arXiv:2305.03377v1 [math.NT] 5 May 2023

乘法补集 II。

Anett Kocsis *，D´avid Matolcsi †，Csaba S´andor ‡和 Gy ¨orgy T ´ot´os §

2023年5月8日

摘要

本文证明，若 A 和 B 是正整数的无限子集，且每个正整数 n 都可以写成 $n = ab, a \in A, b \in B$，则 $\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{x} = \infty$。我们还证明了许多关于这类集合的其他结果。

2010年数学主题分类：11B34，11N25

关键词和短语：加法补集；计数函数；

1 引言

非负整数集合记为 $\mathbb{N}$。集合的计数函数 $A \subseteq \mathbb{N}$ 定义为$A(x) = |A \cap \{0, 1, ..., x\}|$，对每个 $x \in \mathbb{N}$均成立。令 $A, B \subseteq \mathbb{N}$。集合 A和 B称为加法互补。

*E¨otv¨os Lor´and 大学，匈牙利布达佩斯。邮箱：sakkboszi@gmail.com。此项研究得到创新与技术部国家研究、开发与创新基金资助的 UNKP-21-1 新国家卓越计划支持。

†E¨otv¨os Lor´and 大学，匈牙利布达佩斯。邮箱：matolcsidavid@gmail.com。此项研究得到创新与技术部国家研究、开发与创新基金资助的 ´UNKP-21-1 新国家卓越计划支持。

‡布达佩斯科技经济大学数学研究所随机学系，M˝uegyetem rkp. 3., H-1111，匈牙利布达佩斯。布达佩斯科技经济大学计算机科学与信息理论系，M˝uegyetem rkp. 3., H-1111 匈牙利布达佩斯，ELKH 下属 MTA-BME Lend¨ulet 算术组合研究组，M˝uegyetem rkp. 3., H-1111 匈牙利布达佩斯。邮箱：csandor@math.bme.hu。该作者获得 NKFIH 资助项目 K129335 号资助。§巴贝什-博雅伊大学数学与计算机科学学院。

若每个非负整数都是补数 n都可以写成 $n=a+b,\ a\in A,\ b\in B$。显然，如果 $A,\ B\subseteq\mathbb{N}$是加法补集，那么 $A(x)B(x)\geqslant x+1$ 对于每个 $x\in\mathbb{N}$，因此 下极限 $\underset{x\to\infty}{}\ \dfrac{A(x)B(x)}{x}\geqslant 1$。1964年，Danzer 回答 Hanani 提出的问题时 [1] 证明了这个界是最优的。

定理 1（Danzer，1964）。存在无限的加法补集 $A,B\subseteq\mathbb{N}$，使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)B(x)}{x}=1.$$

在 [2] 中，我们引入了乘法补集的概念。记 $\mathbb{Z}^+$ 为正整数集合，并令 $A_i\subseteq\mathbb{Z}^+$ 对每个 $1\leqslant i\leqslant h$ 都成立。若每个正整数 n 都可以写成 $n=a_1\dots a_h, a_i\in A_i$，则 h 元组 $(A_1,\dots,A_h)$ 构成 h 阶乘法补集。为简便起见，我们用记号 MC_h 表示 h 阶乘法补集的集合。与加法补集类似，若$(A,B)\in MC_2$，则有 $A(x)B(x)\geqslant x$，因此

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{A(x)B(x)}{x}\geqslant 1.$$

我们证明，与加法补集不同，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)B(x)}{x}=\infty$$

对于每个无限的 $(A,B)\in MC_2$。

我们在 [2] 中证明了以下命题：

定理 2。对于每个 $\varepsilon>0$，都存在无限的 $(A,B)\in MC_2$，使得

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\max\{A(x)B(x)\}}{\frac{x}{\log x}}\leqslant 0.5+\varepsilon.$$

显然，对于每个 $(A,\ B)\in MC_2$，我们都有 $\log\ min\{A(x),\ B(x)\}\leqslant\log\ x$。因此，

推论 3。对于每个 $\varepsilon>0$，存在无穷 $(A,\ B)\in MC_2$，使得

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\max\{A(x)B(x)\}\log\min\{A(x),B(x)\}}{x}\leqslant 0.5+\varepsilon.$$

我们证明这个界无法改进。

定理 4。对于每个无穷 $(A,\ B)\in MC_2$,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\max\{A(x)B(x)\}\log\min\{A(x),B(x)\}}{x}>0.5.$$

若 $|A|=\infty$ 且 $|B|=\infty$，则 $\lim_{x\to\infty}\min\{A(x),B(x)\}\log\min\{A(x),B(x)\}\overset{}{=}\infty$。由此可得

推论 5. 对每个无限的 $(A,B)\in MC_2$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)B(x)}{x}=\infty.$$

在定理4 中，我们证明对于无限的 $(A、\ B)\in MC_2$，若 x 足够~~大，则分数~~ ~~最大值$\{A(x)B(x)\}$对数最小值~~ $x^{\{A(x)\ B(x)\}}>0.5$。下一个定理表明，这个分数可以任意大。

定理 6. 对于每个无限的 $(A,B)\in MC_2$,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\max\{A(x)B(x)\}\log\min\{A(x),B(x)\}}{x}=\infty.$$

我们在 [2] 中证明了。

定理 7. 1. 对于每个 $(A,B)\in MC_2$,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{max\{A(x),B(x)\}}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. 存在 $(A,B)\in MC_2$ 使得

$$A(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+o(1)\right)\frac{x}{\sqrt{\log x}}\quad and\quad B(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+o(1)\right)\frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

