arXiv:2305.03372v1 [math-ph] 5 May 2023

代数量子场论中的树 operad、同伦论与高阶范畴

Marco Benini[1, 2, a] 和 Alexander Schenkel[3, b]

[1] 意大利热那亚大学数学系，Via Dodecaneso 35，16146 Genova，Italy。[2] 意大利国家核物理研究院热那亚分部，Via Dodecaneso 33，16146 Genova，Italy。[3] 英国诺丁汉大学数学科学学院，University Park，Nottingham NG7 2RD，United Kingdom。

电子邮箱：[a] marco.benini@unige.it，[b] alexander.schenkel@nottingham.ac.uk

2023年4月

摘要

本章以非技术性的方式概述代数量子场论（AQFT）与多运算子、模型范畴和高阶范畴等相当抽象的数学学科之间近期的交汇，并阐述其研究动机。

关键词 ：代数量子场论、树 operad、模型范畴、高阶范畴论 y

MSC 2020：81Txx，18Mxx，18Nxx

目录

1 引言2 树 operad 3
同伦理论 4 高阶范畴

1
2
7
13

1 引言

代数量子场论 （简称 AQFT）是一个发展成熟、历史悠久的数学框架，可用于定义和研究闵可夫斯基时空上的量子场论（QFT）[28] ，或更一般地说，整体双曲洛伦兹流形上的量子场论 [19]。代数量子场论已与众多数学领域展开了有趣且富有成效的互动，其中包括算子代数、泛函分析、洛伦兹几何以及范畴论。关于该领域的概述，请参阅书籍 [18] ，以及本卷中介绍代数量子场论不同方面的其他章节。

正如标题所示，本章着重探讨代数量子场论与拟运算子理论、同伦论等相当抽象的纯数学领域之间相对较新的交汇。

（通过模型范畴实现）以及高阶范畴论。主要目标是阐明这些交互的动机及其带来的成果，这些成果可以简洁但不完整地概括如下：

- 通过拟运算子理论，可以识别并描述代数量子场论所依据的基本代数结构。这带来了大量泛构造，除其他用途外，还可用于：(i) 深入理解时间片公理（通俗地说，该公理在代数量子场论中编码了时间演化的概念），从而得到低维代数量子场论的分类结果；(ii) 从已有的代数量子场论构造新的代数量子场论，其例子包括局部到整体扩张（改进 Fredenhagen 的泛代数 [24]）或提取二维共形代数量子场论的手征可观测量（改进 Rehren 的工作 [35]）；以及 (iii) 将代数量子场论与量子场论的其他公理化方法进行比较，例如 Costello 和 Gwilliam 式的因子化代数 ` [22, 23]。

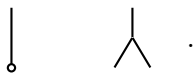
- 通过抽象同伦论（参见例如 [31, 30], ），可以构造模型范畴，其对象例如可以是上链复形值代数量子场论，而其弱等价则是逐时空拟同构。这正是以 BRST/BV 形式 [25, 26]构造的规范理论代数量子场论实例的自然栖居之所。此外，抽象同伦论对于发展推迟与超前格林算子的规范理论推广形式也不可或缺；这尤其为将成熟的自由（即非相互作用）代数量子场论构造从[1, 2] 拓展至规范理论乃至高阶规范理论实例开辟了新途径。最后，将同伦论与拟运算子理论相结合，可以深入了解代数量子场论底层代数结构中的高阶同伦现象（或其缺失）。

- 通过高阶范畴论，可以引入一种大幅推广的代数量子场论概念，而这种理论不依赖于在场的经典模空间上存在适当的函数代数。此类代数量子场论不再赋予代数，而是赋予线性范畴或 dg-范畴，其实例包括对场的导出模栈上的拟凝聚模进行量子化（按照导出代数几何 [37, 20] 的意义）。与通常的 BRST/BV形式相比，这种方法在非微扰意义上具有非微扰性，因为它包含有关规范群的信息，而不仅仅是其李代数的信息。遗憾的是，构造此类以（dg-）范畴为值的代数量子场论实例相当复杂，目前人们仅理解了一些简单的玩具模型。

本章将对上述内容进行论证，并作更详细的阐释。我们的论述有意采用非正式的方式，因此难免有所省略。为弥补这些不足，我们会在适当之处提供参考资料，其中可以找到精确的陈述和相关技术细节。我们不要求读者熟悉树 operad、同伦论或高阶范畴，不过具备一些背景知识将有助于更轻松地理解本章的叙述。详细介绍这些主题超出了本章的范围。不过，我们会以非正式的方式阐释其主要思想，并在有帮助之处辅以图示。

2 树 operad

基本思想：多运算子是一种能够刻画 n-到-1 运算及其在复合下行为的对象。最简单且最具说明性的例子之一是含单位结合运算子 uAs。这个多运算子由一个 0-到-1 运算（单位元）和一个 2-到-1 运算（乘法）生成，我们将其可视化如下

 . (2.1a)

这些运算应以含单位且满足结合律的方式复合，即



(2.1b)

其中，单位条件中的一对一运算是恒等运算。本章中出现的所有多运算子都是对称多运算子，即置换群 Σ_n 对 n对一运算的集合存在作用，并且这种作用以适当的方式与复合相容，详情参见例如[38] 。

多运算子可以通过多种方式推广。对我们而言，最相关的推广是为输入和输出添加颜色。由此得到的概念是带色（对称）多运算子；为简便起见，我们将其简称为多运算子。这里最基本的例子是一个范畴 C：对象 $c \in \mathsf{C}$ 决定了颜色，而态射 $f: c \to c'$ 可以看作一对一运算。请注意，将范畴 C 视为多运算子时，不存在 n对一运算，因为 $n \neq 1$。

给定任意一个（带色对称）多运算子 $\mathcal{O}$，我们可以构造其代数范畴 $\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{T})$，其中的代数取值于一个对称幺半范畴 $(\mathsf{T}, \otimes, I, \gamma)$，例如向量空间范畴 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{K}}$，其底域为 $\mathbb{K}$。多运算子 $\mathcal{O}$ 上的代数应当被视为对抽象运算的一种表示：这些运算由 $\mathcal{O}$ 描述，并通过 T 中的态射来实现。更精确地说，一个代数 $\mathfrak{A} \in \mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{T})$由一族对象 $\mathfrak{A}(c) \in \mathsf{T}$ 构成，其中每种颜色 $c \in \mathcal{O}$都对应一个对象；此外还配有一族 T-态射

$$\mathfrak{A}(\phi) : \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(c_i) \longrightarrow \mathfrak{A}(c') \quad , \tag{2.2}$$

对于所有 n-到-1 运算 $\phi: (c_1, \ldots, c_n) \to c'$ in $\mathcal{O}$，且其与复合、恒等态射及置换作用相容。不出所料，T 中含单位结合运算子上的代数 $\mathfrak{A} \in \mathsf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathsf{T})$ 是一个含幺结合代数，其中单位元 $I \to \mathfrak{A}$ 和乘法 $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$分别由式 (2.1) 中的 0-到-1 和 2-到-1 运算表示。注意，由范畴 C 确定的多运算子上的代数 $\mathfrak{A} \in \mathsf{Alg}_{\mathsf{C}}(\mathsf{T})$ 是一个函子 $\mathfrak{A}: \mathsf{C} \to \mathsf{T}$。

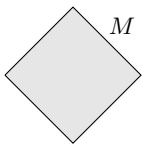
代数量子场论小树林：代数量子场论通常定义在范畴 $\mathbf{Loc}_m$ 上，其对象为连通的 m 维定向且带时间定向的整体双曲洛伦兹流形，态射为保持定向和时间定向的因果等距嵌入，参见例如 [18]。该范畴带有若干特殊的态射（组）类别，用于刻画重要的洛伦兹几何特征。对于代数量子场论及由此定义的代数量子场论小树林，以下两类至关重要：

(i) 具有公共目标的一对态射 $f_1 : M_1 \to N \leftarrow M_2 : f_2$ 被称为因果不相交的，如果它们的像不能通过因果曲线相连，即 $J_N(f_1(M_1)) \cap f_2(M_2) = \emptyset$ with $J_N(S) := J_N^+(S) \cup J_N^-(S) \subseteq N$是某个子集 $S \subseteq N$的因果未来与因果过去的并集。我们通常用 $f_1 \perp f_2$表示因果不相交态射。

(ii) Loc_m中的态射 $f: M \to N$被称为柯西态射，如果其像 $f(M) \subseteq N$包含 N的一个柯西曲面。我们用 $W \subseteq \mathsf{Mor}\,\mathsf{Loc}_m$表示柯西态射类。

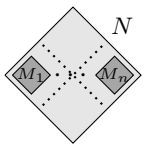
m维代数量子场论的通常定义，是指一个函子 $\mathfrak{A} : \mathsf{Loc}_m \to \mathsf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathsf{T})$ 映到含幺结合代数范畴，并满足爱因斯坦因果性和时间切片公理。这一定义可以用更优雅、更具概念性的方式重新表述如下（参见

