arXiv:2305.03384v1 [math.NA] 5 May 2023

# 含奇异源项亚扩散模型的高阶BDF卷积求积

JIANKANG SHI * 和MINGHUA CHEN †

摘要。反常扩散通常用亚扩散方程建模，其中可能包含弱奇异源项。对于这种情形，许多主流时间步进方法，包括高阶BDF格式的修正方法 [Jin, Li, and Zhou, SIAM J. Sci. Comput., 39 (2017), A3129–A3152], , 都可能遭受严重的阶数降低。为弥补这一不足，我们提出一种适用于时间步进格式的平滑方法：通过使用 a$m$ 重积分微分演算将奇异项正则化，并采用 $k$ 步BDF卷积求积对方程进行离散，该方法称为 ID$m$-BDF$k$ 方法。我们证明，即使源项弱奇异且初始数据不相容，仍可恢复所需的 $k$ 阶收敛。数值实验验证了理论结果。

关键词：亚扩散方程，平滑方法，ID$m$-BDF$k$ 方法，奇异源项，误差估计

**1.** 引言。在本文中，我们研究由 $k$ 步后向微分公式（BDF$k$）生成的卷积求积，用于求解带有弱奇异源项的次扩散模型，其原型方程为，对于 $0 < \alpha < 1$

$$\partial_t^\alpha (u(t) - v) - Au(t) = g(t) := t^\mu \circ f(t), \quad \mu > -1 \tag{1.1}$$

满足初始条件 $u(0) = v$。算子 $A$ 表示作用于凸多面体区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上、具有齐次狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子 $\Delta$，且 $\mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，其中 $H_0^1(\Omega)$、$H^2(\Omega)$ 表示标准索伯列夫空间。符号 $\circ$ 可以表示卷积 $*$ 或乘积，黎曼-刘维尔分数阶导数定义为 [21, p. 62]

$$\partial_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau.$$

如果 $u$ 是绝对连续的，那么允许 $\partial_t^\alpha u(t)$ 在 $t = 0$ 处具有奇异性是合理的。这将导出涉及奇异源项的分数阶微分方程，参见[22, 式（20）], [7, 式（7.24）], [10, 式（4.22）] 和 [17, 式（1.6）]。

模型（1.1）中的问题广泛存在于各种物理、化学和地球物理应用中 [8, 16, 22, 23]。例如，用于溶质运移的奇异分形移动/非移动模型 [22] 在实际中具有重要应用，并已成功应用于地下水含水层、河流和多孔介质等地球物理系统 [8, 23]。

关于（1.1）的时间离散，已有许多作者研究了相应的数值方法。目前，恢复模型（1.1）高阶收敛率的主流时间步进格式有两种。第一种是在解满足适当正则性的条件下，采用非均匀网格（例如分级网格、几何网格）来捕捉 $t = 0$ 处的弱奇异性，参见 [2, 13, 14, 19, 20, 27]。第二种是卷积求积。例如，一种

*兰州大学数学与统计学院，甘肃省应用数学与复杂系统重点实验室，中国甘肃省兰州市，邮编 730000。电子邮箱：shijk20@lzu.edu.cn

†兰州大学数学与统计学院，甘肃省应用数学与复杂系统重点实验室，中国甘肃省兰州市，邮编 730000。电子邮箱：chenmh@lzu.edu.cn

处理（1.1）中源项 $g(t)$ 的常用方法是将其写成

$$g(t) = g(0) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{t^l}{l!}\partial_t^l g(0) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * \partial_t^k g(t).$$

然后，用 $\partial_\tau J^1 g(0)$ 逼近 $g(0) = \partial_t J^1 g(0)$，可能会得到一种在第一步进行修正的改进 BDF2 方法 [6]。此外，在源函数 $g$ 满足温和正则性条件时，高阶 BDF$k$ 或 $L_k$ 方法的修正已得到充分研究 [12, 25, 26, 32] 。对于低正则性源项 $g(t) = t^\mu$, $\mu > 0$, 高阶 BDF$k$ 格式的收敛阶为 $\mathcal{O}(\tau^{1+\mu})$，见 [31], 中的引理3.2；这可能会损失高阶精度，并导致严重的阶数降低。对于弱奇异源函数 $g(t) = t^\mu$, $\mu > -1$，文献 [33] 通过对 (1.1) 两侧进行积分微分演算，给出了一种二阶时间步进方法。对于一般函数 $g(t) = t^\mu f(t)$, $\mu > -1$，文献 [4] 仅通过对源项 $g$ 施加积分微分算子，就充分研究了二阶格式。然而，这可能无法深入揭示用于次扩散模型 (1.1) 的高阶 BDF卷积求积的成因。例如，Newton-Cotes [3, 28] 求积公式 $\mathcal{O}\left(\tau^{\min\{m+1,k\}}\right)$ 对于奇数 $m$ 和偶数 $m$ 的最优误差估计 $\mathcal{O}\left(\tau^{\min\{m+2,k\}}\right)$, $1 \le m \le k \le 6$ 难以说明，见定理 3.8。

对于模型 (1.1)，如何在具有弱奇异源项的情况下，设计或恢复 $k$ 步 BDF ( $k \le 6$) 卷积求积所期望的 $k$ 阶收敛速率，目前文献中尚无相关研究。为填补这一空白，我们提出并分析了一种用于时间步进格式的平滑方法，其中通过采用 $m$ 重积分微分演算对奇异项进行正则化，并使用 $k$ 步 BDF 卷积求积对方程进行离散化，该方法称为 ID$m$-BDF$k$ 方法或平滑方法。我们证明，即使源项具有弱奇异性且初始数据不相容，仍然能够恢复所期望的 $k$ 阶收敛。数值实验验证了理论结果。

2. ID$m$-BDF$k$ 方法（平滑方法）。设 $V(t) = u(t) - v$，其中$V(0) = 0$。那么我们可以将 (1.1) 重写为

$$\partial_t^\alpha V(t) - AV(t) = Av + g(t), \quad 0 < t \le T. \tag{2.1}$$

众所周知，算子 $A$ 满足预解估计 [15, 29]

$$\left\|(z - A)^{-1}\right\| \le c|z|^{-1} \quad \forall z \in \Sigma_\theta$$

对于所有 $\theta \in (\pi/2, \pi)$。其中 $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg z| < \theta\}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一个扇形区域。这意味着，对于所有 $z^\alpha \in \Sigma_{\theta'}$, $\theta' = \alpha\theta < \theta < \pi$ 和 $z \in \Sigma_\theta$ 。

$$\left\| \left(z^\alpha - A\right)^{-1} \right\| \le c|z|^{-\alpha} \quad \forall z \in \Sigma_\theta. \tag{2.2}$$

在此及下文中，$\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 分别表示空间 $L^2(\Omega)$ 中的算子范数 [29, p. 91] 和通常范数[29, p. 2] 。

2.1. 离散化方案。令 $m$ 重积分算子 [21, p. 64]

$$G(t) = J^m g(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} g(\tau) d\tau = \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} * g(t), \quad 1 \le m \le k \le 6. \tag{2.3}$$

注意， $G(t)$ 是一个光滑函数，并满足 $G(0) = J^m g(t)|_{t=0} = 0$。此处 $J$ 可能将 $g$ 的奇异点映射为 $G$ 的零点。于是模型 (2.1) 变为

$$\partial_t^\alpha V(t) - AV(t) = \partial_t^m \left( \frac{t^m}{m!} Av + G(t) \right), \quad 0 < t \le T. \tag{2.4}$$

令 $N \in \mathbb{N}$, $\tau = \frac{T}{N}$为均匀时间步长，并令 $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \cdots, N$为区间 $[0, T]$的均匀剖分。记 $u^n$为$u(t)$在 $t = t_n$ 和 $g^n = g(t_n)$处的近似值。由 BDF$k$生成的卷积求积将 Riemann–Liouville 分数阶导数 $\partial_t^\alpha \varphi(t_n)$近似为

$$\partial_{\tau,k}^\alpha \varphi^n = \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^{n} \omega_j^{(\alpha,k)} \varphi^{n-j}, \quad 1 \le k \le 6. \tag{2.5}$$

这里的权重 $\omega_j^{(\alpha,k)}$ 是级数展开中的系数。

$$\delta_{\tau,k}^\alpha(\xi) = \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(\alpha,k)} \xi^j \quad \text{with} \quad \delta_{\tau,k}(\xi) = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} (1-\xi)^j, \tag{2.6}$$

w可通过快速傅里叶变换 [21, 章节 7] 或递归 [5]计算。随后，通过以下方式设计用于求解 (2.4) 的 ID$m$-BDF$k$ 方法:

$$\partial_{\tau,k}^\alpha V^n - AV^n = \partial_{\tau,k}^m \left( \frac{t_n^m}{m!} Av + G^n \right), \quad 1 \le m \le k \le 6. \tag{2.7}$$

Remark 2.1. 对于时间半离散格式 s (2.7)，我们要求 $v \in \mathcal{D}(A)$。然而，也可以利用格式 (2.7) 来证明非光滑数据 $v \in L^2(\Omega)$ 下的误差估计，见定理5.5。本文主要关注时间半离散格式 s (2.7)，因为空间离散已得到充分研究。事实上，当 $v \in \mathcal{D}(A)$ 时，我们可以选择 $v_h = R_h v$ ；当 $v \in L^2(\Omega)$ 时，我们可以选择 $v_h = P_h v$ ，见*[26, 29, 30]*。