在接下来的三个定理中，我们考虑函数 $\min\{A(x),B(x)\}$。容易看出，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个 $(A,B)\in MC_2$，使得 $|B|<\infty$ 且 $\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}<\varepsilon$。另一方面，如果 $|B|<\infty$ 且 $(A,B)\in MC_2$，那么 $\liminf_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}>0$。因此，自然的要求是 $A(x)=o(x)$ 且 $B(x)=o(x)$。

定理 8。设 $f(x)$ 为一个函数，使得当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to\infty$。则存在无穷多个 $(A、\ B)\in MC_2$，使得 $A(x)=o(x)$、$B(x)=o(x)$，并且

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\min\{A(x),B(x)\}}{f(x)}=0.$$

作为推论，我们可知在推论 5 中，函数 x 不能被任何其他函数替代 $g(x)$，其中 $\frac{g(x)}{x}\to\infty$ 当 $x\to\infty$ 时。

推论 9。设 $g(x)$ 为一个函数，使得 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\infty$。则存在一个 $(A、\ B)\in MC_2$，使得

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)B(x)}{g(x)}=0.$$

下面的定理表明，对于 $(A,B)\in MC_2$，函数 $\min\{A(x),B(x)\}$ 可以任意大。

定理 10. 假设存在某个函数 $f(x)>0, x \geqslant 1$，使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$ 收敛。那么，不存在满足 $A(x)=O(f(x))$ 和 $B(x)=o(x)$ 的 $(A, B) \in MC_2$。

作为推论，我们得到

推论 11. 设 $\varepsilon>0$。那么不存在无穷多个 $(A, B) \in MC_2$, $B(x)=o(x)$ 使得 $A(x)=O\left(\frac{x}{\log \log \log x)^{1+\varepsilon}}\right)$。

如果函数 $f(x)$ 满足某些光滑性条件且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}=\infty$，那么我们可以找到 $(A, B) \in \mathbb{Z}^{+}$使得 $A(x)=O(f(x))$，并且当 $x \rightarrow \infty$时，$B(x)=o(x)$。

定理 12. 设函数 $f(x)>0$ 满足以下条件

1. 当 $x \geqslant 1$时，$f(x)$ 单调递增；2. $f(x)=o(\frac{x}{\log x})$ 当 $x \rightarrow \infty$时，$\frac{f(x_2)}{x_2}$；3. 存在 $c_1, c_2>0$ 使得对于 $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2$，$c_1 \leqslant \frac{f(x_1)}{x_2} \leqslant \overline{c_2}$，$x_1$；4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}=\infty$。

那么，存在 $(A, B) \in MC_2$使得 $A(x)=O(f(x))$且 $B(x)=o(x)$。

作为推论，我们得到

推论 13. 存在 $(A, B) \in MC_2$使得 $A(x)=O(\frac{x}{\text{对数的对数的对数}})$ 且 $B(x)=o(x)$。

在上一个定理中，我们考虑满足 $|B|<\infty$的 $(A, B) \in MC_2$。

定理 14. 1. 存在一个 $c_1>0$，使得对于每个 $(A, B) \in MC_2, 2 \leqslant|B|<\infty$，我们都有

$$\frac{A(x) \log |B|}{x} \geqslant c_1$$

对于每个 $x \in \mathbb{Z}^{+}$。

2. 存在一个常数 ant c_2，使得对于每个 $N \geqslant 3$，都存在 $(A, B) \in MC_2, |B|=N$，使得 t

$$\frac{A(x) \log \log |B|}{x} \leqslant c_2$$

对于每个 $x \geqslant 10$。

最后，我们提出一些开放问题，以供进一步研究。作为定理7的推论，我们得到以下结论：

推论 15. 存在 $(A,B)\in MC_2$ 使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{max\{A(x),B(x)\}\sqrt{\log\min\{A(x),B(x)\}}}{x}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

受此启发，定理 6 可进一步加强如下：

问题 1. 对于任意无限的 $(A,B)\in MC_2$，是否成立

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{max\{A(x),B(x)\}\sqrt{\log\min\{A(x),B(x)\}}}{x}>0?$$

由定理 14 可得

$$\frac{c_1}{\log k}\leqslant\inf_{B:|B|=k}\{\inf_{A:(A,B)\in MC_2}\{\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}\}\}\leqslant\frac{c_2}{\log\log k}.$$

确定上述下确界的正确数量级将很有意义。

问题 2. 求函数的数量级

$$f(k)=\inf_{B:|B|=k}\{\inf_{A:(A,B)\in MC_2}\{\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}\}\}.$$

在定理 12中我们 h 假设满足一些光滑性条件。我们能否省略这些条件?

问题 3。如果 $f(x)>0,x\geqslant 1$ 是一个单调递增函数，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\infty$，那么是否存在一个 $(A,B)\in MC_2$，使得 $A(x)=O(f(x))$ 和 $B(x)=o(x)$?