[9, 定理 2.9]（详见相关细节）：一个代数量子场论（AQFT）由如下赋值给出



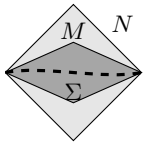
$$\xrightarrow{\text{AQFT}} \quad \mathfrak{A}(M) \in \mathbf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathbf{T}) \tag{2.3a}$$

一个单位的每个时空 $M \in \mathsf{Loc}_m$ 赋予一个结合代数，同时还包括该赋值的分配



$$\xrightarrow{\text{AQFT}} \quad \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(M_i) \longrightarrow \mathfrak{A}(N) \tag{2.3b}$$

一个含幺结合代数同态，为每个由 $(f_i : M_i \to N)_{i=1,\dots,n}$ 个两两类时分离的 Loc_m-态射组成的元组指定一个映射，即 $f_i \perp f_j$ 对所有 $i \neq j$ 均成立。后一个赋值要求与元组的复合相容，相对于恒等态射 $\mathsf{id} : M \to M$ 满足含幺性，并且关于置换作用满足等变性。如果 AQFT 将每个柯西态射映射为一个 $\mathsf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathsf{T})$-同构，即，则称其满足时间片公理。



$$\xrightarrow{\text{AQFT}} \quad \mathfrak{A}(M) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{A}(N) \quad . \tag{2.3c}$$

我们想强调的是，这一定义的代数量子场论包含两种不同类型的乘法：(1) 在每个时空 $M \in \mathsf{Loc}_m$ 上，我们都有一个定义在 $\mathfrak{A}(M) \in \mathsf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathsf{T})$ 上的结合且含单位元的乘法，对于所有 $a, a' \in \mathfrak{A}(M)$，我们将其记为 $a \cdot a' \in \mathfrak{A}(M)$。这种乘法源自量子理论，在物理上被解释为量子可观测量的乘积（具有结合性但不满足交换性）。(2) 对于每一对类时分离的时空嵌入 $f_1 : M_1 \to N \leftarrow M_2 : f_2$，我们还有另一种乘法 $\mathfrak{A}(M_1) \otimes \mathfrak{A}(M_2) \to \mathfrak{A}(N)$ $a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 \bullet a_2$，它将来自类时分离的 M_1 和 M_2 的量子可观测量作为输入，并在 $\mathfrak{A}(N)$ 中生成一个量子可观测量。这种乘法源自洛伦兹几何（而非量子物理！），应被解释为一种“类时分离子系统的复合”。根据假设，$\bullet$ 关于 $\cdot$ 是一个代数同态，这一事实通过以下 Eckmann-Hilton 型论证蕴含了爱因斯坦因果性：对于所有 $a_1 \in \mathfrak{A}(M_1)$ 和 $a_2 \in \mathfrak{A}(M_2)$，我们计算得出

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(f_1)(a_1) \cdot \mathfrak{A}(f_2)(a_2) &= (a_1 \bullet \mathbb{1}_2) \cdot (\mathbb{1}_1 \bullet a_2) = (a_1 \cdot \mathbb{1}_1) \bullet (\mathbb{1}_2 \cdot a_2) = (\mathbb{1}_1 \cdot a_1) \bullet (a_2 \cdot \mathbb{1}_2) \\ &= (\mathbb{1}_1 \bullet a_2) \cdot (a_1 \bullet \mathbb{1}_2) = \mathfrak{A}(f_2)(a_2) \cdot \mathfrak{A}(f_1)(a_1) \quad , \end{aligned} \tag{2.4}$$

也就是说，类空分离的量子可观测量彼此对易。

从这一描述可以相当明显地看出，存在一个多运算子，其在对称幺半范畴 T 中的代数恰好就是代数量子场论。这个多运算子的形式为

$$\mathcal{O}_{(\mathbf{Loc}_m,\perp)}[W^{-1}] := \big(\mathcal{P}_{(\mathbf{Loc}_m,\perp)} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{uAs}\big)[W^{-1}] \quad . \tag{2.5}$$

第一个因子 $\mathcal{P}_{(\mathbf{Loc}_m,\perp)}$ 表示描述“类时分离子系统的复合”的多运算子（2.3b）。第二个因子 uAs 是（2.1）中的含单位结合运算子，它描述量子可观测量按时空进行的乘法。符号 $\otimes_{\mathrm{BV}}$ 表示多运算子的 Boardman-Vogt 张量积，负责处理两类运算之间的兼容性条件。符号 $[W^{-1}]$ 表示在柯西态射类 W 处对树 operad 的局部化，参见例如 [4, 定义 2。12] 其中给出了精确定义：通过对 中的所有柯西态射作普遍逆，将时间片公理（2.3c）实现为）。关于代数量子场论小树林 $\mathcal{O}_{(\mathbf{Loc}_m,\perp)}$（局部化之前），还存在更具体的替代描述，参见

例如 [12, 命题 3。9] 对于闭表达式，或 [12, 第3节。3] 对于以生成元和关系表示的呈现。

代数量子场论小树林（2.5）可以直接推广到将（$\mathbf{Loc}_m, \perp$）替换为一个正交范畴$(\mathbf{C}\ \perp)$的情形，参见例如[12, 定义 3。4], 并且 $W \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathbf{C}$ 是$\mathbf{C}$中的一类态射。我们将小树林 $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}$ 上的代数范畴记为

$$\mathbf{AQFT}(\mathbf{C}, \perp) := \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}}(\mathbf{T}) \tag{2.6a}$$

并将局部化幺半群算子 $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}[W^{-1}]$ 上的代数范畴记为

$$\mathbf{AQFT}(\mathbf{C}, \perp)^W := \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}[W^{-1}]}(\mathbf{T}) \quad . \tag{2.6b}$$

注意，代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)^\emptyset$ = 代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)$，因此第一个定义是第二个定义的特例。更令人惊讶的是，我们将在下文的命题2.4 中看到，若将（$\mathbf{C}\ \perp$）替换为局部化正交范畴（$\mathbf{C}[W^{-1}], \perp^W$），则第二个定义可由第一个定义涵盖。

将正交范畴、正交函子及其自然变换组织成一个 2-范畴 $\mathsf{Cat}^\perp$，见 [4, 定义 2.1], ，使我们能够将赋值 $(\mathbf{C}\ \perp) \mapsto \mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}$提升为一个 2-函子 $\mathcal{O} : \mathsf{Cat}^\perp \to \mathsf{Op}$，映入由多运算子、态射和变换构成的 2-范畴，见 [4, 命题 2.6]。由此可得，赋值 $(\mathbf{C}\ \perp) \mapsto \mathbf{AQFT}(\mathbf{C}\ \perp)$ 对代数量子场论范畴 (2.6) 具有反变 2-函子性。特别地，每个正交函子$F\colon (\mathbf{C}\ \perp_{\mathbf{C}}) \to (\mathbf{D}\ \perp_{\mathbf{D}})$，即对所有 $f_1 \perp_{\mathbf{C}} f_2$， $F(f_1) \perp_{\mathbf{D}} F(f_2)$，都定义了一个拉回函子

$$F^* : \mathbf{AQFT}(\mathbf{D}, \perp_{\mathbf{D}}) \longrightarrow \mathbf{AQFT}(\mathbf{C}, \perp_{\mathbf{C}}) \tag{2.7}$$

在代数量子场论范畴的层面上。下文将说明，这有助于在不同类型的代数量子场论之间转换和比较。

运算子 Kan 扩张：假设对称幺半范畴 $\mathbf{T}$ 是闭的（即存在内部同态），且是双完备的（即存在所有小极限和余极限）。于是我们可以问，函子（2.7）是否有左伴随和/或右伴随。在普通范畴论的语境中，它们称为左/右 Kan 扩张。与我们认为描述一对一运算的范畴不同，多运算子内在地具有不对称性，因为它们描述 n对一运算，却不描述 1 对n 运算（ $n \geq 2$）。这使得函子（2.7）更有可能存在左伴随，而非右伴随。以下关于运算子左 Kan 延拓的著名存在性结果（例如参见 [12, 定理 2。11] 其中给出了详细证明）将带来代数量子场论中一些有趣的推论，正如下文所示。

命题 2.1。 设 $\mathbf{T}$是一个双完备闭对称幺半范畴。那么，对于每个正交函子 $F\colon (\mathbf{C}\ \perp_{\mathbf{C}}) \to (\mathbf{D}\ \perp_{\mathbf{D}})$，拉回函子 (2.7) 都有一个左伴随，即我们有一个伴随

$$F_! : \mathbf{AQFT}(\mathbf{C}, \perp_{\mathbf{C}}) \rightleftarrows \mathbf{AQFT}(\mathbf{D}, \perp_{\mathbf{D}}) : F^* \quad . \tag{2.8}$$

与此截然相反， F^* 通常不具有右伴随。

例 2.2。最基本且直观的例子是考虑正交函子 $j : (\mathbf{Loc}_m^\diamond, \perp) \to (\mathbf{Loc}_m, \perp)$，它描述了拓扑平凡时空（即微分同胚于 $\mathbb{R}^m$，因而形如菱形 $\diamond$）到所有时空构成的范畴中的全正交子范畴嵌入。在这种情况下，运算子左 Kan 延拓 $j_!$: 代数量子场论$(\mathbf{Loc}_m^\diamond, \perp)$ →代数量子场论$(\mathbf{Loc}_m, \perp)$ 将仅定义在菱形上的代数量子场论延拓到所有时空。这是对 Fredenhagen 的泛代数构造 [24], 的改进，详见 [12, 第 5] 节的详细比较。▽

