}^{\{i_l = k\}} = e_k + \mathbb{1}^{\{k = i_{m+1}\}}$$

对于任意的 $i_{m+1} \in \{1, \dots, N\}$。那么，由 (3.2) 式可得，

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{I}^{B_{i_{n+1}} \times \dots B_{i_{m+1}}}(y_{n+1}, \dots, y_{m+1}) \kappa_{m+1,n}(z_1, \dots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \dots, y_{m+1})) \\
&\quad = \int \mathbb{I}^{B_{i_{n+1}} \times \dots \times B_{i_m}}(y_{n+1}, \dots, y_m) \kappa_{m+1,m}(z_1, \dots, z_n, y_{n+1}, \dots, y_m, B_{i_{m+1}}) \\
&\qquad\qquad \kappa_{m,n}(z_1, \dots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \dots, y_m)) \\
&\quad = (\alpha(B_{i_{m+1}}) + c_{i_{m+1}} + e_{i_{m+1}}) \prod_{k=1}^{N} (\alpha(B_k) + c_k)^{(e_k)} = \prod_{k=1}^{N} (\alpha(B_k) + c_k)^{(e_k + \mathbb{I}\{k = i_{m+1}\})}. \square
\end{aligned}$$

引理 5.2. 设 $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{N}_0$ 满足 $d_1 + \dots + d_N = m$。则，

$$\begin{aligned}
&\int \widetilde{\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}}(z_1, \dots, z_n, y_{n+1}, \dots, y_m) \, \kappa_{m,n}(z_1, \dots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \dots, y_m)) \\
&\qquad = \frac{1}{(m)_n} \prod_{k=1}^{N} (d_k)_{c_k} (\alpha(B_k) + c_k)^{(d_k - c_k)} \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

$\widetilde{\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}}$成立，其中 $\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}$表示 $\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}$的对称化。

若存在一个 k 使得 $d_k < c_k$，则 $(d_k)_{c_k}$ 变为零，从而 (5.8) 右侧为零。此外，若存在一个 k 使得 $d_k > c_k$ 且 $\alpha(B_k) = \infty$，则 (5.8) 右侧等于无穷大。

证明. 我们将该积分分解为

$$\begin{aligned}
&\int \widetilde{\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}}(z_1, \dots, z_n, y_{n+1}, \dots, y_m) \kappa_{m,n}(z_1, \dots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \dots, y_m)) \\
&\quad = \sum_{i_{n+1}, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\}} \int \mathbb{I}^{B_{i_{n+1}} \times \dots \times B_{i_m}}(y_{n+1}, \dots, y_m) \widetilde{\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}}(z_1, \dots, z_n, y_{n+1}, \dots, y_m) \\
&\qquad\qquad \kappa_{m,n}(z_1, \dots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \dots, y_m)). \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

若给定 $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$，且对所有 $k \in \{1, \dots, N\}$，$(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m})(B_k) = d_k$，则对称化 $\widetilde{\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}}(x_1, \dots, x_m)$ 等于 $^{d_1! \cdots d_N! m!}$。否则，它等于零。因此，$\widetilde{\mathbb{I}^{B_1^{d_1} \times \dots \times B_N^{d_N}}}(z_1, \dots, z_n, y_{n+1}, \dots, y_m) > 0$ 等价于 $\sum_{l=n+1}^{m} \mathbb{I}^{\{i_l = k\}} + c_k = d_k$。将引理 5.1 应用于 (5.9)，得到：

$$\begin{aligned}
&\frac{d_1! \cdots d_N!}{m!} \sum_{\substack{i_{n+1}, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\} \\ \sum_{l=n+1}^{m} \mathbb{I}^{\{i_l = k\}} + c_k = d_k}} \int \mathbb{I}^{B_{i_{n+1}} \times \dots \times B_{i_m}}(y_{n+1}, \dots, y_m) \kappa_{m,n}(z_1, \dots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \dots, y_m)) \\
&= \frac{d_1! \cdots d_N!}{m!} \sum_{\substack{i_{n+1}, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\} \\ \sum_{l=n+1}^{m} \mathbb{I}^{\{i_l = k\}} + c_k = d_k}} \prod_{k=1}^{N} (\alpha(B_k) + c_k)^{(d_k - c_k)}.
\end{aligned}$$