2 个证明

全文中，素数集合记作 P，而 p 始终表示一个素数。

定理4的证明。若集合 $S\subseteq\mathbb{Z}^+$ 中的每个正整数 n 都能表示为 $n=ss'$，其中 $s,s'\in S$，则称 $S\subseteq\mathbb{Z}^+$ 为二阶乘法基。二阶乘法基的集合记为 MB_2。Pach 和 S´andor [3]证明了，若 $S\in MB_2$，则 $\liminf_{x\to\infty}\frac{S(x)}{\frac{x}{\log x}}>1$。对于 $(A,B)\in MC_2$，我们有 $A\cup B\in MB_2$和 $(A\cup B)(x)\leqslant A(x)+B(x)$。由此可得

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{\frac{x}{\log x}}>1,$$

也就是说，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{\frac{x}{\log x}} \geqslant 1+\delta. \tag{2.1}$$

令 $\beta > 0$ 为一个常数，使得

$$\frac{1}{2+\delta} < \frac{1}{2} - \beta < \frac{1}{2+\frac{\delta}{2}}.$$

为了证明该定理，我们定义 $\mathbb{Z}^+$ 的一个划分。令

$$H_1 = \{x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{\delta}{2}\frac{x}{\log x} \leqslant \min\{A(x), B(x)\}\}$$

$$H_2 = \{x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x^{\frac{1}{2}-\beta}}{\log^2 x} \leqslant \min\{A(x), B(x)\} < \frac{\delta}{2}\frac{x}{\log x}\}$$

$$H_3 = \{x \in \mathbb{Z}^+ : \min\{A(x), B(x)\} < \frac{x^{\frac{1}{2}-\beta}}{\log^2 x}\}.$$

由（2.1）可知,

$$\liminf_{x\in H_1, x\to\infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\}}{\frac{x}{\log x}} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$$

由 H_1 的定义容易看出,

$$\liminf_{x\in H_1, x\to\infty} \frac{\log\min\{A(x), B(x)\}}{\log x} = 1.$$

因此

$$\liminf_{x\in H_1, x\to\infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\}\log\min\{A(x), B(x)\}}{x} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

在第二种情况下，由（2.1）可得

$$\liminf_{x\in H_2, x\to\infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\}}{\frac{x}{\log x}} \geqslant 1 + \frac{\delta}{2}$$

由 H_2 的定义很容易看出,

$$\liminf_{x\in H_2, x\to\infty} \frac{\log\min\{A(x), B(x)\}}{\log x} \geqslant \frac{1}{2} - \beta.$$

因此

$$\liminf_{x\in H_2, x\to\infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\}\log\min\{A(x), B(x)\}}{x} \geqslant \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\beta\right) > \frac{1}{2}.$$

剩下的情况是 $x \in H_3$ 为 $x \to \infty$。在这种情况下

$$\min\{A(x), B(x)\}\log^2\min\{A(x), B(x)\} < x^{\frac{1}{2}-\beta}.$$

假设对于给定的 $x \in H_3$，$\min\{A(x), B(x)\} = B(x)$。那么

$$\frac{\log x}{\log(B(x)\log^2 B(x))} \geqslant 2 + \frac{\delta}{2}. \tag{2.2}$$

显然,

$$\begin{aligned} x \leqslant \quad & |\{n \leqslant x : \exists (a,b) \in A \times B \colon n = ab, b \geqslant B(x)\log^2 B(x)\}| + \\ & + |\{n \leqslant x : \exists (a,b) \in A \times B \colon n = ab, 1 < b < B(x)\log^2 B(x)\}| + \\ & + |\{n \leqslant x : \exists (a,b) \in A \times B \colon n = ab, b = 1\}|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

式（2.3）中的第一项可估计为

$$\begin{aligned} |\{n \leqslant x : \exists (a,b) \in A \times B \colon n = ab, b \geqslant B(x)\log^2 B(x)\}| &\leqslant \sum_{B(x)\log^2 B(x) \leqslant b \leqslant x, b \in B} \frac{x}{b} \\ &\leqslant \frac{x}{B(x)\log^2 B(x)} B(x) \leqslant \frac{x}{\log^2 B(x)}. \end{aligned}$$

式（2.3）中的第二项可估计为

$$\begin{aligned} |\{n \leqslant x : & \exists (a,b) \in A \times B \colon n = ab, 1 < b < B(x)\log^2 B(x)\}| \leqslant \\ & \leqslant |\{n \leqslant x : \exists p \in P \colon p \mid n, 1 < p < B(x)\log^2 B(x)\}|. \end{aligned}$$

式（2.3）中的第三项为

$$|\{n \leqslant x \mid \exists (a,b) \in A \times B \colon n = ab, b = 1\}| = A(x),$$

因此

$$x \leqslant \frac{x}{\log^2 B(x)} + |\{n \leqslant x : \exists p \in P \colon p \mid n, 1 < p < B(x)\log^2 B(x)\}| + A(x) \tag{2.4}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} x = & 1 + |\{n \leqslant x : \exists p \in P \colon p \mid n, 1 < p < B(x)\log^2 B(x)\}| \\ & + |\{n \leqslant x \mid \forall p \in P \colon p \mid n \implies p \geqslant B(x)\log^2 B(x)\}|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

由式（2.4）和（2.5）可得

$$|\{n \leqslant x : \forall p \in P \colon p \mid n \implies p \geqslant B(x)\log^2 B(x)\}| + 1 - \frac{x}{\log^2 B(x)} \leqslant A(x). \tag{2.6}$$

