arXiv:2305.03370v2 [math.CA] 4 Jul 2023

(β, γ)-切比雪夫函数和点的更多性质

Stefano De Marchi、Giacomo Elefante、Francesco Marchetti、Jean-Zacharie Mariethoz

*帕多瓦大学意大利“ *Tullio Levi-Civita*”数学系

摘要

最近，(β,γ)-切比雪夫函数及其相应的零点被引入，作为经典第一类切比雪夫多项式及相关根的推广。它们构成定义在 $[-1,1]$ 的某个子集上的一族正交函数，并且确实满足三项递推公式。本文介绍了这些函数的更多性质，并证明这些性质符合经典正交多项式的多项结果。此外，我们证明了一个关于勒贝格常数行为的猜想，该猜想涉及相应正交区间内 (β,γ)-切比雪夫函数的根。

关键词：切比雪夫多项式，(β,γ)-切比雪夫函数，正交函数，勒贝格常数，

1. 引言

设 $\Omega = [-1,1]$ 和 $n \in \mathbb{N}$。众所周知的第一类切比雪夫多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \geq 0, \; x \in \Omega\,,$$

是一族定义在 Ω 上、关于权函数$w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$的正交多项式。 T_n 是总次数为 n、其根

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right\}_{j=1,\ldots,n},$$

称为切比雪夫点（第一类）。这些点在 Ω 中两两不同。Ω 中另一组相关点包括区间的极值点，称为切比雪夫-洛巴托（CL）点

$$\mathcal{U}_{n+1} = \left\{ \cos\left(\frac{j\pi}{n} \right) \right\}_{j=0,\ldots,n},$$

电子邮箱地址：demarchi@math.unipd.it (Stefano De Marchi), giacomo.elefante@unipd.it (Giacomo Elefante),francesco.marchetti@unipd.it (Francesco Marchetti), jeanzacharie.mariethoz@studenti.unipd.it (Jean-Zacharie Mariethoz)

预印本已提交至爱思唯尔。 *2023*年*7*月*6*日

由该多项式的零点组成

$$\overline{T}_{n+1}(x) = \frac{(1-x^2)}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_n(x),\ x \in \Omega.$$

切比雪夫多项式及其相关点是逼近理论中的经典课题（例如，参见 [23, 27], 其中有全面的综述）。它们是构造稳定且有效的函数逼近基底的理想选择。事实上，在这些任务中，切比雪夫点和 CL 点能够保证良好的条件性和快速收敛; 感兴趣的读者可参阅例如 [10, 28], 了解完整论述。从理论角度研究它们的兴趣，也源于它们已应用于众多不同的研究领域，例如数值求积 [22], 、微分方程的求解 [29, 32] 以及群论 [4]。

除了经典情形，较早和较新的文献中也有许多工作致力于研究它们的性质, 并通过纳入更多相似 多项式、推广形式和工具来拓展其适用范围 [8, 9, 21, 25, 33]。特别是， [13] 引入了 Ω 上新的 (β,γ)-切比雪夫函数族（第一类）; 我们在第 2 节回顾该函数族的一些重要性质，并在后续各节探讨更多有趣的事实。

事实上，本文的贡献可以分为两个部分。第一部分致力于分析 (β,γ) 函数如何继承正交多项式的一些经典性质。具体而言，在第 3 节中，我们给出了它们与连分数之间的联系，并在第 4 节中推导了相应的生成函数。此外，第 5 节和第 6 节分别研究了克里斯托费尔-达布公式和斯图姆-刘维尔问题。第二部分则聚焦于 (β,γ) 点。在开创性论文[13], 中，研究了在此类点上进行多项式插值过程的条件性，并针对参数 β 和 γ 的某些配置，猜想相应的勒贝格常数会随 n 呈线性增长。在第 7 节中，我们给出了这一猜想的证明，这对于区分 Ω 中 (β,γ) 节点的良态与病态配置至关重要。

2. (β, γ)-切比雪夫函数和点

令 β, $\gamma \in [0,2)$、 $\beta+\gamma<2$, Ω 上的 (β, γ)-切比雪夫函数 （第一类）族由以下函数组成

$$T_n^{\beta,\gamma}(x) \coloneqq \cos\left(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\left(\arccos x - \frac{\gamma\pi}{2}\right)\right),\ x \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

当 $\beta = \gamma = 0$ 时，即 $T^{0,\,0}_n = T_n$，可得到经典第一类切比雪夫多项式，而一般情况下 $T^{\beta,\,\gamma}_n$ 并非多项式。沿用经典框架中的相同路径，我们将 (β, γ)-切比雪夫点定义为 $T^{\beta,\,\gamma}_n$ 在 $\Omega_{\beta,\,\gamma} \coloneqq [-\cos(\beta\pi/2),\ \cos(\gamma\pi/2)] \subseteq \Omega$ 中的零点，即,

$$\mathcal{T}_n^{\beta,\gamma} \coloneqq \left\{\cos\left(\frac{(2-\beta-\gamma)(2j-1)\pi}{4n} + \frac{\gamma\pi}{2}\right)\right\}_{j=1,\ldots,n}.$$