最后，利用恒等式

$$\sum_{\substack{i_{n+1}, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\} \\ \sum_{l=n+1}^{m} \mathbb{I}^{\{i_l = k\}} + c_k = d_k}} 1 = (m-n)! \prod_{k=1}^{N} \mathbb{I}^{\{d_k \geq c_k\}} \frac{1}{(d_k - c_k)!},$$

我们得出证明。 $\square$

回顾一下，首一单变量 Meixner 多项式由（3.4）给出。

引理 5.3。设 d_1，...，$d_N \in \mathbb{N}_0$，其中 $d_1 + \ldots + d_N = m$ 且 $\mu \in \mathbf{N}$。假设对于所有满足 $d_k > 0$ 的 k，有 $\mu(B_k) < \infty$ 且 $0 < \alpha(B_k) < \infty$。那么，方程

$$\mathcal{M}_m^{p,\alpha}{}_{\bigotimes B_1^{d_1} \times \cdots \times B_N^{d_N}}(\mu) = \prod_{k=1}^{N} \mathscr{M}_{d_k}^{p,\alpha(A_k)}(\mu(B_k))$$

成立。

证明。令 $b_k := \mu(B_k) \in \mathbb{N}_0$。应用引理 5.1 以及阶乘测度$\mu^{(n)}$的定义，可得

$$\begin{aligned}
&\iint \widetilde{\bigotimes B_1^{d_1} \times \cdots \times B_N^{d_N}}(z_1, \ldots, z_n, y_{n+1}, \ldots, y_m)\, \kappa_{m,n}(z_1, \ldots, z_n, \mathrm{d}(y_{n+1}, \ldots, y_m))\mu^{(n)}(\mathrm{d}(z_1, \ldots, z_n)) \\
&\qquad = \frac{n!}{(m)_n} \sum_{\substack{c_1,\ldots,c_N \in \mathbb{N}_0 \\ c_1+\ldots+c_N=n}} \prod_{k=1}^{N} \frac{(b_k)_{c_k}}{c_k!} (d_k)_{c_k} (\alpha(B_k) + c_k)^{(d_k - c_k)}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_m^{p,\alpha}{}_{\bigotimes B_1^{d_1} \times \cdots \times B_N^{d_N}}(\mu) &= \prod_{k=1}^{N} \sum_{c_k=d_k}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{c_k - d_k} \frac{(b_k)_{c_k}}{c_k!} (d_k)_{c_k} (\alpha(B_k) + c_k)^{(d_k - c_k)} \\
&= \prod_{k=1}^{N} \mathscr{M}_{d_k}^{p,\alpha(B_k)}(\mu(B_k)).
\end{aligned}$$

□

我们将$\hat{}\, \mathcal{M}^{p}{}_{,n}{}^{\alpha} f_n$ 定义为 (3.3) 右侧的表达式。

命题 3.2 的证明。固定 $m \in \mathbb{N}$ 和一个有界集 $B \subset \mathbb{R}$。考虑函数

$$f_m = {}_{\bigotimes B_1^{d_1} \times \cdots \times B_N^{d_N}} \tag{5.10}$$

其中 B_1、...、B_N 是 B、$d_1 + \ldots + d_N = m$ 中互不相交的可测子集，并且 d_1、...、$d_N \in \mathbb{N}$。我们断言，函数 f_m 满足 (3.3)。

I确实，若对所有 k，$0 < \alpha(B_k)$，则应用引理 5.3 和 [FJRW21，命题 5.3] (se e 也有 Lyt03b，引理 3.1]) 可得

$$\hat{\mathcal{M}}_m^{p,\alpha} f_m(\mu) = \prod_{k=1}^{N} \mathscr{M}_{d_k}^{p,\alpha(A_k)}(\mu(B_k)) = \mathcal{M}_m^{p,\alpha} f_m(\mu)$$

对 $\rho_{p,\ \alpha}$-几乎所有 $\mu \in \mathbf{N}$。

另一方面，若存在一个 $k \in \{1, \ldots, N\}$，使得 $\alpha(B_k) = 0$，则 $f_m = {}_{\bigotimes B_1^{d_1} \times \cdots \times B_N^{d_N}} = 0$ λ_m-几乎处处成立。因此，利用 (3.1)、命题 3.4 和 (3.6)，我们得到

$$\int |\mathcal{M}_m^{p,\alpha} f_m| \, \mathrm{d}\rho_{p,\alpha} \le \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^m \int \widetilde{f_m} \, \mathrm{d}\lambda_m = 0,$$

