arXiv:2305.03389v1 [math.OA] 5 May 2023

从射影表示到通过量子化得到五边形上同调

VICTOR GAYRAL 和 VALENTIN MARIE

Abstract. 给定一个局部紧群 $G = Q \ltimes V$，其中 V 是阿贝尔群，并且 Q 在庞特里亚金对偶群 V 上的作用有一个满测度的自由轨道，我们构造了一族酉对偶二余循环 Ω_ω（亦称非形式 Drinfel'd 扭曲），其等价类$[\Omega_\omega] \in H^2(\hat{G}, \mathbb{T})$ 由上同调类 $[\omega] \in H^2(Q, \mathbb{T})$ 参数化。我们证明，相应的局部紧量子群同构于与对偶半直积 $Q \ltimes V$ 的一对子群相关联的余循环双交叉积量子群，这对子群均同构于 Q；其五边形余循环 Θ_ω 可用群余循环 ω 显式表示。

Contents

1. 引言 1 2. 一般性 2 2.1. 符号约定 2 2.2. 伽罗瓦对象 3 2.3. 对偶余循环 4 2.4. 等变量子化 5 2.5. 余循环双交叉积与五边形上同调 6 2.6. 一类群 7 2.7. 真表示的 Kohn-Nirenberg 量子化 8 3. 射影表示的 Kohn-Nirenberg 量子化 9 3.1. 一类射影表示 9 3.2. 量子化映射 11 3.3. 对偶 2-余循环 12 3.4. 星积 16 3.5. 乘法酉算子 19 参考文献 24

1. Introduction

尽管冯·诺伊曼代数框架[12, 13] 下的局部紧量子群理论在很大程度上已经发展得相当成熟，但如何构造既非紧致又非离散的实例这一重要问题仍然悬而未决。主要障碍在于，与紧致情形不同，对于非紧李群而言，李双代数量子化的代数层面在解析框架下并不足够。早在一段时间以前，Koelink 和 Kustermans [11] 以及 Woronowicz [20, 21]的研究就已经证明了这一点。

De Commer [7] 在这一方向上取得了重大进展，其方法是将局部紧群的量子化纳入量子群的解析框架。更确切地说，De Commer 积极地解决了长期存在的一个问题，即变形冯·诺依曼双代数 $(W^*(G), \Omega\Delta(.)\Omega^*)$ 是否存在左不变和右不变的 $\hat{}$ 权。这里，G 是一个局部紧群，而 $\Omega \in W^*(G \times G)$ 是一个满足 2-余循环方程的酉卷积算子。

$$(\Omega \otimes 1)(\hat{\Delta} \otimes \iota)(\Omega) = (1 \otimes \Omega)(\iota \otimes \hat{\Delta})(\Omega).$$

这种算子 Ω 称为对偶酉 2-余循环，这与群 2-余循环类似；群 2-余循环可定义为 $L^\infty(G\times G)$ 中满足 $(\omega\otimes 1)(\Delta\otimes\iota)(\omega) = (1\otimes\omega)(\iota\otimes\Delta)(\omega)$ 的酉元。

ˆ De Commer 构造 $(W^*(G), \Omega\Delta(.)\Omega^*)$ 的不变权时，采用了 G-伽罗瓦对象的结构作为关键工具。这是群 G 对冯·诺伊曼代数的一种适当的自由遍历作用概念，可与对偶酉 2-余循环相联系。

然而，为给定的局部紧群构造对偶酉 2-余循环，本身就是一项不简单的任务。首先，这是因为群的表示论G 在此处发挥了作用。例如， [6] 证明，若群冯·诺伊曼代数 $W^*(G)$ 是 I 型因子（等价地，若 G 只有一个不可约平方可积表示 $[\pi]$ 的等价类），则 G 上存在一个（典范的）对偶酉 2-余循环。要得到该等价类的具体代表，我们需要左正则表示 λ 与张量积表示 $\pi\otimes\pi^c$ 和逆共轭表示π^c之间的显式酉等价。这种交织算子称为 G 的酉等变量子化，因为它以 G-等变的方式，将 G 上的平方可积函数映射为π表示空间上的希尔伯特–施密特算子。更一般地，设 π 是 G 的一个射影表示（始终假设其不可约且平方可积），对应的 2-余循环为 $\omega\in Z^2(Q, \mathbb{T})$。 [6] 还证明，若扭曲群冯·诺伊曼代数 $W^*(G,\omega)$ 是 I 型因子，且存在酉等变量子化，则 G 上也存在对偶酉 2- 余循环。无论在射影表示还是真表示的情形下，剩下的主要任务都是构造这样的量子化映射。

对于半直积 $G = Q\ltimes V$，其中 V 为阿贝尔群，且 Q 拥有一个满测度的自由对偶轨道，不难看出，群冯·诺伊曼代数 $W^*(G)$ 确实是一个 I 型因子。 [6] 的一项重要结果是，可以利用自对偶阿贝尔群 $V\times V$ 的科恩-尼伦伯格量子化，构造 G 的酉等变量子化，从而得到一个显式的对偶酉 2-余循环 Ω。此外，变形量子群 $(W^*(G), \Omega\hat{}\Delta(.)\Omega^*)$ 同构于一个双交叉积量子群 $[2, 4, 18],$，它基于对偶半直积 $Q\ltimes V$ 的一对匹配子群构造，这两个子群均与 Q 同构。

本文中，我们证明，如果 ω 是 Q 上任意一个非平凡的 2-余循环，并以一种自然的方式将其视为 G 上的非平凡 2-余循环，那么扭曲群冯·诺伊曼代数 $W^*(G,\omega)$ 仍然是一个 I 型因子。借鉴泛函方法中的科恩-尼伦伯格量子化，我们构造了 G 的一个酉等变量子化，并计算出相应的对偶酉 2-余循环 Ω_ω。我们的主要结果是，变形量子群 $(W^*(G), \Omega_\omega\Delta(.)\Omega_\omega^*)$ 现在同与之关联的余循环双交叉积量子群 $[18],$ 同构，该量子群对应于相同的匹配对，并具有一个非平凡的五边形 2-余循环 Θ_ω （定义见下文）。此外，我们证明映射 $\omega\mapsto\Theta_\omega$ 诱导了一个从可测群上同调到五边形上同调的群同态，并且该映射在连续群上同调上的限制是单射。

2. Generalities

2.1. 符号约定。我们采用 $[6],$ 中的所有约定和符号，唯一的例外是：这里复希尔伯特空间上的内积在右侧线性。下面回顾最重要的记号。给定一个局部紧群 G （总是假设其满足第二可数性），我们记$L^p(G)$、 $p\in[1,\infty]$为与左不变哈尔测度 dg相对应的 L^p-空间。令 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G 的连续自同构群。模函数 $|.|_G : \mathrm{Aut}(G)\to\mathbb{R}_+^*$ 和模函数 $\Delta_G : G\to\mathbb{R}_+^*$ 由以下关系定义：

$$\int_G f(\varphi(g))dg = |\varphi|_G^{-1}\int_G f(g)dg,\quad \forall f\in C_c(G),\ \forall\varphi\in\mathrm{Aut}(G),$$
$$\int_G f(gh)dg = \Delta_G(h)^{-1}\int_G f(g)dg,\quad \forall f\in C_c(G),\ \forall h\in G.$$

对于 $f\in L^\infty(G)$，定义 ˇ $f\in L^\infty(G)$ 为

$$\check{f}(g) := f(g^{-1}).$$

单位 G 在 $L^2(G)$ 上的左正则表示和右正则表示分别定义为

$$(\lambda_g f)(h) := f(g^{-1}h), \quad (\rho_g f)(h) := \Delta_G(g)^{1/2}\, f(hg)\,, \qquad \forall g,h \in G, \quad \forall f \in L^2(G).$$

$L^\infty(G)$ 的模共轭 J 和 $W^*(G)$ 的模共轭 $\hat{}J := \lambda(G)''$ 由下式给出

$$Jf := \bar{f}, \quad \hat{J}f = \Delta_G^{-1/2}\bar{\check{f}}, \quad \forall f \in L^2(G).$$

我们还将考虑酉算子

$$\mathcal{J} := \hat{J}J.$$

G及其对偶群的乘法酉元 W、$\hat{}W$: $L^2(G\times G) \to L^2(G\times G)$ 定义为

$$(Wf)(g,h) := f(g,g^{-1}h), \quad (\hat{W}f)(g,h) := f(hg,h).$$

这里，我们关注半直积 $G = Q \ltimes V$，其中 V 是阿贝尔群， Q 是 Aut(V) 的闭子群。将 Aut(V) 在 V 上的作用记作并置， $Q \ltimes V$ 的群运算为

$$(q,v)(q',v') = (qq', v + qv'), \quad \forall q,q' \in Q,\ \forall v,v' \in V.$$

在这种情况下， G上的左不变哈尔测度和模函数满足以下公式:

$$d(q,v) = \frac{dqdv}{|q|_V}, \quad \Delta_G(q,v) = \frac{\Delta_Q(q)}{|q|_V}.$$

$\hat{}$ 设 V为 V的庞特里亚金对偶群。为了在 V和 V上都使用加法记号，将对偶配对 $\hat{}V \times V \to \mathbb{T}$ 记作 $e^{i\langle \xi,\ v\rangle}$, $\xi \in \hat{}V$, $v \in V$较为方便。我们并不声称这里存在指数函数，这只是一种记号。我们还设$e^{-i\langle \xi,\ v\rangle} := e^{i\langle \xi,\ v\rangle} = e^{i\langle -\xi,\ v\rangle} = e^{i\langle \xi,\ -v\rangle}$。$\hat{}V$ 上的哈尔测度 $d\xi$ 经过归一化，使得傅里叶变换 $\mathcal{F}_V$:

$$(\mathcal{F}_V f)(\xi) := \int_V e^{-i\langle \xi, v\rangle}\, f(v)\, dv,$$

变为从 $L^2(V)$ 到 $L^2(\hat{}V)$ 的酉算子。按照这一约定，我们有如下关系

$$(\mathcal{F}_V f)(\xi) = (\mathcal{F}^*_{\hat{V}} f)(-\xi)\,, \quad \forall f \in L^2(V), \quad \forall \xi \in \hat{V}.$$