我们在图1中展示两个示例。

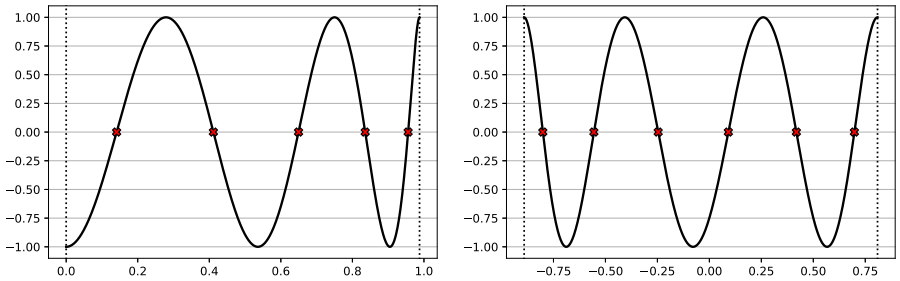

图1：左： $n = 5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.1$。右： $n = 6$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$。点 $\mathcal{T}^{\beta,\gamma}_n$ 以红色叉号标出。

此外，(β,γ)-切比雪夫 *Lobatto* 点集，简称 (β,γ)-CL，是

$$\mathcal{U}^{\beta,\gamma}_{n+1} \coloneqq \left\{ \cos\left(\frac{(2-\beta-\gamma)j\pi}{2n} + \frac{\gamma\pi}{2} \right) \right\}_{j=0,\dots,n},$$

对应于函数在 $\Omega_{\beta,\gamma}$ 中的零点

$$\overline{T}^{\beta,\gamma}_{n+1}(x) = \frac{2-\beta-\gamma}{2n}(1-x^2)\frac{d}{dx}T^{\beta,\gamma}_n(x),\ x \in \Omega.$$

由于 $\mathcal{T}^{\beta,\gamma}_n = \mathcal{U}^{\beta+\frac{2-\beta-\gamma}{2n},\gamma+\frac{2-\beta-\gamma}{2n}}_{n}$ 成立，以下我们将直接把 $\mathcal{U}^{\beta,\gamma}_n$ 称为（β，γ）-切比雪夫点，这样的记法略有滥用。

在 [13], 中，作者进一步研究了所引入的（β，γ）-切比雪夫函数和切比雪夫点的不同方面。首先，$\mathcal{U}^{\beta,\gamma}_n$ 可以很好地表征为一组映射点。具体而言，考虑 Kosloff Tal-Ezer (KTE)映射 [1, 20]

$$M_\alpha(x) \coloneqq \frac{\sin(\alpha\pi x/2)}{\sin(\alpha\pi/2)},\ \alpha \in]0,1],\ x \in \Omega,$$

以及等距点

$$\mathcal{E}^{\beta,\gamma}_n \coloneqq \left\{ 1-\gamma-\frac{(2-\beta-\gamma)j}{n-1} \right\}_{j=0,\dots,n-1},$$

则 $\mathcal{U}^{\beta,\gamma}_n = M_1\left(\mathcal{E}^{\beta,\gamma}_n\right)$。这一考量对于将（$\beta$，$\gamma$）设置应用于所谓的虚假节点方法（FNA）至关重要。该方法是一种映射基方案，可利用不同的基函数 [3, 16, 17, 18] 在函数逼近中提供条件良好的重构过程，也可用于数值求积 [7, 15]；近期综述请参见 [12] 。在 [14], 中，集合 $\mathcal{U}^{\beta,\gamma}_n$ 与分析 Gibbs-Runge-Avoiding稳定多项式逼近（GRASPA）方法在单变量情形下处理 Gibbs 和 Runge 现象的有效性有关。

除了表示为映射点之外，我们还回顾一下 (β,γ) 情形的其他一些性质（参见 [13]）。

- 函数 $\{T_n^{\beta,\gamma}\}_{n=0,1,\dots}$ 关于权函数在 $\Omega_{\beta,\gamma}$ 上是正交的

$$w^{\beta,\gamma}(x) = \frac{2}{(2-\beta-\gamma)\sqrt{1-x^2}},\ x \in \Omega_{\beta,\gamma},$$

准确地说

$$\int_{\Omega_{\beta,\gamma}} T_r^{\beta,\gamma}(x) T_s^{\beta,\gamma}(x) w^{\beta,\gamma}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{if } r \neq s, \\ \pi & \text{if } r = s = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } r = s \neq 0. \end{cases}$$

- β 和 γ 所起的作用是对称的，这意味着，只要 ν_1，ν_2 是 β和 γ的可容许值，$_n$ $^{\nu_2}$就会表现出与 $T^{\nu_2}{}_n$ $^{\nu_1}$类似的性质。

- 对于 β 和 γ 的某些取值，函数$\{T_n^{\beta,\gamma}\}_{n=0,\ 1,\dots}$ 是多项式；通过这一分析，还获得了与经典情形相关的新结果；更多细节请参见 [13,§2.2] 。

- 不仅切比雪夫（$\beta = \gamma = 1/n$）点和 CL（$\beta = \gamma = 0$）点可以定义为（β，γ）-切比雪夫点，它们的许多子集也可以如此定义。事实上，令$\mathcal{U}_{n+1} = \{u_j\}_{j=0,\dots,n}$、$\kappa_1$，$\kappa_2 \in \mathbb{N}$、$\boldsymbol{\kappa} \coloneqq$（$\kappa_1$，$\kappa_2$），以及$\beta_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{2\kappa_1}{n+\kappa_1+\kappa_2}$、$\gamma_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{2\kappa_2}{n+\kappa_1+\kappa_2}$，我们得到

$$\mathcal{U}_n^{\beta_{\boldsymbol{\kappa}},\gamma_{\boldsymbol{\kappa}}} = \mathcal{U}_{n+\kappa_1+\kappa_2} \setminus \{u_0,\dots,u_{\kappa_2-1}, u_{n+\kappa_2},\dots,u_{n+\kappa_1+\kappa_2-1}\}.$$