2.2. 式 (2.4) 的连续解表示。对式 (2.4) 进行拉普拉斯变换，可得

$$\widehat{V}(z) = (z^\alpha - A)^{-1} \left( z^{-1} Av + z^m \widehat{G}(z) \right).$$

通过拉普拉斯逆变换，得到 [12]

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}} e^{zt} (z^\alpha - A)^{-1} \left( z^{-1} Av + z^m \widehat{G}(z) \right) dz \tag{2.8}$$

with

$$\Gamma_{\theta,\kappa} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = \kappa, |\arg z| \le \theta \} \cup \{ z \in \mathbb{C} : z = re^{\pm i\theta}, r \ge \kappa \} \tag{2.9}$$

以及 $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $\kappa > 0$。

2.3. (2.7) 的离散解表示。给定一个序列 $(\kappa^n)_0^\infty$，我们记为

$$\widetilde{\kappa}(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n\zeta^n$$

其生成幂级数。于是我们有以下结果。

LEMMA 2.1. 设 $\delta_{\tau,k}$ 由式 (2.6) 给出，且 $G(t)=J^m g(t)$，$1\le m\le k\le 6$ 由式 (2.3) 给出。那么，式 (2.7) 的离散解可表示为

$$V^n=\frac{\tau}{2\pi i}\int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n}\left(\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}\delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau})\left(\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^m Av+\widetilde{G}(e^{-z\tau})\right)dz$$

其中 $\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}=\{z\in\Gamma_{\theta,\kappa}:\ |\Im z|\le\pi/\tau\}$ 且 $\gamma_m(\xi)=\sum_{n=1}^\infty n^m\xi^n=\left(\xi\frac{d}{d\xi}\right)^m\frac{1}{1-\xi}$。

证明。将式 (2.7) 乘以 $\xi^n$ 并对 $n$求和，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\partial^\alpha_{\tau,k}V^n\xi^n-\sum_{n=1}^{\infty}AV^n\xi^n=\sum_{n=1}^{\infty}\partial^m_{\tau,k}\left(\frac{t_n^m}{m!}Av+G^n\right)\xi^n.$$

由式 (2.5)、(2.6) 和 $V^0=0$，存在

$$\sum_{n=1}^{\infty}\partial^\alpha_{\tau,k}V^n\xi^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\tau^\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha,k)}V^{n-j}\xi^n=\frac{1}{\tau^\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\omega_j^{(\alpha,k)}\xi^j\sum_{n=0}^{\infty}V^n\xi^n=\delta^\alpha_{\tau,k}(\xi)\widetilde{V}(\xi).$$

类似地，由恒等式 $\gamma_m(\xi)=\sum_{n=1}^\infty n^m\xi^n$, $m\ge1$ 和 $G^0=G(0)=0$，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\partial^m_{\tau,k}t_n^mAv\xi^n=\delta^m_{\tau,k}(\xi)\gamma_m(\xi)\tau^mAv,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\partial^m_{\tau,k}G^n\xi^n=\delta^m_{\tau,k}(\xi)\widetilde{G}(\xi).$$

根据上述方程，可得

$$\widetilde{V}(\xi)=\left(\delta^\alpha_{\tau,k}(\xi)-A\right)^{-1}\delta^m_{\tau,k}(\xi)\left(\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^mAv+\widetilde{G}(\xi)\right).\tag{2.10}$$

根据柯西积分公式、变量代换 $\xi=e^{-z\tau}$ 和柯西定理，可得 [12]。

$$V^n=\frac{\tau}{2\pi i}\int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n}\left(\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}\delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau})\left[\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^mAv+\widetilde{G}(e^{-z\tau})\right]dz\tag{2.11}$$

其中 $\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}=\{z\in\Gamma_{\theta,\kappa}:\ |\Im z|\le\pi/\tau\}$。证明完成。 □

3. 收敛性分析：一般源函数 $g(t)$。基于卷积求积框架 [4, 12, 25], ，我们首先针对具有一般源函数 $g(t)$ 的次扩散模型 (2.1) 提供详细的误差分析。

3.1. 一些技术引理。我们给出一些将要使用的引理。首先，我们需要对（2.6）中的 $\delta_{\tau,k}(e^{-z\tau})$ 进行一些估计。

LEMMA 3.1. *[12]* 设式（2.6）中给定了 $\delta_{\tau,k}(\xi)$，且 $k\le6$ 。则存在正常数 $c_1$、$c_2$、$c$，以及 $\theta\in(\pi/2,\theta_\varepsilon)$，满足 $\theta_\varepsilon\in(\pi/2,\pi)$ $\forall\varepsilon>0$，使得

$$c_1|z|\le|\delta_{\tau,k}(e^{-z\tau})|\le c_2|z|,\quad|\delta_{\tau,k}(e^{-z\tau})-z|\le c\tau^k|z|^{k+1},$$
$$|\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau})-z^\alpha|\le c\tau^k|z|^{k+\alpha},\ \delta_{\tau,k}(e^{-z\tau})\in\Sigma_{\pi/2+\varepsilon}\quad\forall z\in\Gamma^\tau_{\theta,\kappa},$$

其中 $\theta \in (\pi/2, \pi)$ 充分接近 $\pi/2$。

为给出 ID$m$-BDF$k$ 的牛顿-科特斯求积公式的最优误差估计，以下引理将发挥重要作用。

LEMMA 3.2. 设 $\gamma_l(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^l \xi^n$，其中 $l = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 2k, \quad k \leq 6$。则存在正常数 $c$，使得

$$\left| \frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!}\tau^{l+1} - \frac{1}{z^{l+1}} \right| \leq \begin{cases} c\tau^{l+1}, & l = 0 \ \text{ or } \ l = 1, 3, \cdots, 2k-1, \\ c\tau^{l+2}|z|, & l = 2, 4, \cdots, 2k. \end{cases}$$

证明。取 $\xi = e^{-z\tau}$，得

$$\gamma_l(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^l \xi^n = \frac{\sum_{j=0}^{l} a_{l,j}\xi^{l+1-j}}{(1-\xi)^{l+1}}, \quad l \geq 0$$

其中 $a_{0,0} = 1$, $a_{0,1} = 0$ 以及

$$a_{l,j} = j a_{l-1,j} + (l+1-j)a_{l-1,j-1}, \ a_{l,0} = a_{l,l+1} = 0, \ l \geq 1.$$

特别地，我们有 $a_{l,j} = a_{l,l+1-j}$, $l \geq 1$ 以及

$$\gamma_l(\xi) = \frac{\sum_{j=1}^{l} a_{l,l+1-j}\xi^{l+1-j}}{(1-\xi)^{l+1}} = \frac{\sum_{j=1}^{l} a_{l,j}\xi^{j}}{(1-\xi)^{l+1}}.$$

经过简单计算可得

$$\left| \frac{\gamma_l(e^{-\eta})}{l!}\eta^{l+1} - 1 \right| \leq \begin{cases} c|\eta|^{l+1}, & l = 0 \ \text{ or } \ l = 1, 3, \cdots, 2k-1, \\ c|\eta|^{l+2}, & l = 2, 4, \cdots, 2k, \end{cases}$$

由于

$$\frac{\gamma_l(e^{-\eta})}{l!}\eta^{l+1} = \frac{e^{-\eta}}{(1-e^{-\eta})\,\eta^{-1}} = \frac{1 - \frac{\eta}{1!} + \frac{\eta^2}{2!} - \frac{\eta^3}{3!} + \cdots}{1 - \frac{\eta}{2!} + \frac{\eta^2}{3!} - \frac{\eta^3}{4!} + \cdots}, \quad l = 0,$$

and

$$\frac{\gamma_l(e^{-\eta})}{l!}\eta^{l+1} = \frac{\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^{l} a_{l,j} e^{\left(\frac{l+1}{2}-j\right)\eta}}{\left(e^{\frac{\eta}{2}} - e^{-\frac{\eta}{2}}\right)^{l+1}\eta^{-(l+1)}} = \frac{1 + c_2\eta^2 + c_4\eta^4 + c_6\eta^6 + \cdots}{1 + d_2\eta^2 + d_4\eta^4 + d_6\eta^6 + \cdots} \quad \forall l \geq 1$$

其中 $c_{2i} = d_{2i}$、$2i \leq l$。这里，系数 $c_{2i}$ 和 $d_{2i}$、$i = 1$、2、.....是通过 y

$$c_{2i} = \frac{1}{l!}\sum_{j=1}^{l} a_{l,j}\frac{1}{(2i)!}\left(\frac{l+1}{2} - j\right)^{2i},$$

and

$$d_{2i} = \frac{1}{(2i+l+1)!}\sum_{j=0}^{l+1}(-1)^j\binom{l+1}{j}\left(\frac{l+1}{2} - j\right)^{2i+l+1}.$$

证明完毕。 □

LEMMA 3.3. 设 $\delta_{\tau,k}(\xi)$ 由式 (2.6) 给出，且 $\gamma_l(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^l \xi^n$ 满足 $l$ =0, 1, . . ., $k+m$, $1 \leq m \leq k \leq 6$。那么，存在一个正常数 $c$，使得

$$\left| \delta_{\tau,k}^m(e^{-z\tau})\frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!}\tau^{l+1} - \frac{z^m}{z^{l+1}} \right| \leq \begin{cases} c\tau^{l+1}|z|^m + c\tau^k|z|^{k+m-l-1}, & l = 0, 1, 3, \cdots, \\ c\tau^{l+2}|z|^{m+1} + c\tau^k|z|^{k+m-l-1}, & l = 2, 4, \cdots. \end{cases}$$