注 2.3。尽管运算子右 Kan 延拓通常并不存在，但也有一些重要且有趣的例外。例如，代数量子场论的轨形化 [12, 第 4 节5]以及二维共形代数量子场论中手征可观测量的提取 [5, 第 5]节，都是通过右伴随形式化的。

△

低维度中的分类结果：伴随范畴技术对于深入理解时间片公理同样至关重要。设 $(\mathsf{C}\ \perp)$ 为一个正交范畴，$L:\mathsf{C}\to\mathsf{C}[W^{-1}]$ 是底层范畴 C 在一组态射 $W\subseteq\mathrm{Mor}\,\mathsf{C}$ 处的局部化函子，我们将其视为柯西态射的一种抽象。我们通过赋予局部化范畴推前正交关系 $\perp^W$，将 L 提升为一个正交函子 $L:(\mathsf{C}\ \perp)\to(\mathsf{C}[W^{-1}],\perp^W)$，即满足对于所有 $f_1\perp f_2$，都有 $L(f_1)\perp^W L(f_2)$ 的最小正交关系。利用代数量子场论小树林赋值的（2-）函子性，我们得到一个小树林态射 $\mathcal{O}_L:\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}\to\mathcal{O}_{(\mathbf{C}[W^{-1}],\perp^W)}$，根据 [4, 命题 2.14]，它为局部化幺半群算子 $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}[W^{-1}]$ 提供了一个模型。简而言之，局部化代数量子场论小树林等价于局部化底层正交范畴。由此直接得到以下推论。

命题 2.4. 对于任意正交范畴 $(\mathsf{C}\ \perp)$ 和子集 $W\subseteq\mathrm{Mor}\,\mathsf{C}$，我们有一个范畴等价

$$\mathbf{AQFT}(\mathbf{C},\perp)^W\ \simeq\ \mathbf{AQFT}\big(\mathbf{C}[W^{-1}],\perp^W\big)\quad . \tag{2.9}$$

该命题为低维代数量子场论的分类结果铺平了道路。

例 2.5. 本例基于 [4, 附录 A]。将一维连通时空的正交范畴 $(\mathbf{Loc}_1,\emptyset)$ 对所有柯西态射作局部化，得到

$$\big(\mathbf{Loc}_1[W^{-1}],\emptyset\big)\ \simeq\ \big(\mathbf{B}\mathbb{R},\emptyset\big)\quad , \tag{2.10}$$

其中 $\mathbf{B}\mathbb{R}$ 表示只有一个对象的群胚，该对象记为 ，其态射由加法群 $(\mathbb{R},+,0)$ 给出。利用命题 2.4，可得满足时间片公理的 $(\mathbf{Loc}_1,\emptyset)$ 上的代数量子场论等价于以下数据

$$\mathbb{R}\curvearrowright\mathfrak{A}(\,|\,)\ \in\ \mathbf{Fun}\big(\mathbf{B}\mathbb{R},\mathbf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathbf{T})\big) \tag{2.11}$$

一个赋有 $\mathbb{R}$-作用的代数，我们将其解释为时间演化。因此，一维代数量子场论描述的内容恰好与普通量子力学相同。▽

例 2.6。 前面的例子可以推广到定义在正交范畴（二维共形代数量子场论$\mathbf{CLoc}_2$，$\perp$）上的代数量子场论，参见[5, 第 3]节。其结果是，在（$\mathbf{CLoc}_2$，$\perp$）上的满足时间片公理的代数量子场论等价于以下数据：

$$\mathrm{Emb}(\mathbb{R})^2\curvearrowright\mathfrak{A}(\diamond)\ \xrightarrow{\ \mathrm{Emb}(\diamond,\ )\ }\ \mathfrak{A}(\ )\curvearrowleft\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)^2 \tag{2.12}$$

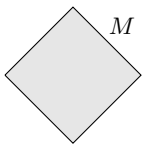
两个代数，一个对应于闵可夫斯基时空 $\mathfrak{A}(\ )$，另一个对应于平坦圆柱 $\mathfrak{A}(\ )$，以及嵌入幺半群 $\mathrm{Emb}(\mathbb{R})^2$，、微分同胚群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)^2$ 和共形嵌入 $\mathrm{Emb}(\ ,\ )$ 的显式作用。（这些作用必须与类空分离 $\perp$相容。）这将二维共形代数量子场论与共形量子场论的表示论方法联系起来。▽

与因子化代数的比较： 因子化代数[22, 23] 为量子场论提供了另一种公理化方式，适用于各种几何背景，例如拓扑、全纯、黎曼以及洛伦兹几何。在洛伦兹背景下，Costello 和 Gwilliam 的一般定义可以略作细化，得到更为合适的时间可排序预因子化代数 [8]，，其强调的是时空区域的时间可排序性，而不是较为粗略的不相交性概念。相关的几何定义如下：

(iii) 一个元组 $(f_i:M_i\to N)_{i=1,\dots,n}$ 的 $\mathbf{Loc}_m$-态射称为时间有序的，如果对于所有 $i<j$，均有 $J_N^+(f_i(M_i))\cap f_j(M_j)=\emptyset$。

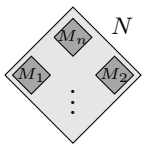
(iv) 如果存在一个置换 $\rho\in\Sigma_n$（称为时间排序置换），使得置换后的元组 $(f_{\rho(i)}:M_{\rho(i)}\to N)_{i=1,\dots,n}$ 是时间有序的，则称该元组为时间可排序的。

Loc_m 上的时间序可预分解代数（tPFA）由以下指派给出 t



$$\xmapsto{\text{tPFA}} \quad \mathfrak{F}(M) \in \mathbf{T} \tag{2.13a}$$

将 T 中的一个对象赋予每个时空 $M \in \mathrm{Loc}_m$，以及相应的赋值



$$\xmapsto{\text{tPFA}} \quad \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{F}(M_i) \longrightarrow \mathfrak{F}(N) \tag{2.13b}$$

一个 **T**-态射，指派给每个时间序元组 $\big(f_i : M_i \to N\big)_{i=1,\,\ldots,\,n}$。后一指派须满足与元组复合的相容性、幺性，以及关于置换作用的等变性。若一个 tPFA 满足时间片公理，则称之为满足该公理；该公理类比于（2.3c），要求它为每个柯西态射指派一个 **T**-同构 $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{F}(N)$。

将此定义与（2.3）中的代数量子场论定义进行比较，可以发现，tPFA 的时空代数结构较少（它指派的是 **T** 中的普通对象，而非含单位元的结合代数），但复合乘积更多，因为时间序元组比两两类时分离的元组更多。在自由量子场论的背景下，最先在 [27] 中观察到，借助时间片公理，可以在 tPFA 中构造适当的时空乘法。随后，[8] 将这一观察推广为与模型无关的论述。

为了陈述这些结果，我们将 $\mathrm{tPA}_m[W^{-1}]$ 记为编码满足时间片公理的时间可排序预因子化代数的多运算子，并且由

$$\mathbf{tPFA}(\mathbf{Loc}_m)^W := \mathbf{Alg}_{\mathrm{tPA}_m[W^{-1}]}(\mathbf{T}) \tag{2.14}$$

其代数范畴。[8, 注释 5.2] 表明，存在一个小树林态射 $\Phi : \mathrm{tPA}_m[W^{-1}] \to \mathcal{O}_{(\mathbf{Loc}_m,\perp)}[W^{-1}]$ 指向代数量子场论小树林，它定义了一个拉回函子

$$\Phi^* : \mathbf{AQFT}(\mathbf{Loc}_m, \perp)^W \longrightarrow \mathbf{tPFA}(\mathbf{Loc}_m)^W \quad , \tag{2.15}$$

即每个代数量子场论都有一个底层的 tPFA。限制到可加对象的全子范畴 [8, 定义 2.11 和 2.16], ，即那些在任意 $M \in \mathrm{Loc}_m$ 上的取值都与其在 $U \to M$ Loc_m 中所有相对紧的对象所构成的范畴上的取值之余极限一致的 tPFA/代数量子场论，可得到以下主要结果。

定理 2.7。存在范畴同构

$$\Phi_! : \mathbf{tPFA}(\mathbf{Loc}_m)^{W,\mathrm{add}} \underset{\cong}{\rightleftarrows} \mathbf{AQFT}(\mathbf{Loc}_m, \perp)^{W,\mathrm{add}} : \Phi^* \quad . \tag{2.16}$$

函子 $\Phi_!$ 的显式描述将在第 *3]* 节中详细给出。

3 同伦论

来自 BRST/BV 的动机：规范理论型代数量子场论的构造通常在 BRST/BV 形式的框架下进行，参见例如 [25, 26]。这会得到取值于对称幺半范畴 $\mathbf{T} = \mathrm{Ch}_{\mathbb{K}}$（由域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间构成的上链复形）的代数量子场论，其中该域具有特征零（通常为 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$）；简而言之，我们称之为微分分次代数量子场论。使用上链复形为幽灵场和反场（两者的上同调次数都非零）以及 BRST 和 BV 微分提供了一个自然的栖身之所。仔细考察这些构造，可以观察到（同构类型