3. (β,γ)-切比雪夫函数与连分数

众所周知，任意一族正交多项式 $p_1,\dots,p_n,\dots$都满足三项递推公式（例如参见 [30, 定理 3.2.1，第 3.2] 节）

$$p_n(x) = (a_n x + b_n)p_{n-1}(x) - c_n p_{n-2}(x), \quad n = 2,3,\dots,$$

其中 a_n, b_n, c_n为常数，$a_n, c_n > 0$。此外，若 k_n是 $p_n(x)$ 中 n 次单项式的系数，则 $a_n = k_n/k_{n-1}$ 且 $c_n = a_n/a_{n-1}$。例如，第一类切比雪夫多项式在 $n \geq 2$满足此公式，其中 $a_n = 2$ 且 $b_n = c_n = 1$（回顾一下，$T_0(x) = 1$ 且 $T_1(x) = x$）。

函数 $\{T_n^{\beta,\gamma}\}_{n=0,1,\dots}$ 在 $\Omega_{\beta,\gamma}$ 中满足类似的递推公式

$$\begin{aligned} &T_0^{\beta,\gamma}(x) = 1, \quad T_1^{\beta,\gamma}(x) = \cos\left(\frac{2}{2-\beta-\gamma}\left(\arccos x - \frac{\gamma\pi}{2}\right)\right), \\ &T_{n+1}^{\beta,\gamma}(x) = 2T_1^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(x) - T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x) \end{aligned} \tag{1}$$

事实上，令 $\theta = $反余弦$x - \frac{\gamma\pi}{2}$，利用余弦的加法公式即可轻易得到

$$\cos\left(\frac{2(n+1)\theta}{2-\beta-\gamma}\right) + \cos\left(\frac{2(n-1)\theta}{2-\beta-\gamma}\right) = 2\cos\left(\frac{2\theta}{2-\beta-\gamma}\right)\cos\left(\frac{2n\theta}{2-\beta-\gamma}\right).$$

我们指出，与经典情形相比，唯一的区别在于使用函数 $T^{\beta}{}_{,1}{}^{\gamma}$ 代替恒等映射。

从三项递推性质出发，我们旨在将（β，γ）-切比雪夫函数刻画为连分数；事实上，众所周知，它们与正交多项式有关。

下面我们使用节省空间的记号

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \dots$$

表示连分数

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

and

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

表示第 n 个部分分式。

首先，为处理递推关系中的常数因子，我们引入归一化的 （β，γ）-切比雪夫函数 $\widehat{T}^{\beta}{}_{,n}{}^{\gamma} := 2^{1-n}T^{\beta}{}_{,n}{}^{\gamma}$从而满足关系式

$$\widehat{T}_n^{\beta,\gamma}(x) = T_1^{\beta,\gamma}(x)\widehat{T}_{n-1}^{\beta,\gamma}(x) - \lambda_n\widehat{T}_{n-2}^{\beta,\gamma}(x),$$

其中，$\lambda_2 = 1/2$ 和 $\lambda_n = 1/4$，$n \geq 3$, $\widehat{T}^{\beta}{}_{,0}{}^{\gamma}(x) = 1$ 以及 $\widehat{T}^{\beta}{}_{,-1}{}^{\gamma}(x) = 0$。

然后，给定 $\lambda_1 \neq 0$，连分数

$$\frac{\lambda_1|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} - \frac{\lambda_2|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} - \frac{\lambda_3|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} - \dots$$

其第 n 个部分分母，即满足条件的数值 B_n

$$\frac{\lambda_1|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} - \frac{\lambda_2|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} - \frac{\lambda_3|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} - \dots - \frac{\lambda_n|}{|T_1^{\beta,\gamma}(x)} = \frac{A_n}{B_n},$$

满足 $B_n = \widehat{T}^{\beta}{}_{,n}{}^{\gamma}$。事实上，部分分式的分子和分母满足递推关系（参见，例如，[11,第 80] 页）

$$\begin{aligned} &B_n = T_1^{\beta,\gamma}(x)B_{n-1} - \lambda_n B_{n-2}, n \geq 1 \text{ with } B_{-1} = 0, B_0 = 1, \\ &A_n = T_1^{\beta,\gamma}(x)A_{n-1} - \lambda_n A_{n-2}, n \geq 2 \text{ with } A_{-1} = 1, A_0 = 0 \text{ and } A_1 = \lambda_1. \end{aligned} \tag{2}$$

因此，我们可以定义函数 $\widehat{P}^{\beta}{}_{,n}{}^{\gamma} = \lambda_1^{-1}A_{n+1}$ 它与 λ_1 无关，并满足关系式

$$\widehat{P}_n^{\beta,\gamma}(x) = T_1^{\beta,\gamma}(x)\widehat{P}_{n-1}^{\beta,\gamma} - \lambda_{n+1}\widehat{P}_{n-2}^{\beta,\gamma}$$