我们还用 $\mathcal{F}_{\hat{V}}$: $L^2(G) \to L^2(Q\times \hat{}V, |q|^{-1}dqd\xi)$ 表示（酉算子的）偏傅里叶变换。 $q \in Q$ 在 $\xi \in \hat{}V$ 上的对偶作用记为 $q^\flat\xi$，其定义为

$$e^{i\langle q^\flat\xi, v\rangle} = e^{i\langle \xi, q^{-1}v\rangle}\,, \quad \forall v \in V,\ \forall \xi \in \hat{V}\,, \forall q \in Q.$$

$\hat{}$ 我们还有 V 的模函数与 V 的模函数之间的下述关系。 :

$$|q^\flat|_{\hat{V}} = |q|_V^{-1}, \quad \forall q \in Q.$$

我们始终将函数 $f \in L^\infty(G)$ 视为在 $L^2(G)$ 上乘以该函数的有界算子。

2.2. 伽罗瓦对象。伽罗瓦对象这一概念源于霍普夫代数理论，后来由 De Commer [7] 将其推广到局部紧量子群的算子代数框架 [12, 13]。最重要的是要知道，给定一个局部紧量子群的伽罗瓦对象，就可以构造出另一个局部紧量子群的伽罗瓦对象（通过相对于该伽罗瓦对象进行反射）。非阿贝尔群的伽罗瓦对象是本文唯一考虑的情形，它们本身已经非常重要，因为它们能够用于构造真正的局部紧量子群（即既非交换也非余交换的局部紧量子群）。

设 G是一个局部紧群。一个 G-Galois 对象是一个二元组 $(\mathcal{N},\beta)$，其中 $\mathcal{N}$是一个冯·诺伊曼代数，且 β: $G \to$ Aut($\mathcal{N}$) 是满足以下三个性质的作用。

(1) 遍历性。不变向量归结为标量:

$$\{a \in \mathcal{N} : \beta_g(a) = a,\ \forall g \in G\} = \mathbb{C}\, 1_{\mathcal{N}}.$$

(2) 可积性。典范权 $\varphi\colon \mathcal{N}_+ \to [0,+\infty]$，定义为

$$\int_G \beta_g(a)dg = \varphi(a)\,1_{\mathcal{N}}, \quad a \in \mathcal{N}_+, \tag{2.1}$$

是半有限的。

(3) 酉性。记 $\Lambda\colon \mathfrak{N}_\varphi = \{a \in \mathcal{N}\colon \varphi(a^*a) < \infty\} \to L^2(\mathcal{N},\varphi)$ 为权 φ 的 GNS 映射，则等距伽罗瓦映射

$$\mathcal{G}\colon L^2(\mathcal{N},\varphi)\otimes L^2(\mathcal{N},\varphi) \to L^2(G; L^2(\mathcal{N},\varphi)),\ \ \mathcal{G}\big(\Lambda(a)\otimes\Lambda(b)\big)(g) = \Lambda(\beta_g(a)b), \tag{2.2}$$

是满射。

G-伽罗瓦对象中最简单的类型出现在 $\mathcal{N} \simeq B(\mathcal{H})$ 时，其中 $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间。此时我们称之为 I-因子型 G-伽罗瓦对象，并以 $\mathrm{Gal}_I(G)$ 表示这类伽罗瓦对象的同构类集合（见下文）。在这种情况下，必有$\beta = \mathrm{Ad}\,\pi$，其中 π 是 $\mathcal{H}$ 上的一个酉、不可约、平方可积射影表示，作用于G。这里我们不采用群同态 $G \to PU(\mathcal{H})$，而是倾向于将射影表示直接视为一个博雷尔映射 $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$，满足 $\pi(g_1)\pi(g_2) = \omega_\pi(g_1,g_2)\pi(g_1g_2)$，其中 ω_π 是 G 上取值于 $\mathbb{T}$ 的博雷尔 2- 余循环。注意，作用 $\mathrm{Ad}\,\pi$ 的遍历性和可积性分别等价于射影表示 π 的不可约性和平方可积性（见 [6, 注 2.2]）。此外，由 [6, 定理 2.4] 可知，伽罗瓦映射 (2.2) 是酉算子，当且仅当扭曲群冯·诺伊曼代数 $W^*(G,\omega_\pi)$ 是一个 I 型因子。更确切地，定义 $H^2_I(G,\mathbb{T})$ 为满足 $W^*(G,\omega)$ 是 I 型因子的类 $[\omega] \in H^2(G,\mathbb{T})$ 的集合（属于可测上同调 [15]），由 [6, 定理 2.4] 可得同构

$$\mathrm{Gal}_I(G) \ \longrightarrow\ H^2_I(G,\mathbb{T}), \quad [(B(\mathcal{H}),\mathrm{Ad}\,\pi)] \mapsto [\omega_\pi]. \tag{2.3}$$

请注意，$H^2_I(G,\mathbb{T})$ 未必是 $H^2(G,\mathbb{T})$ 的子群。事实上，在 Jondreville 研究的例子中，[10], 我们有 $[1] \notin H^2_I(G,\mathbb{T}) \neq \emptyset$。本文将描述一类例子，其中 $H^2_I(G,\mathbb{T})$ 包含 $H^2(G,\mathbb{T})$ 的一个子群。

对于一个 I-因子的 G-Galois 对象 $(B(\mathcal{H}),\mathrm{Ad}\ \pi)$，典范权 (2.1) 与射影表示 π 的 Duflo–Moore 形式度算子 D 之间满足以下关系：

$$\varphi = \mathrm{Tr}(D^{1/2}\cdot D^{1/2}). \tag{2.4}$$

这是因为 D 是 $\mathcal{H}$上满足以下条件的唯一正的、可能无界的非奇异算子

$$\int_G |\langle\zeta,\pi(g)\xi\rangle|^2 dg = \|D^{1/2}\xi\|^2\|\zeta\|^2 \ \text{ for all } \ \xi \in \mathrm{Dom}(D^{1/2}) \ \text{ and } \ \zeta \in \mathcal{H}.$$

关于真正表示，参见 [8] ；关于射影表示，参见 [1]。

2.3. 对偶余循环。本文关注这样的情形：与一个 I-因子的 G-Galois 对象 $(B(\mathcal{H}),\ \mathrm{Ad}\ \pi)$ 相关联的局部紧量子群，也可以描述为 G的对偶余循环变形。回顾一下，对偶酉 2-余循环（又称非形式德林费尔德扭曲）是满足下述关系的酉元 $\Omega \in W^*(G)\bar{\otimes}W^*(G)$:

$$(\Omega\otimes 1)(\hat{\Delta}\otimes\iota)(\Omega) = (1\otimes\Omega)(\iota\otimes\hat{\Delta})(\Omega). \tag{2.5}$$

余循环关系确保变形余乘法 $\Delta_\Omega := \Omega\Delta(.)\Omega^*$ 在 $\hat{}W^*(G)$ 上具有余结合性。关于 Δ_Ω 不变权的存在性问题，De Commer [7] 利用伽罗瓦对象给出了肯定的解决方案。与对偶酉 2-余循环 Ω 相关联的 G-伽罗瓦对象可描述如下（参见 [7, 第 5] 节和 [16, 第 4]节）。设 $\star_\Omega$ 为傅里叶代数 $A(G)$ 上的结合乘积（按照惯例，将其视为 $W^*(G)$ 的预对偶），定义为:

$$f_1 \star_\Omega f_2(g) := (f_1\otimes f_2)\big(\hat{\Delta}(\lambda_g)\Omega^*\big), \qquad \forall g \in G. \tag{2.6}$$

考虑巴拿赫代数 $(A(G),\star_\Omega)$ 在 $L^2(G)$ 上的如下表示：

$$\pi_\Omega : A(G) \to B(L^2(G)), \quad f \mapsto (f\otimes\iota)(\hat{W}\Omega^*). \tag{2.7}$$

该表示将右正则表示的伴随算子 $\mathrm{Ad}\,\rho$ 与左正则表示 λ 交织起来：

$$\mathrm{Ad}\,\rho_g\big(\pi_\Omega(f)\big) = \pi_\Omega(\lambda_g f), \quad \forall f\in A(G), \quad \forall g\in G.$$

令 $W^*(\hat{G},\Omega) := \pi_\Omega(A(G))''$。此记号自明，因为对于平凡余循环 $\Omega=1$，我们有 $\pi_1(f)=\check{f}$，因此 $W^*(\hat{G},1)=L^\infty(G)$。与对偶 2-余循环 Ω 相关联的 G-伽罗瓦对象由 $(W^*(\hat{G},\Omega),\mathrm{Ad}\,\rho)$ 给出。此伽罗瓦对象的典范权为：

$$\varphi\big(\pi_\Omega(f)^*\pi_\Omega(f)\big) = \|\check{f}\|_2^2 \quad \text{for all} \quad f\in A(G) \quad \text{such that} \quad \check{f}\in L^2(G), \tag{2.8}$$

且 φ 的 GNS 空间可与 $L^2(G)$ 识别，对应的 GNS 映射 $\Lambda:\mathfrak{N}_\varphi\to L^2(G)$ 由以下条件唯一确定：

$$\Lambda(\pi_\Omega(f)) = \check{f} \quad \text{for all} \quad f\in A(G) \quad \text{such that} \quad \check{f}\in L^2(G). \tag{2.9}$$

由此可见，根据 [7, 命题 5.1]，在同一化 $L^2(\mathcal{N},\varphi)\simeq L^2(G)$ 下，G-伽罗瓦对象 $(W^*(G,\Omega),\mathrm{Ad}\,\rho)$ 的等距 $\hat{}$ 伽罗瓦映射由下式给出。

$$\mathcal{G} = \hat{W}\Omega^*.$$

因此，伽罗瓦映射是酉算子。我们在 [7, 命题 5.4], 中证明的另一个非常重要的公式，涉及变形量子群 $(W^*(G)\ \Delta_\Omega)$ 的乘法酉算子：

$$\hat{W}_\Omega = (\tilde{J}\otimes\hat{J})\,\Omega\,\hat{W}^*\,(J\otimes\hat{J})\,\Omega^*. \tag{2.10}$$