为了估计第一项，我们需要布赫施塔布函数。布赫施塔布函数是由时滞微分方程定义的唯一连续函数 $\omega \colon [1, \infty[\to \mathbb{R}^+$

$$\omega(u) = \frac{1}{u} \quad \text{for } 1 \leqslant u \leqslant 2$$

$$\frac{d}{du}(u\omega(u)) = \omega(u-1) \quad \text{for } u \geqslant 2.$$

在第二个等式中，应取 u 从右侧趋近于 2 时在 $u = 2$ 处的导数。记 $\varphi(x, y)$ 为不超过 x 且没有小于 y的素因子的正整数个数。1970 年，Warlimont [4] 证明了以下重要结果。

定理 16（Warlimont，1970）。设 $u_0 > 1$。存在一个 $C_0 = C_0(u_0)$，使得若 $y \geqslant 2$，$\frac{\log x}{\log y} \geqslant u_0$，则

$$|\varphi(x,y) - e^{\gamma}\omega(u)x\prod_{p<y}(1-\frac{1}{p})| \leqslant \frac{C_0 x\prod_{p<y}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\log x}.$$

众所周知，$\omega(u)$ 在 $u = 2$处取得最小值，$\omega(2) = 0.5$ 并且对于每一个 $\mu > 0$，都存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $u \geqslant 2+\mu$，我们有 $\omega(u) \geqslant 0.5+\varepsilon$。假设 $\omega(u) \geqslant 0.5+\varepsilon_0$ 当 $u \geqslant 2+\frac{\delta}{2}$时成立。根据 Warlimont 定理和（2.2），我们得到

$$|\{n \leqslant x \mid \forall p \in P\colon p \mid n \implies p \geqslant B(x)\log^2 B(x)\}| = \varphi(x, B(x)\log^2 B(x)) \geqslant$$

$$e^{\gamma}\omega\left(\frac{\log x}{\log(B(x)\log^2 B(x))}\right)x\prod_{p<B(x)\log^2 B(x)}(1-\frac{1}{p}) - \frac{C_0 x\prod_{p<B(x)\log^2 B(x)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\log x} \geqslant$$

$$(0.5+\varepsilon_0+o(1))e^{\gamma}x\prod_{p<B(x)\log^2 B(x)}(1-\frac{1}{p}),$$

其中，γ 是欧拉-马歇罗尼常数。

众所周知，

$$\prod_{p<y,\,p\in P}(1-\frac{1}{p}) = (1+o(1))\frac{e^{-\gamma}}{\log y}$$

作为 $y \to \infty$，因此

$$|\{n \leqslant x \mid \forall p \in P\colon p \mid n \implies p \geqslant B(x)\log^2 B(x)\}| \geqslant (0.5+\varepsilon_0+o(1))\frac{x}{\log\left(B(x)\log^2 B(x)\right)}$$

$$(0.5+\varepsilon_0+o(1))\frac{x}{\log B(x)}$$

为 $x \to \infty$。由（2.6）可得，

$$A(x) \geqslant 1 - \frac{x}{\log^2 B(x)} + (0.5+\varepsilon_0+o(1))\frac{x}{\log B(x)} = (0.5+\varepsilon_0+o(1))\frac{x}{\log B(x)}.$$

因此我们有

$$(0.5+\varepsilon_0+o(1))x \leqslant A(x)\log B(x).$$

由此可得

$$\liminf_{x\in H_3, x\to\infty}\frac{\max\{A(x),B(x)\}\log\min\{A(x),B(x)\}}{x} \geqslant 0.5+\varepsilon_0.$$

这意味着

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\max\{A(x),B(x)\}\log\min\{A(x),B(x)\}}{x} \geqslant \min\{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}, (1+\frac{\delta}{2})(\frac{1}{2}-\beta), \frac{1}{2}+\varepsilon_0\} > \frac{1}{2},$$

由此完成证明。

■

定理6的证明。若 $A(x) \neq o(x)$ 或 $B(x) \neq o(x)$，则最大值$\{A(x),\ B(x)\} \neq o(x)$ 且最小值$\{A(x),\ B(x)\} \to\infty$，结论便直接成立。因此，我们不妨设 $A(x) = o(x)$ 且 $B(x) = o(x)$。由定理7可得

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\}}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{2.7}$$

如果 $\liminf_{x\to\infty} \log \min\{A(x)\ B(x)\}$、$\log\ x$ $= \infty$，那么我们就完成了。因此我们可以假设存在一个常数 D，使得对无穷多个 $x \in \mathbb{Z}^+$，

$$\frac{\min\{A(x), B(x)\}}{e^{D\sqrt{\log x}}} < 1.$$

不失一般性，我们可以假设时时彩官网

$$\frac{B(x)}{e^{D\sqrt{\log x}}} < 1$$

对无穷多个 $x \in \mathbb{Z}^+$。

如果 $A(x) = o(x)$，那么存在无穷多个 $x \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $B(x) > \sqrt{x}$；否则，对于 $B = \{b_1, b_2, \dots\}$，$b_1 < b_2 < \dots$，存在一个 n_0，使得对于 $n \geqslant n_0$，我们有 $n = B(b_n) \leqslant \sqrt{b_n}$，也就是说$b_n \geqslant n^2$。由此可得

$$\sum_{b\in B} \frac{1}{b} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{b_n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{b_n} \leqslant \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{b_n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