对于 $n \geq 1$ 和 $P^{\beta,\gamma}_{-1} = 0$, $P^{\beta,\gamma}_{0} = 1$。我们将这些函数称为伴随(β, γ)-切比雪夫函数。将 (2) 的第一个方程乘以 A_{n-1}，第二个方程乘以 B_{n-1}，即可得到等式（参见 [11, 第 86] 页）

$$\widehat{T}^{\beta,\gamma}_{n+1}\widehat{P}^{\beta,\gamma}_{n-1} - \widehat{T}^{\beta,\gamma}_{n}\widehat{P}^{\beta,\gamma}_{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{for } n = 1 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} & \text{for } n \geq 2. \end{cases} \tag{3}$$

4. 生成函数

另一个经典主题是构造与一个函数族相关联的生成函数。假设 $|u| < 1$ 和 $\phi \in [0, 2\pi]$, 那么（参见例如 [27, 第 36]页）

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\iota n\phi}u^n = \sum_{n=0}^{\infty}(ue^{\iota\phi})^n = \frac{1}{1-ue^{\iota\phi}}$$

通过比较实部，我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n\phi)u^n = \frac{1-u\cos\phi}{1+u^2-2u\cos\phi}.$$

与切比雪夫多项式类似，我们可以考虑与 (β, γ) 族相关的普通生成函数

$$F^{\beta,\gamma}(u,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{\beta,\gamma}_n(x)u^n\,,$$

并推导出 $F^{\beta,\gamma}$ 的闭式。事实上，我们可以写出

$$T^{\beta,\gamma}_n(x) = \cos\left(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\big(\arccos x - \frac{\gamma\pi}{2}\big)\right) = \cos(n\phi^{\beta,\gamma}(x)),$$

其中 $\phi^{\beta,\gamma}(x) := \frac{2}{2-\beta-\gamma}$(反余弦 $x - \frac{\gamma\pi}{2}$)。然后，

$$F^{\beta,\gamma}(u,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos(n\phi^{\beta,\gamma}(x))u^n = \frac{1-u\cos\phi^{\beta,\gamma}(x)}{1+u^2-2u\cos\phi^{\beta,\gamma}(x)}.$$

最后，由于 $\cos\,\phi^{\beta,\gamma}(x) = T^{\beta,\gamma}_1(x)$，我们得到

$$F^{\beta,\gamma}(u,x) = \frac{1-uT^{\beta,\gamma}_1(x)}{1+u^2-2uT^{\beta,\gamma}_1(x)}.$$

当 $\beta = \gamma = 0$ 时，则有 $T^{\beta,\gamma}_1(x) = x$，并且我们得到了第一类切比雪夫多项式的生成函数。

5. 克里斯托费尔-达布公式

经典正交多项式满足克里斯托费尔-达布公式。我们证明，$(\beta,\ \gamma)$ 函数也满足同样的公式。

定理1. 正交函数族 $T^{\beta,\ \gamma}_0, T^{\beta,\ \gamma}_1, \ldots, T^{\beta,\ \gamma}_n, \ldots$ 给出以下克里斯托费尔-达布公式

$$\sum_{j=0}^{n}{}' T_j^{\beta,\gamma}(x)T_j^{\beta,\gamma}(y) = \frac{1}{2}\frac{T_{n+1}^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y) - T_n^{\beta,\gamma}(x)T_{n+1}^{\beta,\gamma}(y)}{T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y)},$$

with $\sum_{j=0}^{n}{}' z_j \coloneqq \frac{1}{2}z_0 + z_1 + \cdots + z_n$.

证明. 我们对 $n \in \mathbb{N}$ 使用归纳法。当 $n = 1$ 时，我们需要验证等式

$$\frac{1}{2} + T_1^{\beta,\gamma}(x)T_1^{\beta,\gamma}(y) = \frac{1}{2}\frac{T_2^{\beta,\gamma}(x)T_1^{\beta,\gamma}(y) - T_1^{\beta,\gamma}(x)T_2^{\beta,\gamma}(y)}{T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y)}.$$

利用递推公式 (1)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{T_2^{\beta,\gamma}(x)T_1^{\beta,\gamma}(y) - T_1^{\beta,\gamma}(x)T_2^{\beta,\gamma}(y)}{T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y)} = \\
&\frac{1}{2}\frac{(2(T_1^{\beta,\gamma}(x))^2 - 1/2)T_1^{\beta,\gamma}(y) - T_1^{\beta,\gamma}(x)(2(T_1^{\beta,\gamma}(y))^2 - 1/2)}{T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y)} = \\
&\frac{1}{2}\frac{(1 + 2T_1^{\beta,\gamma}(x)T_1^{\beta,\gamma}(y))(T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y))}{T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y)} = \frac{1}{2} + T_1^{\beta,\gamma}(x)T_1^{\beta,\gamma}(y).
\end{aligned}$$

假设情形 $n-1$ 成立，下面证明 n。对于左边，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}{}' T_j^{\beta,\gamma}(x)T_j^{\beta,\gamma}(y) = \\
&\sum_{j=0}^{n-1}{}' T_j^{\beta,\gamma}(x)T_j^{\beta,\gamma}(y) + T_n^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y) = \\
&\frac{1}{2}\frac{T_n^{\beta,\gamma}(x)T_{n-1}^{\beta,\gamma}(y) - T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y)}{T_1^{\beta,\gamma}(x) - T_1^{\beta,\gamma}(y)} + T_n^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y).
\end{aligned}$$