˜在此公式中，J 表示典范权 (2.8) 的模反演。

回忆一下，若存在酉算子 $u\in W^*(G)$，使得 $\Omega' = (u\otimes u)\Omega\,\hat{}\Delta(u)^*$，则称两个对偶酉 2-余循环 Ω 和 Ω' 上同调等价。对偶 2-余循环的等价类集合记为 $H^2(\hat{G},\mathbb{T})$，而满足 $W^*(\hat{G},\Omega)$ 是一个 I 型因子的类 $[\Omega]$ 所成的子集记为 $H^2_I(\hat{G},\mathbb{T})$。因此，若 $[\Omega]\in H^2_I(\hat{G},\mathbb{T})$，则存在作用于 $\mathcal{H}$ 上的酉不可约平方可积射影表示 π，使得在同一化 $W^*(\hat{G},\Omega)\simeq B(\mathcal{H})$ 下，作用 $\mathrm{Ad}\,\rho$ 变为 $\mathrm{Ad}\,\pi$。再令 $\omega_\Omega\in Z^2(G,\mathbb{T})$ 为与此射影表示相关联的群 2-余循环。由于上同调等价的对偶 2-余循环给出酉等价的 G-伽罗瓦对象，同构 (2.3) 导出一个嵌入：

$$H^2_I(\hat{G},\mathbb{T}) \longrightarrow H^2_I(G,\mathbb{T}), \quad [\Omega]\mapsto[\omega_\Omega]. \tag{2.11}$$

2.4. 等变量子化。我们的目标是沿着与嵌入 (2.11) 相反的方向进行。具体而言，给定一个射影表示 π，使得扭曲群冯·诺伊曼代数 $W^*(G,\omega_\pi)$ 是一个 I 型因子，我们旨在构造一个对偶 2-余循环 Ω，使得与 G-Galois 对象 $(B(\mathcal{H}),\mathrm{Ad}\,\pi)$ 相关联的局部紧量子群与对偶余循环变形 $(W^*(G)\ \Delta_\Omega)\,\hat{}$ 同构。

根据 [6, 命题 2.9], ，我们知道，当且仅当左正则表示 λ 与 $\pi\otimes\pi^c$ 酉等价时，这种情况才会发生；等价地，存在一个酉映射 $\mathrm{Op}:\ L^2(G)\to\mathrm{HS}(\mathcal{H})$，我们将其称为酉等变量子化映射，使得

$$\mathrm{Ad}\,\pi(g)\big(\mathrm{Op}(f)\big) = \mathrm{Op}(\lambda_g f), \quad \forall f\in L^2(G), \quad \forall g\in G.$$

使用 Op 传递所有内容后，我们可以将 $L^2(G)$ 取作 G-Galois 对象（$B(\mathcal{H})$, Adπ）的典范权φ 的 GNS 空间。令 D 为 π 的 Duflo-Moore 算子，则相应的 GNS 映射 $\tilde{\Lambda}:\mathfrak{N}_\varphi\to L^2(G)$ 唯一确定为

$$\tilde{\Lambda}(\mathrm{Op}(f)D^{-1/2}) := f \quad \text{for} \quad f\in L^2(G) \quad \text{such that} \quad \mathrm{Op}(f)D^{-1/2}\in B(\mathcal{H}), \tag{2.12}$$

相应的伽罗瓦映射 $\tilde{\mathcal{G}}$: $L^2(G\times G)\to L^2(G\times G)$ 为：

$$\tilde{\mathcal{G}}(f_1\otimes f_2)(g,h) = \tilde{\Lambda}\big(\big(\mathrm{Ad}\,\pi(g)\big)(\mathrm{Op}(f_1)D^{-1/2})\,\mathrm{Op}(f_2)D^{-1/2}\big)(h). \tag{2.13}$$

ˆ令 $\mathcal{J} := JJ$，由 [6, 命题 2.9] 可知， L上的下列酉算子在 G上定义了一个对偶酉 2-余循$^2(G)$环:

$$\Omega := (\mathcal{J} \otimes \mathcal{J})\tilde{\mathcal{G}}^*(1 \otimes \mathcal{J})\hat{W}, \tag{2.14}$$

and ˆ G-伽罗瓦对象（$B(\mathcal{H})$, Ad π）和（$W^*(G, \Omega)$, Ad ρ）确实是同构的。 c.

注意，$H^2_I(G, \mathbb{T})$ 可能包含也可能不包含平凡类 $[1] \in H^2(G, \mathbb{T})$。当且仅当 $W^*(G)$ 是一种 I 因子时（见 [6, 定理 2.13]），才会出现这种情况。在此情形下，存在唯一一个（等价类的）不可约且平方可积的（真正的）表示 π，并且总是存在酉等变量子化映射。然而，量子化映射存在性的证明完全不具构造性，而显式构造对偶 2-余循环 (2.14) 的问题仍未解决。这正是 [6] 针对一类半直积所着手研究的问题。

此外，对于 $H^2_I(G, \mathbb{T})$ 中的一个非平凡类，我们甚至不知道酉等变量子化映射是否总是存在。本文的主要目标是为 [6] 中所考虑的半直积类的射影表示构造此类量子化映射。

假设给定了一个射影表示 π，使得 $[\omega_\pi] \in H^2_I(G, \mathbb{T})$，并且给定一个酉等变量子化映射 Op : $L^2(G) \to \mathrm{HS}(\mathcal{H})$。对我们而言，一个重要步骤是确定 G-伽罗瓦对象 ($B(\mathcal{H})$, Ad π) 与 ˆ ($W^*(G, \Omega)$, Ad ρ) 之间的显式同构。为此，考虑第三个等价的 G-伽罗瓦对象会比较方便。因此，通过量子化映射将希尔伯特–施密特算子 $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ 的乘积传递过来，在 $L^2(G)$ 上定义结合乘积 $\star$:

$$f_1 \star f_2 := \mathrm{Op}^*\left(\mathrm{Op}(f_1)\ \mathrm{Op}(f_2)\right). \tag{2.15}$$

对于 $f \in L^2(G)$，我们用 $L^\star(f)$ 表示 $L^2(G)$ 上由左-$\star$-乘法定义的有界算子 :

$$L^\star(f_1)f_2 := f_1 \star f_2.$$

于是，$(L^\star(L^2(G))'', \mathrm{Ad}\ \lambda)$ 定义了一个 G-伽罗瓦对象，它与 ($B(\mathcal{H})$, Ad π) 有规范同构。具体而言，该同构为 $L^\star(f) \mapsto \mathrm{Op}(f)$，其中 $f \in L^2(G)$。正如 [6,注 2.11], 中所指出的，乘积 $\star$ 在 $A(G) \cap L^2(G)$ 上不一定与式 (2.6) 中定义的乘积 $\star_\Omega$ 一致。但当二者一致时，由式 (2.7) 给出的巴拿赫代数 ($A(G)$ $\star_\Omega$) 的表示 π_Ω 与希尔伯特代数 ($L^2(G)$ $\star$) 的表示 $L^\star$ 相关。具体来说，对于 $f \in A(G) \cap L^2(G)$，我们有如下等式（在某个定义域上——参见 [6] 第 3.3 节开头的讨论）:

$$\pi_\Omega(f) = \mathcal{J}\Delta_G^{-1/2}L^\star(f)\Delta_G^{1/2}\mathcal{J}.$$

因此，为了找到 G-伽罗瓦对象 ($B(\mathcal{H})$,Ad π) 和 (W^*(ˆG, Ω), Ad ρ) 之间的显式同构，只需找到算子 $L^\star(f)$ 与 $\Delta_G^{\pm 1/2}$ 之间的联系。

2.5. 余循环双交叉积与五边形上同调。设 $(G_1, G_2; G)$ 为一个匹配对。这意味着 G_1 和 G_2 是局部紧群 G 的闭子群，满足 $G_1 \cap G_2 = \{e\}$，且 G_1G_2 在 G 中具有满哈尔测度。根据这一数据，可以定义一个称为双交叉积 [2, 4, 18] 的局部紧量子群。我们不打算描述这个量子群，而只介绍它的乘法酉算子。

考虑可测映射 p_j: $G \to G_j$, $j = 1, 2$，它们对几乎所有 $x \in G$ 都由以下关系定义:

$$p_1(x)p_2(x) = x.$$

与匹配对 $(G_1, G_2; G)$ 相关联的双交叉积的乘法酉算子，是定义在 $L^2(G \times G)$ 上的酉算子 W，其定义如下:

$$W\xi(x, y) := d_w^{1/2}(x, y)\,(\xi \circ w)(x, y), \tag{2.16}$$

其中 w: $G \times G \to G \times G$ 是由下式给出的五边形变换

$$w(x, y) = \left(xp_1(p_2(x)^{-1}y), p_2(x)^{-1}y\right),$$

且 d_w 是 w的拉东-尼科迪姆导数。回顾一下，五边形变换是一个测度类同构 w：$X\times X \to X\times X$，其中 X是一个标准测度空间，并满足五边形关系 $w_{23}\circ w_{13}\circ w_{12} = w_{12}\circ w_{23}$。

Baaj 和 Skandalis 的一个非常重要的结果 [3]（参见 [4, 命题 5.1]，其中给出了该陈述的最终版本）表明，五边形变换总是与一个匹配对相关联。更确切地说，给定定义在 X 上的五边形变换 w，令 w_j：$X\times X \to X$, $j = 1, 2$ 满足 $w(x, y) = (w_1(x, y)\ w_2(x, y))$。假设 (w_1, id) 和 $(\mathrm{id}\ w_2)$ 也是测度类同构，则存在一个匹配对 $(G_1, G_2; G)$、群 G_1（右侧）和 G_2（左侧）在空间 X 上的两个交换作用，以及一个可测的 $G_1\times G_2$-等变映射 f：$X \to G$，使得几乎处处有：

$$w(x, y) = \big(x.p_1(p_2(f(x))^{-1}.y), p_2(f(x))^{-1}.y\big).$$

与满足上述附加条件的五边形变换 w，或等价地与匹配对 $(G_1, G_2; G)$ 相关联的，是一种称为可测 Kac 上同调 [5], 的上同调理论；其二次情形非常容易描述。对于一个可测函数 Θ：$X\times X \to \mathbb{T}$，我们可以将酉算子 W_Θ 与之对应，该算子作用在 $L^2(X\times X)$ 上，定义为

$$W_\Theta\xi(x, y) := \Theta(x, y)\, d_w^{1/2}(x, y)\, (\xi\circ w)(x, y).$$

如果函数 Θ 仍满足五边形方程，则称其为五边形 2-余循环。此外，存在一个称为余循环双交叉积的局部紧量子群，其乘法酉算子为 W_Θ [18]。

五边形 2-余循环的集合在逐点乘法下构成一个阿贝尔群。给定一个可测函数 a：$X \to \mathbb{T}$，函数 $\Theta_a := {}^{a\otimes a}{}_{(a\otimes a)\circ w}$ 总是一个五边形 2-余循环。由于此时 $\overline{W_{\Theta_a}} = (a\otimes a)W(a^*\otimes a^*)$，这些余循环被视为平凡的。五边形变换 w 的五边形 2-上同调定义为五边形 2-余循环群除以平凡 2- 余循环子群。我们用 $H^2(w, \mathbb{T})$ 表示这个商群。