这意味着 $\mathcal{M}^{p}{}_{,\ m}{}^{\alpha} f_m = 0$ $\rho_{p,\ \alpha}$-几乎必然。此外，根据正交关系 (3.7)（由 [FJRW21] 或 [Lyt03a] 证明），$\hat{}\, \mathcal{M}^{p,\ \alpha}$ 在 $L^2(\lambda_n)$ 上定义良好，对 $\mathcal{M}^{p,\ \alpha}$ 成立。因此，$\hat{}\mathcal{M}^{p,\ \alpha} f_m = 0 = \mathcal{M}^{p}{}_{,\ m}{}^{\alpha} f_m$ $\rho_{p,\ \alpha}$-几乎必然。

利用函数单调类定理（参见例如 [Bog07，定理 2.12.9.]），我们得到 (3.3) 对 $f_m \in \mathcal{C}_m$ 也成立。更准确地说，令

$$\mathcal{H} = \left\{ g_m : B \to \mathbb{R} \text{ measurable, bounded} : \mathcal{M}_m^{p,\alpha} \hat{g}_m = \hat{\mathcal{M}}_m^{p,\alpha} \hat{g}_m \right\}$$

其中 $\hat{g}_m$ 定义为在 B 上等于 g_m，在 $\mathbb{R} \setminus B$ 上等于零。于是， $\mathcal{H}$ 包含常函数，且在取一致极限和单调极限时保持封闭。此外，集合

$$\mathcal{H}_0 = \{\mathbb{I}_{C_1 \times \cdots \times C_m} : C_1, \ldots, C_m \subset B \text{ measurable}\}$$

~在乘积运算下封闭，且包含于 $\mathcal{H}$，因为 $\mathbb{I}^{C_1 \times \cdots \times C_m}$ 可以写成形如 (5.10) 的函数的对称化的线性组合。因此，根据函数单调类定理， $\mathcal{H}$ 等于 B 上所有有界可测函数构成的集合。

□

5.4 n 粒子动力学的可逆测度

命题 2.5 的证明。为了证明 $\lambda^{\otimes n}$ 是 n 粒子动力学的可逆测度，其中 λ 表示勒贝格测度，我们进行如下简单计算。设 $n \in \mathbb{N}$ 和$t > 0$为固定值。定义 $Y := (Y_k)_{k=1}^n$，其中 $Y_k := \sqrt{1-a}B_{k,t} + \sqrt{a}B_t$，对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$成立。利用 (2.1) 中给出的相关布朗运动的构造，我们得到 $X_{k,t} = Y_k + x_k$。然后，利用富比尼定理、变量代换，以及 $-Y$ 与 Y同分布这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{E}\left[f_n(Y+x)\right] g_n(x) \lambda^{\otimes n}(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f_n(-Y+x) g_n(x) \lambda^{\otimes n}(\mathrm{d}x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int f_n(x) g_n(x+Y) \lambda^{\otimes n}(\mathrm{d}x)\right] = \int f_n(x) \mathbb{E}\left[g_n(x+Y)\right] \lambda^{\otimes n}(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

对所有 $f_n, g_n \in \mathcal{C}_n$。 □

接下来，我们证明命题 3.6。关于由 n 个有序粘性布朗运动构成的系统，其可逆测度已为人所知，见 [BW23 定理 4.17]。从这个可逆测度出发，我们得到其对称化等于测度 λ_n （相差一个常数因子）；该测度也是帕斯卡过程的阶乘矩测度（同样相差一个常数因子）。

固定 $n \in \mathbb{N}$。我们用记号 Σ_n 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$ 的划分集合，并将 Π_n 定义为 $\{1, \ldots, n\}$的有序划分集合，其中

$$\Pi_n := \{(a_1, \ldots, a_k) : a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, a_1 + \ldots + a_k = n\}.$$

对于每个 $\pi = (a_1, .., a_k) \in \Pi_n$ 以及每个函数 $f_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们定义函数 $(f_n)_\pi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 如下：