）的输出取决于过程中所做的辅助选择，例如规范固定和辅助场。这种令人不快且看似不符合物理直觉的特征，可以通过认识到同构并不是比较两个上链复形的恰当概念来克服；相反，应当采用更弱的拟同构概念。因此，粗略地说，我们所能期望的最好结果是：BRST/BV形式能够从给定的物理输入（例如，经典作用泛函）构造出一个微分分次代数量子场论 $\mathfrak{A}$，并且该理论在拟同构意义下是唯一确定的。特别是，对于规范固定和/或辅助场等采用不同的选择，应当得到拟同构的输出 $\mathfrak{A}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$。

要确保某个构造的输出不依赖于辅助的中间选择（在拟同构意义下），手动处理起来很困难，因此需要借助数学工具来解决这些问题。模型范畴论 [31, 30]，将在下一段中简要讨论，它为此提供了强大的工具。（∞-范畴论则提供了另一种更现代的方法。我们更倾向于使用模型范畴，因为它们更加明确，因此更适合进行具体计算。）

模型范畴背后的基本思想：模型范畴是一个双完备范畴 $\mathbf{M}$，并配备了三类态射，分别称为弱等价、纤维化和余纤维化，它们满足各种公理，参见例如 [31, 第 1.1] 节。弱等价应被视为普通范畴论中同构概念的一种推广。特别是，模型范畴中两个弱等价的对象被认为是“相同的”。纤维化和余纤维化的作用不那么直接，但仍然十分重要，因为它们用于证明导出函子的存在性，并确定其模型。

为了阐明后一个概念，我们先从一个重要（但显而易见）的观察开始：两个模型范畴之间的函子 $F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ 通常并不保留弱等价，这显然与“弱等价的对象应被视为相同”这一基本思想相悖。对于某些类型的函子，可以通过将它们变形为导出函子来解决这一问题。在函子属于 Quillen 伴随的情况下，这种做法尤为重要；Quillen 伴随是指一种伴随

$$F : \mathbf{M} \rightleftarrows \mathbf{N} : G \tag{3.1}$$

两个模型范畴 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 之间的伴随，其中左伴随 F 保留余纤维化，右伴随 G保留纤维化。（另见 [30, 命题 8.5.3]，其中列出了若干在实践中有用的等价刻画。）根据模型范畴公理，为 $\mathbf{M}$ 选取一个余纤维化对象的分解 $(Q : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \;\; q : Q \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{M}})$，并为 $\mathbf{N}$ 选取一个纤维化对象的分解 $(R : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \;\; r : \mathrm{id}_{\mathbf{N}} \Rightarrow R)$，然后定义导出函子

$$\mathbb{L}F := F \circ Q : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M} \quad , \qquad \mathbb{R}G := G \circ R : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \quad . \tag{3.2}$$

导出函子的关键特征是它们保留弱等价，也就是说，它们符合这样一个核心理念：弱等价的对象是“相同的”。

微分分次代数量子场论模型范畴与 Quillen 伴随：受 BRST/BV 形式主义的启发，我们来考虑微分分次代数量子场论，即取值于域 $\mathbb{K}$ 上特征零 $\mathbb{K}$ 的向量空间上链复形 $\mathbf{T} = \mathsf{Ch}_{\mathbb{K}}$ 所构成的完备且余完备闭对称幺半范畴的代数量子场论。后者是一个对称幺半模型范畴，其中弱等价由拟同构给出，纤维化由逐次数满的余链映射给出，而余纤维化则由提升性质隐式确定；详情参见例如 [31，第 2.3 节和第 4 节。2] 借助 Hinich [29]，的重要见解，我们得到了微分分次代数量子场论的以下重要结构性结果，该结果首次发表于 [11]。

定理 3.1。(1) 对任意正交范畴 $(\mathbf{C}, \perp)$，范畴

$$\mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C}, \perp) := \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}}\big(\mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}\big) \tag{3.3}$$

上链复形值代数量子场论构成一个模型范畴，其投射模型结构如下：态射 $\zeta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是弱等价（分别为纤维化），当且仅当对于每个 $M \in \mathbf{C}$，分量 $\zeta_M : \mathfrak{A}(M) \to \mathfrak{B}(M)$ 都是拟同构（分别为逐次满射的上链映射）。余纤维化由相对于所有无圈纤维化（即同时为弱等价和纤维化的态射）的左提升性质确定。

(2) 对任意正交函子 $F : (\mathbf{C}, \perp_{\mathbf{C}}) \to (\mathbf{D}, \perp_{\mathbf{D}})$，伴随

$$F_! : \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C}, \perp_{\mathbf{C}}) \rightleftarrows \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{D}, \perp_{\mathbf{D}}) : F^* \tag{3.4}$$

命题 *2.1* 中的伴随是 Quillen 伴随。

第 (1) 项中的模型范畴为通过 BRST/BV 形式构造代数量子场论模型提供了自然背景 [25, 26]，而且极为重要的是，能够确保所得结果不依赖于规范固定和/或辅助场等中间选择。后一方面已在线性量子规范理论的背景下得到详细研究，特别参见[17, 3, 7]。第 (2) 项中的 Quillen 伴随带来了有趣的应用，例如例2.2中讨论的局部到整体扩张的导出变体。关于后者的玩具示例展示了规范理论结构与导出函子之间丰富的相互作用，详见 [11, 附录 A]。

同伦相容的代数量子场论：定理 3.1 中的模型范畴 $\mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C}, \perp)$ 描述了微分分次代数量子场论，其中所有代数结构都严格复合，即不存在非平凡的同伦相容数据。因此，我们可以进一步追问，是否存在一种可能更一般、更灵活的同伦相容代数量子场论概念，使其与微分分次代数量子场论的关系，类似于 A_∞-代数与结合微分分次代数之间的关系，以及 L_∞-代数与微分分次李代数之间的关系。拟运算子理论提供了研究并回答这一问题所需的工具，更多细节参见例如 [15, 29]。在当前语境下，同伦相容的代数量子场论按定义是微分分次拟运算子 $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes \mathbb{K} \in \mathbf{dgOp}_{\mathbb{K}}$ 上的同伦代数；该拟运算子是通过以下方式将所有运算集合转化为上链复形而得到的：$(-) \otimes \mathbb{K} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}$，$S \mapsto S \otimes \mathbb{K} := \bigoplus_{s \in S} \mathbb{K}$。同样按定义，$\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes \mathbb{K}$ 上的同伦代数，是给定微分分次拟运算子的任意一个余纤维化（或 Σ-余纤维化，以获得更小的模型）分解 $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes \mathbb{K}$ 上的普通代数。这意味着，同伦相容的代数量子场论由范畴描述

$$\mathbf{dgAQFT}_\infty(\mathbf{C}, \perp) := \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)_\infty}}\big(\mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}\big) \quad , \tag{3.5}$$

我们再次赋予其投射模型结构。

事实证明，在我们一贯采用的特征零域 $\mathbb{K}$ 上工作时，同伦相干的代数量子场论（AQFT）并不会带来额外的内容。这是一般整直定理的推论，参见例如 [15, 定理 4.1] 和 [29, 定理 2.4.5]。

定理 3.2。设 $(\mathbf{C}, \perp)$ 为任意正交范畴，$q : \mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes \mathbb{K}$ 任意一个 AQFT dg-歌剧的（Σ-）余纤维化对象的分解。那么所诱导的 Quillen 伴随

$$q_! : \mathbf{dgAQFT}_\infty(\mathbf{C}, \perp) \rightleftarrows \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C}, \perp) : q^* \tag{3.6}$$

是一个 Quillen 等价。特别地，每个同伦相容的代数量子场论 $\mathfrak{A}_\infty \in$ 微分分次代数量子场论$_\infty(\mathbf{C}, \perp)$ 都允许严格化为一个微分分次代数量子场论，该严格化由导出单位 $\mathfrak{A}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_{\mathrm{st}} := \mathbb{R}q^* \mathbb{L}q_!(\mathfrak{A}_\infty)$ 给出。

开放问题 3.3。回顾 (2.5) 中将代数量子场论小树林表示为 Boardman-Vogt 张量积 $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)} = \mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{uAs}$ 的方式，我们可以引入一种可能更丰富的同伦相容代数量子场论概念。将两个因子，即 $\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)}$ 和 uAs，都视为 ∞-operad（其含义取自 [33],），我们可以构造它们的 ∞-operadic 张量积 $\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes_{\infty} \mathrm{uAs}$。这个 ∞-operad 原则上不同于通过余纤维化对象的分解得到的 operad。事实上，由 Lurie-Dunn 可加性 [33, 定理 5.1.2.2], 可知，$\mathrm{uAs} \otimes_{\infty} \mathrm{uAs} \simeq \mathbb{E}_2$ 是同伦非平凡的$\mathbb{E}_2$-operad，而 $(\mathrm{uAs} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{uAs})_{\infty} \simeq \mathbb{E}_{\infty}$ 是同伦平凡的 $\mathbb{E}_{\infty}$-operad。在代数量子场论的语境中，爱因斯坦因果性通过 Eckmann-Hilton 型论证 (2.4) 实现；我们认为，∞-operad $\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)} \otimes_{\infty} \mathrm{uAs}$ 描述了因果性公理的一种 $\mathbb{E}_2$-变体。对这个 ∞-operad 的详细研究是一个有趣的开放问题。▷