2.6. 群的类别。考虑一个半直积 $G = Q\ltimes V$，其中 V 是一个（非平凡的）局部紧阿贝尔群，Q 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的一个闭子群。我们进一步假设群 $Q\ltimes V$ 满足以下性质：

ˆ 假设 2.1. (1) 存在一个元素 $\xi_0 \in V$，使得映射

$$\phi : Q \to \hat{V}, \quad q \mapsto q^\flat\xi_0, \tag{2.17}$$

是一个测度类同构。
(2) 群 Q 具有非平凡的（二次可测）上同调。

在 [6], 中，条件 (1) 被称为对偶轨道条件，并且给出了许多例子，其中 V 是局部域上的有限维向量空间。回顾一下，局部域$\mathbb{K}$ 是非离散的局部紧拓扑域。局部域已被完全分类：交换局部域可以是 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$（阿基米德情形），也可以是$\mathbb{Q}_p$的有限次扩张，或 $\mathbb{F}_q(\!(X)\!)$（非阿基米德情形）；而斜局部域是交换局部域上的有限维除代数。例如，可以取：

$$V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \quad \text{and} \quad Q = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),$$

对于 $n = 1$，这给出了仿射群 $\mathbb{K}^*\ltimes\mathbb{K}$。

注 2.2. 条件 (1) 蕴含以下变量替换公式：

$$\int_Q f(\phi(q))\frac{dq}{|q|_V} = \int_{\hat{V}} f(\xi)\, d\xi, \quad \forall f \in L^1(\hat{V}). \tag{2.18}$$

现在我们转向满足条件（2）的例子。

ˆ 例2.3. 假设 $Q=(A\times A)\ltimes B$，其中 A 是阿贝尔群，而 B 是任意群。在这种情况下，与投影 $Q\to A\times\hat{A}$ 相关联的膨胀同态 $H^2(A\times\hat{A},\mathbb{T})\to H^2(Q,\mathbb{T})$ 是单射。因此，可以将 $A\times A$ 上的海森堡斜双特征 ω_H 视为 Q 上的一个非平凡 2-余循环。回顾一下， ω_H 定义在 $q_j=(a_j,\eta_j)\in A\times\hat{A}$, $j=1,2$ 上，其定义如下：

$$\omega_H(q_1,q_2):=e^{i\langle\eta_1,a_2\rangle}e^{-i\langle\eta_2,a_1\rangle}.$$

这种情形涵盖了 $Q=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$、 $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 以及 $Q=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$、 $V=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$的情况。事实上，在这两种情况下都有 $Q\simeq\mathbb{R}^2\times K$，其中 K 是紧的。

例2.4。在上一个例子中，我们无法避免取基域的两个副本，因为$H^2(\mathbb{R}^*,\mathbb{T})=H^2(\mathbb{C}^*,\mathbb{T})=\{1\}$。但对于交换非阿基米德局部域，情况并非如此。事实上， [14, 引理4.1] 证明，当 $\mathbb{K}$是$\mathbb{Q}_p$的有限次扩张，或 $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q((X))$时，我们有

$$H^2(\mathbb{K}^*,\mathbb{T})=\hat{R}\times\hat{U}_1\times H^2(U_1,\mathbb{T}).$$

这里， U_1 是 $\mathbb{K}$ 的主单位群， R 是 $\mathbb{K}$ 中阶与剩余域的特征互素的单位根群。因此，交换非阿基米德局部域的仿射群 $G=\mathbb{K}^*\ltimes\mathbb{K}$ 给出了满足条件(2)的非平凡例子。

2.7. 真表示的科恩-尼伦伯格量子化。根据麦基理论，我们知道 $\pi:=\mathrm{Ind}_V^G(\xi_0)$ 是 $G=Q\ltimes V$ 的唯一平方可积不可约酉表示。在 $\mathcal{H}:=L^2(Q,|q|_V^{-1}dq)$ 上实现时，我们有：

$$\pi(q,v)\varphi(\tilde{q})=|q|_V^{1/2}\,e^{-i\langle\tilde{q}^\flat\xi_0,v\rangle}\,\varphi(q^{-1}\tilde{q}),\quad\forall(q,v)\in G,\ \forall\varphi\in\mathcal{H}.\tag{2.19}$$

该表示与 [6] 中所考虑的 $L^2(V)$ 上的典范酉表示酉等价。（此公式出现在 [6, Lemma 3.4] 的证明中，但没有因子 $|q|_V^{1/2}$ 。这是因为在那里，表示 $\mathrm{Ind}_V^G(\xi_0)$ 实现在 $L^2(Q)$ 上，而非 $L^2(Q,|q|_V^{-1}dq)$ 上。）

现在我们回顾一下 [6] 中已经证明的内容。首先，根据我们对 π 的实现方式选择，酉且 G-等变的量子化映射 $\mathrm{Op}:L^2(G)\to\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ 由下式给出：

$$\mathrm{Op}(f)\zeta(q_0)=\int_Q(\mathcal{F}_{\hat{V}}^*f)(q_0,q^\flat\xi_0-q_0^\flat\xi_0)\,\zeta(q)\,\frac{dq}{|q|_V},\quad\forall f\in L^2(G),\forall\zeta\in\mathcal{H}.\tag{2.20}$$

它被称为 [6] 科恩-尼伦伯格量子化的 G ，因为在测度类同构 $Q\ltimes V\simeq V\times V$、$(q,v)\mapsto(\phi(q)\ v)$ 下，这才是真正的科恩-尼伦伯格量子化。

相应的对偶酉 2-余循环 $\Omega\in W^*(G\times G)$ 具有一个非常简单的（弱）积分表示（参见 [6, 公式 (3.17) 和引理 3.10]）：

$$\Omega=\int_G e^{-i\langle q^\flat\xi_0-\xi_0,v\rangle}\,\lambda_{(1,v)^{-1}}\otimes\lambda_{(q,0)^{-1}}\,\frac{dqdv}{|q|_V}.$$

事实上，在 [6]，中，这个表达式并非由公式 (2.14) 推导而来，而是通过一种更直接的方法得到的。我们将在第 3.4 小节看到，这两种构造给出的对偶 2-余循环完全相同。这个公式的一个重要优点是，它表明在 $\hat{G}=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ 的情况下，局部紧量子群 $(W^*(G)\ \Delta_\Omega)$ 与 Stachura [17] 使用群胚 C^*- 代数方法构造的局部紧量子群同构（见 [6, 第 3.6] 节）。

为了更好地理解局部紧量子群 $(W^*(G),\Delta_\Omega)$，由于其余法矩阵 $\hat{J}$ 较为方便。为此，需要 J，即典范权（2.8）的模反演。在对（同构的） G-Galois 对象（$L^\star(L^2(G))''$，Ad λ）进行了一番相当繁琐的分析之后，证明了以下公式，参见 [6, 命题 3.24 和引理 3.25]:

$$\tilde{J}J=\int_G e^{i\langle q^\flat\xi_0-\xi_0,v\rangle}\,\Delta_G(q,v)^{-1/2}\,\lambda_{(q,v)}\,\frac{dqdv}{|q|_V},$$

其中积分须在弱意义下理解。

事实证明，经过偏傅里叶变换 $\mathcal{F}_V\colon L^2(G) \to L^2(Q \times \hat{V}, |q|_V^{-1} dq d\xi)$ 的共轭后，变形量子群 $(W^*(G), \hat{\Delta}_\Omega)$ 的乘法酉算子 $\hat{W}_\Omega$ 与 $Q \times V$ 上的以下五边形变换相关联（见 [6, 定理 3.26]）：

$$w(q_1, \xi_1; q_2, \xi_2) :=$$
$$\big(q_2 q_1, q_2^\flat \xi_1; \phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0 + \xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1), \phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0 + \xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2 - \xi_1)\big). \quad (2.21)$$

容易看出，这个五边形变换满足第 2.5 小节中列出的附加条件。因此，我们可以应用 [4, 命题 5.1]，得到 $(W^*(G)\ \Delta_\Omega)$ 同构于一个双交叉积量子群。由 [6, 定理 4.1] 可知，相应的匹配对 (G_1, G_2) 由对偶半直积 $\hat{Q} \ltimes V$ 中的两个子群组成，它们分别为

$$G_1 = Q, \quad G_2 = (1, \xi_0) Q (1, \xi_0)^{-1}.$$

对于 $G = \mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{R}$，这表明 Stachura 和 Baaj-Skandalis 的量子 $ax + b$ 群确实同构。此外，这意味着对偶余循环变形量子群 $\hat{}(W^*(G)\ \Delta_\Omega)$ 是自对偶、非紧、非离散、非幺模的（如果群 G 非幺模），并且具有非平凡的缩放群和缩放常数 1。

3. Kohn-Nirenberg quantization for projective representations

3.1. 一类射影表示。为了在 [6], 的构造中纳入一个非平凡射影表示，我们首先注意到，表示 (2.19) 在 $G = Q \ltimes V$ 上限制到 Q 后，与左正则表示一致（相差一个由我们选择的测度自然导出的酉等价）。因此，自然可以通过插入一个 2-余循环 $\omega \in Z^2(Q, \mathbb{T})$ 来修改表示 π，使得新表示 π_ω 在 Q 上的限制是 $\mathcal{H}$ 上的 ω-扭曲正则表示（或与之等价）：$= L^2(Q, |q|_V^{-1} dq)$:

$$\pi_\omega(q, v)\zeta(\tilde{q}) := |q|_V^{1/2}\, e^{-i\langle \tilde{q}^\flat \xi_0, v\rangle}\, \omega(q, q^{-1}\tilde{q})\, \zeta(q^{-1}\tilde{q}), \quad \forall (q, v) \in G, \quad \forall \tilde{q} \in Q, \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}. \quad (3.1)$$

余循环关系

$$\omega(q_1, q_2)\, \omega(q_1 q_2, q_3) = \omega(q_2, q_3)\, \omega(q_1, q_2 q_3), \quad \forall q_1, q_2, q_3 \in Q, \quad (3.2)$$