证明。令

$$\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!}\tau^{l+1}-\frac{z^m}{z^{l+1}}=J_1+J_2$$

with

$$J_1=\delta_{\tau,k}^{m}\left(e^{-z\tau}\right)\left(\frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!}\tau^{l+1}-\frac{1}{z^{l+1}}\right)\quad\text{and}\quad J_2=\frac{\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})-z^m}{z^{l+1}}.$$

由引理3.1和3.2可得

$$|J_1|\le\begin{cases}c\tau^{l+1}|z|^m, & l=0\ \text{ or }\ l=1,3,\cdots,2k-1,\\ c\tau^{l+2}|z|^{m+1}, & l=2,4,\cdots,2k;\end{cases}$$

and

$$|J_2|\le c\tau^k|z|^{k+1}|z|^{m-1}|z|^{-l-1}\le c\tau^k|z|^{k+m-l-1}.$$

由三角不等式可得所需结果。 □

由引理3.1–3.3可得以下结果，这些结果将在全局收敛性分析中使用。

LEMMA 3.4. 令$\delta_{\tau,\ k}^{\alpha}$为式（2.6）中给出的量，并令 $\gamma_l(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}n^l\xi^n, l=0,1,\ldots,$ $k+m,1\le m\le k\le 6$。则存在正常数 $c$ 使得

$$\|K(z)\|\le\begin{cases}c\tau^{l+1}|z|^{m-\alpha}+c\tau^k|z|^{k+m-l-1-\alpha}, & l=0\ \text{ or }\ l=1,3,\cdots,2k-1,\\ c\tau^{l+2}|z|^{m+1-\alpha}+c\tau^k|z|^{k+m-l-1-\alpha}, & l=2,4,\cdots,2k\end{cases}$$

*with*

$$K(z)=\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!}\tau^{l+1}-(z^\alpha-A)^{-1}\frac{z^m}{z^{l+1}}.$$

证明。令 $K(z)=I+II$ 满足

$$I=\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}\left[\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!}\tau^{l+1}-\frac{z^m}{z^{l+1}}\right],$$
$$II=\left[\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}-(z^\alpha-A)^{-1}\right]\frac{z^m}{z^{l+1}}.$$

预解估计 (2.2)、引理 3.1 和引理 3.3 直接推出

$$\|\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}\|\le c|z|^{-\alpha},\tag{3.1}$$

and

$$\|I\|\le\begin{cases}c\tau^{l+1}|z|^{m-\alpha}+c\tau^k|z|^{k+m-l-1-\alpha}, & l=0\ \text{ or }\ l=1,3,\cdots,2k-1,\\ c\tau^{l+2}|z|^{m+1-\alpha}+c\tau^k|z|^{k+m-l-1-\alpha}, & l=2,4,\cdots,2k.\end{cases}$$

根据引理 3.1、(3.1) 和恒等式

$$\begin{aligned}&\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}-(z^\alpha-A)^{-1}\\&\quad=\left(z^\alpha-\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})\right)\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})-A\right)^{-1}(z^\alpha-A)^{-1},\end{aligned}\tag{3.2}$$

我们估计 $II$ 如下

$$\|II\| \le c\tau^k|z|^{k+\alpha}c|z|^{-\alpha}c|z|^{-\alpha}|z|^{-l+m-1} \le c\tau^k|z|^{k+m-l-1-\alpha}.$$

由此得到所需结果。 □

LEMMA 3.5. 设 $\delta_{\tau,\ k}^{\alpha}$ 由 (2.6) 给出，且 $\gamma_m(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^m\xi^n$ 满足 $1 \le m \le k \le 6$。则存在正常数 $c$，使得

$$\|\mathcal{K}(z)\| \le \begin{cases} c\tau^{m+1}|z|^m + c\tau^k|z|^{k-1}, & m = 1,3,5, \\ c\tau^{m+2}|z|^{m+1} + c\tau^k|z|^{k-1}, & m = 2,4,6 \end{cases}$$

*with*

$$\mathcal{K}(z) = \left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^{m+1}A - (z^\alpha - A)^{-1}z^{-1}A.$$

证明。由于 $(z^\alpha - A)^{-1}z^{-1}A = -z^{-1} + (z^\alpha - A)^{-1}z^\alpha z^{-1}$ 且

$$\begin{aligned}&\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^{m+1}A \\ &= -\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^{m+1} + \left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^{m+1}.\end{aligned}$$

于是可将 $\mathcal{K}(z)$ 拆分为

$$\mathcal{K}(z) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

with

$$\begin{aligned}J_1 &= \left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})\left(\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_m(e^{-z\tau})}{m!}\tau^{m+1} - z^{-1}\right), \\ J_2 &= \left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - z^\alpha\right)z^{-1}, \\ J_3 &= \left(\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} - (z^\alpha - A)^{-1}\right)z^{\alpha-1}, \quad J_4 = z^{-1} - \delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau})\frac{\gamma_m(\xi)}{m!}\tau^{m+1}.\end{aligned}$$

根据 (3.1)、(3.2) 以及引理 3.1、3.3，我们对 $J_1$、$J_4$ 和 $J_2$、$J_3$ 作如下估计

$$\|J_1\| \le c\,\|J_4\| \le \begin{cases} c\tau^{m+1}|z|^m + c\tau^k|z|^{k-1}, & m = 1,3,5, \\ c\tau^{m+2}|z|^{m+1} + c\tau^k|z|^{k-1}, & m = 2,4,6, \end{cases}$$

and

$$\|J_2\| \le c|z|^{-\alpha}\tau^k|z|^{k+\alpha}|z|^{-1} \le c\tau^k|z|^{k-1}, \qquad \|J_3\| \le c\tau^k|z|^{k-1}.$$

证明已完成。 □

3.2. 一般源函数 $g(t)$ 的误差分析。设 $G(t) = J^m g(t), 1 \le m \le k \le 6$ 由 (2.3) 定义。带有积分形式余项的一般源函数的泰勒展开为

$$\begin{aligned}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * g(t) = G(t) &= \sum_{l=0}^{k+m-1}\frac{t^l}{l!}G^{(l)}(0) + \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * G^{(k+m)}(t) \\ &= \sum_{l=0}^{k+m-1}\frac{t^l}{l!}g^{(l-m)}(0) + \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * g^{(k)}(t)\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $g^{(-i)}(0) = J^i g(0) = 0$, $i \geq 1$。由此得到以下结果。

LEMMA 3.6. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为 (2.4) 和 (2.7) 的解。设 $v = 0$ 和 $G(t) := \frac{t^l}{l!} g^{(l-m)}(0)$, 其中 $l = 0, 1, \ldots, k+m-1$, $1 \leq m \leq k \leq 6$。则对于任意 $t_n > 0$, 以下误差估计成立

$$\|V(t_n) - V^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \begin{cases} \left(c\tau^{l+1} t_n^{\alpha-m-1} + c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m}\right) \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}, l = 0, 1, 3, 5, \cdots \\ \left(c\tau^{l+2} t_n^{\alpha-m-2} + c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m}\right) \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}, l = 2, 4, 6, \cdots . \end{cases}$$

证明。由 (2.8) 和引理 2.1, 可得

$$V(t_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} (z^\alpha - A)^{-1} \frac{1}{z^{l+1-m}} g^{(l-m)}(0) dz,$$

and

$$V^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} \left(\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} \delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau}) \frac{\gamma_l(e^{-z\tau})}{l!} \tau^{l+1} g^{(l-m)}(0) dz$$

其中 $\gamma_l(\xi) = \sum_{n=1}^\infty n^l \xi^n$。于是有

$$V(t_n) - V^n = J_1 + J_2$$

with

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} K(z) g^{(l-m)}(0) dz, \quad K(z) \text{ in Lemma 3.4},$$

and

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa} \setminus \Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} (z^\alpha - A)^{-1} \frac{1}{z^{l+1-m}} g^{(l-m)}(0) dz.$$

根据三角不等式、(2.2) 和引理 3.4, 可得

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \int_\kappa^{\frac{\pi}{\tau \sin\theta}} e^{rt_n \cos\theta} \left(\tau^{l+1} r^{m-\alpha} + \tau^k r^{k+m-1-l-\alpha}\right) dr \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c \int_{-\theta}^{\theta} e^{\kappa t_n \cos\psi} \left(\tau^{l+1} \kappa^{m+1-\alpha} + \tau^k \kappa^{k+m-l-\alpha}\right) d\psi \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(c\tau^{l+1} t_n^{\alpha-m-1} + c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m}\right) \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}, \ l = 0 \text{ or } l = 1, 3, \cdots, \end{aligned}$$

and

$$\|J_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(c\tau^{l+2} t_n^{\alpha-m-2} + c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m}\right) \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}, \quad l = 2, 4, \cdots,$$

其中我们使用的是

$$\begin{aligned} &\int_\kappa^{\frac{\pi}{\tau \sin\theta}} e^{rt_n \cos\theta} r^{k+m-1-l-\alpha} dr \leq c t_n^{\alpha+l-k-m}, \\ &\int_{-\theta}^{\theta} e^{\kappa t_n \cos\psi} \kappa^{k+m-l-\alpha} d\psi \leq c t_n^{\alpha+l-k-m}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{L^2(\Omega)} &\le c\int_{\frac{\pi}{\tau\sin\theta}}^{\infty} e^{rt_n\cos\theta} r^{m-l-1-\alpha} dr \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c\tau^k \int_{\frac{\pi}{\tau\sin\theta}}^{\infty} e^{rt_n\cos\theta} r^{k+m-1-l-\alpha} dr \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m} \left\|g^{(l-m)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