因此，$\sum_{b\in B} \frac{1}{b}$ 收敛。那么存在一个 N_1，使得 $\sum_{b\geqslant N_1,\ b\in B} \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$。显然

$$x \leqslant |\{n :\ n \leqslant x, \exists b < N_1, b \in B, a \in A, n = ab\}| + |\{n :\ n \leqslant x, \exists b \geqslant N_1, b \in B, a \in A, n = ab| \leqslant$$

$$\sum_{b<N_1, b\in B} A(\frac{x}{b}) + \sum_{b\geqslant N_1, b\in B} A(\frac{x}{b}) \leqslant o(x) + \sum_{b\geqslant N_1, b\in B} \frac{x}{b} \leqslant (0.5 + o(1))x,$$

矛盾。

因此，我们可以假设存在无穷多个正整数 $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$，使得 $0.5e^{D\sqrt{\log y_n}} < B(y_n) < e^{D\sqrt{\log y_n}}$ 和 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$，且 $0.5\sqrt{x_n} < B(x_n) < \sqrt{x_n}$，其中 $e^{\sqrt{\log x_n}} > y_n$ 对每个 n 都成立。

我们将估计 $A(x_n)$。我们需要以下集合:

$C_n = \{p :\ p > y_n$ 和 $\exists m \in B \cap \{1,\ .....,\ x_n\}$，使得 p 是 $m\}$的最大素因子,

$D_n = \{p :\ p < y_n$ 和 $p \in B\}$,

$E_n = \{p : p < y_n\}$.

很容易验证，如果 k 是一个正整数，使得 $k < x_n$ 和 $k = pq$，其中 p 和 q 是素数，$p \in E_n \backslash D_n$、$q \notin C_n$ 和 $q > y_n$，那么 k 必须属于集合 A。现在我们想要估计这样的 k 的数量。显然，

$$A(x_n) \geqslant \sum_{p \in E_n \backslash D_n} \left(\pi\left(\frac{x_n}{p}\right) - |C_n| - \pi(y_n) \right)$$

如果 x_n 足够大，那么对于任意 $p \in E_n \backslash D_n$，

$$\pi\left(\frac{x_n}{p}\right) = (1+o(1))\frac{x_n/p}{\log(x_n/p)} = (1+o(1))\frac{1}{p}\frac{x_n}{\log x_n - \log p} > (1+o(1))\frac{1}{p}\frac{x_n}{\log x_n} \geqslant \frac{1}{p}\frac{x_n}{2\log x_n}.$$

显然，

$$|C_n| \leqslant B(x_n) < \sqrt{x_n},$$

and

$$\pi(y_n) \leqslant y_n < e^{\sqrt{\log x_n}}.$$

由此可得

$$A(x_n) > \sum_{p \in E_n \backslash D_n} \left(\frac{1}{p}\frac{x_n}{2\log x_n} - \sqrt{x_n} - e^{\sqrt{\log x_n}} \right) > \frac{x_n}{3\log x_n} \sum_{p \in E_n \backslash D_n} \frac{1}{p}$$

$_N$如果 n 足够大。众所周知，$\sum_{p<N} \frac{1}{p} = \log\log N + O(1)$ 和 $\sum_{i=1} \frac{1}{p_i} = \log\log\ N + O(1)$ 也成立。$_{e^{\sqrt{\log y_n}}}$由于 $|D_n| \leqslant B(y_n) < e^{D\sqrt{\log y_n}}$，集合 D_n 中至多有 $e^{\sqrt{\log y_n}}$ 个素数，因此 $\sum_{p \in D_n} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{i=1} \frac{1}{p_i}$。因此

$$\sum_{p \in E_n \backslash D_n} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{p \in E_n} \frac{1}{p} - \sum_{i=1}^{e^{\sqrt{\log y_n}}} \frac{1}{p_i} = \log\log y_n - \log\log e^{\sqrt{\log y_n}} + O(1) = \frac{\log\log y_n}{2} + O(1).$$

由此可得。

$$A(x_n) \geqslant \frac{x_n}{6\log x_n}(\log\log y_n + O(1)).$$

我们假设 $B(x_n) \geqslant 0.5\sqrt{x_n}$。因此

$$\frac{A(x_n)\log B(x_n)}{x_n} \geqslant \frac{\log\log y_n}{12} + O(1).$$

由此证明完毕，因为 $y_n \to \infty$ 如同 $n \to \infty$。 ■

为了证明定理 8 和 12，我们需要以下引理。

引理 1. 设 Q 是满足 $\sum_{q \in Q} \frac{1}{q} = \infty$的素数子集。设

$$A = \{n : \ n \textit{ is squarefree }, n \in \mathbb{Z}^+, p|n \Rightarrow p \in Q\}.$$

那么存在集合 $B \subseteq \mathbb{Z}^+$，使得 $(A、\ B) \in MC_2$ 和 $B(x) = o(x)$。

证明。设 $Q=\{q_1、\ q_2、\ \ldots\}、\ q_1<q_2<\ldots$。对每个 $k\in\mathbb{Z}^+$ 定义 $Q_k=\{q_1、\ \ldots、\ q_k\}$。令

$$A_k=\{n:\ n \text{ is squarefree }, n\in\mathbb{Z}^+, p|n\Rightarrow p\in Q_k\}.$$