博雷尔函数 $\omega\colon Q \times Q \to \mathbb{T}$ 的余循环关系蕴含 π_ω 确实是一个射影表示:

$$\pi_\omega(g)\, \pi_\omega(g') = \omega(q, q')\, \pi_\omega(gg'), \quad \forall g = (q, v), g' = (q', v') \in G.$$

由于膨胀同态

$$H^2(Q, \mathbb{T}) \to H^2(G, \mathbb{T}), \quad (3.3)$$

与投影 $G \to Q$（$(q, v) \mapsto q$ 相关联的膨胀同态是单射，因此我们将把 Q 上的非平凡 2-余循环 ω 也视为 G 上的非平凡 2-余循环。

我们不假设余循环 ω 是归一化的（即对所有 $q \in Q$, $\omega(q, q^{-1}) = 1$）。不过，我们将采用以下完全无关紧要的归一化:

$$\omega(e, e) = 1.$$

注意，(e, e, q) 和 (q, e, e) 的余循环关系由此推出:

$$\omega(q, e) = \omega(e, q) = 1, \quad \forall q \in Q. \quad (3.4)$$

我们首先证明，作用 $\operatorname{Ad}\pi_\omega$ 在 $B(\mathcal{H})$ 上是遍历且可积的（参见第 2.2 小节的讨论或 [6,注 2.2]）：

引理 3.1. 射影表示 π_ω 不可约且平方可积。Duflo–Moore 算子是乘以函数 $\Delta_G^{-1}\big|_Q$的算子。

证明。注意， $\pi_\omega(1,v) = \pi(1,v)$ 是乘以函数 $[q \mapsto e^{-i\langle \tilde{q}^\flat \xi_0,\ v\rangle}]$的算子。因此，在作出 $Q \simeq \hat{V}$ 的对应后，由傅里叶变换可知，与 π_ω 在 V上的限制相交换的有界算子必为乘以某个函数的算子。由于 $\pi_\omega(g) = \pi(g)\,\omega(q,.)$，可知这个乘法算子也与真表示 π相交换。因此，由于 π 不可约，该函数必为常数。故 π_ω 也不可约。

关于平方可积性，注意，对于 $\zeta_1,\zeta_2 \in C_c(Q)$，我们有：

$$\begin{aligned}\langle \zeta_1, \pi_\omega(g)\zeta_2\rangle &= |q|_V^{1/2} \int_Q \overline{\zeta_1}(q_0)\, e^{-i\langle q_0^\flat \xi_0, v\rangle}\, \omega(q, q^{-1}q_0)\, \zeta_2(q^{-1}q_0)\, \frac{dq_0}{|q_0|_V} \\ &= |q|_V^{1/2} \int_{\hat{V}} \overline{\zeta_1}(\phi^{-1}(\xi))\, e^{-i\langle \xi, v\rangle}\, \omega(q, q^{-1}\phi^{-1}(\xi))\, \zeta_2(q^{-1}\phi^{-1}(\xi))\, d\xi.\end{aligned}$$

因此，我们有 $\langle \zeta_1, \pi_\omega(g)\zeta_2\rangle = \mathcal{F}_{\hat{V}} f_{q,\ \omega}(v)$，其中定义如下：

$$f_{q,\omega}(\xi) := |q|_V^{1/2}\, \overline{\zeta_1}(\phi^{-1}(\xi))\, \omega(q, q^{-1}\phi^{-1}(\xi))\, \zeta_2(q^{-1}\phi^{-1}(\xi)).$$

由于 $|f_{q,\ \omega}| = |f_{q,\ 1}|$，根据 V 的普朗歇尔公式，我们推得

$$\int_G \big|\langle \zeta_1, \pi_\omega(g)\zeta_2\rangle\big|^2 dg = \int_G \big|\langle \zeta_1, \pi(g)\zeta_2\rangle\big|^2 dg.$$

这表明 π_ω 和 π 的 Duflo-Moore 算子相等。该算子的表达式由 [6,引理 3.4] 得出。□

由引理 3.1 和等式 (2.4)，我们推得，与作用 $\mathrm{Ad}\,\pi_\omega$ 和 $\mathrm{Ad}\ \pi$ 在 $B(\mathcal{H})$ 上相关联的典范权 φ_ω 和 φ 相等。特别地，这意味着相关联的伽罗瓦映射 $\mathcal{G}_\omega$ 和 $\mathcal{G}$ 作用于同一个 GNS 空间。我们将在下一个结果中利用这一点，证明 $(B(\mathcal{H}), \mathrm{Ad}\ \pi_\omega)$ 确实是一个 G-伽罗瓦对象。根据 [6, 定理 2.4],，这将意味着扭曲群冯·诺依曼代数 $W^*(G,\omega)$ 是一个类型I 因子，因此映射 (3.3) 将定义一个单射群同态：

$$H^2(Q,\mathbb{T}) \to H^2_I(G,\mathbb{T}).$$

命题　　第 3.2 节。与 $B(\mathcal{H})$ 上的作用 $\mathrm{Ad}\,\pi_\omega$ 相关联的伽罗瓦映射 $\mathcal{G}_\omega$ 是酉算子。

证明。若 $x \in B(\mathcal{H})$ 是核算子，其核为 $k \in C_c(Q\times Q)$，那么 $xD^{1/2}$ 也属于核算子，其核为 $k(1 \otimes \Delta_G|_Q^{-1/2}) \in C_c(Q\times Q)$。由于 $\Delta_G|_Q(q) = |q|_V^{-1}\Delta_Q(q)$，因此可以将典范权 $\varphi = \varphi_\omega$ 的 GNS 空间取为希尔伯特空间：

$$L^2\big(Q\times Q, \nu\otimes\tilde{\nu}\big) \quad \text{where} \quad d\nu(q) = |q|_V^{-1}dq \quad \text{and} \quad d\tilde{\nu}(q) = \Delta_Q^{-1}(q)dq,$$

而 GNS 映射正是将核算子与其核相关联的映射。由于 GNS 映射将 $\mathrm{Ad}\,\pi_\omega$ 与 $\pi_\omega \otimes \pi_\omega^c$ 交织，等距伽罗瓦映射 (2.2)：

$$\mathcal{G}_\omega : L^2(Q\times Q, \nu\otimes\tilde{\nu}) \otimes L^2(Q\times Q, \nu\otimes\tilde{\nu}) \to L^2\big(G, L^2(Q\times Q, \nu\otimes\tilde{\nu})\big),$$

读作 $k_1,k_2 \in C_c(Q\times Q)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\omega(k_1\otimes k_2)(g;q_1,q_2) &= \int_Q \big((\pi_\omega(g)\otimes\pi_\omega^c(g))k_1(q_1,q_0)\big)\, k_2(q_0,q_2)\, \frac{dq_0}{|q_0|_V} \\ &= \int_Q |q|_V\, e^{-i\langle q_1^\flat\xi_0 - q_0^\flat\xi_0, v\rangle}\, \omega(q,q^{-1}q_1)\overline{\omega}(q,q^{-1}q_0)\, k_1(q^{-1}q_1, q^{-1}q_0)\, k_2(q_0,q_2)\, \frac{dq_0}{|q_0|_V} \\ &= \int_{\hat{V}} |q|_V\, e^{i\langle \xi, v\rangle}\, \omega(q,q^{-1}q_1)\overline{\omega}(q,q^{-1}\phi^{-1}(q_1^\flat\xi_0+\xi))\, k_1(q^{-1}q_1, q^{-1}\phi^{-1}(q_1^\flat\xi_0+\xi)) \\ &\qquad\qquad k_2(\phi^{-1}(q_1^\flat\xi_0+\xi), q_2)\, d\xi.\end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$\mathcal{G}_\omega = (\mathcal{F}_V^*\otimes 1)U_\omega(\mathcal{F}_V\otimes 1)\mathcal{G},$$

其中 U_ω 是乘以函数的酉算子

$$(q,\xi,q_1,q_2)\mapsto \omega(q,q^{-1}q_1)\overline{\omega}(q,q^{-1}\phi^{-1}(q_1^\flat\xi_0+\xi)),$$

且 $\mathcal{G}$ 是与 $\mathrm{Ad}\,\pi$ 在 $B(\mathcal{H})$ 上的作用相关联的伽罗瓦映射。由此证明完成，因为根据 [6, 命题 2.24]，$W^*(G)$ 是一个 I 型因子，而根据 [6, 定理 2.4]，这意味着$\mathcal{G}$ 是酉算子。□

3.2. 量子化映射。现在我们说明如何修改科恩-尼伦伯格量子化（2.20），使其关于 π_ω 具有协变性。在形式层面上，很容易看出，任何满足协变关系的量子化映射 $\mathrm{Op}_\omega : L^2(G) \to \mathrm{HS}(\mathcal{H})$

$$\mathrm{Ad}\,\pi_\omega(g)\circ \mathrm{Op}_\omega = \mathrm{Op}_\omega \circ \lambda_g,$$

必须具有以下形式（对于适当的函数 ζ_1（定义在 Q 上）和 ζ_2（定义在 G 上））：

$$\langle \zeta_1, \mathrm{Op}_\omega(f)\zeta_2\rangle = \int f(g)\, T\big(\overline{\pi_\omega(g)^*\zeta_1}\otimes \pi_\omega(g)^*\zeta_2\big)\, dg,$$

其中，T 是一个适当的线性泛函。对于式 (2.20) 中给出的科恩-尼伦伯格量子化算子 Op，我们得到 $T=\delta_e\otimes\nu$，其中 δ_e 是 Q 的单位元处的狄拉克质量，而 ν 是关于测度 $|q|_V^{-1}dq$ 在 Q 上的积分。事实上，对于 $f\in C_c(G)$ 和 $\zeta_1,\ \zeta_2\in C_c(Q)$，由式 (2.19) 可知，映射 $(g,q)\mapsto f(g)\,\pi(g)^*\zeta_1(e)\ \pi(g)^*\zeta_2(q)$ 属于 $C_c(G\times Q)$。因此，我们可以利用富比尼定理得到

$$\langle \zeta_1, \mathrm{Op}(f)\zeta_2\rangle = \int_G f(g)\,\overline{(\pi(g)^*\zeta_1)}(e)\bigg(\int_Q \pi(g)^*\zeta_2(q_0)\frac{dq_0}{|q_0|_V}\bigg)\,dg.$$