这里我们使用 $1 \le \frac{(\text{正弦}\,\theta)^k}{\pi^k}\tau^k r^k$，其中 $r \ge \frac{\pi}{\tau\,\text{正弦}\,\theta}$。证明完成。 □

LEMMA 3.7. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为方程（2.4）和（2.7）的解。设 $v = 0, G(t) := \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * g^{(k)}(t)$, $1 \le m \le k \le 6$ 以及 $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g^{(k)}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds < \infty$。则对于任意 $t_n > 0$，以下误差估计成立

$$\|V(t_n) - V^n\|_{L^2(\Omega)} \le c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\|g^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

证明。由（2.8）中的连续解表示可得

$$V(t_n) = (\mathscr{E}(t) * G(t))(t_n) = \left(\left(\mathscr{E}(t) * \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!}\right) * g^{(k)}(t)\right)(t_n) \tag{3.5}$$

with

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta,\kappa}} e^{zt}(z^\alpha - A)^{-1} z^m dz. \tag{3.6}$$

设 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n \xi^n = \widetilde{\mathscr{E}_\tau}(\xi) := \left(\delta_{\tau,k}^\alpha(\xi) - A\right)^{-1} \delta_\tau^m,\ _k(\xi)$。然后利用（2.10），可得

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(\xi) &= \left(\delta_{\tau,k}^\alpha(\xi) - A\right)^{-1} \delta_{\tau,k}^m(\xi)\widetilde{G}(\xi) = \widetilde{\mathscr{E}_\tau}(\xi)\widetilde{G}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n \xi^n \sum_{j=0}^{\infty} G^j \xi^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n G^j \xi^{n+j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^{n-j} G^j \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \mathscr{E}_\tau^{n-j} G^j \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} V^n \xi^n\end{aligned}$$

with

$$V^n = \sum_{j=0}^{n} \mathscr{E}_\tau^{n-j} G^j := \sum_{j=0}^{n} \mathscr{E}_\tau^{n-j} G(t_j).$$

根据柯西积分公式和变量代换 $\xi = e^{-z\tau}$，我们得到 $\mathscr{E}_\tau^n$ 的如下表示形式

$$\mathscr{E}_\tau^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho} \xi^{-n-1}\widetilde{\mathscr{E}_\tau}(\xi) d\xi = \frac{\tau}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta,\kappa}^\tau} e^{zt_n} \left(\delta_{\tau,k}^\alpha(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} \delta_{\tau,k}^m(e^{-z\tau}) dz.$$

由式 (3.1)、引理 3.1 和 $\tau t_n^{-1} = \frac{1}{n} \le 1$ 可知,

$$\|\mathscr{E}_\tau^n\| \le c\tau \left(\int_\kappa^{\frac{\pi}{\tau\sin\theta}} e^{rt_n\cos\theta} r^{m-\alpha} dr + \int_{-\theta}^{\theta} e^{\kappa t_n\cos\psi} \kappa^{m+1-\alpha} d\psi\right) \le c t_n^{\alpha-m}. \tag{3.7}$$

令 $\mathscr{E}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n \delta_{t_n}(t)$，其中 $\delta_{t_n}$ 为位于 $t_n$ 处的狄拉克δ函数。则

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{E}_\tau(t) * G(t))(t_n) &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^j \delta_{t_j}(t) * G(t) \right)(t_n) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathscr{E}_\tau^j G(t_n - t_j) = \sum_{j=0}^{n} \mathscr{E}_\tau^{n-j} G(t_j) = V^n.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

此外，利用上述方程，可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(\mathscr{E}_\tau * t^l)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \mathscr{E}_\tau^{n-j} t_j^l \xi^n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^{n-j} t_j^l \xi^n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n t_j^l \xi^{n+j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n \xi^n \sum_{j=0}^{\infty} t_j^l \xi^j = \widetilde{\mathscr{E}_\tau}(\xi) \tau^l \sum_{j=0}^{\infty} j^l \xi^j = \widetilde{\mathscr{E}_\tau}(\xi) \tau^l \gamma_l(\xi).
\end{aligned}
$$

结合 (3.5)、(3.8) 和引理 3.6，可得

$$
\left\| \left( (\mathscr{E}_\tau - \mathscr{E}) * \frac{t^l}{l!} \right)(t_n) \right\| \le \begin{cases} c\tau^{l+1} t_n^{\alpha-m-1} + c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m}, & l = 0, 1, 3, \cdots \\ c\tau^{l+2} t_n^{\alpha-m-2} + c\tau^k t_n^{\alpha+l-k-m}, & l = 2, 4, 6, \cdots \end{cases} \tag{3.9}
$$

其中 $l \le k + m - 1$.

接下来，我们证明关于 $t > 0$ 的以下不等式 (3.10)

$$
\left\| \left( (\mathscr{E}_\tau - \mathscr{E}) * \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} \right)(t) \right\| \le c\tau^k t^{\alpha-1} \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n). \tag{3.10}
$$

在 $t = t_n$ 处对 $\mathscr{E}(t)$ 进行泰勒级数展开，可得

$$
\begin{aligned}
\left( \mathscr{E} * \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} \right)(t) = &\sum_{l=0}^{k+m-1} \frac{(t-t_n)^l}{l!} \left( \mathscr{E} * \frac{t^{k+m-l-1}}{(k+m-l-1)!} \right)(t_n) \\
&+ \frac{1}{(k+m-1)!} \int_{t_n}^{t} (t-s)^{k+m-1} \mathscr{E}(s) ds,
\end{aligned}
$$

这对于卷积 $\left(\mathscr{E}_\tau * t^{k+m-1}\right)(t)$ 也成立。由 (3.9) 可得

$$
\begin{aligned}
\left\| (t-t_n)^l \left( (\mathscr{E}_\tau - \mathscr{E}) * t^{k+m-l-1} \right)(t_n) \right\| &\le c\tau^l \left( \tau^{k+m-l} t_n^{\alpha-m-1} + \tau^k t_n^{\alpha-l-1} \right) \\
&\le c\tau^k t^{\alpha-1} \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n).
\end{aligned}
$$

根据 (3.6)、(2.2) 和 (3.4)，可得

$$
\|\mathscr{E}(t)\| \le c \left( \int_{\kappa}^{\infty} e^{rt\cos\theta} r^{m-\alpha} dr + \int_{-\theta}^{\theta} e^{\kappa t \cos\psi} \kappa^{m+1-\alpha} d\psi \right) \le c t^{\alpha-m-1}.
$$

此外，我们得到

$$
\left\| \int_{t_n}^{t} (t-s)^{k+m-1} \mathscr{E}(s) ds \right\| \le c \int_{t}^{t_n} (s-t)^{k+m-1} s^{\alpha-m-1} ds \le c\tau^k t^{\alpha-1}.
$$

根据 (3.8) 和 (3.7) 中 $\mathscr{E}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_\tau^n \delta_{t_n}(t)$ 的定义，我们推得

$$\left\| \int_{t_n}^{t} (t-s)^{k+m-1} \mathscr{E}_\tau(s) ds \right\| \le (t_n - t)^{k+m-1} \|\mathscr{E}_\tau^n\| \le c\tau^{k+m} t_n^{\alpha-m-1}$$
$$\le c\tau^k t_n^{\alpha-1} \le c\tau^k t^{\alpha-1} \quad \forall\, t \in (t_{n-1}, t_n).$$

利用上述不等式，可得式 (3.10)。证明完成。为简单起见，取 □

$$\|J_v\|_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} c\tau^{m+1} t_n^{-m-1} \|v\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^k t_n^{-k} \|v\|_{L^2(\Omega)}, & m = 1, 3, 5, \\ c\tau^{m+2} t_n^{-m-2} \|v\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^k t_n^{-k} \|v\|_{L^2(\Omega)}, & m = 2, 4, 6; \end{cases} \tag{3.11}$$

and

$$\|J_g\|_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} c \sum_{l=0}^{k-1} \left( \tau^{l+m+1} t_n^{\alpha-m-1} + \tau^k t_n^{\alpha+l-k} \right) \left\| g^{(l)}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}, & l + m = 1, 3, 5, \cdots \\ c \sum_{l=0}^{k-1} \left( \tau^{l+m+2} t_n^{\alpha-m-2} + \tau^k t_n^{\alpha+l-k} \right) \left\| g^{(l)}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}, & l + m = 2, 4, 6, \cdots. \end{cases}$$

于是得到以下结果。

THEOREM 3.8. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为 (2.4) 和 (2.7) 的解。设 $v \in L^2(\Omega)$、$g \in C^{k-1}([0,T]; L^2(\Omega))$ 和 $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\| g^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty$。那么，对任意 $t_n > 0$，以下误差估计成立

$$\|V^n - V(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \le ||J_v||_{L^2(\Omega)} + ||J_g||_{L^2(\Omega)} + c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\| g^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

证明。将 (2.8) 从 (2.11) 中相减，得到

$$V^n - V(t_n) = I_1 - I_2 + I_3$$

以及相关的初始项

$$\begin{aligned} I_1 =& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}^\tau} e^{zt_n} \mathcal{K}(z) v dz, \quad \mathcal{K}(z) \text{ in Lemma 3.5}, \\ I_2 =& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa} \setminus \Gamma_{\theta,\kappa}^\tau} e^{zt_n} (z^\alpha - A)^{-1} z^{-1} A v dz, \end{aligned} \tag{3.12}$$