时间片公理的严格化：在上一段中，我们有意避开了时间片公理。回想一下，在 1-范畴语境中，该公理是通过对树 operad 进行局部化来实现的，参见（2.5）。在模型范畴语境中，时间片公理有两种先验不同的选项。

定义 3.4. 若一个 dg-AQFT $\mathfrak{A} \in$ 微分分次代数量子场论(C $\perp$) 对于$\sim W \subseteq$Mor C 中的每个态射 W-态射 f: $M \to N$，都将其映射为同构 $\mathfrak{A}(f)$: $\mathfrak{A}(M) \xrightarrow{=} \mathfrak{A}(N)$，则称其满足严格时间切片公理。若它将每个 W-态射 f: $M \to N$ 映射为拟同构 $\mathfrak{A}(f)$: $\mathfrak{A}(M) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}(N)$，则称其满足同伦时间切片公理。

显然，严格时间切片公理是同伦变体的一个特例。需要强调的是，源自 BRST/BV 形式 [25, 26, 3, 7] 的微分分次代数量子场论的典型示例满足同伦时间切片公理，但不满足严格时间切片公理。从概念上讲，这完全不是一个问题，因为应当将拟同构的对象（而不仅仅是同构的对象）视为“相同”。然而，从更实际的角度来看，这会带来一些复杂性。例如，代数量子场论中的某些构造，例如确定相对柯西演化（RCE）及其相关的应力能量张量 [19], 对于仅满足同伦时间切片公理的理论而言，会变得复杂得多，参见例如 [16]。这促使我们并证明了寻找同伦时间切片公理的严格化定理是合理的。为了做好准备，我们首先必须为时间切片公理的两种变体引入模型范畴。在严格情形下，我们使用命题2.4 并赋予

$$\mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C},\perp)^{W} \;:=\; \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{C}[W^{-1}],\perp^{W})}}\big(\mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}\big) \tag{3.7}$$

采用投射模型结构。在同伦情形下，我们遵循 [21, 第 3] 节，并考虑

$$\mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C},\perp)^{\mathrm{ho}W} \;:=\; \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}[W^{-1}]^{\infty}}\big(\mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}\big) \;\simeq\; \mathcal{L}_{\widehat{W}}\mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C},\perp) \quad . \tag{3.8}$$

第一步涉及对 AQFT dg-多运算子 dgOp $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)}[W^{-1}]^{\infty} \in \mathbb{K}$ 在 W 处进行同伦局部化，其代数范畴赋有投射模型结构。第二步利用 [21, 定理 3.13] 中的 Quillen 等价，将左侧识别为定理 3.1 中的投射模型范畴在某个适当的 $\widehat{\ }$态射类 W 处的左 Bousfield 局部化；该态射类由 W 确定。利用局部化歌剧态射$\mathcal{O}_L$: $\mathcal{O}_{(\mathbf{C},\perp)} \to \mathcal{O}_{(\mathbf{C}[W^{-1}],\perp^{W})}$，根据 [4, 命题 2.24]，我们得到一个 Quillen 伴随

$$L_! \;:\; \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C},\perp)^{\mathrm{ho}W} \;\rightleftarrows\; \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C},\perp)^{W} \;:\; L^* \tag{3.9}$$

这使我们能够比较严格的时间片公理和同伦时间切片公理。以下结果在 [4,定理 3.6] 中得到了证明。

定理 3.5。 设 $L:(\mathbf{C}\ \perp) \to (\mathbf{C}[W^{-1}],\perp^{W})$ 是一个反射性正交局部化，这意味着正交局部化函子 L 具有一个全忠实右伴随正交函子 $i:(\mathbf{C}[W^{-1}],\perp^{W}) \to (\mathbf{C}\ \perp)$。那么 (3.9) 是一个 Quillen 等价。

特别地，在这种情况下，每个满足同伦时间切片公理的微分分次代数量子场论 $\mathfrak{A} \in$ 微分分次代数量子场论$(\mathsf{C}\ \perp)^{\mathrm{ho}W}$ 都可以严格化为一个满足严格时间切片公理的微分分次代数量子场论，该理论由未导出单位 $\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_{\mathrm{st}} := L^*\, i^*(\mathfrak{A})$ 给出。

例 3.6. 以下类型的代数量子场论均涵盖在此定理之内，详见 [4, 例 3.4]以了解更多详情：(i) 定义在 $\mathbf{Loc}_1$, 上的一维微分分次代数量子场论；(ii) 定义在 $\mathbf{CLoc}_2$, 上的二维共形微分分次代数量子场论；以及 (iii) 定义在切片范畴 $\mathbf{Loc}_m/M$上的 Haag-Kastler 型微分分次代数量子场论。特别地，(i) 和 (ii) 表明，例 2.5 和 2.6 中的分类结果可推广至满足同伦时间切片公理的微分分次代数量子场论。 ▽

开放问题 3.7。 我们目前尚不清楚，对于（高维情形的 $(\mathbf{Loc}_m, \perp)$，是否存在如定理 $m \geq 2$3.5 W 所述或其他形式的严格化定理，适用于▷Cauchy 态射。 ▷

注 3.8. 对于微分分次代数量子场论的同伦时间切片公理，至少存在某些严格化定理，这似乎是与洛伦兹几何中时间演化的一维特性相关的现象。显然，拓扑量子场论不存在类似的严格化结果，若将其表述为局部常值因子化代数。事实上，定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的局部常值因子化代数等价于定义在同伦非平凡 $\mathbb{E}_m$-多运算子上的代数 [33, 定理 5.4.5。9], 因此，对于 $m \geq 2$，它们无法被严格化。 △

示例的构造：读者现在或许会问，如何在 $\mathbf{Loc}_m$ 上构造微分分次代数量子场论的具体示例。本段将概述线性（高阶）规范理论模型的构造，它们构成了最简单的一类微分分次代数量子场论。技术细节见 [7]。

该构造的起始输入与 Costello 和 Gwilliam [22], 的自由因子化代数类似，但在后续步骤中有所不同。作为基本输入，我们取以下内容。

定义 3.9。 $M \in \mathbf{Loc}_m$ 上的自由 BV 理论是一个元组 $\big(F_M, Q_M, (-,-)_M\big)$，由一个线性微分算子复形 (F_M, Q_M) 和一个相容的 (-1)-移位纤维度量 $(-,-)_M$ 组成。$\mathbf{Loc}_m$ 上的自由 BV 理论是一个自然族 $\big(F_M, Q_M, (-,-)^M\big)_{M\in\mathbf{Loc}_m}$，由所有 $M \in \mathbf{Loc}_m$ 上的自由 BV 理论组成。

例3.10。需要牢记的典型例子是线性杨-米尔斯理论。在这种情况下，线性微分算子复形写作

$$(F_M, Q_M) \;=\; \Big(\overset{(-1)}{\Lambda^0 M} \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \overset{(0)}{\Lambda^1 M} \xrightarrow{\ \delta\,\mathrm{d}\ } \overset{(1)}{\Lambda^1 M} \xrightarrow{\ \delta\ } \overset{(2)}{\Lambda^0 M} \Big) \quad , \tag{3.10}$$

其中 $\Lambda^p M$ 表示余切丛的 p 阶外幂（即 p-形式），d 是德拉姆微分，而 δ 是余微分。正如BV形式主义中的典型情况，底层的 $\mathbb{Z}$ 分次向量丛编码了幽灵场 c （次数为 -1）、场 A （次数为 0）、反场 $A^\ddagger$ （次数为 1）以及幽灵的反场 $c^\ddagger$ （次数为 2）。微分 Q_M 通过 d 编码了规范变换的作用，同时也编码了由线性杨-米尔斯算子 $\delta\,\mathrm{d}$ 给出的动力学。(-1)-移位纤维度量 $(-,-)_M$： $F_M \otimes F_M \to M \times \mathbb{R}[-1]$ 由场/幽灵与其反场之间的配对 $(A^\ddagger, A)_M = *^{-1}(A^\ddagger \wedge *A)$ 和 $(c^\ddagger, c)_M = -*^{-1}(c^\ddagger \wedge *c)$ 给出，其中 $*$ 表示霍奇算子。这捕捉了来自 BV形式主义的 (-1)-移位辛结构及其对偶移位泊松结构（反括号）。更多例子，包括高阶规范理论的例子，可参见 [7, 例 3.6、3.7 和 3.8]。 ▽

结合 与 $\mathbf{Loc}_m$ 上任意自由 BV 理论相关联的是一个可进行时间排序的微分分次预因子化代数

$$\big(F_M, Q_M, (-,-)_M\big)_{M\in\mathbf{Loc}_m} \overset{\text{BV quantization}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{F} \in \mathbf{dgtPFA}(\mathbf{Loc}_m) \quad , \tag{3.11}$$