因此，自然地，我们取以下关于射影表示 π_ω 的半直积 $G=Q\ltimes V$ 的科恩-尼伦伯格量子化的初始定义：

定义 3.3. 对于 $f\in C_c(G)$，令 $\mathrm{Op}_\omega(f)$ 为 $C_c(Q)$ 上的半双线性型，其定义为：

$$\mathrm{Op}_\omega(f)[\zeta_1,\zeta_2] := \int_G f(g)\,\overline{(\pi_\omega(g)^*\zeta_1)}(e)\bigg(\int_Q \pi_\omega(g)^*\zeta_2(q_0)\frac{dq_0}{|q_0|_V}\bigg)\,dg.$$

命题 3.4。对于 $f\in C_c(G)$ 和 $\zeta_1,\zeta_2\in C_c(Q)$，我们有

$$\mathrm{Op}_\omega(f)[\zeta_1,\zeta_2] = \int_{Q\times Q}\overline{\zeta}_1(q_0)\,K_\omega(f)(q_0,q)\,\zeta_2(q)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}\frac{dq}{|q|_V},$$

其中

$$K_\omega(f)(q_0,q) = \overline{\omega}(q_0,q_0^{-1}q)\,(\mathcal{F}^*_{\hat{V}}f)(q_0,q^\flat\xi_0-q_0^\flat\xi_0). \tag{3.5}$$

因此，量子化映射 Op_ω 延拓为一个酉算子，从 $L^2(G)$ 到 $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$，并交织表示 λ 与 G 的 $\mathrm{Ad}\,\pi_\omega$。

证明。交织性质直接源于将量子化映射定义为半双线性型。由于

$$\pi_\omega(q,v)^*\zeta(q_0) = |q|_V^{-1/2}\,e^{i\langle (qq_0)^\flat\xi_0,v\rangle}\,\overline{\omega}(q,q_0)\,\zeta(qq_0),$$

我们得到 连续且具有紧支撑的 f、ζ_1、ζ_2（并记住我们的归一化 (3.4)）：

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}_\omega(f)[\zeta_1,\zeta_2] &= \int f(q,v)\,e^{-i\langle q^\flat\xi_0,v\rangle}\,\overline{\zeta}_1(q)\bigg(\int e^{i\langle (qq_0)^\flat\xi_0,v\rangle}\,\overline{\omega}(q,q_0)\,\zeta_2(qq_0)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}\bigg)\frac{dq\,dv}{|q|_V^2}\\ &= \int f(q,v)\,e^{-i\langle q^\flat\xi_0,v\rangle}\,\overline{\zeta}_1(q)\bigg(\int e^{i\langle q_0^\flat\xi_0,v\rangle}\,\overline{\omega}(q,q^{-1}q_0)\,\zeta_2(q_0)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}\bigg)\frac{dq\,dv}{|q|_V}.\end{aligned}$$

因此，由富比尼定理可得：

$$\mathrm{Op}_\omega(f)[\zeta_1,\zeta_2] = \int \overline{\zeta}_1(q)\,\overline{\omega}(q,q^{-1}q_0)\,(\mathcal{F}^*_{\hat{V}}f)(q,q_0^\flat\xi_0-q^\flat\xi_0)\,\zeta_2(q_0)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}\frac{dq}{|q|_V},$$

这就是我们需要的公式。□

命题 3.4（以及一个简单的计算）使我们能够用与真表示 π 相关联的量子化映射 Op 来表示量子化映射 Op_ω：

引理 3.5。对于 $f \in L^2(G)$，我们有

$$\mathrm{Op}_\omega(f) = \mathrm{Op}(\mathcal{V}_\omega f),$$

其中 $\mathcal{V}_\omega$ 是交换冯·诺依曼代数 $\mathcal{F}_V^* L^\infty(Q \times V)\mathcal{F}_V$ 的酉元，由下式给出

$$\mathcal{F}_V \mathcal{V}_\omega f(q,\xi) = \overline{\omega}\big(q, \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big)\mathcal{F}_V f(q,\xi), \quad \forall f \in L^2(G).$$

以下说明量子化在伴随算子映射下的表现：

引理 3.6。对于 $f \in L^2(G)$，我们有

$$\mathrm{Op}_\omega(f)^* = \mathrm{Op}_\omega(\mathcal{U}_\omega J f),$$

其中 $\mathcal{U}_\omega$ 是由下式给出的酉算子：

$$\mathcal{F}_V \mathcal{U}_\omega f(q,\xi) = \omega\big(\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi), \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)^{-1}\big)\, \mathcal{F}_V f\big(\phi^{-1}(q^\flat \xi_0 - \xi), \xi\big), \quad \forall f \in L^2(G).$$

证明。定义 $\mathcal{U}_\omega$ 和 $\mathcal{U}$ 为作用在 $L^2(G)$ 上、由下式给出的酉算子

$$\mathcal{U}_\omega f := \mathrm{Op}_\omega^*(\mathrm{Op}_\omega(Jf)^*) \quad \text{and} \quad \mathcal{U} f := \mathrm{Op}^*(\mathrm{Op}(Jf)^*),$$

其中，J 是复共轭。根据引理 3.5，我们得到

$$\mathrm{Op}_\omega(f)^* = \mathrm{Op}(\mathcal{V}_\omega f)^* = \mathrm{Op}(\mathcal{U}J\mathcal{V}_\omega f) = \mathrm{Op}_\omega(\mathcal{V}_\omega^* \mathcal{U} J \mathcal{V}_\omega f),$$

因此 $\mathcal{U}_\omega = \mathcal{V}_\omega^* \mathcal{U} J \mathcal{V}_\omega J$。根据 [6,引理 3.23],，对于 $f \in L^2(G)$，我们有：

$$\mathcal{F}_V \mathcal{U} f(q,\xi) = \mathcal{F}_V f\big(\phi^{-1}(q^\flat \xi_0 - \xi), \xi\big).$$

此外，由于 $\mathcal{F}_V J f(q,\xi) = \overline{\mathcal{F}_V f}(q,-\xi)$，我们得到

$$\mathcal{F}_V \mathcal{U}_\omega f(q,\xi) = \\ \omega\big(q, \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big)\omega\big(q\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi), \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)^{-1}\big)\, \mathcal{F}_V f\big(\phi^{-1}(q^\flat \xi_0 - \xi), \xi\big),$$

该公式由余循环关系 $\omega(q,\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\ \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)^{-1})$ 得出。 □

备注 3.7. 可以证明，$\mathcal{U}_\omega$ 属于 $W^*(G)'$。事实上，对 [6, 引理 3.25], 中给出的计算稍作修改即可得到，对于 $f \in C_c(G)$，我们有（其中积分绝对收敛）：

$$\big(\mathcal{U}_\omega f\big)(q,v) = \int_G e^{i\langle q'^\flat \xi_0 - \xi_0, v'\rangle}\ \omega(q', q'^{-1})\ \Delta_G^{-1/2}(q',v')\ \big(\rho_{(q',v')} f\big)(q,v)\ \frac{dq'dv'}{|q'|_V}.$$

此外，当 ω 是归一化余循环时（即当 $\omega(q,q^{-1}) = 1, \forall q \in Q$ ）.

3.3. 对偶 2-余循环。由于扭曲群冯·诺依曼代数 $W^*(G,\omega)$ 是一个 I 型因子，且我们有一个等变酉算子量子化映射 Op_ω，根据 [6, 命题 2.9]，我们知道 $G = Q \ltimes V$ 上定义了一个对偶酉 2-余循环，其公式如下：

$$\Omega_\omega := (\mathcal{J} \otimes \mathcal{J})\tilde{\mathcal{G}}_\omega^*(1 \otimes \mathcal{J})\hat{W}, \tag{3.6}$$

$\hat{}$ $\tilde{}$，这里回顾一下，$\mathcal{J} = JJ$ 和 $\mathcal{G}_\omega$ 是 G-伽罗瓦对象 $(B(\mathcal{H}), \mathrm{Ad}\ \pi_\omega)$ 的伽罗瓦映射 (2.13)，并通过量子化映射 Op_ω 将其传输到 $L^2(G \times G)$ 上。为了计算 Ω_ω，我们的首要任务是求出 $\mathcal{G}_\omega$ 的显式表达式。

引理 3.8. 对于 $f \in L^2(Q \times \hat{V} \times Q \times \hat{V})$，我们有：

$$(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V)\tilde{\mathcal{G}}_\omega(\mathcal{F}_V^* \otimes \mathcal{F}_V^*) f(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2) = |q_1|_V\, \Delta_G^{-1/2}(q_1,0)\, \Delta_G^{1/2}\big(\phi^{-1}(q_2^\flat \xi_0 + \xi_1), 0\big) \\ \overline{\omega}(\phi^{-1}(\xi_0 + q_2^{-1^\flat}\xi_1), \phi^{-1}(\xi_0 + q_2^{-1^\flat}\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 - q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big) \\ f\big(q_1^{-1}q_2, -q_1^{-1^\flat}\xi_1; \phi^{-1}(q_2^\flat \xi_0 + \xi_1), \xi_1 + \xi_2\big).$$

证明. 记 $\mathcal{F}C_c(G)$ 为 $L^2(G)$ 的稠密子集，其中的函数均具有如下形式：$\mathcal{F}_{\hat{V}}\varphi$，且满足 $\varphi \in C_c(Q \times \hat{V})$。注意，对于 $f \in \mathcal{F}C_c(G)$，算子 $\mathrm{Op}_\omega(f)D^{-1/2}$ 可延拓为有界算子。事实上，由命题 3.4 可推出 $K_\omega(f) \in C_c(Q \times Q)$，再由引理 3.1 可知，$\mathrm{Op}_\omega(f)D^{-1/2}$ 是核算子，其核为 $K_\omega(f)(1\otimes\Delta_G^{1/2}|_Q)$，它也属于 $C_c(Q \times Q)$。因此，$\mathrm{Op}_\omega(f)D^{-1/2}$ 是希尔伯特–施密特算子，故为有界算子。

对于 用符号映射 Op_ω^*；我们表示伽罗瓦共轭，得到：$\tilde{}$

$$\tilde{\mathcal{G}}_\omega(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) = \mathrm{Op}_\omega^*\big(\mathrm{Ad}\,\pi_\omega(g_1)\big(\mathrm{Op}_\omega(f_1)D^{-1/2}\big)\,\mathrm{Op}_\omega(f_2)\big)(g_2).$$