以及相关源项

$$\begin{aligned} I_3 =& \frac{\tau}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}^\tau} e^{zt_n} \left( \delta_{\tau,k}^\alpha(e^{-z\tau}) - A \right)^{-1} \delta_{\tau,k}^m(e^{-z\tau}) \widetilde{G}(e^{-z\tau}) dz \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} (z^\alpha - A)^{-1} z^m \widehat{G}(z) dz. \end{aligned}$$

与引理 3.6 中的做法类似，我们估计

$$\|I_1\|_{L^2(\Omega)} \le \begin{cases} c\tau^{m+1} t_n^{-m-1} \|v\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^k t_n^{-k} \|v\|_{L^2(\Omega)}, & m = 1, 3, 5, \\ c\tau^{m+2} t_n^{-m-2} \|v\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^k t_n^{-k} \|v\|_{L^2(\Omega)}, & m = 2, 4, 6. \end{cases} \tag{3.13}$$

利用预解估计 (2.2)，我们对第二项 $I_2$ 作如下估计。

$$\|I_2\|_{L^2(\Omega)} \leq c \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}\setminus\Gamma^{\tau}_{\theta,\kappa}} \left|e^{zt_n}\right| |z|^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega)} |dz| \leq c\tau^k t_n^{-k} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.14}$$

由于

$$\int_{\Gamma_{\theta,\kappa}\setminus\Gamma^{\tau}_{\theta,\kappa}} \left|e^{zt_n}\right| |z|^{-1} |dz| = \int_{\frac{\pi}{\tau\sin\theta}}^{\infty} e^{rt_n\cos\theta} r^{-1} dr \leq c\tau^k t_n^{-k} \tag{3.15}$$

其中 $1 \leq (\frac{\theta}{\text{正弦}\ \pi})^k \tau^k r^k$, $r\tau \geq \frac{\pi}{\text{正弦}\ \theta}$。于是有 $\|I_1\|_{L^2(\Omega)} + \|I_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \|J_v\|_{L^2(\Omega)}$。根据引理 3.6 和 3.7，以及一般源函数 (3.3)，即

$$G(t) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{t^{(l+m)}}{(l+m)!} g^{(l)}(0) + \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * g^{(k)}(t),$$

可得 $\|I_3\|_{L^2(\Omega)} \leq \|J_g\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\|g^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds$。证明完毕。

□

4. 收敛性分析：奇异源函数 $t^\mu q$, $\mu > -1$。接下来考虑奇异源项 $g(t) = t^\mu q$，其中 $\mu > -1$ 对于 (2.4)。我们引入多对数函数

$$Li_p(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi^j}{j^p}, \quad p \notin \mathbb{N} \tag{4.1}$$

其中黎曼ζ函数 $\zeta(p) = Li_p(1)$。

令 $G(t) = J^m g(t) = \frac{\Gamma}{\Gamma(\mu+1\ t^{\mu+m}\ )(\mu+m+1)}\ ^q$，其拉普拉斯变换为 $\widehat{G}(z) = \ ^{\Gamma}(\ \mu+1)\ \overline{z^{\mu+m+1}} q$。由（2.8）和（2.11）可得连续解

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa}} e^{zt} (z^\alpha - A)^{-1} \left( z^{-1} Av + \frac{\Gamma(\mu+1)}{z^{\mu+1}} q \right) dz,$$

以及离散解

$$V^n = \frac{\tau}{2\pi i} \int_{\Gamma^{\tau}_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} (\delta^{\alpha}_{\tau,k}(e^{-z\tau}) - A)^{-1} \delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau}) \left( \frac{\gamma_m(e^{-z\tau})}{m!} \tau^m Av + \widetilde{G}(e^{-z\tau}) \right) dz$$

with

$$\widetilde{G}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n \xi^n = q \frac{\Gamma(\mu+1)\tau^{\mu+m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu+m} \xi^n}{\Gamma(\mu+m+1)} = q \frac{\Gamma(\mu+1)\tau^{\mu+m} Li_{-\mu-m}(\xi)}{\Gamma(\mu+m+1)}.$$

LEMMA 4.1. *[11]*令 $|z\tau| \leq \ ^{\pi}\text{正弦}\ \theta$ 和 $\theta > \pi/2$ 接近 $\pi/2$。那么我们有

$$Li_p(e^{-z\tau}) = \Gamma(1-p)(z\tau)^{p-1} + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \zeta(p-j) \frac{(z\tau)^j}{j!}, \ p \notin \mathbb{N},$$

且该无穷级数绝对收敛。这里 $\zeta$ 表示黎曼 ζ 函数。

LEMMA 4.2. 设 $\gamma_{\mu+m}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu+m}\xi^n$ 且满足 $1 \le m \le k \le 6$。则存在正常数 $c$ 使得

$$\left|\frac{\gamma_{\mu+m}(e^{-z\tau})}{\Gamma(\mu+m+1)}\tau^{\mu+m+1} - \frac{1}{z^{\mu+m+1}}\right| \le c\tau^{\mu+m+1}, \quad \mu > -1.$$

证明。由引理3.2，结合 $\mu \in \mathbb{N}$ 可得所需结果。下面证明 $\mu \notin \mathbb{N}$ 的情形。利用（4.1）和引理 4.1，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\gamma_{\mu+m}(e^{-z\tau})}{\Gamma(\mu+m+1)}\tau^{\mu+m+1} - \frac{1}{z^{\mu+m+1}}\right| \\
&= \left|\frac{\tau^{\mu+m+1}}{\Gamma(\mu+m+1)}\left(Li_{-\mu-m}(e^{-z\tau}) - \frac{\Gamma(\mu+m+1)}{(z\tau)^{\mu+m+1}}\right)\right| \\
&\le \frac{\tau^{\mu+m+1}}{\Gamma(\mu+m+1)}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\zeta(-\mu-m-j)\frac{(z\tau)^j}{j!}\right| \le c\tau^{\mu+m+1}.
\end{aligned}$$

证明完成。 □

LEMMA 4.3. 设 $\delta_{\tau,\ k}$（$\xi$），其中 $k \le 6$ 在（2.6）中给出。则存在正常数 $c$，使得

$$\left\|\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau}) - (z^{\alpha}-A)^{-1}z^{m}\right\| \le c\tau^{k}|z|^{k+m-\alpha} \quad \forall z \in \Gamma_{\theta,\kappa}^{\tau}.$$

证明。令

$$\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau}) - (z^{\alpha}-A)^{-1}z^{m} = I + II$$

with

$$\begin{aligned}
I &= \left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}\left(\delta_{\tau,k}^{m}(e^{-z\tau}) - z^{m}\right), \\
II &= \left(\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} - (z^{\alpha}-A)^{-1}\right)z^{m}.
\end{aligned}$$

由（3.1）和引理 3.1，我们得到

$$\|I\| \le c\tau^{k}|z|^{k+m-\alpha}.$$

利用引理 3.1、(3.1)、(2.2) 和恒等式

$$\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} - (z^{\alpha}-A)^{-1} = \left(z^{\alpha} - \delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau})\right)\left(\delta_{\tau,k}^{\alpha}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1}(z^{\alpha}-A)^{-1},$$

我们估计 $II$ 如下

$$\|II\| \le c\tau^{k}|z|^{k+\alpha}c|z|^{-\alpha}c|z|^{-\alpha}|z|^{m} \le c\tau^{k}|z|^{k+m-\alpha}.$$

根据三角不等式，可得所需结果。 □

THEOREM 4.4. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为方程 (2.4) 和 (2.7) 的解。设 $v \in L^2(\Omega)$ 和 $g(x,t) = t^{\mu}q$, $\mu > -1$, $q \in L^2(\Omega)$。则对于任意 $t_n > 0$，以下误差估计成立。

$$\|V^n - V(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \le \|J_v\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^{\mu+m+1}t_n^{\alpha-m-1}\|q\|_{L^2(\Omega)} + c\tau^{k}t_n^{\alpha+\mu-k}\|q\|_{L^2(\Omega)}$$

其中，在式 (3.11) 中有 $\|J_v\|_{L^2(\Omega)}$。

证明。根据定理 3.8，结合 $\mu \in \mathbb{N}$ 可得所需结果。接下来证明 $\mu \notin \mathbb{N}$ 的情形。将 (2.8) 从 (2.11) 中减去，得到

$$V^n - V(t_n) = I_1 - I_2 + I_3 - I_4,$$

其中，$I_1$、$I_2$ 由 (3.12) 定义，并且

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} \left[ \left(\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} \delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau}) \tau \widetilde{G}(e^{-z\tau}) - (z^\alpha - A)^{-1} z^m \widehat{G}(z) \right] dz,$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,\kappa} \setminus \Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} (z^\alpha - A)^{-1} z^m \widehat{G}(z) dz.$$

根据 (3.13) 和 (3.14)，我们估计 $\|I_1\|_{L^2(\Omega)} + \|I_2\|_{L^2(\Omega)} \le \|J_v\|_{L^2(\Omega)}$。由 (3.15) 可得

$$\|I_4\|_{L^2(\Omega)} \le c \int_{\Gamma_{\theta,\kappa} \setminus \Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} \left|e^{zt_n}\right| |z|^{-\alpha} |z|^{-\mu-1} \|q\|_{L^2(\Omega)} |dz| \le c\tau^k t_n^{\alpha+\mu-k} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

最后，我们考虑 $I_3 = I_{31} + I_{32}$，其中

$$I_{31} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} \left(\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} \delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau}) \left(\tau \widetilde{G}(e^{-z\tau}) - \widehat{G}(z)\right) dz,$$

$$I_{32} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} e^{zt_n} \left( \left(\delta^\alpha_{\tau,k}(e^{-z\tau}) - A\right)^{-1} \delta^m_{\tau,k}(e^{-z\tau}) - (z^\alpha - A)^{-1} z^m \right) \widehat{G}(z) dz.$$