Let

$$B_k=\{n: n=ml^2, m \text{ is squarefree and } p|m\Rightarrow p\notin Q_k\}.$$

于是 $(A_k、\ B_k)\in MC_2、\ A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots、\ A=\cup_{k=1}^{\infty}A_k$和 $B_1\supseteq B_2\supseteq\ldots$。令 $B=\cap_{k=1}^{\infty}B_k$. 则$(A、\ B)\in MC_2$。我们将证明，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $x_0=x_0(\varepsilon)$ 使得

$$B(x)\leqslant\varepsilon x \tag{2.8}$$

for $x\geqslant x_0$。

设 k 为一个整数，满足 $4e^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}<\varepsilon$。设 $1=b_1^{(k)}<b_2^{(k)}<\ldots$ 为集合 B_k 中的无平方因子整数。那么

$$B(x)\leqslant B_k(x)\leqslant\sum_{b_l^{(k)}\leqslant x}\sqrt{\frac{x}{b_l^{(k)}}}.$$

这可由 $\gcd(b_l^{(k)}, q_1q_2\ldots q_k)=1$ 得出

$$|\{b_1^{(k)},b_2^{(k)},\ldots\}\cap\{Nq_1\ldots q_k+1,\ldots,(N+1)q_1\ldots q_k\}|\leqslant(q_1-1)\ldots(q_k-1)$$

对于任意非负整数 N。如果 $M(q_1-1)\ldots(q_k-1)\leqslant l<(M+1)(q_1-1)\ldots(q_k-1)$，那么

$$b_l^{(k)}\geqslant(M+1)q_1\ldots q_k-q_1\ldots q_k\geqslant l\prod_{i=1}^{k}\frac{q_i}{q_i-1}-q_1\ldots q_k\geqslant le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}}-q_1\ldots q_k.$$

若 $l>2q_1\ldots q_k$，则

$$\frac{1}{\sqrt{b_l^{(k)}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}}-q_1\ldots q_k}}=\frac{1}{\sqrt{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}}(1-\frac{q_1\ldots q_k}{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}}})}}\leqslant$$

$$\frac{1}{\sqrt{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}\left(1-\frac{q_1\ldots q_k}{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}}}\right)}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}}}+\frac{1}{\sqrt{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}}}\frac{2q_1\ldots q_k}{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}}}.$$

因此

$$B(x)\leqslant\sum_{l\leqslant 2q_1\ldots q_k}\sqrt{\frac{x}{b_l^{(k)}}}+\sum_{2q_1\ldots q_k<l\leqslant x}\sqrt{\frac{x}{b_l^{(k)}}}\leqslant O(\sqrt{x})+\sum_{2q_1\ldots q_k<l\leqslant x}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{le^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}}}+\frac{\sqrt{x}}{l^{3/2}e^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}}\right)\leqslant$$

$$O(\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{e^{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt+O(1)=O(\sqrt{x})+2xe^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2q_i}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}x+O(\sqrt{x}),$$

因此，存在一个 $x_0=x_0(\varepsilon)$ 使得（2.8）成立。 ■

定理8的证明。取序列 $M_1 < M_2 < \ldots$ 和 $N_1 < N_2 < \ldots$ 使得 $M_k < N_k$, $\sum_{M_k < p \leqslant N_k} \frac{1}{p} \geqslant 1$, $\prod_{p \leqslant N_{k-1}} p < M_k$ 并且 $k2^{N_{k-1}} < f(M_k)$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}^+$都成立。令

$$Q = \{p : \text{ there exists a } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ such that } M_k < p \leqslant N_k\}.$$

Let

$$A_\infty = \{n : n \in \mathbb{Z}^+, \ n_\infty \text{is squarefree } p|n \Rightarrow p \in Q\}.$$

根据构造，我们有 $\sum_{q \in Q} \frac{1}{q} = \sum_{k=1} \sum_{M_k < p \leqslant N_k} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{k=1} 1 = \infty$。由引理 1，我们知道存在一个集合 $B \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $(A, \ B) \in MC_2$ 并且 $B(x) = o(x)$ 因为 $x \to \infty$。此外，

$$\frac{A(M_k)}{f(M_k)} \leqslant \frac{2^{\pi(N_{k-1})}}{f(M_k)} < \frac{2^{N_{k-1}}}{k2^{N_{k-1}}} = \frac{1}{k}$$

对于每个 $k \in \mathbb{Z}^+$，因此

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{f(x)} = 0,$$

由此完成证明。 ■

定理 10 的证明。 设函数 $f(x) > 0, \ x \geqslant 1$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$ 有限。设对于某个 $(A, \ B) \in MC_2$, 我们有 $A(x) \leqslant Cf(x)$ 对每个 $x \in \mathbb{Z}^+$ 且 $B(x) = o(x)$。那么

$$\sum_{a \leqslant N, a \in A} \frac{1}{a} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A(n) - A(n-1)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A(n)}{n(n+1)} + \frac{A(N)}{N} \leqslant 1 + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2},$$

因此级数 $\sum_{a \in A} \frac{1}{a}$ 收敛。由此可知存在一个 n_1 使得$\sum_{a \geqslant n_1, \ a \in A} \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$。显然

$$x \leqslant |\{n : \ n \leqslant x、 \ \exists a < n_1、 \ a \in A、 \ b \in B、 \ n = ab\}| + |\{n : \ n \leqslant x、 \ \exists a \geqslant n_1、 \ a \in A、 \ b \in B、 \ n = ab| \leqslant$$

$$\sum_{a < n_1, a \in A} B(\frac{x}{a}) + \sum_{a \geqslant n_1, a \in A} B(\frac{x}{a}) \leqslant o(x) + \sum_{a \geqslant n_1, a \in A} \frac{x}{a} \leqslant (0.5 + o(1))x,$$