这些公式完全说得通，因为正如已经观察到的，$\mathrm{Op}_\omega(f_1)D^{-1/2}$ 是有界的，而 $\mathrm{Op}_\omega(f_2)$ 是希尔伯特–施密特的。量子化映射的等变性以及 Duflo-Moore 算子是权重为 Δ_G 的 π_ω-拟不变算子这一事实，意味着

$$\tilde{\mathcal{G}}_\omega(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) = \Delta_G^{-1/2}(g_1)\,\mathrm{Op}_\omega^*\big(\mathrm{Op}_\omega(\lambda_{g_1}(f_1))D^{-1/2}\,\mathrm{Op}_\omega(f_2)\big)(g_2).$$

算子核的乘积公式表明，$\mathrm{Op}_\omega(\lambda_{g_1}(f_1))D^{-1/2}\mathrm{Op}_\omega(f_2)$ 的核为 $k_{g_1} \in L^2(Q \times Q, |q_2|_V^{-1}dq_2|q_3|_V^{-1}dq_3)$，其表达式为

$$k_{g_1}(q_2, q_3) = \int K_\omega(\lambda_{g_1} f_1)(q_2, q)\,\Delta_G^{1/2}(q, 0)\,K_\omega(f_2)(q, q_3)\frac{dq}{|q|_V}.$$

利用命题 3.4，我们得到：

$$k_{g_1}(q_2, q_3) = \int \overline{\omega}(q_2, q_2^{-1}q)\,\overline{\omega}(q, q^{-1}q_3)\,(\mathcal{F}_V\lambda_{g_1}f_1)(q_2, q_2^\flat\xi_0 - q^\flat\xi_0)\,(\mathcal{F}_V f_2)(q, q^\flat\xi_0 - q_3^\flat\xi_0)\,\Delta_G^{1/2}(q, 0)\frac{dq}{|q|_V}.$$

将命题 3.4 的核公式求逆，我们推得：

$$\begin{aligned}(1 \otimes \mathcal{F}_V)\tilde{\mathcal{G}}_\omega(f_1 \otimes f_2)(g_1; q_2, \xi_2) &= \Delta_G^{-1/2}(q_1, 0)\,\omega\big(q_2, \phi^{-1}(\xi_0 - q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)\,k_{g_1}\big(q_2, \phi^{-1}(q_2^\flat\xi_0 - \xi_2)\big)\\ &= \Delta_G^{-1/2}(q_1, 0)\,\omega\big(q_2, \phi^{-1}(\xi_0 - q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)\int \overline{\omega}(q_2, q_2^{-1}q)\overline{\omega}\big(q, q^{-1}\phi^{-1}(q_2^\flat\xi_0 - \xi_2)\big)\\ &\qquad (\mathcal{F}_V\lambda_{g_1}f_1)(q_2, q_2^\flat\xi_0 - q^\flat\xi_0)\,(\mathcal{F}_V f_2)(q, q^\flat\xi_0 - q_2^\flat\xi_0 + \xi_2)\,\Delta_G^{1/2}(q, 0)\frac{dq}{|q|_V}.\end{aligned}$$

对 $(q_2, q_2^{-1}q, q^{-1}q_2\phi^{-1}(\xi_0 - q_2^{-1^\flat}\xi_2))$ 使用余循环关系，我们得到：

$$\begin{aligned}(1 \otimes \mathcal{F}_V)\tilde{\mathcal{G}}_\omega(f_1 \otimes f_2)(g_1; q_2, \xi_2) = \Delta_G^{-1/2}(q_1, 0)\int \overline{\omega}\big(q_2^{-1}q, q^{-1}\phi^{-1}(q_2^\flat\xi_0 - \xi_2)\big)\\ (\mathcal{F}_V\lambda_{g_1}f_1)(q_2, q_2^\flat\xi_0 - q^\flat\xi_0)\,(\mathcal{F}_V f_2)(q, q^\flat\xi_0 - q_2^\flat\xi_0 + \xi_2)\,\Delta_G^{1/2}(q, 0)\frac{dq}{|q|_V}.\end{aligned}$$

现在，公式（对任意 $f \in L^2(G)$ 都成立）：

$$(\mathcal{F}_V\lambda_{g^{-1}}f)(q', \xi') = |q|_V^{-1}e^{i\langle q^\flat\xi', v\rangle}(\mathcal{F}_V f)(qq', q^\flat\xi'), \tag{3.7}$$

给出：

$$\begin{aligned}(1 \otimes \mathcal{F}_V)\tilde{\mathcal{G}}_\omega(f_1 \otimes f_2)(q_1, v_1; q_2, \xi_2) = \frac{|q_1|_V^{3/2}}{\Delta_Q^{1/2}(q_1)}\int \overline{\omega}\big(q_2^{-1}q, q^{-1}\phi^{-1}(q_2^\flat\xi_0 - \xi_2)\big)e^{-i\langle q_2^\flat\xi_0 - q^\flat\xi_0, v_1\rangle}\\ (\mathcal{F}_V f_1)(q_1^{-1}q_2, (q_1^{-1}q_2)^\flat\xi_0 - (q_1^{-1}q)^\flat\xi_0)\,(\mathcal{F}_V f_2)(q, q^\flat\xi_0 - q_2^\flat\xi_0 + \xi_2)\,\Delta_G^{1/2}(q, 0)\frac{dq}{|q|_V}.\end{aligned}$$

L^2傅里叶反演公式于是给出：

$$(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V)\tilde{\mathcal{G}}_\omega(f_1 \otimes f_2)(q_1, \xi_1; q_2, \xi_2) = \frac{|q_1|_V^{3/2}}{\Delta_Q^{1/2}(q_1)}\,\Delta_G^{1/2}\big(\phi^{-1}(q_2^\flat\xi_0 + \xi_1), 0\big)$$

$$\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0-q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)$$
$$\mathcal{F}_V f_1(q_1^{-1}q_2,-q_1^{-1^\flat}\xi_1)\,\mathcal{F}_V f_2\big(\phi^{-1}(q_2^\flat\xi_0+\xi_1),\xi_1+\xi_2\big),$$

证明由 $\mathcal{F}C_c(G)\otimes\mathcal{F}C_c(G)$ 在 $L^2(G\times G)$ 中的稠密性得出。 □

定理 3.9. 对于 $f\in L^2(Q\times\hat{V}\times Q\times\hat{V})$，我们有：

$$\big((\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\Omega_\omega(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big)(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)=|\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)|_V^{-1}$$
$$\omega\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big)\,f\big(q_1,\xi_1;\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)q_2,\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^\flat\xi_2\big).$$

此外，映射 $\omega\mapsto\Omega_\omega$ 诱导了 $H^2(Q,\mathbb{T})$ 到 $H^2_I(\hat{G},\mathbb{T})$ 的嵌入。

回顾一下，$H^2_I(\hat{G},\mathbb{T})$ 表示满足以下条件的对偶酉 2-余循环 Ω 的等价类集合：扭曲对偶群冯·诺依曼代数 $W^*(G,\Omega)$ 是一个 I 型因子。

定理 3.9 的证明。从这些关系出发（参见 [6, 定理 3.26] 的证明）：

$$(\mathcal{F}_V\mathcal{J}\mathcal{F}_V^*f)(q,\xi)=|q|_V\,\Delta_G^{-1/2}(q,0)\,f\big(q^{-1},-q^{-1^\flat}\xi\big),\tag{3.8}$$

and

$$\big((\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\hat{W}^*(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big)(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)=|q_2|_V\,f\big(q_2^{-1}q_1,q_2^{-1^\flat}\xi_1;q_2,\xi_1+\xi_2\big),\tag{3.9}$$

我们由引理 3.8 得到

$$\begin{aligned}
&\big((\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\Omega_\omega^*(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big)(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)\\
&=(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\hat{W}^*(1\otimes\mathcal{J})\tilde{\mathcal{G}}_\omega(\mathcal{J}\otimes\mathcal{J})(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)\\
&=|q_2|_V\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(1\otimes\mathcal{J})\tilde{\mathcal{G}}_\omega(\mathcal{J}\otimes\mathcal{J})(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big(q_2^{-1}q_1,q_2^{-1^\flat}\xi_1;q_2,\xi_1+\xi_2\big)\\
&=|q_2|_V^2\,\Delta_G^{-1/2}(q_2,0)\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\tilde{\mathcal{G}}_\omega(\mathcal{J}\otimes\mathcal{J})(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big(q_2^{-1}q_1,q_2^{-1^\flat}\xi_1;q_2^{-1},-q_2^{-1^\flat}\xi_1-q_2^{-1^\flat}\xi_2\big)\\
&=|q_1q_2|_V\,\Delta_G^{-1/2}(q_1q_2,0)\,\Delta_G^{1/2}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),0\big)\,\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\big)\\
&\qquad(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(\mathcal{J}\otimes\mathcal{J})(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big(q_1^{-1},-q_1^{-1^\flat}\xi_1;q_2^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),-q_2^{-1^\flat}\xi_2\big)\\
&=|\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)|_V\,\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\big)\\
&\qquad f\big(q_1,\xi_1;\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}q_2,\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}\xi_2\big).
\end{aligned}$$

转而考虑伴随算子（同时注意到我们使用的是测度 $|q|_V^{-1}dqd\xi$），即可得到所述公式。

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 对于陈述的其余部分，考虑 $\eta:\ V\to Q$ 和 $\mu:\ V\times V\to V\times V$，它们分别由 $\eta(\xi)=\phi^{-1}(\xi_0+\xi)$ 以及 $\mu(\xi_1,\xi_2):=(\xi_1,\eta(\xi_1)^\flat\xi_2)$ 定义。将 Δ 记为 $L^\infty(Q)$，$L^\infty(V)$... 的余乘法 $\hat{}\,\hat{}$（注意不要与模函数混淆），将 Δ记为 $W^*(V)$，$W^*(G)$... 的余乘法。简单计算可得，对于 $u\in L^\infty(Q)$，有：

$$(\Delta u)\circ(\eta\times\eta)\circ\mu^{-1}=\Delta(u\circ\eta).$$

因此，若 $\omega'=\frac{u\otimes u}{\Delta u}\,\omega$，且 $u\in L^\infty(Q)$ 为酉算子，则有：

$$(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\Omega_{\omega'}(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)=(u\circ\eta\otimes u\circ\eta)(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\Omega_\omega(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)\Delta(u\circ\eta)^*.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 由于，对于 $f\in L^\infty(V)$，有 $(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)\Delta(f)(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)=\Delta(\lambda(\mathcal{F}_V^*f))$，我们可推得

$$\Omega_{\omega'}=(\lambda(\tilde{u})\otimes\lambda(\tilde{u}))\,\Omega_\omega\,\hat{\Delta}(\lambda(\tilde{u}))^*\quad\text{where}\quad\tilde{u}(q,v):=\delta_e(q)\,\mathcal{F}_V^*(u\circ\eta)(v).$$