对于右边，利用递推关系可得

$$\frac{T_{n+1}^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y)-T_n^{\beta,\gamma}(x)T_{n+1}^{\beta,\gamma}(y)}{2(T_1^{\beta,\gamma}(x)-T_1^{\beta,\gamma}(y))}=$$
$$\frac{(2T_1^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(x)-T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x))T_n^{\beta,\gamma}(y)-T_n^{\beta,\gamma}(x)(2T_1^{\beta,\gamma}(y)T_n^{\beta,\gamma}(y)-T_{n-1}^{\beta,\gamma}(y))}{2(T_1^{\beta,\gamma}(x)-T_1^{\beta,\gamma}(y))}=$$
$$\frac{T_n^{\beta,\gamma}(x)T_{n-1}^{\beta,\gamma}(y)-T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y)+T_n^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y)(T_1^{\beta,\gamma}(x)-T_1^{\beta,\gamma}(y))}{2(T_1^{\beta,\gamma}(x)-T_1^{\beta,\gamma}(y))}=$$
$$\frac{T_n^{\beta,\gamma}(x)T_{n-1}^{\beta,\gamma}(y)-T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y)}{2(T_1^{\beta,\gamma}(x)-T_1^{\beta,\gamma}(y))}+T_n^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(y),$$

这恰好就是左端。 □

6. 关于 (β,γ) 函数的斯图姆-刘维尔问题

经典正交多项式可以刻画为某些微分方程的解，而这些方程可以纳入斯图姆-刘维尔理论的框架中（详细概述请参见 [2] ）。对于第一类切比雪夫多项式这一特例， T_n 是 Ω 上以下边值问题的一个非平凡解 $=[-1,1]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)+\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0$$

具有分离边界条件

$$\begin{cases}a_1y(-1)+a_2y'(-1)=0\\ b_1y(1)+b_2y'(1)=0\end{cases}$$

使得 $a_1^2+a_2^2>0$ 和 $b_1^2+b_2^2>0$。注意， T_n' 在 $x=-1,1$ 处是奇异的，因此边界方程在极限意义下成立。

在我们的框架中，我们可以证明如下内容

定理 2。 函数 $T^{\beta,\ \gamma}_{\ n}$是定义在 $\Omega_{\beta,\ \gamma}=[-\cos(\beta\pi/2),\ \cos(\gamma\pi/2)]\subseteq\Omega$ 上的斯图姆-刘维尔边值问题的一个非平凡解。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)+\frac{4n^2}{(2-\beta-\gamma)^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y=0 \tag{4}$$

具有分离边界条件

$$\begin{cases}a_1y(-\cos(\beta\pi/2))+a_2y'(-\cos(\beta\pi/2))=0\\ b_1y(\cos(\gamma\pi/2))+b_2y'(\cos(\gamma\pi/2))=0\end{cases}$$

其中 $a_1^2+a_2^2>0$ 和 $b_1^2+b_2^2>0$。

证明。我们写作

$$T_n^{\beta,\gamma}(x) = \cos\Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\Big(\arccos(x) - \frac{\gamma\pi}{2}\Big)\Big) = \cos\Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\theta\Big),$$

其中 $\theta := \theta(x) = \text{反余弦}(x) - \frac{\gamma\pi}{2}$。观察到

$$\frac{\mathrm{d}T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}\theta^2}\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\Big)^2 + \frac{\mathrm{d}T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}, \tag{5}$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}x} = \Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\Big)\sin\Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\theta\Big)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}x^2} = &-\frac{4n^2}{(2-\beta-\gamma)^2}\cos\Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\theta\Big)\frac{1}{1-x^2}\\ &+\Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\Big)\sin\Big(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\theta\Big)\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned} \tag{7}$$

因此，将 $T^{\beta}{}_{,n}{}^{\gamma}$代入 (4) 的左侧，可得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}x} + \sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}^2T_n^{\beta,\gamma}}{\mathrm{d}x^2} + \frac{4n^2}{2-\beta-\gamma}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n^{\beta,\gamma},$$

由 (6) 和 (7) 可得结论。 □

7. 关于多项式插值中 (β,γ)-切比雪夫点的勒贝格常数

设 $\mathcal{X}_n := \{x_0,\dots,x_n\}$ 是 Ω 中一组互不相同的点。拉格朗日多项式集合 $\mathrm{L} := \{\ell_0,\dots,\ell_n\}$，其中

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\ i=0,\dots,n,\ x\in\Omega,$$

允许构造勒贝格函数

$$\lambda(\mathcal{X}_n;x) = \sum_{i=0}^{n}|\ell_i(x)|,\ x\in\Omega,$$

其在 Ω 上的最大值即为勒贝格常数

$$\Lambda(\mathcal{X}_n,\Omega) = \max_{x\in\Omega}\lambda(\mathcal{X}_n;x).$$

众所周知，勒贝格常数是衡量插值过程条件性和稳定性的一个指标，并且取决于所选择的

插值点集 $\mathcal{X}_n$。这就是为什么寻找最优或近似最优的插值点如此重要，这些插值点的勒贝格常数随多项式空间的维数 n 呈对数增长（更多详情请参见例如 [10, 28] ）。在其他一些性质良好的点集 [19],中，切比雪夫点和 CL 点都保持了勒贝格常数 [5, 24]的对数增长。