根据 (3.1)、引理 3.1 和引理 4.2，存在

$$\|I_{31}\|_{L^2(\Omega)} \le c\tau^{\mu+m+1} \|q\|_{L^2(\Omega)} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} \left|e^{zt_n}\right| |z|^{m-\alpha} |dz| \le c\tau^{\mu+m+1} t_n^{\alpha-m-1} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

由引理4.3和 $\widehat{G}(z) = {}^{\Gamma}{}_{(\mu+1)} \overline{z^{\mu+m+1}} q$，可得

$$\|I_{32}\|_{L^2(\Omega)} \le c\tau^k \|q\|_{L^2(\Omega)} \int_{\Gamma^\tau_{\theta,\kappa}} \left|e^{zt_n}\right| |z|^{k+m-\alpha} |z|^{-\mu-m-1} |dz| \le c\tau^k t_n^{\alpha+\mu-k} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

证明已完成。 □

5. 收敛性分析：具有 $\mu > -1$ 的源函数 $t^\mu \circ f(t)$。基于第 3 节和第 4 节的分析，接下来我们将针对具有奇异/低正则性源函数 $t^\mu \circ f(t)$ 的模型 (1.1) 给出详细的误差估计。

5.1. 收敛性分析：卷积源函数 $t^\mu * f(t)$，$\mu > -1$。令 $f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * f^{(k)}(t)$。则可得

$$g(t) = t^\mu * f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\mu+1) t^{\mu+j+1}}{\Gamma(\mu+j+2)} f^{(j)}(0) + t^\mu * \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * f^{(k)}(t).$$

令 $G(t) = J^m g(t) = \frac{\Gamma_{(\mu+1\ t^{\mu+m})}}{\Gamma(\mu+m+1)} * f(t)$，其中 $G^{(j)}(0) = 0, j = 0, \ldots, m-1$。由此得到

$$G(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\mu+1) t^{\mu+j+m+1}}{\Gamma(\mu+j+m+2)} f^{(j)}(0) + \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * t^\mu * f^{(k)}(t).$$

LEMMA 5.1. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为 (2.4) 和 (2.7) 的解。令 $v = 0$, $G(t) := \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * \left(t^\mu * f^{(k)}(t)\right)$, 其中 $\mu > -1$ 且 $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\mu * \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty$。则对任意 $t_n > 0$, 以下误差估计成立

$$\begin{aligned} \|V(t_n) - V^n\|_{L^2(\Omega)} &\le c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} s^\mu * \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\le c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha+\mu} \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

证明. 由引理3.7和 $g^{(k)}(t) = t^\mu * f^{(k)}(t)$, 可得

$$\begin{aligned} \|V(t_n) - V^n\|_{L^2(\Omega)} &\le c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\| s^\mu * f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\le c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} s^\mu * \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &= c\tau^k \left( \left( t^{\alpha-1} * t^\mu \right) * \left\| f^{(k)}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \right)_{t=t_n} \\ &\le c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha+\mu} \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

证明完成。 □

THEOREM 5.2. 设 $V(t_n)$和 $V^n$ 分别为(2.4)和(2.7)的解。设 $v \in L^2(\Omega)$、 $g(t) = t^\mu * f(t)$、 $\mu > -1$ 以及 $f \in C^{k-1}([0,T]; L^2(\Omega))$、 $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\mu * \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty$。则对于任意 $t_n > 0$, 以下误差估计成立

$$\begin{aligned} \|V^n - V(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \le \|J_v\|_{L^2(\Omega)} &+ c\tau^k \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} s^\mu * \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ c \sum_{j=0}^{k-1} \left( \tau^{\mu+j+m+2} t_n^{\alpha-m-1} + \tau^k t_n^{\alpha+\mu+j-k+1} \right) \left\| f^{(j)}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

其中$\|J_v\|_{L^2(\Omega)}$ 见(3.11)。

证明. 由定理4.4和引理5.1即可得到所需结果。 □

5.2. 收敛性分析: 乘积源函数 $t^\mu f(t)$, $\mu > -1$。令$G(t) = J^m g(t)$, 其中 $g(t) = t^\mu f(t)$, $f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} f_{(j)}(0) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * f_{(k)}(t)$。则

$$G(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\mu+j+1) t^{\mu+j+m}}{\Gamma(\mu+j+m+1) j!} f^{(j)}(0) + \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} * h(t)$$

其中 $h(t) = t^\mu \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * f^{(k)}(t) \right)$。

LEMMA 5.3. *Let* $h(t) = t^\mu \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * f^{(k)}(t) \right)$ *with* $\mu > -1$ *and*

$$f \in C^{k-1}([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \int_0^t \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty, \quad \int_0^t s^\mu \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty.$$

则有如下误差估计

$$\left\|h^{(k-1)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \le c\int_0^t s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds, \quad h^{(l)}(0)=0 \ \ \forall l \le k-2, \quad 2\le k\le 6,$$

*and*

$$\left\|h^{(k-1)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \le c\int_0^t s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds, \quad k=1.$$

证明。考虑 $\mu \notin \mathbb{N}$ 的情况，因为如果 $\mu \in \mathbb{N}$，则结论显然成立。利用函数 $h(t)$ 的 $l$ 阶导数的莱布尼茨公式，我们得到

$$h^{(l)}(t) = \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-j)}t^{\mu-j}\left(\frac{t^{k-1-l+j}}{\Gamma(k-l+j)} * f^{(k)}(t)\right) \quad \forall l \le k-1. \tag{5.1}$$

情形 1： $2\le k\le 6$。由 (5.1) 可得

$$\begin{aligned}\left\|h^{(l)}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} &\le c\sum_{j=0}^{l} t^{\mu-j}\int_0^t s^{k-1-l+j}\left\|f^{(k)}(t-s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\le c\sum_{j=0}^{l} t^{\mu-j}\int_0^t t^{k-1-l+j}\left\|f^{(k)}(t-s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds \le ct^{\mu+k-1-l} \ \ \forall l\le k-2,\end{aligned}$$

以及 $h^{(l)}(0)=0, \forall l\le k-2, k\ge 2$。

接下来我们估计 $h^{(k-1)}(0)$ 的界。由上述不等式可知，对于 $\mu>0$，有 $h^{(k-1)}(0)=0$。对于 $-1<\mu<0$，利用 (5.1) 可得

$$\begin{aligned}\left\|h^{(k-1)}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} &\le c\sum_{j=0}^{k-1} t^{\mu-j}\int_0^t t^{j}\left\|f^{(k)}(t-s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &= c\sum_{j=0}^{k-1}\int_0^t t^{\mu}\left\|f^{(k)}(t-s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds \le c\int_0^t s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds.\end{aligned}$$

情况 2： $k=1$。由上述不等式，可得所需结果。 □

LEMMA 5.4. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为方程 (2.4) 和 (2.7) 的解。设 $v=0$、 $G(t)=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \left[t^{\mu}\left(\frac{t^{k-1}}{k-1}()! * f^{(k)}(t)\right)\right]$、 $\mu>-1$ 以及 $f\in C^{k-1}([0,T];\ L^2(\Omega))$,

$$\int_0^t \left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds<\infty, \ \ \int_0^t s^{\frac{\mu-1}{2}}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds<\infty$$

*and*

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds<\infty.$$

那么，对任意 $t_n>0$，以下误差估计成立

$$\begin{aligned}&\|V(t_n)-V^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c\tau^k\left(t_n^{\alpha+\mu-1}\int_0^{t_n}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds + t_n^{\alpha+\frac{\mu-1}{2}}\int_0^{t_n} s^{\frac{\mu-1}{2}}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds\right. \\ &\quad \left.+\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} ds\right), \quad \mu>-1.\end{aligned}$$

证明。我们考虑 $\mu \notin \mathbb{N}$ 的情况，因为若 $\mu \in \mathbb{N}$，结论显然成立。令$h(t)$ $= t^{\mu}\left(\frac{t^{k-1}}{k-1()!} * f^{(k)}(t)\right)$。由引理 5.3 可得

$$G(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * h(t) = \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!}h^{(k-1)}(0) + \frac{t^{k+m-1}}{(k+m-1)!} * h^{(k)}(t).$$

根据定理4.4和引理3.7，可得

$$\|V(t_n)-V^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c\tau^k\left(t_n^{\alpha-1}\left\|h^{(k-1)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\left\|h^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}ds\right)$$

with

$$h^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-j)}t^{\mu-j}\left(\frac{t^{j-1}}{\Gamma(j)} * f^{(k)}(t)\right) + t^{\mu}f^{(k)}(t).$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\left\|s^{\mu-j}\left(s^{j-1} * f^{(k)}(s)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\quad= \sum_{j=1}^{k}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}s^{\frac{\mu-1}{2}}\left\|\int_0^{s}s^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{(s-w)^{j-1}}{s^{j-1}}f^{(k)}(w)dw\right\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\quad\leq k\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}s^{\frac{\mu-1}{2}}\int_0^{t_n}w^{\frac{\mu-1}{2}}\left\|f^{(k)}(w)\right\|_{L^2(\Omega)}dwds \\
&\quad= kB(\alpha,(\mu+1)/2)t_n^{\alpha+\frac{\mu-1}{2}}\int_0^{t_n}w^{\frac{\mu-1}{2}}\left\|f^{(k)}(w)\right\|_{L^2(\Omega)}dw, \quad -1<\mu<0,
\end{aligned}$$