它可以通过 BV量子化构造，参见 [22] 另请参见 [7] 关于洛伦兹背景的讨论。然而，这一设置不足以构造微分分次代数量子场论，后者还需要引入推迟 G^+ 与超前 G^- 格林同伦 [6], ，以推广推迟与超前格林算子的概念。非正式地说， $G^\pm$ 是一个（伪）自然族

$$\left\{ G^\pm_K \in \left[\Gamma^\infty_K(F_M), \Gamma^\infty_{J^\pm_M(K)}(F_M)\right]^{-1} \,:\, K \subseteq M \text{ compact} \right\} \tag{3.12}$$

具有支撑性质的同伦，恰如将包含余链映射平凡化的推迟/超前格林算子 $\mathrm{incl} \;=\; \partial G^\pm_K \colon \Gamma^\infty_K(F_M) \to \Gamma^\infty_{J^\pm_M(K)}(F_M)$，对所有紧集$K \subseteq M$均如此。其精确定义（包括伪自然性）更为复杂，可参见 [6, 定义 3.5]。本文证明了推迟/超前格林同伦的许多良好性质（推广了推迟/超前格林算子的通常性质 [2, 1]）。尤其是，我们有

定理 3.11。（1）唯一性：(F_M, Q_M) 上推迟/超前格林同伦的 Kan复形要么为空，要么是可缩的。参见 *[6, 命题 3.9]*。

（2）存在性：假设 (F_M, Q_M) 存在一个格林见证，即一个次数为 -1 的微分算子 W_M，使得 $P_M := Q_M W_M + W_M Q_M$ 是一个格林双曲微分算子。那么 (F_M, Q_M) 同时存在推迟格林同伦和超前格林同伦。参见 *[6, 定理 4.8]*。

例 3.12. 例 3.10 中的线性杨-米尔斯复形具有一个自然的格林见证，给出如下

$$W_M \;=\; \Big(\overset{(-1)}{\Lambda^0 M} \xleftarrow{\;\delta\;} \overset{(0)}{\Lambda^1 M} \xleftarrow{\;\mathrm{id}\;} \overset{(1)}{\Lambda^1 M} \xleftarrow{\;\mathrm{d}\;} \overset{(2)}{\Lambda^0 M} \Big) \quad . \tag{3.13}$$

相应的迟延/超前格林同伦写作

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0_K(M) & \xrightarrow{\;\mathrm{d}\;} & \Omega^1_K(M) & \xrightarrow{\;\delta\mathrm{d}\;} & \Omega^1_K(M) & \xrightarrow{\;\delta\;} & \Omega^0_K(M) \\
\subseteq\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \delta E^\pm} & \subseteq\downarrow & \swarrow{\scriptstyle E^\pm} & \subseteq\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{d}E^\pm} & \subseteq\downarrow \\
\Omega^0_{J^\pm_M(K)}(M) & \xrightarrow[\;\mathrm{d}\;]{} & \Omega^1_{J^\pm_M(K)}(M) & \xrightarrow[\;\delta\mathrm{d}\;]{} & \Omega^1_{J^\pm_M(K)}(M) & \xrightarrow[\;\delta\;]{} & \Omega^0_{J^\pm_M(K)}(M)
\end{array} \quad , \tag{3.14}$$

其中， $E^\pm$ 是达朗贝尔算子 $\Box = \delta\,\mathrm{d} + \mathrm{d}\,\delta$的推迟/超前格林算子。▽

格林见证与格林同伦理论使我们能够将任意一个定义在 $\mathbf{Loc}_m$ 上、配备自然格林见证的自由BV理论关联到一个微分分次代数量子场论。

$$\big(F_M, Q_M, (-,-)_M, W_M\big)_{M\in\mathbf{Loc}_m} \overset{\text{CCR quantization}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{A} \in \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{Loc}_m, \perp)^{\mathrm{ho}W} \tag{3.15}$$

满足同伦时间切片公理。后者可以通过正则对易关系（CCR）量子化构造，详见 [7]。该构造与 dg-tPFA 构造（3.11）在以下意义下相容：函子（2.15）推广到 dg 设定，从而得到一个右奎伦函子

$$\Phi^* \,:\, \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{Loc}_m, \perp)^{\mathrm{ho}W} \longrightarrow \mathbf{dgtPFA}(\mathbf{Loc}_m)^{\mathrm{ho}W} \quad . \tag{3.16}$$

将此函子应用于微分分次代数量子场论（3.15）得到一个与（3.11）同构的微分分次拓扑预因子代数，即$\Phi^*(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{F}$ 对于 $\mathbf{Loc}_m$ 上任意具有自然格林见证的自由BV理论。

开放问题 3.13。我们预期（但目前尚不知道如何证明），在限制到经过适当定义的可加对象时，(3.16) 会诱导出一个 Quillen 等价。若能给出这一主张的形式化模型范畴证明，并将比较定理 2.7 从 1-范畴目标 $\mathbf{T}$ 推广到更丰富的微分分次背景，将是未来一项有趣且重要的研究问题。▷

注 3.14。 关于通过微扰代数量子场论构造相互作用模型， [25, 26] 请读者参阅本卷的相关章节或专著 [36]。 △

4 高阶范畴

为什么上链复形还不够：由（dg-）AQFT $\mathfrak{A}$ 赋予一个时空 M 的带单位结合（dg-）代数，应被理解为对 M上场的模空间“空间”上的函数代数进行量子化，即

$$\mathfrak{A}(M) \;=\; \mathcal{O}_\hbar\Big(\text{ moduli “space” of fields on } M\Big) \in \mathbf{Alg}_{\mathsf{uAs}}(\mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}) \quad . \tag{4.1}$$

因此，考虑的“空间”类型在很大程度上决定了这种赋值是否合理。例如，在（导出）代数几何中，只有一小类空间——称为（导出）仿射概形——能够由其函数代数刻画。其他空间，例如（导出）叠，一般则不能。举例来说，考虑与约化仿射群概形 G 相关联的分类叠 $\mathrm{B}G := [*/G]$，会发现其函数代数

$$\mathcal{O}(\mathbf{B}G) \;\simeq\; N^\bullet(G,\mathbb{K}) \;\simeq\; \mathbb{K} \;=\; \mathcal{O}(*) \tag{4.2}$$

与一点的函数代数弱等价，也就是说，关于群 G 的所有信息都会丢失。（这里 $N^\bullet$表示归一化群余链。）函数代数的这种不足是一种非微扰规范理论特征。事实上，只考虑（导出）叠 X中一点 $x : * \to X$的形式邻域，也就是围绕给定的域进行微扰计算，就会得到一个形式模问题，它可以用 L_∞-代数进行代数描述，或者对偶地用相应的 Chevalley–Eilenberg dg-代数描述，参见 [32, 34]。

这个问题对于（导出）代数几何学家而言众所周知，他们提出了一种有趣的解决方案，非正式概述见 [37]，技术细节见 [20]。与其将（导出）叠 X 赋予其函数代数 $\mathcal{O}(X) \in \mathrm{Alg}^{\mathbb{E}_\infty}(\mathrm{Ch}_{\mathbb{K}})$（如上所见，这样做并不足够），不如考虑其拟凝聚模的对称幺半 dg-范畴 $\mathrm{QCoh}(X) \in \mathrm{Alg}^{\mathbb{E}_\infty}(\mathrm{dgCat}_{\mathbb{K}})$。非正式地说，后者描述了 X上的（dg-）向量丛，因此其先验上比函数代数更丰富；函数代数可以看作平凡线丛的截面。为了证明这种方法的性质更好，我们再来考虑与约化仿射群概形相关联的分类叠 $\mathrm{B}G$。可以证明（明确的证明见例如 [10, 命题 2.17]），与之相关联的拟凝聚模对称幺半 dg-范畴

$$\mathbf{QCoh}(\mathbf{B}G) \;\simeq\; \mathbf{Ch}_{\mathbb{K}}^{\mathcal{O}(G)} \;=:\; \mathbf{dgRep}(G) \tag{4.3}$$

由 $\mathcal{O}(G)$-dg-余模的对称幺半 dg-范畴给出，换言之，就是上链复形上的 G-表示。可以通过 Tannaka 重构论证，从这个对称幺半 dg-范畴重构出群 G，因此不会丢失任何信息。

将这些思想转移到代数量子场论的语境中，促使我们将 (4.1) 替换为向时空 [37, 20] 指派量子化 dg-范畴（依照 M 的定义）的做法，我们对其作非正式的理解，即

$$\mathfrak{A}(M) \;=\; \mathbf{QCoh}_\hbar\Big(\text{ moduli “space” of fields on } M\Big) \in \mathbf{dgCat}_{\mathbb{K}} \quad . \tag{4.4}$$

在场的模空间“空间”仅为 1-叠且没有导出结构这一特殊情形下，可以用（局部可呈现的）$\mathbb{K}$-线性范畴替代 dg-范畴，从而简化这一框架。在以分类叠 $\mathrm{B}G$ 为例的贯穿示例中，这种简化将范围从 dg-表示 $\mathrm{dgRep}(G)$ 限制到普通的对称幺半范畴 $\mathrm{Rep}(G) := \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathcal{O}(G)}$，即 $\mathcal{O}(G)$-余模。下文将从这一简化设定开始，因为它可以在更简单的 2-范畴论背景下形式化，而不必诉诸 ∞-范畴论。