回到 (β,γ) 框架，可以合理地推测，只要β 和 γ 足够小，(β,γ) 点的勒贝格常数就会保持对数增长，因为在这种情况下，它们可以视为扰动的 CL 点。事实上，利用 [26] 中的一个结果， [13, 定理 3] 已证明了这一点。然而，随着 β 和/或 γ 的值增大，勒贝格常数的增长趋势会逐渐转向以 n 为底的更快增长。就此而言，值得分析在什么情况下，与 (β,γ) 点相关的勒贝格常数增长会从对数型转变为线性型。为此，我们考虑 $\beta=\beta_n=2/n$ 和 $\gamma=0$ 的情形，这也很有意思，因为（参见 (2)）

$$\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0}=\mathcal{U}_{n+1}\setminus\{-1\},$$

也就是说，我们从 CL 点集合中移除了左端点。现在，我们证明 [13, 猜想 1], 中最初提出的结论，即我们证明与 $\mathcal{U}^{\bar{\beta}_n}{}_{,n}{}^{0}$ 相关的勒贝格常数呈线性增长，且只取整数值。注意，在 [13,定理 4] 中，我们证明了较弱的结果

$$\lambda\big(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};-1\big)=2n-1.$$

定理 3。 设 $\beta_n=2/n$、 $n\in\mathbb{N}_{>0}$。则，

$$\Lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0},\Omega)=2n-1$$

证明。 根据 [13, 定理 4],，只需证明勒贝格函数 $\lambda\big(\mathcal{U}^{\bar{\beta}_n}{}_{,n}{}^{0};x\big)$ 在 $x=-1$ 处取得最大值。该技术性证明的思路是首先证明勒贝格函数在$[-1,u_{n-1}]$上单调递减，其中 u_{n-1} 是集合 $\mathcal{U}^{\bar{\beta}_n}{}_{,n}{}^{0}$中的较小点。然后，通过证明勒贝格函数在 $[u_{n-1},1]$中小于 $2n-1$ 来完成证明。

为此，我们回顾一下，第 i 个 CL 节点对应的拉格朗日权重为（参见例如 [31,第 37] 页）

$$\lambda_i=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{u_i-u_j}=\frac{2^{n-1}}{n}(-1)^i\delta_i$$

其中，当 $i\neq 0$， n时为 $\delta_i=1$ ，否则减半。

令 $x,y\in[-1,u_{n-1}]$ 满足 $x<y$，则对于$i=0,\ldots,n-1$，有 $|x-u_i|>|y-u_i|$。因此，对于基于 $\mathcal{U}^{\bar{\beta}_n}{}_{,n}{}^{0}$ 个节点构造的第 i 个拉格朗日多项式，我们得到

$$|\ell_i(x)|=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{|x-u_j|}{|u_i-u_j|}>\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{|y-u_j|}{|u_i-u_j|}=|\ell_i(y)|.$$

因此，勒贝格函数

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};x)&=\sum_{i=0}^{n-1}|\ell_i(x)|=\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}\frac{|x-u_j|}{|u_i-u_j|}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}|x-u_j||u_i-u_n|\cdot\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{|u_i-u_j|}\\&=\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}|x-u_j|(1+u_i)\delta_i\right),\end{aligned}$$

在区间 $[-1,u_{n-1}]$ 内严格递减。现在，我们将注意力转向区间$[u_{n-1},1]$。首先，我们观察到

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{U}_{n+1};x)&=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{|x-u_j|}{|u_i-u_j|}=\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{|x-u_j|}{|u_i-u_j|}+\prod_{j=0}^{n-1}\frac{|x-u_j|}{|u_n-u_j|}\\&=\frac{2^{n-1}}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}|x-u_j|(x+1)\delta_i+\frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|\right).\end{aligned}$$

因此，我们得到如下结果

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};x)&=\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};x)-\lambda(\mathcal{U}_{n+1};x)+\lambda(\mathcal{U}_{n+1};x)\\&=\lambda(\mathcal{U}_{n+1};x)+\frac{2^{n-1}}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}|x-u_j|(u_i-x)\delta_i-\frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|\right)\\&\leq\lambda(\mathcal{U}_{n+1};x)+\frac{2^{n-1}}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}|x-u_j||x-u_i|\delta_i-\frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|\right)\end{aligned}$$

注意，当求和中的 $i=0$ 时，我们得到

$$\prod_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{n-1}|x-u_j||x-u_0|\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|=0,$$

并且我们给出了界泛函

$$\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}|x-u_j||x-u_i|\delta_i-\frac{1}{2}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|\leq\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|.$$

因此，注意到求和中的各项均不依赖于 i，我们得到

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};x) \le \lambda(\mathcal{U}_{n+1};x) + (n-2)\left(\frac{2^{n-1}}{n}\prod_{j=0}^{n-1}|x-u_j|\right). \tag{8}$$