矛盾。 ■

定理 12的证明。 我们将寻找一个集合 $Q \subseteq P$ 使得

$$\sum_{q \in Q} \frac{1}{q} = \infty \tag{2.9}$$

以及集合

$$A = \{n : n \text{ is squarefree } p|n \Rightarrow p \in Q\}$$

满足

$$A(x) = O(f(x)). \tag{2.10}$$

根据引理 1，存在一个 $B \subseteq \mathbb{Z}^+$ 使得 $(A,\ B) \in MC_2$ 并且 $B(x) = o(x)$。

设 $\chi_Q(n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \in Q \\ 0, & \text{若 } n \notin Q \end{cases}$。设

$$A_k = \{n:\ n \in A,\ n \text{ 有 } k \text{ 个不同的素因子}\}.$$

要证明（2.10），只需验证

$$A_k(x) \leqslant \frac{e^{\frac{1}{c_1}} f(x) \left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)^{k-1}}{(k-1)! exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)} \tag{2.11}$$

对 $x \geqslant 1$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$ 成立，因为

$$A(x) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{c_1}} f(x) \left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)^{k-1}}{(k-1)! exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)} = 1 + e^{\frac{1}{c_1}} f(x).$$

首先，我们定义一个集合 $R \subseteq P$，然后通过截断它得到新集合 Q。集合 R 是递归定义的。我们遍历素数 p，当且仅当满足以下条件时，素数 p 才包含在集合 R 中：

$$R(p-1) + 1 \leqslant \frac{f(p)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<p} \frac{\chi_R(n)}{n}\right)}.$$

首先，我们证明

$$\sum_{r \in R} \frac{1}{r} = \infty.$$

用反证法，假设 $\sum_{r \in R} \frac{1}{r} = K < \infty$。再假设 $p \in R$，且集合 R 中的下一个素数是 p'。令 $p \leqslant x < p'$。那么

$$R(x) = R(p) = R(p-1) + 1 \leqslant \frac{f(p)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<p} \frac{\chi_R(n)}{n}\right)} \leqslant \frac{f(x)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_R(n)}{n} - \frac{2}{c_1} \frac{1}{p}\right)} =$$

$$\frac{e^{\frac{2}{c_1} \frac{1}{p}} f(x)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_R(n)}{n}\right)} \leqslant \frac{e^{\frac{1}{c_1}} f(x)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_R(n)}{n}\right)} \leqslant e^{\frac{1}{c_1}} f(x).$$

由此可知，对任意 $x \geqslant 1$,

$$R(x) \leqslant e^{\frac{1}{c_1}} f(x) = o(\frac{x}{\log x}).$$

众所周知，$\pi(n) - \pi(\frac{n}{2}) = (0.5 + o(1))\ \frac{n}{\log n}$ 当 $n \to \infty$ 时，因此存在一个 n_1，使得对于任意 $n \geqslant n_1$，区间 $[0.5n,\ n]$ 中都存在一个素数 p，满足 $p \notin R$。于是，根据集合R 的定义和条件3,

$$R(p-1) + 1 > \frac{f(p)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<p} \frac{\chi_R(n)}{n}\right)} > \frac{f(p)}{e^{\frac{2K}{c_1}}} = \frac{\frac{f(p)}{f(n)}}{\frac{p}{n}} \frac{p}{n} \frac{1}{e^{\frac{2K}{c_1}}} f(n) \geqslant \frac{c_1 f(n)}{2e^{\frac{2K}{c_1}}}.$$

$_{2K}$如果 $f(n) > \frac{6e\, c_1}{c_1}$,
那么

$$R(n) \geqslant R(p-1) \geqslant \frac{c_1 f(n)}{2e^{\frac{2K}{c_1}}} - 1 \geqslant \frac{c_1 f(n)}{2e^{\frac{2K}{c_1}}} - \frac{c_1 f(n)}{6e^{\frac{2K}{c_1}}} \geqslant \frac{f(n)}{3c_2 e^{\frac{2K}{c_1}}}. \tag{2.12}$$

因此不等式（2.12）在 $n \geqslant n_2$ 时成立。由条件4可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n^2} = \infty$，但是

$$\sum_{r \leqslant N, r \in R} \frac{1}{r} = \sum_{n=1}^{N} \frac{R(n) - R(n-1)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{R(n)}{n(n+1)} + \frac{R(N)}{N} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{R(n)}{n^2} \to \infty$$

当 $N \to \infty$ 时，矛盾。
令 $R = \{r_1, r_2, \dots\}, r_1 < r_2 < \dots$。众所周知，$\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \frac{1}{p} = \log 2$。我们可以找到一个 $N_0 \in \mathbb{Z}^+$

使得

$$\sum_{\sqrt{x} \leqslant r_i \leqslant x, N_0 | i} \frac{1}{r_i} < \frac{c_1 \log 2}{2} \tag{2.13}$$

对每个 $x \geqslant 1$均成立。令

$$Q = \{r_{N_0}, r_{2N_0}, \dots\}.$$

显然

$$\sum_{q < x, q \in Q} \frac{1}{q} \geqslant \frac{\sum_{r < x, r \in R} \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{N_0 - 1} \frac{1}{r_i}}{N_0} \to \infty$$