其中我们使用

$$\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}s^{\frac{\mu-1}{2}}ds = t_n^{\alpha+\frac{\mu-1}{2}}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}s^{\frac{\mu-1}{2}}ds = B\left(\alpha,\frac{\mu+1}{2}\right)t_n^{\alpha+\frac{\mu-1}{2}}.$$

类似地，我们可以估计

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\left\|s^{\mu-j}\left(s^{j-1} * f^{(k)}(s)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\quad\leq kB(\alpha,\mu)t_n^{\alpha+\mu-1}\int_0^{t_n}\left\|f^{(k)}(w)\right\|_{L^2(\Omega)}dw, \quad \mu>0.
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\left\|s^{\mu}f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}ds \leq \int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}ds, \quad \mu>-1,$$

and

$$\begin{aligned}
t_n^{\alpha-1}\left\|h^{(k-1)}(0)\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq ct_n^{\alpha-1}\int_0^{t_n}s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\leq c\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}s^{\mu}\left\|f^{(k)}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}ds, \ \mu>-1.
\end{aligned}$$

由三角不等式可得所需结果。 □

THEOREM 5.5. 设 $V(t_n)$ 和 $V^n$ 分别为 (2.4) 和 (2.7) 的解。设 $v \in L^2(\Omega)$、 $g(t) = t^\mu f(t)$、$\mu > -1$ 和 $f \in C^{k-1}([0,T];\, L^2(\Omega))$,

$$\int_0^t \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty, \quad \int_0^t s^{\frac{\mu-1}{2}} \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty$$

*and*

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\mu \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds < \infty.$$

则对任意 $t_n > 0$, 以下误差估计成立

$$\begin{aligned}
&\|V^n - V(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|J_v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=0}^{k-1} \left( c\tau^{\mu+j+m+1} t_n^{\alpha-m-1} + c\tau^k t_n^{\alpha+\mu+j-k} \right) \left\| f^{(j)}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + c\tau^k \left[ t_n^{\alpha+\mu-1} \int_0^{t_n} \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds + t_n^{\alpha+\frac{\mu-1}{2}} \int_0^{t_n} s^{\frac{\mu-1}{2}} \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} s^\mu \left\| f^{(k)}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \right]
\end{aligned}$$

其中$\|J_v\|_{L^2(\Omega)}$ 见 (3.11)。

证明。根据定理4.4、引理 5.4，以及定理 3.8 中对初始数据 $v$ 的类似处理，可得所需结果。 □

6. 数值实验。为简洁起见，我们主要采用 (2.7) 中的 ID$m$- BDF6 方法模拟模型 (1.1)，因为对于 ID$m$-BDF$k$ ，当 $1 \le m \le k < 6$ 时也可得到类似的数值结果。我们采用切比雪夫–高斯–洛巴托点 [24]，通过谱配置法对空间方向进行离散。使用离散 $L^2$-范数 ($||\cdot||_{l_2}$) 衡量终止时刻的数值误差，例如 $t = t_N = 1$。由于解析解未知，数值结果的收敛阶通过以下方式计算

$$\text{Convergence Rate} = \frac{\ln\left( ||u^{N/2} - u^N||_{l_2} / ||u^N - u^{2N}||_{l_2} \right)}{\ln 2}.$$

所有数值实验均使用 Julia 1.8.5 编写。一个重要结论是，为了减少计算中的舍入误差，必须使用多精度浮点运算。

设 $T = 1$ and $\Omega = (-1, 1)$。考虑以下两个例子:
(a) $v(x) = \sin(x)\sqrt{1-x^2}$ 和 $g(x,t) = 0$.(b) $v(x) = \sin(x)\sqrt{1-x^2}$ 和 $g(x,t) = ($ $1 + t^\mu) \circ (e^t + 1)e^x \left(1 + \chi_{(0,1)}(x)\right.$ $\left.\right)$.

这里，式（2.3）中的 $G(x,t)$、 $= J^m g(x,t)$ 和 $= \frac{t^{m-1}}{\Gamma\, m}() * g(x,t)$ 由 JacobiGL 算法 [1, 9], 计算得出。该算法生成 Gauss-Lobatto 积分的节点和权重，其权函数为 $(1-t)^\mu$ 或 $($ $1+t)^\mu$。

表6.1显示，ID$m$-BDF$k$ 在 $k = 6$ 下恢复了高阶收敛，这与定理 3.8一致。事实上，表6.1表明，对于奇数 $m$，牛顿-科特斯求积公式 $\mathcal{O}\left(\tau^{\min\{m+1,k\}}\right)$ 具有最优误差估计；对于偶数 $m$，则为 $\mathcal{O}\left(\tau^{\min\{m+2,k\}}\right)$。

表6.1：情形（a）：ID$m$-BDF6 的收敛阶。

| $m$ | $\alpha=0.3$ | | | $\alpha=0.7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N=200$ | $N=400$ | $N=800$ | $N=200$ | $N=400$ | $N=800$ |
| 1 | 2.8649e-08 | 7.1623e-09 | 1.7905e-09 | 5.8503e-08 | 1.4626e-08 | 3.6565e-09 |
| | | 1.9999 | 2.0000 | | 1.9999 | 2.0000 |
| 2 | 3.4067e-13 | 2.0551e-14 | 1.2734e-15 | 1.0704e-12 | 6.3277e-14 | 3.9010e-15 |
| | | 4.0511 | 4.0124 | | 4.0804 | 4.0197 |
| 3 | 8.5708e-14 | 6.4330e-15 | 4.1808e-16 | 2.2754e-13 | 1.9161e-14 | 1.2708e-15 |
| | | 3.7358 | 3.9436 | | 3.5699 | 3.9143 |
| 4 | 2.9657e-14 | 4.4445e-16 | 6.8021e-18 | 1.3125e-13 | 1.9603e-15 | 2.9951e-17 |
| | | 6.0602 | 6.0298 | | 6.0651 | 6.0323 |
| 5 | 3.6694e-14 | 5.4991e-16 | 8.4162e-18 | 1.5877e-13 | 2.3712e-15 | 3.6228e-17 |
| | | 6.0602 | 6.0298 | | 6.0652 | 6.0323 |
| 6 | 4.3721e-14 | 6.5521e-16 | 1.0027e-17 | 1.8626e-13 | 2.7815e-15 | 4.2496e-17 |
| | | 6.0602 | 6.0298 | | 6.0652 | 6.0324 |

表 6.2：情况 (b) 下采用卷积时 ID$m$-BDF6 的收敛阶。

| $m$ | $\alpha=0.3,\mu=-0.4$ | | | $\alpha=0.7,\mu=0.3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N=200$ | $N=400$ | $N=800$ | $N=200$ | $N=400$ | $N=800$ |
| 1 | 2.8489e-08 | 7.1310e-09 | 1.7848e-09 | 5.8505e-08 | 1.4626e-08 | 3.6565e-09 |
| | | 1.9982 | 1.9982 | | 2.0000 | 2.0000 |
| 2 | 5.2663e-12 | 4.2479e-13 | 3.4655e-14 | 1.3146e-12 | 8.0904e-14 | 5.0214e-15 |
| | | 3.6319 | 3.6156 | | 4.0222 | 4.0100 |
| 3 | 1.4691e-13 | 7.0242e-15 | 4.2499e-16 | 2.4212e-13 | 1.8753e-14 | 1.2629e-15 |
| | | 4.3865 | 4.0468 | | 3.6905 | 3.8923 |
| 4 | 1.2361e-13 | 1.8343e-15 | 2.7925e-17 | 2.6971e-13 | 4.0850e-15 | 6.2856e-17 |
| | | 6.0743 | 6.0375 | | 6.0449 | 6.0221 |
| 5 | 1.5665e-13 | 2.3252e-15 | 3.5406e-17 | 3.3626e-13 | 5.0941e-15 | 7.8391e-17 |
| | | 6.0187 | 6.0093 | | 6.0446 | 6.0220 |
| 6 | 1.8965e-13 | 2.8153e-15 | 4.2870e-17 | 4.0290e-13 | 6.1045e-15 | 9.3946e-17 |
| | | 6.0739 | 6.0372 | | 6.0444 | 6.0219 |

表 6.3：含乘积的情况 (b)：ID$m$-BDF6 的收敛阶

| $m$ | $\alpha=0.3,\mu=-0.4$ | | | $\alpha=0.7,\mu=0.3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N=200$ | $N=400$ | $N=800$ | $N=200$ | $N=400$ | $N=800$ |
| 1 | 5.6978e-06 | 1.8615e-06 | 6.0971e-07 | 7.0952e-07 | 1.7474e-07 | 4.3146e-08 |
| | | 1.6138 | 1.61033 | | 2.0216 | 2.0179 |
| 2 | 4.7855e-09 | 7.9295e-10 | 1.3108e-10 | 6.1995e-11 | 5.8815e-12 | 5.7317e-13 |
| | | 2.5933 | 2.59671 | | 3.3979 | 3.35914 |
| 3 | 1.7095e-11 | 1.3407e-12 | 1.0870e-13 | 2.5149e-12 | 1.7869e-13 | 1.1382e-14 |
| | | 3.6725 | 3.62449 | | 3.8149 | 3.97267 |
| 4 | 9.9716e-13 | 1.4047e-14 | 1.7852e-16 | 7.2236e-13 | 1.0853e-14 | 1.6622e-16 |
| | | 6.1494 | 6.2981 | | 6.0565 | 6.02881 |
| 5 | 1.3010e-12 | 1.9509e-14 | 2.9866e-16 | 9.2805e-13 | 1.3945e-14 | 2.1371e-16 |
| | | 6.0593 | 6.02948 | | 6.0562 | 6.02803 |
| 6 | 1.5714e-12 | 2.3564e-14 | 3.6077e-16 | 1.1330e-12 | 1.7023e-14 | 2.6085e-16 |
| | | 6.0592 | 6.02938 | | 6.0565 | 6.02815 |