我们指出，(8) 中方括号内的项是所构造于 $n+1$ CL节点上的第 $n+1$ 个拉格朗日多项式 ℓ_n 的绝对值的两倍。现在，我们旨在证明该值小于或等于 1。通过代入 $x=\cos\theta$，并令 $u_i=\cos\ \theta_i$，其中 θ_i 是 $[0,\pi]$ 中的等距点，我们得到以下结果（参见 [5]）

$$\ell_i(\cos\theta) = \frac{(-1)^i}{2n}\delta_i \sin n\theta\left(\cot\left(\frac{\theta+\theta_i}{2}\right)+\cot\left(\frac{\theta-\theta_i}{2}\right)\right). \tag{9}$$

对于 $i=n$，从而对于 $\theta_i=\pi$，我们有

$$\begin{aligned}\ell_n(\cos\theta) &= \frac{(-1)^n}{4n}\sin n\theta\left(\cot\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)+\cot\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)\right),\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\sin n\theta\tan\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

取绝对值并限制在 $x\in[u_{n-1},1]$ 上，即 $\theta\in[0,\frac{n-1}{n}\pi]$，可写为

$$2|\ell_n(\cos\theta)| = \frac{|\sin n\theta|}{n}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \le \frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{n} \le \frac{\tan\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)}{n} \le \frac{1}{n\sin\frac{\pi}{2n}},$$

因为正切函数在该区间内严格递减。此外，我们注意到函数 $g(y)=\frac{1}{y\sin\left(\frac{\pi}{2y}\right)}$ 在 $y\ge 1$ 时递减，因此

$$2|\ell_n(\cos\theta)| \le g(1) = 1. \tag{10}$$

由 (8) 和 (10)，我们于是得到

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};x) \le \lambda(\mathcal{U}_{n+1};x) + n - 2. \tag{11}$$

最后，注意到 CL 节点的勒贝格常数随 n 增大呈对数增长，并且

$$\lambda(\mathcal{U}_{n+1};x) \le n$$

对于 $n\ge 1$，我们最后得出

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0};x) \le 2n-2 < 2n-1.$$

□

本节最后，我们指出一个有趣的类比，它涉及逼近理论中的另一项经典结果。例如， [6], 中所述，与去掉区间端点后的 CL 节点相关的勒贝格常数满足

$$\Lambda\big(\mathcal{U}_{n+2} \setminus \{-1,1\}, \Omega\big) = n,$$

其中 $\mathcal{U}_{n+2} \setminus \{-1,1\} = \mathcal{U}^{\bar{\delta}_n}_{n}$ $\bar{\delta}_n$满足 $\bar{\delta}_n = 2/(n+1)$。此外，在这种情况下，勒贝格常数仅取整数值，并随 n 线性增长。图 2 展示了文中讨论的勒贝格函数和勒贝格常数的一些示例。

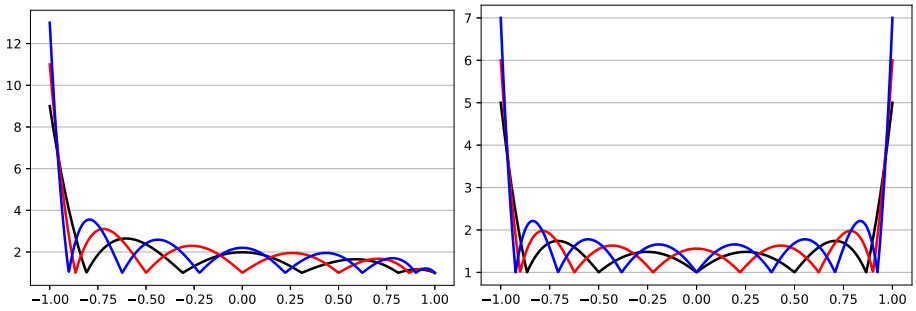

图 2：与 $\mathcal{U}^{\bar{\beta}_n}_{n}$ ^{0}（左）和 $\mathcal{U}^{\bar{\delta}_n}_{n}$ $\bar{\delta}_n$（右）相关的勒贝格函数。图中展示了 $n=5$（黑色）、$n=6$（红色）和 $n=7$（蓝色）这几种情况。

8. 结论

本文表明，(β, γ)-切比雪夫函数具有第一类切比雪夫多项式的许多重要性质。随后，我们在多项式插值框架下，证明了一个关于特定参数 β 和 γ 取值时 (β, γ)-切比雪夫点的勒贝格常数行为的猜想。所得结果表明，其他经典正交多项式也可能推广到更一般的 (β, γ) 框架。此外，未来的研究还将关注将 (β, γ)-切比雪夫函数用作单变量和多变量逼近方案中的基元素。

致谢

本研究是在 GNCS-INδAM、意大利逼近网络（RITA）以及意大利数学联盟（UMI）的“逼近理论与应用”专题组框架内完成的。第三位作者还感谢国家运营计划（PON）“研究与创新”2014—2020 项目提供的资金支持。