因此 $N \to \infty$，所以（2.9）成立。

还需证明（2.11）。我们对 k使用归纳法。

对于 $k = 1$,

$$A_1(x) = Q(x) \leqslant R(x) \leqslant \frac{e^{\frac{1}{c_1}} f(x)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_R(n)}{n}\right)} \leqslant \frac{e^{\frac{1}{c_1}} f(x)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}.$$

假设该命题对 k 成立，并证明它对 $k+1$也成立。如果 $n \leqslant x, n \in A_{k+1}$，即 $n = p_1 \dots p_{k+1}$, $p_1 < \dots < p_{k+1}, p_i \in Q$，那么对于 $1 \leqslant i \leqslant k$，$p_i < \sqrt{x}$，因此 $kA_{k+1}(x) \leqslant \sum_{q \in Q,\ q < \sqrt{x}} A_k(\frac{x}{q})$。因此

$$kA_{k+1}(x) \leqslant \sum_{q \in Q, q < \sqrt{x}} A_k(\frac{x}{q}) \leqslant \sum_{q \in Q, q < \sqrt{x}} \frac{e^{\frac{1}{c_1}} f(\frac{x}{q}) \left(\frac{2}{c_1} \sum_{n < \frac{x}{q}} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)^{k-1}}{(k-1)! exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n < \frac{x}{q}} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}.$$

根据条件3，我们有

$$f(\frac{x}{q}) \leqslant \frac{1}{c_1} \frac{1}{q} f(x)$$

并根据（2.13），

$$exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n < \frac{x}{q}} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right) = \frac{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{\frac{x}{q} \leqslant n < x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)} \geqslant \frac{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{n<x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}{exp\left(\frac{2}{c_1} \sum_{\sqrt{x} \leqslant n < x} \frac{\chi_Q(n)}{n}\right)} \geqslant$$

$$\frac{exp\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}{exp\left(\frac{2}{c_1}\frac{c_1\log 2}{2}\right)}=\frac{exp\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}{2}.$$

因此

$$kQ_{k+1}(x)\leqslant\sum_{q\in Q,q<\sqrt{x}}\frac{e^{\frac{1}{c_1}}\frac{1}{c_1}\frac{1}{q}f(x)\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<\frac{x}{q}}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)^{k-1}}{(k-1)!\frac{1}{2}exp\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}\leqslant$$

$$\frac{e^{\frac{1}{c_1}}f(x)\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)^{k-1}}{(k-1)!exp\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)}\sum_{q\in Q,q<\sqrt{x}}\frac{2}{c_1}\frac{1}{q}<\frac{e^{\frac{1}{c_1}}f(x)\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)^{k}}{(k-1)!exp\left(\frac{2}{c_1}\sum_{n<x}\frac{\chi_Q(n)}{n}\right)},$$

至此，证明完成。 ■

定理的证明 *14*。 首先，我们证明定理 14的第一部分。令

$$V=\{p\text{ prime }:\exists n\in B,p\text{ is the largest prime factors of }n\}.$$

如果没有素数整除数 n，那么等式 $n=ab,a\in A,B\in B$ 意味着 $b=1,a=n$，因此 $n\in A$。于是

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}\geqslant\prod_{p\in V}\left(1-\frac{1}{p}\right)\geqslant\prod_{i=1}^{|B|}\left(1-\frac{1}{p_i}\right),$$

其中， p_i 是第 i 小的素数。

众所周知,

$$\lim_{k\to\infty}\log k\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=e^{-\gamma},\tag{2.14}$$

其中 γ 是欧拉-马歇罗尼常数。因此存在一个常数 $c_1>0$，使得

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{A(x)\log|B|}{x}\geqslant c_1.$$

现在我们证明定理 14 的第二部分。令 2^k 为不大于 2 的最大幂N。令 $B\subseteq\mathbb{Z}^+$ 为一个集合，其中包含由 k 个最小的素数组成的所有无平方因子数。显然 $2^{k-1}<|B|=2^k\leqslant N$。令

$$A=\{mr^2:p_i\nmid m\,\forall\,1\leqslant i\leqslant k,r\in\mathbb{Z}^+\}.$$

将 A_{sf} 记为集合 A 中无平方因子整数的集合。若 $n\in A_{sf}$，则 $\gcd(n,p_1\dots p_k)=1$，因此 $A_{sf}(x)\leqslant O(1)+x\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$。于是

$$A(x)\leqslant\sum_{r\leqslant\sqrt{x}}A_{sf}\left(\frac{x}{r^2}\right)\leqslant\sum_{r\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{r^2}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+O(1)\right)=O(\sqrt{x})+\frac{\pi^2x}{6}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

那么 A 和 B 是乘法补集，根据（2.14），

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=\frac{\pi^2}{6}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\leqslant\frac{c'}{\log k}\leqslant\frac{c_2}{\log\log N},$$

由此完成证明。

■

参考文献

.[1] L. Danzer，关于 G. Hanani 在加法数论中提出的一个问题，J. Reine Angew. Math 214/215(1964), 392–394。

[2] A. Kocsis, D. Matolcsi, C. S´andor 和 G. T˝ot˝os，乘法补集 I，Acta Arith. 207 (2023), no. 2, 101–120。

[3] P. P. Pach；以及 C. S´andor，乘法基与一个 Erd˝os 问题，Combinatorica 38 (2018), no. 5, 1175–1203。

[4] R. Warlimont，关于 N. G. de Bruijn 一项结果的说明，Monatsh. Math. 74 (1970), 273–276。