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto f_n(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{a_1 \text{ times}}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{a_k \text{ times}}).$$

我们在 $\mathbb{R}^n$ 上定义测度 $\lambda_\pi^{\geq}$ 如下：

$$\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_\pi^{\geq} := \int \mathbb{I}_{\{x_1 \geq \ldots \geq x_k\}} (f_n)_\pi(x_1, \ldots x_k) \lambda^{\otimes k}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_k))$$

并令

$$m_\theta^{(n)} := \sum_{\pi \in \Pi_n} \theta^{|\pi| - n} \left(\prod_{A \in \pi} \frac{1}{|A|}\right) \lambda_\pi^{\geq}.$$

我们考虑映射 $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geq \ldots \geq x_n\}$，该映射按照降序排列向量的各个分量。令 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (Z_t^n)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x^n)_{x \in \mathbb{R}^n})$ 表示与 n 粒子动力学相关的马尔可夫族，具体如引理 2.2 的证明中所述；简记$Z_t = Z_t^n$、 $\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_x^n$，并令 $Y_t \colon = \varphi(Z_t)$。

我们将 $m_\theta^{(n)}$ 的对称化定义为 $\widetilde{m}_\theta^{(n)} := \frac{1}{n!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} (T_s)_\# m_\theta^{(n)}$，其中 $(T_s)_\# m_\theta^{(n)}$ 表示 $m_\theta^{(n)}$ 在映射 $T_s \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$ 下的推前。 $\mathfrak{S}_n$ 表示 $\{1, \ldots, n\}$ 上的排列集合。

命题 3.6 的证明。为了证明对称化 $\widetilde{m}_\theta^{(n)}$ 在映射 $(x_1,\dots,x_n)\mapsto \delta_{x_1}+\ldots+\delta_{x_n}$ 下的推前测度对于无标号粘滞布朗运动 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 是可逆的，只需验证

$$\int (P_t^{[n]} f_n) g_n \,\mathrm{d}\lambda_n = \int (P_t^{[n]} g_n) f_n \,\mathrm{d}\lambda_n$$

对于对称的 $f_n, g_n \in \mathcal{C}_n$。事实上，利用 $f_n\circ\varphi = f_n$ 和 $\varphi_\# \widetilde{m}_\theta^{(n)} = m_\theta^{(n)}$，我们得到

$$\begin{aligned}\int f_n(x)\mathbb{E}_x\left[g_n(Z_t)\right]\widetilde{m}_\theta^{(n)}(\mathrm{d}x) &= \int f_n(\varphi(x))\mathbb{E}_x\left[g_n(Z_t)\right]\widetilde{m}_\theta^{(n)}(\mathrm{d}x)\\ &= \int f_n(\varphi(x))\mathbb{E}_{\varphi(x)}\left[g_n(Y_t)\right]\widetilde{m}_\theta^{(n)}(\mathrm{d}x)\\ &= \int f_n(y)\mathbb{E}_y\left[g_n(Y_t)\right] m_\theta^{(n)}(\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{5.11}$$

因此，在第二个等式中，我们使用强一致性性质 (2.3)。更具体地，固定 $x\in\mathbb{R}^n$，并令 $s\in\mathfrak{S}_n$ 满足 $T_s(x) = \varphi(x)$。应用 (2.3)，并利用 $g_n\circ T_s = g_n$ 这一事实，我们得到

$$\mathbb{E}_x\left[g_n(Z_t)\right] = \mathbb{E}_x\left[g_n(T_s(Z_t))\right] = \mathbb{E}_{T_s(x)}\left[g_n(Z_t)\right] = \mathbb{E}_{\varphi(x)}\left[g_n(Y_t)\right].$$

Brockington 和 Warren 在 [BW23, 定理 4.17] 中证明，对于具有黏性 θ 的 n 个有序均匀粘滞布朗运动，$m_\theta^{(n)}$ 是可逆的。因此，(5.11) 关于 f_n 和 g_n 是对称的。