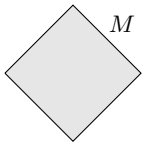
代数量子场论的基础：2-代数量子场论：我们用 $\mathbf{Pr}_{\mathbb{K}}$ 表示局部可呈现的 $\mathbb{K}$-线性范畴、余连续 $\mathbb{K}$-线性函子和自然变换所构成的闭对称幺半2-范畴。简要回顾请参见 [9] 。 $\mathbf{Pr}_{\mathbb{K}}$ 是 AQFT 的 2-范畴推广的目标范畴，该推广实现了上一段所阐述的思想。

定义 4.1. 正交范畴（*-AQFTs* 上的 2-AQFT（$\mathbf{C}$ $\perp$）的 2-范畴定义为取值于 $\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)}$（关于其与代数量子场论小树林的关系，见（2.5））的弱代数的 2-范畴，其中$\mathbf{Pr}_{\mathbb{K}}$，即

$$\mathbf{2AQFT}(\mathbf{C},\perp) := \mathbf{Alg}^{\mathrm{weak}}_{\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)}}\big(\mathbf{Pr}_{\mathbb{K}}\big) \quad . \tag{4.5}$$

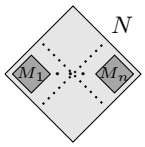
技术细节请参见 [9]。

注 4.2. 进一步详细说明，2-AQFT $\mathfrak{A} \in$ 2AQFT(C $\perp$) 是一个赋值 t



$$\xmapsto{\text{2-AQFT}} \quad \mathfrak{A}(M) \in \mathbf{Pr}_{\mathbb{K}} \tag{4.6a}$$

将局部可呈现的 $\mathbb{K}$-线性范畴赋给每个对象 $M \in$C，并且还将



$$\xmapsto{\text{2-AQFT}} \quad \boxtimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(M_i) \longrightarrow \mathfrak{A}(N) \tag{4.6b}$$

一个保余连续的 $\mathbb{K}$-线性函子赋给每个元组 $\big(f_i : M_i \to N\big)_{i=1,\dots,n}$ 两两正交的 $\mathbf{C}$-态射，即 $f_i \perp f_j$ 对所有 $i \neq j$，以及用于证明其与复合、单位元和置换作用相容的相容数据。与普通 AQFT（2.3）相比，我们注意到，2-AQFT 只需将含幺结合代数的范畴$\mathbf{Alg}_{\mathrm{uAs}}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$替换为由局部可呈现的 $\mathbf{Pr}_{\mathbb{K}}$ -线性范畴构成的 2-范畴。此前一段中提出并解释的推广，正是如此。

△

注 4.3. 与定义 4.1中的 2-AQFT 类似的高阶代数结构，也出现在 Ben-Zvi、Brochier 和 Jordan 对范畴值因子化同调的研究中[13, 14]。

△

当然，最迫切的问题是，2-AQFT 的概念是否确实是第 2节中普通代数量子场论概念的推广。以下结果已在 [9,定理 4.3], 中证明，表明事实确实如此。

定理 4.4. 对于每个正交范畴 (C $\perp$)，都存在一个双范畴伴随

$$\iota \,:\, \mathbf{AQFT}(\mathbf{C},\perp) \rightleftarrows \mathbf{2AQFT}(\mathbf{C},\perp) \,:\, \pi \tag{4.7}$$

它将普通AQFT表明为2-AQFT的2-范畴中的一个余反射满2-子范畴。

简单来说，该结果表明，应用包含函子 ι 后，普通AQFT可以等价地视为2-AQFT的特殊例子。与普通 $\mathfrak{A} \in$ AQFT(C $\perp$) 相关联的2-AQFT $\iota(\mathfrak{A})$ 具有特别简单的形式：它将 $M \in$ C 赋给范畴 $\iota(\mathfrak{A})(M) = \mathfrak{A}(M)\mathrm{Mod} \in \mathbf{Pr}_{\mathbb{K}}$，即代数 $\mathfrak{A}(M) \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{uAs}}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ 上的模范畴；并将一组两两正交的 C-态射赋给与代数映射 $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(M_i) \to \mathfrak{A}(N)$ 相关联的诱导模函子。

自然会有人问，是否存在并非通过包含函子 ι 从普通AQFT 得到的 2-AQFT。我们称这类 2-AQFT 为非截断的，而通过 ι 得到的则.....

称为截断的。这一数学问题可以表述如下：寻找对象 $\mathfrak{A} \in \mathbf{2AQFT}(\mathbf{C}\ \perp)$，使得伴随的余单位 $\epsilon_{\mathfrak{A}}: \iota\pi(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ 不是伴随（ 4.7 ）的等价。非截断的 2-AQFT 的简单示例可以通过轨形构造获得：假设 $\mathfrak{A} \in$ 代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)$ 是一个具有有限群G作用的普通AQFT。相应的轨形 2-AQFT $\mathfrak{A}^G \in \mathbf{2}$代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)$ 定义为将范畴 $M \in \mathbf{C}$ 赋予范畴

$$\mathfrak{A}^G(M) := {}_{\mathfrak{A}(M)}\mathbf{Mod}^{\mathcal{O}(G)} \in \mathbf{Pr}_{\mathbb{K}} \tag{4.8}$$

<escape>的 G-等变 $\mathfrak{A}(M)$-模，以及与一组相互正交的$\mathbf{C}$-态射相对应的诱导模函子，详见[9, 第 5] 节。关于该 2-代数量子场论 $\mathfrak{A}^G$ 是否为截断的这一问题，可以归结为一个代数问题，参见 [9, 定理 5。11]。</escape>

定理 4.5. $\mathfrak{A}^G \in \mathbf{2}$代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)$ 是截断的，当且仅当 G-不变量的代数扩张 $\mathfrak{A}(M)^{\mathcal{O}(G)} \subseteq \mathfrak{A}(M)$ 对所有 $M \in \mathbf{C}$ 都是 $\mathcal{O}(G)$-Hopf-Galois。

例 4.6。非截断的 2-AQFT 最简单的例子是与平凡AQFT $\mathbb{K} \in$ AQFT$(\mathbf{C}\ \perp)$ 以及一个非平凡有限群 G 的平凡作用相关联的轨形构造 $\mathbb{K}^G \in \mathbf{2}$AQFT$(\mathbf{C}\ \perp)$。▽

迈向 ∞-代数量子场论：上一段应被视为一个预热，为更丰富的情形做铺垫，即目标范畴是由 dg-范畴构成的对称幺半 ∞-范畴 $\mathbf{dgCat}_{\mathbb{K}}$。这将涵盖一系列由导出叠的量子化所产生的新例子。

定义 4.7. 正交范畴 $(\mathbf{C}\ \perp)$ 上的 ∞-代数量子场论 的 ∞-范畴定义为取值于 $\mathbf{dgCat}_{\mathbb{K}}$ 的多运算子 $\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)}$ 上的代数的 ∞-范畴（按 [33] 的意义），即。

$$\infty\mathbf{AQFT}(\mathbf{C},\perp) := \mathbf{Alg}^{\infty}_{\mathcal{P}_{(\mathbf{C},\perp)}}\left(\mathbf{dgCat}_{\mathbb{K}}\right) \quad . \tag{4.9}$$

遗憾的是，目前尚未对这一框架进行深入研究。不过，我们注意到，存在一种构造，可以将任意微分分次代数量子场论 $\mathfrak{A} \in$ dgAQFT$(\mathbf{C}\ \perp)$ 赋予一个 ∞-AQFT。后者通过将 dg-范畴 ${}_{\mathfrak{A}(M)}\mathbf{dgMod} \in \mathbf{dgCat}_{\mathbb{K}}$ 赋予对象 $M \in \mathbf{C}$ 来定义，其中这些 dg-范畴由 $\mathfrak{A}(M)$-dg-模构成；对于互不相交的 $\mathbf{C}$-态射元组，则赋予相应的 dg-模函子。

开放问题 4.8。 通过建立一个4.4 来推广定理 ∞-伴随

$$\iota : \mathbf{dgAQFT}(\mathbf{C},\perp) \rightleftarrows \infty\mathbf{AQFT}(\mathbf{C},\perp) : \pi \tag{4.10}$$

将第 3 节中的微分分次代数量子场论与 ∞-代数量子场论联系起来。特别有意思的是，若能证明此 ∞-伴随展示了与模型范畴 ∞相关联的范畴微分分次代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)$ 是一个余反射的满 ∞-子范畴 ∞代数量子场论$(\mathbf{C}\ \perp)$。▷