对于次扩散模型 (1.1)，可能涉及低正则性或弱奇异源项 [8, 16, 22, 23]，，例如，

$$g(x,t)= \ t^{\mu}*f(x,t) \ \text{ or } g(x,t)=t^{\mu}f(x,t), \ \ \mu>-1.$$

表6.4：情况 (b)（含乘积）：几种方法的比较。

| 方案 | $\alpha = 0.3, \mu = -0.4$ | | | $\alpha = 0.7, \mu = 0.3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N = 200$ | $N = 400$ | $N = 800$ | $N = 200$ | $N = 400$ | $N = 800$ |
| BDF2 | 1.9996e-03 | 1.2957e-03 | 8.4321e-04 | 3.5185e-04 | 1.7321e-04 | 8.5275e-05 |
| | | 0.6259 | 0.6198 | | 1.0224 | 1.0223 |
| Corr-BDF2 | NaN | NaN | NaN | 2.6235e-05 | 1.1807e-05 | 5.0842e-06 |
| | | — | — | | 1.1517 | 1.2156 |
| ID2-BDF2 | 4.7799e-05 | 1.1962e-05 | 2.9920e-06 | 4.6997e-05 | 1.1794e-05 | 2.9541e-06 |
| | | 1.9985 | 1.9992 | | 1.9945 | 1.9972 |
| BDF4 | 2.0020e-03 | 1.2964e-03 | 8.4336e-04 | 3.5870e-04 | 1.7493e-04 | 8.5705e-05 |
| | | 0.6269 | 0.6202 | | 1.0360 | 1.0292 |
| 校正四阶后向差分公式 | NaN | NaN | NaN | NaN | NaN | NaN |
| | | — | — | | — | — |
| ID4-BDF4 | 1.8228e-09 | 1.1510e-10 | 7.2311e-12 | 2.7000e-09 | 1.6848e-10 | 1.0522e-11 |
| | | 3.9850 | 3.9926 | | 4.0023 | 4.0011 |

在这种情况下，包括高阶BDF格式的校正项 [12, 25], 在内的许多时间步进方法都可能出现严重的阶数降低，见表6.4，因为要求函数 $g \in C^{k-1}([0,T];\, L^2(\Omega))$。事实上，对于低正则性源项 $g(x,t) = t^{\mu}$, $\mu > 0$，BDF2校正（Corr-BDF2）格式以 $\mathcal{O}(\tau^{1+\mu})$阶收敛，见 [31]中的引理3.2。为弥补这一空缺，采用ID$m$-BDF$k$ 方法可以恢复所需的 $k$ 阶收敛率，该方法的性质由定理5.2和定理5.5刻画，分别见表6.2和表6.3。

7. 结论。亚扩散模型可能包含奇异源项，而许多时间步进方法会因此出现严重的阶数降低。在本文中，我们首先在源函数具有温和正则性的条件下，推导出 $k$阶牛顿-科特斯求积公式$\mathcal{O}\left(\tau^{\min\{m+1,k\}}\right)$ 对于奇数 $m$和 $\mathcal{O}\left(\tau_{\min}^{\{m+2,k\}}\right)$ 对于偶数 $m$, $1 \le m \le k \le 6$的最优误差估计。随后，在源项s具有一定奇异性的条件下，通过平滑方法充分建立了所需的 $k$阶收敛率。为非线性分数阶模型设计数值算法是一个有趣的问题。

## 参考文献

[1] M.H. Chen and W.H. Deng, *High order algorithms for the fractional substantial diffusion equation with truncated Lévy flights*, SIAM J. Sci. Comput., 37 (2015), 第 890–917 页。[2] M.H. Chen, S.Z. Jiang, and W.P. Bu, *Two L1 schemes on graded meshes for fractional Feynman-Kac equation*, J. Sci. Comput., 88 (2021), 第 58 号。

[3] M.H. Chen, W.Y. Qi, J.K. Shi, J.M. Wu, *A sharp error estimate of piecewise polynomial collocation for nonlocal problems with weakly singular kernels*, IMA J. Numer. Anal.（2021），第 41 卷，第 3145–3174 页。[4] M.H. Chen, J.K. Shi, and Z.z. Zhou, *Modified BDF2 schemes for subdiffusion models with a singular source term*, arXiv: 2207.08447。[5] M.H. Chen, F. Yu, and Z. Zhou, *Backward difference formula: The energy technique for subdiffusion equation*, J. Sci. Comput., 87 (2021), 第 94 卷，论文编号：。[6] E. Cuesta, Ch. Lubich, and C. Palencia, *Convolution quadrature time discretization of fractional diffusion-wave equations*, Math. Comput., 75 (2006), 第 673–696 页。

[7] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, 施普林格，2010。[8] T.J. Doerries, A.V. Chechkin, R. Schumer, and R. Metzler, *Rate equations, spatial moments and concentration profiles for mobile-immobile models with power-law and mixed waiting time distributions*, Phys. Rev. E, 105 (2022), 014105。

[9] J.S. Hesthaven and T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, 施普林格，2007。

[10] B. Jin, *Fractional Differential Equations: An Approach via Fractional Derivatives*, 施普林格，2021。[11] B. Jin, R. Lazarov, and Z. Zhou, *An analysis of the L1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data*, 36 2016 197 221, IMA J. Numer. Anal.，（），第 – 页。[12] B. Jin, B.Y. Li, and Z. Zhou, *Correction of high-order BDF convolution quadrature for fractional evolution equations*, 39 2017 3129 3152, SIAM J. Sci. Comput.，（），第 A–A 页。[13] N. Kopteva, *Error analysis of an L2-type method on graded meshes for a fractional-order parabolic problem*, 90 2021 19 40, Math. Comp.，（），第 – 页。[14] H.-L. Liao, D. Li, and J. Zhang, *Sharp error estimate of the nonuniform L1 formula for linear reaction-subdiffusion equations*, 56 2018 1112 1133, SIAM J. Numer. Anal.，（），第 – 页。[15] Ch. Lubich, I.H. Sloan, and V. Thomée, *Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term*, 65 1996, Math. Comp.，（），第 1–17 页。[16] B. Maryshev, M. Joelson, D. Lyubimov, T. Lyubimova, and M. Néel, *Non Fickian flux for advection-dispersion with immobile periods*, 42 2009 115001, J. Phys. A: Math. Theor.，（）。[17] W. McLean, K. Mustapha, R. Ali, and O. Knio, *Well-posedness of time-fractional advection-diffusion-reaction equations*, 22 2019 918 944, Fract. Calc. Appl. Anal.，（），第 – 页。[18] R. Metzler and J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, 339 2000 1 77, Phys. Rep.，（），第 – 页。[19] K. Mustapha, *Time-stepping discontinuous Galerkin methods for fractional diffusion problems*, 130 2015 497 516, Numer. Math.，（），第 – 页。[20] K. Mustapha, *An L1 approximation for a fractional reaction-diffusion equation a second-order error analysis over time-graded meshes*, 58 2020 1319, SIAM J. Numer. Anal.，（），第 – 1338 页。[21] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, 学术出版社，1999。[22] R. Schumer, D.A. Benson, M.M. Meerschaert, and B. Baeumer, *Fractal mobile/immobile solute transport*, 39 2003 1 12, Water Resour. Res.，（），第 – 页。[23] R. Schumer, M.M. Meerschaert, and B. Baeumer, *Fractional advection-dispersion equations for modeling transport at the Earth surface*, 114 2009 00 07, J. Geophys. Res.，（），F A。[24] J. Shen, T. Tang, and L. Wang, *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, 施普林格，2011。[25] J.K. Shi and M.H. Chen, *Correction of high-order BDF convolution quadrature for fractional Feynman-Kac equation with Lévy flight*, 85 2020 28, J. Sci. Comput.，（），论文编号：。[26] J.K. Shi, M.H. Chen, Y.B. Yan, and J.X. Cao, *Correction of high-order $L_k$ approximation for subdiffusion*, 93 2022 31, J. Sci. Comput.，（），论文编号：。[27] M. Stynes, E. O'riordan, and J.L. Gracia, *Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation*, 55 2017, SIAM J. Numer. Anal.，（），第 1057–1079 页。[28] E. Süli and D.F. Mayers, *An Introduction Numerical Analysis*, 剑桥大学出版社，2003。[29] V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, 施普林格，2006。[30] Y.Y. Wang, Y.B. Yan, and Y. Yang, *Two high-order time discretization schemes for subdiffusion problems with nonsmooth data*, 23 2020 1349 1380, Fract. Calc. Appl. Anal.，（），第 – 页。[31] K. Wang and Z. Zhou, *High-order time stepping schemes for semilinear subdiffusion equations*, 58 2020 3226 3250, SIAM J. Numer. Anal.，（），第 – 页。[32] Y.B. Yan, M. Khan, and N.J. Ford, *An analysis of the modified L1 scheme for time-fractional partial differential equations with nonsmooth data*, 56 2018, SIAM J. Numer. Anal.，（），第 210–227 页。[33] H. Zhou and W.Y. Tian, *Two time-stepping schemes for sub-diffusion equations with singular source terms*, 92 2022 70, J. Sci. Comput.，（），论文编号：。