因此，为完成证明，只需证明 $m_\theta^{(n)}$ 的对称化与 λ_n 相差一个常数。具体而言，我们声称 $\widetilde{m}_\theta^{(n)} = \frac{1}{\theta^n n!}\lambda_n$。回顾一下，我们通过 (3.5) 使用测度 α 构造了 $\lambda_n := \theta\lambda$。注意，$\widetilde{m}_\theta^{(n)}$ 和 λ_n 在变量置换下均保持不变。因此，只需证明对所有对称函数 $f_n\in\mathcal{C}_n$，$\int f_n \,\mathrm{d}\widetilde{m}_\theta^{(n)} = \int f_n \,\mathrm{d}\lambda_n$ 成立。

利用勒贝格测度是弥散的这一事实，即对于所有 $x\in\mathbb{R}$，$\lambda(\{x\}) = 0$，我们得到对于所有 $\pi = (a_1,\dots,a_k)\in\Pi_n$

$$\begin{aligned}\int (f_n)_\pi \,\mathrm{d}\lambda^{\otimes k} &= \sum_{s\in\mathfrak{S}_k}\int \mathbb{I}_{\{x_{s(1)}\geq\ldots\geq x_{s(k)}\}}(f_n)_\pi(x_1,\dots,x_k)\lambda^{\otimes k}(\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k))\\ &= \sum_{s\in\mathfrak{S}_k}\int \mathbb{I}_{\{x_1\geq\ldots\geq x_k\}}(f_n)_\pi(x_{s^{-1}(1)},\dots,x_{s^{-1}(k)})\lambda^{\otimes k}(\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k))\\ &= \sum_{s\in\mathfrak{S}_k}\int f_n \,\mathrm{d}\lambda^{\geq}_{(a_{s(1)},\dots,s_{s(k)})},\end{aligned}$$

因为 $(f_n)_\pi$ 是对称的。

我们注意到，有序划分的每个置换 $(a_{s(1)},\dots,a_{s(k)})$ 本身也是一个有序划分。利用这一事实以及（3.5），我们得到

$$\begin{aligned}\int f_n \,\mathrm{d}\widetilde{m}_\theta^{(n)} = \int f_n \,\mathrm{d}m_\theta^{(n)} &= \sum_{\pi=(a_1,\dots,a_k)\in\Pi_n}\theta^{k-n}\frac{1}{k!}\frac{1}{a_1\cdots a_k}\int (f_n)_\pi \,\mathrm{d}\lambda^{\otimes k}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma=\{B_1,\dots,B_k\}\in\Sigma_n}\theta^{k-n}(|B_1|-1)!\cdots(|B_k|-1)!\int (f_n)_\sigma\lambda^{\otimes k} = \frac{1}{\theta^n n!}\int f_n \,\mathrm{d}\lambda_n.\end{aligned}$$

我们可以将对有序划分 Π_n 的求和转换为对划分 Σ_n 的求和，因为等式

$$\begin{aligned}&|\{B_1,\dots,B_k\}\in\Sigma_n : \{|B_1|,\dots,|B_k|\} = \{l_1,\dots,l_k\}|\\ &\qquad = \frac{n!}{k!}\frac{1}{l_1!\cdots l_k!}|(a_1,\dots,a_k)\in\Pi_n : \{a_1,\dots,a_k\} = \{l_1,\dots,l_k\}|,\end{aligned}$$

对所有满足 $l_1+\ldots+l_k = n$ 的 l_1、.....、$l_k\in\mathbb{N}$、$k\in\mathbb{N}$ 均成立。 □

致谢

感谢 Sabine Jansen、Frank Redig、Simone Floreani 和 Jan Philipp Neumann 提供了有益的讨论。本研究得到德国卓越战略——EXC-2111——390814868 项目的支持。