尽管 ∞-代数量子场论的基础目前尚未充分发展，但已有令人鼓舞的证据表明，通过导出代数几何中的量子化构造，可以为这类对象得到有趣的实例 [20, 37]。第一个构造实例的尝试见于 [10, 第 4]节。具体而言，考虑结构群为任意约化仿射群概形的杨-米尔斯理论的典范相空间，该理论定义在柯西曲面的格点近似上 G 。此相空间是导出余切栈 Σ

$$T^*\left[\mathrm{Con}_G(\Sigma)/\mathcal{G}(\Sigma)\right] \tag{4.11}$$

在 Σ 上的 G-联络模规范群作用所得的商栈上，并带有典范的未移位辛结构。 [10, 中描述了该导出栈上拟凝聚模的微分分次范畴的量子化，命题 3.13], ，可将其解释为

关于 D-模在商栈 $\big[\mathrm{Con}_G(\Sigma)/\mathcal{G}(\Sigma)\big]$。随后在 [10, 命题 410] 中证明了该赋值

$$\mathfrak{A}(\Sigma) \;:=\; \mathbf{QCoh}_{\hbar}\big(T^*\big[\mathrm{Con}_G(\Sigma)/\mathcal{G}(\Sigma)\big]\big) \;\in\; \mathbf{dgCat}_{\mathbb{K}} \tag{4.12}$$

这些量子化 dg-范畴到格（或更一般地，到有向图）的映射，可以提升为一个（格变体的） ∞-代数量子场论，定义见4.7。

开放问题 4.9。构造定义在时空晶格而非空间晶格上的 ∞-代数量子场论实例将会很有趣。这将使人们能够研究 ∞-代数量子场论背景下的时间片公理；初步来看，该公理应具有如下形式：每个柯西态射$f\colon\ M \to N$都对应于 dg-范畴之间的拟等价 $\mathfrak{A}(f)\colon\ \mathfrak{A}(M) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}(N)$。▷

致谢

M.B. 的工作得到国家数学物理小组（GNFM-INdAM（IT））的支持。A.S. 衷心感谢英国皇家学会通过皇家学会大学研究奖学金（URF\R\211015）和强化资助（RF\ERE\210053）提供的支持。我们还要感谢为同伦代数量子场论研究计划作出贡献和/或目前仍在贡献的合作者：A. Anastopoulos、S. Bruinsma、S. Bunk、V. Carmona、C. J. Fewster、L. Giorgetti、A. Grant-Stuart、J. MacManus、G. Musante、M. Perin、J. P. Pridham、P. Safronov、U. Schreiber、R. J. Szabo 和 L. Woike。

参考文献

[1] C. B¨ar, 《全局双曲时空上的 Green 双曲算子》, 《数学物理通讯》333, 第 3 期, 1585（2015） [arXiv:1310.0738 [math-ph]]。C. B¨ar、N. Ginoux 和 F. Pf¨affle, 《洛伦兹流形上的波动方程与量子化》, 欧洲数学学会, 苏¨黎世（2007） [arXiv:0806.1036 [math.DG]]。M. Benini、S. Bruinsma 和 A. Schenkel, 《作为同伦代数量子场论的线性杨-米尔斯理论》, 《数学物理通讯》378, 第 1 期, 185（2020） [arXiv:1906.00999 [math-ph]]。M. Benini、V. Carmona 和 A. Schenkel, 《同伦时间片公理的严格化定理》, 《数学物理快报》113, 第 1 期, 20（2023） [arXiv:2208.04344 [math-ph]]。M. Benini、L. Giorgetti 和 A. Schenkel, 《共形代数量子场论的骨架模型》, 《数学物理通讯》395, 第 1 期, 269–298（2022） [arXiv:2111.01837 [math-ph]]。M. Benini、G. Musante 和 A. Schenkel, 《洛伦兹流形上的 Green 双曲复形》, arXiv:2207.04069 [math-ph]。M. Benini、G. Musante 和 A. Schenkel, 《洛伦兹自由 BV 理论的量子化：因子化代数与代数量子场论》, arXiv:2212.02546 [math-ph]。M. Benini、M. Perin 和 A. Schenkel, 《洛伦兹流形上因子化代数与代数量子场论的模型无关比较》, 《数学物理通讯》377, 971–997（2020）[arXiv:1903.03396 [math-ph]]。M. Benini、M. Perin、A. Schenkel 和 L. Woike, 《代数量子场论的范畴化》, 《数学物理快报》111, 第 2 期, 35（2021）[arXiv:2003.13713 [math-ph]]。M. Benini、J. P. Pridham 和 A. Schenkel, 《导出余切栈的量子化与有向图上的规范理论》, arXiv:2201.10225 [math-ph]。

[11] M. Benini、A. Schenkel 和 L. Woike，《代数量子场论的同伦论》，《数学物理快报》109，第 7 期，1487（2019） [arXiv:1805.08795 [math-ph]]。M. Benini、A. Schenkel 和 L. Woike，《代数量子场论的多运算子》，《当代数学通讯》23，第 2 期，2050007（2021） [arXiv:1709.08657 [math-ph]]。D. Ben-Zvi、A. Brochier 和 D. Jordan，《在曲面上积分量子群》，《拓扑学杂志》11，第 4 期，874–917（2018） [arXiv:1501.04652 [math.QA]]。D. Ben-Zvi、A. Brochier 和 D. Jordan，《量子特征簇与编织模范畴》，《数学精选》新系列 24，4711–4748（2018） [arXiv:1606.04769 [math.QA]]。C. Berger 和 I. Moerdijk，《有色 operad 的解消与同伦代数的严格化》，载于：A. Davydov、M. Batanin、M. Johnson、S. Lack 和 A. Neeman（编），《代数、几何与数学物理中的范畴》，《当代数学》431，31–58，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯（2007）。[16] S. Bruinsma、C. J. Fewster 和 A. Schenkel，《线性同伦代数量子场论的相对柯西演化》，《数学物理通讯》392，第 2 期，621–657（2022） [arXiv:2108.10592 [math-ph]]。S. Bruinsma 和 A. Schenkel，《代数场论 operad 与线性量子化》，《数学物理快报》109，第 11 期，2531–2570（2019） [arXiv:1809.05319 [math-ph]]。R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen 和 J. Yngvason，《代数子量子场论进展》，施普林格出版社，海德堡（2015）。[19] R. Brunetti、K. Fredenhagen 和 R. Verch，《广义协变局域性原理：局域量子场论的新范式》，《数学物理通讯》237，31–68（2003）[arXiv:math-ph/0112041]。D. Calaque、T. Pantev、B. To¨en、M. Vaqui´e 和 G. Vezzosi，《移位泊松结构与变形量子化》，《拓扑学杂志》10，第 2 期，483–584（2017） [arXiv:1506.03699[math.AG]]。V. Carmona，《代数量子场论的新模型结构》，《数学物理快报》113，33（2023） [arXiv:2107.14176 [math-ph]]。K. Costello 和 O. Gwilliam，《量子场论中的因子化代数：第 1 卷》，新数学专著 31，剑桥大学出版社，剑桥（2017）。K. Costello 和 O. Gwilliam，《量子场论中的因子化代数：第 2 卷》，新数学专著 41，剑桥大学出版社，剑桥（2021）。K. Fredenhagen，《局域量子物理中的全局可观测量》，载于：H. Araki、K. R. Ito、A. Kishimoto 和 I. Ojima（编），《量子与非交换分析：过去、现在与未来展望》，克鲁维尔学术出版社（1993）。K. Fredenhagen 和 K. Rejzner，《经典场论泛函方法中的 Batalin–Vilkovisky 形式》，《数学物理通讯》314，93–127（2012） [arXiv:1101.5112 [math- ph]]。K. Fredenhagen 和 K. Rejzner，《微扰代数簇量子场论中的 Batalin–Vilkovisky 形式》，《数学物理通讯》317，697–725（2013） [arXiv:1110.5232 [math- ph]]。O. Gwilliam 和 K. Rejzner，《关联可观测量网与因子化代数：自由场论》，《数学物理通讯》373，107–174（2020）[arXiv:1711.06674 [math-ph]]。

[28] R. Haag 和 D. Kastler，“量子场论的代数方法”，J. Math. Phys. 5，848（1964）。[29]V. Hinich，“代数与模的整化”，Doc. Math. 20，879–926（2015）[arXiv:1311.4130 [math.QA]]。[30] P. S. Hirschhorn，《模型范畴及其局部化》，Math. Surveys Monogr. 99，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯（2003）。[31] M. Hovey，《模型范畴》，Math. Surveys Monogr. 63，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯（1999）。[32]J. Lurie，“导出代数几何 X：形式模问题”，https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/DAG-X.pdf。[33] J. Lurie，《高阶代数》，https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[34] J. P. Pridham，“统一导出变形理论”，Adv. Math. 224，第 3 期，772–826（2010） [arXiv:0705.0344 [math.AG]]。[35] K. H. Rehren，“手征可观测量与模不变量”，《数学物理通讯》208，689–712（2000） [arXiv:hep-th/9903262]。[36] K. Rejzner，《微扰代数簇量子场论：数学家的导论》，《数学物理研究》，Springer Cham（2016）。[37] B. To¨en，“导出代数几何与变形量子化”，《国际数学家大会论文集》，首尔（2014） [arXiv:1403.6995 [math.AG]]。[38] D. Yau，《彩色歌剧》，Graduate Studies in Mathematics 170，美国数学会，Provi- dence，RI（2016）。