参考文献

[1]B. Adcock 和 R. Platte，一种用于任意网格上高精度逼近的映射多项式方法，SIAM 数值分析杂志，54 (2016)，第 2256–2281 页。[2] M. A. Al-Gwaiz，斯图姆-刘维尔理论及其应用，Springer 本科数学丛书，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2008 年。[3]J.-P. Berrut、S. De Marchi、G. Elefante 和 F. Marchetti，通过 S-吉布斯算法处理重心有理插值和逼近中的吉布斯现象，《应用数学快报》，103 (2020)，第 106196 页，共 7 页。[4]N. Bircan 和 C. Pommerenke，关于切比雪夫多项式与GL(2，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)，《罗马尼亚数学科学会通报》（新系列），55(103) (2012)，第 353–364 页。[5] L. Brutman，关于多项式插值的勒贝格函数，《SIAM 数值分析杂志》，15 (1978)，第 694–704 页。[6] , 多项式插值的勒贝格函数——综述，《数值数学年刊》，4 (1997)，第 111–127 页。P. L. 切比雪夫的学术遗产：为纪念 T. J. Rivlin 70 岁生日而作的纪念文集。[7]G. Cappellazzo、W. Erb、F. Marchetti 和 D. Poggiali，关于 *Kosloff Tal-Ezer* 最小二乘求积公式，《BIT》，63 (2023)，第 15 页。[8] D. Caratelli 和 P. E. Ricci，关于伪切比雪夫函数正交性质的注记，《对称性》，12 (2020)，第 1273 页。[9] C. Cesarano，广义切比雪夫多项式，《哈杰特佩数学与统计学杂志》，43 (2014)，第 731–740 页。[10] E. W. Cheney，逼近理论导论，美国数学会，1998 年。[11] T. Chihara，正交多项式导论，《多佛数学丛书》，Dover Publications，2011 年。[12] S. De Marchi、G. Elefante、E. Francomano 和 F. Marchetti，多项式映射基：理论与应用，《应用与工业数学通讯》，13 (2022)，第 1–9 页。[13] S. De Marchi、G. Elefante 和 F. Marchetti，关于 (β，γ)-切比雪夫函数及区间上的点，《逼近理论杂志》，271 (2021)，论文编号 105634，共 17 页。

[14] *S. De Marchi*、*G. Elefante* 和 *F. Marchetti*，《稳定不连续映射基：*Gibbs-Runge-Avoiding* 稳定多项式逼近（*GRASPA*）方法》，《计算与应用数学》，*40*（*2021*），第*299*号论文，*17*页。[15] *S. De Marchi*、*G. Elefante*、*E. Perracchione* 和 *D. Poggiali*，《伪节点处的求积》，《多洛米蒂逼近研究札记》，*14*（*2021*），第*39–45*页。[16] *S. De Marchi*、*F. Marchetti*、*E. Perracchione* 和 *D. Poggiali*，《通过映射基进行无重采样多项式插值》，《计算与应用数学杂志》，*364*（*2020*），第*112347*号论文，*12*页。[17] ，《伪节点处的多元逼近》，《应用数学与计算》，*391*（*2021*），第*125628*页。[18]*S. De Marchi*、*E. Wolfgang*、*E. Francomano*、*F. Marchetti*、*E. Perracchione* 和 *D. Poggiali*，《用于磁粒子成像的伪节点逼近》，*2020*年电气电子工程师学会第*20*届地中海电工技术会议（*MELECON*），（*2020*），第*434–438*页。[19] *B. A. Ibrahimoglu*，《多项式插值中的勒贝格函数与勒贝格常数》，《不等式与应用杂志》，（*2016*），第*93*号论文，*15*页。[20]*D. Kosloff* 和 *H. Tal-Ezer*，《带有 ON^{-1} 时间步长限制的修正切比雪夫伪谱方法》，《计算物理学杂志》，*104*（*1993*），第*457–469*页。[21] *T. P. Laine*，《广义切比雪夫多项式的乘积公式与卷积结构》，《*SIAM* 数学分析杂志》，*11*（*1980*），第*133–146*页。[22]*M. Masjed-Jamei*、*S. M. Hashemiparast*、*M. R. Eslahchi* 和 *M. Dehghan*，《第一类切比雪夫-洛巴托求积公式及其数值改进》，《应用数学与计算》，*171*（*2005*），第*1104–1118*页。[23] *J. C. Mason* 和 *D. C. Handscomb*，《切比雪夫多项式》，*Chapman and Hall/CRC*，*2002*。[24] *J. H. McCabe* 和 *G. M. Phillips*，《一类特殊的勒贝格常数》，《北欧信息处理杂志（*BIT*）》，*13*（*1973*），第*434–442*页。[25] *F. Oliveira-Pinto*，《广义切比雪夫多项式及其在数值逼近中的应用》，《计算机杂志》，*16*（*1973*），第*374–379*页。[26] *F. Piazzon* 和 *M. Vianello*，《利用类马尔可夫不等式研究勒贝格常数的稳定性不等式》，《多洛米蒂逼近研究札记》，*11*（*2018*），第*1–9*页。

[27] T. J. Rivlin，切比雪夫多项式，约翰·威立父子出版公司，1974年。[28] _____，函数逼近导论，Dover Publications Inc.，2003年。[29] N. H. Sweilam 和 M. M. Abou Hasan，通过切比雪夫-勒让德配点法对 *Lévy-Feller* 分数阶扩散方程进行数值逼近，《欧洲物理学杂志 Plus》，131（2016），第1–12页。[30] G. Szegő，正交多项式，美国数学会学术丛书，第XXIII卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第四版，1975年。[31] L. N. Trefethen，逼近理论与逼近实践，工业与应用数学学会，2013年。[32] T. Zang 和 D. B. Haidvogel，通过切比雪夫多项式展开精确求解泊松方程，《计算物理学杂志》，30（1979），第167–180页。[33] Y. Zhang 和 Z. Chen，一个涉及切比雪夫多项式的新恒等映射，《数学》，6（2018）。