参考文献

[ACR18] M. Ayala、G. Carinci 和 F. Redig，《定量玻尔兹曼–吉布斯原理与正交多项式对偶》，《统计物理学杂志》171（2018年），第6期，980–999页。[ACR21a] ———, SIP粒子凝聚与粘性布朗运动，《统计物理学杂志》183（2021年），第3期，1–40页。[ACR21b] ———, 高阶涨落场与正交对偶多项式，《电子概率杂志》26（2021年），1–35页。[AD86] D. Aldous 和 P. Diaconis，《洗牌与停时》，《美国数学月刊》93（1986年），第5期，333–348页。[AOW19] T. Assiotis、N. O'Connell 和 J. Warren，《交错扩散》，《概率研讨会》L. ´《概率研讨会》L´《概率讲义》，第2252卷，施普林格，尚，2019年，第301–380页。], Arr[R.A. Arratia，《直线上的合并布朗运动》，博士论文，威斯康星大学，麦迪逊，1979年。79] Ber[Yu.M. Berezansky，《无穷维非高斯分析与广义移位算子》，《泛函分析及其应用》30（1996年），第4期，61–65页。96] Ber[《广义函数上的帕斯卡测度及相应的广义迈克斯纳多项式》，《泛函分析与拓扑方法》8（2002年），第1期，1–13页。02] ———, BGS[N. Berestycki、C. Garban 和 A. Sen，《合并布朗流：一种新方法》，《概率年刊》43（2015年），第6期，3177–3215页。15] Bia[P. Biane，《马尔可夫半群的交织：若干例子》，《概率研讨会》，第二十九卷，《数学讲义》第1613卷，施普林格，柏林，1995年，第30–36页。´BLR[M. Bozejko、E. Lytvynov 和 I. Rodionova，《无穷维中的扩展任意子福克空间与非交换迈克斯纳型正交多项式》，《俄罗斯数学调查》70（2015年），第5期，857页。15] BO[A. Borodin 和 G. Olshanski，《Thoma锥上的马尔可夫动力学：一种具有无限多个粒子的时变行列式过程模型》，《电子概率杂志》18（2013年），第75期，43页。13] Bog[V.I. Bogachev，《测度论》，施普林格，柏林，2007年。07] BR[G. Barraquand 和 M. Rychnovsky，《粘滞布朗运动的大偏差》，《电子概率杂志》25（2020年），1–52页。20] BW[D. Brockington 和 J. Warren，《粘滞布朗运动的贝特 Ansatz（贝特拟设）》，《随机过程及其应用》162（2023年），1–48页。23] CFG[G. Carinci、C. Franceschini、C. Giardin+19] a、W. Groenevelt 和 F. Redig，《马尔可夫过程的正交对偶与酉对称性》，《SIGMA：对称性、可积性与几何方法及其应用》15（2019年），第053号，1–27页。`CGR[G. Carinci、C. Giardin20] a 和 F. Redig，《两个相互作用粒子的精确公式及其在具有对偶性的粒子系统中的应用》，《应用概率年刊》30（2020年），第4期，1934–1970页。

[CGR21] G. Carinci、C. Giardin`a 和 F. Redig，《相容粒子系统与对偶性》，《电子概率杂志》26（2021年），第125期，1–31页。[CPY98] P. Carmona、F. Petit 和 M. Yor，《贝塔-伽马随机变量及某些马尔可夫过程之间的交织关系》，《伊比利亚美洲数学杂志》14（1998年），第2期，311–367页。[DDP23] S. Das、H. Drillick 和 S. Parekh，《粘性布朗运动的KPZ方程极限》，预印本，arXiv:2304.14279，2023年。[DF90] P. Diaconis 和 J.A. Fill，《通过一种新的对偶形式得到的强平稳时刻》，《概率年刊》18（1990年），第4期，1483–1522页。[DG11] D.A. Dawson 和 A. Greven，《具有突变和选择的空间相互作用Fleming-Viot过程的对偶性》，预印本，arXiv:1104.1099，2011年。[DØP04] G. Di Nunno、B. Øksendal 和 F. Proske，《L ´ev过程的白噪声分析》，《泛函分析杂志》206（2004年），第1期，109–148页。[DP91] A. De Masi 和 E. Presutti，《流体动力学极限的数学方法》，数学讲义，施普林格，柏林，1991年。[Dub04] J. Dub´edat，《反射平面布朗运动、交织关系与穿越概率》，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》40（2004年），第5期，539–552页。´Dyn[E.B. Dynkin，《马尔可夫过程》，第I、II卷，《数学科学基础丛书》第121、122卷，Academic Press 出版社，纽约；施普林格出版社，柏林-哥廷根-海德堡，1965年。¨EK[S.N. Ethier 和 T.G. Kurtz，《马尔可夫过程：刻画与收敛》，Wiley 概率与数理统计丛书，1986年。86] Eth[A. Etheridge，《课程11——波动种群中的演化》，载于《数学统计物理》，Elsevier，2006年，第489–545页。06] Fel[William Feller，《抛物型偏微分方程及相关变换半群》，《数学年刊》55（1952年），第3期，468–519页。52] FG[C. Franceschini 和 C. Giardin19] a，《随机对偶性与正交多项式》，《概率论与统计物理专题研究——III》，施普林格，2019年，第187–214页。`FJRW[S. Floreani、S. Jansen、F. Redig 和 S.Wagner，《相容马尔可夫过程的交织与对偶性》，预印本，arXiv:2112.11885，2021年。21] FRS[S. Floreani、F. Redig 和 F. Sau，《边界驱动粒子系统的正交多项式对偶与非平衡关联》，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》58（2022年），第1期，220–247页。´GKR[C. Giardin07] a、J. Kurchan 和 F. Redig，《热传导模型的对偶性与精确关联》，《数学物理杂志》48（2007年），第3期，033301。`GKRV[C. Giardin09] a、J. Kurchan、F. Redig 和 K. Vafayi，《相互作用粒子系统中的对偶性与隐藏对称性》，《统计物理学杂志》135（2009年），第1期，25–55页。`Gro[W. Groenevelt，《由李代数表示导出的正交随机对偶函数》，《统计物理学杂志》174（2019年），第1期，97–119页。19] Har[T.E. Harris，《实数集上的合并与非合并随机流》，《随机过程及其应用》17（1984年），第2期，187–210页。1, HC[M. Holmes-Cerfon，《粘滞球簇》，《凝聚态物理年度评论》8（2017年），77–98页。

[HW09] C. Howitt 和 J. Warren，《布朗运动的一致族与核的随机流》，《概率年刊》37（2009年），第 4 期，1237–1272。[JK14] S. Jansen 和 N. Kurt，《关于马尔可夫过程对偶性概念的研究》，《概率调查》11（2014），59–120。[Kal17] O. Kallenberg，《随机测度：理论与应用》，《概率论与随机建模》，施普林格，2017年。[Kin67] J.F.C. Kingman，《完全随机测度》，《太平洋数学杂志》21（1967），第 1 期，59–78。[KKO+09]Y.G. Kondratiev、T. Kuna、M.J. Oliveira、J.L. da Silva 和 L. Streit，《连续粒子系统自由 Kawasaki 动力学的流体动力学极限》，预印本。arXiv:0912.1312，2009年。[KKR07] Y. Kabanov、M. Kijima 和 S. Rinaz，《带粘性障碍的正利率模型》，《定量金融》7（2007），第 3 期，269–284。[KLR08] Y.G. Kondratiev、E. Lytvynov 和 M. R¨ockner，《连续介质中的非平衡随机动力学：自由情形》，《凝聚态物理》11（2008），第 4(56) 期，701–721。[KLS10] R. Koekoek、P.A. Lesky 和 R.F. Swarttouw，《超几何正交多项式及其 q-类比》，《施普林格数学专著》，施普林格，柏林，2010年。[KMP82] C. Kipnis、C. Marchioro 和 E. Presutti，《一个精确可解模型中的热流》，《统计物理学杂志》27（1982），第 1 期，65–74。[KP09] T.J. Kozubowski 和 K. Podg´orski，《负二项 Lévy 过程的分布性质》，《概率与数理统计》29（2009），第 1 期，43–71。´Las[G. Last，《泊松过程的随机分析》，《泊松点过程的随机分析》，博科尼-施普林格丛书，施普林格，尚，2016年，第 1–36 页。16] Len[A. Lenard，《经典统计力学中的相关函数与态的唯一性》，《数学物理通讯》30（1973），35–44。73] Len[无限多个粒子的经典统计力学系统的态。II. 相关测度的刻画，《理性力学与分析档案》59（1975），第 3 期，241–256。75] ———, Lig[T.M. Liggett，《相互作用粒子系统》，《数学经典》，施普林格，柏林，2005年。05] LP[A. Løkka 和 F.N. Proske，《泊松空间上纯跳 Lévy 过程的无穷维分析》，《斯堪的纳维亚数学》98（2006），第 2 期，237–261。06] LP ´G. Last 和 M. Penrose，《泊松过程的 Fock 空间表示、混沌展开与协方差不等式》，《概率论及相关领域》150（2011），第 3 期，663–690。[LP11] 《泊松过程讲义》，《数学统计学讲义》，剑桥大学出版社，2017年。[LR17] ———, Y. Le Jan 和 O. Raimond，《流、聚并与噪声》，《概率年刊》32（2004），第 2 期，1247–1315。[LR04] 在 [上的三个布朗流例子，《亨利·庞加莱数学研究所概率与统计年刊》50（2014），第 4 期，1323–1346。14] ———, Lyt03a ℝE. Lytvynov，《L´évy 过程的正交分解及其在伽马过程、帕斯卡过程和迈克斯纳过程中的应用》，《无穷维分析、量子概率及相关主题》6（2003），第 1 期，73–102。[Lyt03b] 无穷维中的迈克斯纳型多项式——雅可比场与正交测度，《泛函分析杂志》200（2003），第 1 期，118–149。

[Mei34] J. Meixner, 《具有特殊生成函数形式的正交多项式系》, 《伦敦数学会会刊》s1-9（1934）, 第 1 期, 6–13。[Mey08] T. Meyer-Brandis, 《由 L ́evy 白噪声驱动的希尔伯特空间值随机广义函数空间中的微分方程》, 《随机性》80（2008）, 第 4 期, 371–396。[Mic18] L. Miclo, 《关于马尔可夫相似性》, 《概率学讲义》第 XLIX 卷, 《数学讲义》, 第 2215 卷, 施普林格, 尚, 2018年, 第 375–403 页。 ́MP ́L. Miclo 和 P. Patie, 《关于交织关系》, 《泛函分析杂志》280（2021）, 第 3 期, 论文编号 108816, 53 页。[MP21] 关于 Ehrenfest、Yule 与 Ornstein-Uhlenbeck 过程之间的交织关系, 《概率学讲义》第 LI 卷, 《数学讲义》, 第 2301 卷, 施普林格, 尚, 2022年, 第 117–141 页。[Mue22] _____, C. Mueller, 《从粒子系统与对偶性的角度看随机偏微分方程》, 《随机分析：系列讲座》, 施普林格, 巴塞尔, 2015年, 第 271–295 页。 ́NS ́D. Nualart 和 W. Schoutens, 《L[évy 过程的混沌表示与可预测表示》, 《随机过程及其应用》90（2000）, 第 1 期, 109–122。15] Ogu[H. Ogura, 《泊松过程的正交泛函》, 《IEEE 信息论汇刊》18（1972）, 473–481。00] PS ́S. Pal 和 M. Shkolnikov, 《交错扩散与波动方程》, 预印本。arXiv:1306.0857, 2011年。[PS72] P. Patie 和 T. Simon, 《交织某些分数阶导数》, 《势分析》36（2012）, 第 4 期, 569–587。[RP11] L.C.G. Rogers 和 J.W. Pitman, 《马尔可夫函数》, 《概率年刊》9（1981）, 第 4 期, 573–582。[RS12] M.Z. R[acz 和 M. Shkolnikov, 《多维粘性布朗运动作为排斥过程的极限》, 《应用概率年刊》25（2015）, 第 3 期, 1155–1188。81] RS[F. Redig 和 F. Sau, 《因子化对偶、平稳乘积测度与生成函数》, 《统计物理学杂志》172（2018）, 第 4 期, 980–1008。15] Sch ́W. Schoutens, 《随机过程与正交多项式》, 《统计学讲义》, 施普林格, 纽约, 2000年。[Ser18] R.F. Serfozo, 《点过程》, 《随机模型》, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1990年, 第 1–93 页。[SSS00] E. Schertzer、R. Sun 和 J. Swart, 《布朗网络与网络中的随机流》, 《美国数学学会回忆录》227（2014）, 第 1065 号, 1–160。[Sur90] D. Surgailis, 《关于泊松多重随机积分及相关平衡马尔可夫过程》, 《随机场理论与应用》, 施普林格, 1983年, 第 233–248 页。[Sur14] 关于多重泊松随机积分及相关马尔可夫半群, 《概率与数理统计》3（1984）, 第 2 期, 217–239。[Yab83] A. Yablonski, 《独立增量过程的变分法》, 《落基山数学杂志》38（2008）, 第 2 期, 669–701。