因此，我们有一个定义良好的映射 τ: $[\omega]\in H^2(Q,\mathbb{T}) \mapsto [\Omega_\omega]\in H^2_I(\hat{\ }G,\mathbb{T})$。为证明该映射是单射，考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} H^2_I(\hat{G},\mathbb{T}) & \xrightarrow{\mu} & H^2_I(G,\mathbb{T}) \ , \\ \uparrow{\scriptstyle \tau} & \nearrow{\scriptstyle \iota} & \\ H^2(Q,\mathbb{T}) & & \end{array}$$

其中， ι 是膨胀同态 $H^2(Q,\mathbb{T}) \to H^2(G,\mathbb{T})$（由命题 3.2 可知，其取值于 $H^2_I(G,\mathbb{T})$），而 μ 是嵌入 (2.11)。根据命题 2.9], ，由 Ω_ω 定义的 G-Galois 对象与 $(B(L^2(Q)), \mathrm{Ad}\ \pi_\omega)$ 同构。这表明上图交换，因此 τ 是单射。□

定理 3.9 表明，对偶酉 2-余循环 Ω_ω 可分解为:

$$\Omega_\omega = U_\omega\,\Omega,$$

其中，Ω 是与真表示 π 相联系的对偶 2-余循环（即在 [6] 中构造的对偶 2-余循环），而 U_ω 是由下式给出的酉卷积算子:

$$U_\omega := (\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)\,\omega\big(\phi^{-1}(\xi_0+.),\phi^{-1}(\xi_0+.)\big)\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V).$$

因此，很自然会问是否还存在其他形式的对偶酉 2-余循环。

$$\Omega_\Theta := (\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)\,\Theta\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\,\Omega, \tag{3.10}$$

ˆˆ其中 $\Theta: V\times V\to\mathbb{T}$ 是一个可测函数。我们将通过给出否定答案来表明，我们的构造穷尽了所有可能性。

ˆˆ 命题 3.10。设 $\Theta: V\times V\to\mathbb{T}$ 是一个可测函数，使酉卷积算子 Ω_Θ 满足对偶 2-余循环方程 (2.5)。那么，存在一个群 2-余循环 $\theta\in Z^2(Q,\mathbb{T})$，使得几乎处处有:

$$\Theta(\xi_1,\xi_2)=\theta\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big).$$

ˆ 证明。注意，对于 $u\in L^\infty(V)$，我们有

$$\hat{\Delta}\big(\mathcal{F}_V^*\,u\,\mathcal{F}_V\big)=(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)\,\Delta u\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V).$$

由此可得

$$(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(\Omega_\Theta\otimes 1)(\hat{\Delta}\otimes\iota)(\Omega_\Theta)(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)= \\ \Theta'\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(\Omega\otimes 1)(\hat{\Delta}\otimes\iota)(\Omega)(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*),$$

其中 $\Theta': \hat{\ }V\times\hat{\ }V\times\hat{\ }V\to\mathbb{T}$ 是由下式给出的可测函数:

$$\Theta'(\xi_1,\xi_2,\xi_3):=\Theta(\xi_1,\xi_2)\,\Theta\big(\xi_1+\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^\flat\xi_2,\xi_3\big).$$

类似地，我们有

$$(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(1\otimes\Omega_\Theta)(\iota\otimes\hat{\Delta})(\Omega_\Theta)(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)= \\ \Theta''\,(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(1\otimes\Omega)(\iota\otimes\hat{\Delta})(\Omega)(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*),$$

其中 $\Theta'': \hat{\ }V\times\hat{\ }V\times\hat{\ }V\to\mathbb{T}$ 是由下式给出的可测函数:

$$\Theta''(\xi_1,\xi_2,\xi_3):=\Theta(\xi_2,\xi_3)\,\Theta\big(\xi_1,\xi_2+\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)^\flat\xi_3\big).$$

因此，我们推导出 Ω_Θ 是对偶 2-余循环，当且仅当 $\Theta'=\Theta''$。

定义可测函数 θ: $Q\times Q\to\mathbb{T}$ 如下:

$$\theta(q_1,q_2):=\Theta(q_1^\flat\xi_0-\xi_0,q_2^\flat\xi_0-\xi_0).$$

用 θ 表示，方程 $\Theta'=\Theta''$ 等价于:

$$\theta\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big)\theta\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1+\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^\flat\xi_2),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_3)\big)=$$

$$\theta\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_3)\big)\theta\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2+\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)^\flat\xi_3)\big).$$

由于

$$\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1+\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^\flat\xi_2)=\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2),$$

we 由我们的对偶轨道条件可推出，θ 几乎处处满足 2-余循环方程 (3.2) . □

3.4. 星积。本节为命题 3.19 做准备，我们将在该命题中确定 φ（G 上的 G-伽罗瓦对象 $(W^*(G,\Omega_\omega),\mathrm{Ad}\ \rho)$ 的典范权）的模反演。我们的主要任务是证明乘积 (2.6) 和 (2.15) 在一个足够大的定义域上相同。

因此，考虑在 $L^2(G)$ 上定义的结合乘积 $\star_\omega$：

$$f_1\star_\omega f_2:=\mathrm{Op}_\omega^*\big(\mathrm{Op}_\omega(f_1)\,\mathrm{Op}_\omega(f_2)\big).$$

我们首先给出此乘积的积分公式。为此，我们令 $\mathcal{FL}(G)$ 为 $L^2(G)$ 的稠密子空间，由满足 f 且 $\mathcal{F}_V f$ 本质有界并且在某个有限测度集合之外本质为零的函数构成。

引理 3.11. 空间 $\mathcal{FL}(G)$ 在乘积 $\star_\omega$ 下构成一个代数，并且对于任意 $f_1,f_2\in\mathcal{FL}(G)$，几乎处处有：

$$\mathcal{F}_V(f_1\star_\omega f_2)(q,\xi)=\int_{\hat V}\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi'),\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi')^{-1}\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi)\big)$$
$$(\mathcal{F}_V f_1)(q,\xi')(\mathcal{F}_V f_2)\big(\phi^{-1}(q^\flat\xi_0-\xi'),\xi-\xi'\big)\,d\xi'. \quad (3.11)$$

证明。首先注意，若 $\mathcal{F}_V f_1$ 和 $\mathcal{F}_V f_2$ 本质有界，且在某个有限测度集之外本质为零，则 (3.11) 右侧也具有同样的性质。因此，若等式 (3.11) 成立，我们便可推出 $(\mathcal{FL}(G)\ \star_\omega)$ 是一个代数。

对于 $f_1,f_2\in L^2(G)$，由引理 3.5 可得：

$$f_1\star_\omega f_2=\mathcal{V}_\omega^*\big((\mathcal{V}_\omega f_1)\star(\mathcal{V}_\omega f_2)\big),$$

因此：

$$\mathcal{F}_V(f_1\star_\omega f_2)(q,\xi)=\omega\big(q,\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi)\big)\,\mathcal{F}_V\big((\mathcal{V}_\omega f_1)\star(\mathcal{V}_\omega f_2)\big)(q,\xi).$$

对于 $f_1,f_2\in\mathcal{FL}(G)$，由 [6, 引理 3.9]，几乎处处有：

$$\mathcal{F}_V(f_1\star f_2)(q,\xi)=\int_{\hat V}(\mathcal{F}_V f_1)(q,\xi')\,(\mathcal{F}_V f_2)\big(\phi^{-1}(q^\flat\xi_0-\xi'),\xi-\xi'\big)\,d\xi'.$$

显然，酉算子 $\mathcal{V}_\omega$ 是 $\mathcal{FL}(G)$ 的自同构。因此我们得到

$$\mathcal{F}_V(f_1\star_\omega f_2)(q,\xi)=\omega\big(q,\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi)\big)\int_{\hat V}\overline{\omega}\big(q,\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi')\big)(\mathcal{F}_V f_1)(q,\xi')$$
$$\overline{\omega}\big(q\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi'),\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi')^{-1}\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi)\big)(\mathcal{F}_V f_2)\big(\phi^{-1}(q^\flat\xi_0-\xi'),\xi-\xi'\big)\,d\xi'.$$

将余循环恒等式应用于 $(q,\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi')\ \phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi')^{-1}\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi))$，即可得到所需公式。□

回顾一下，傅里叶代数 $A(G)$ 由形如 $\zeta*\check{\zeta}'$ 的函数组成，其中 $\zeta,\zeta'\in L^2(G)$；作为巴拿赫空间，$A(G)$ 可通过映射 $\zeta*\check{\zeta}'\mapsto\langle\bar\zeta,\cdot\,\zeta'\rangle$ 与预对偶 $W^*(G)_*$ 等同。

命题 3.12. 空间 $A(G)\cap L^2(G)$ 在乘积 $\star_\omega$ 下是一个代数。此外，对所有 $f_1,f_2\in A(G)\cap L^2(G)$ 及所有 $g\in G$，我们有：

$$f_1\star_\omega f_2(g)=(f_1\otimes f_2)\big(\hat\Delta(\lambda_g)\Omega_\omega^*\big). \quad (3.12)$$

证明. 设 $f_j \in A(G)$, $j=1,2$。这意味着存在 $\zeta_j, \zeta_j' \in L^2(G)$, $j=1,2$, 使得$f_j = \zeta_j * \check{\zeta}_j'$。在将 $A(G)$ 与 $W^*(G)_*$ 等同后，我们得到：

$$(f_1 \otimes f_2)\big(\hat{\Delta}(\lambda_g)\Omega_\omega^*\big) = \big\langle \lambda_{g^{-1}}\overline{\zeta_1} \otimes \lambda_{g^{-1}}\overline{\zeta_2}, \Omega_\omega^*(\zeta_1' \otimes \zeta_2')\big\rangle.$$

在定理 3.9 的证明中，我们已经给出了 $(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V)\Omega_\omega^*(\mathcal{F}_V^* \otimes \mathcal{F}_V^*)$ 的公式。该公式意味着：

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes f_2)\big(\hat{\Delta}(\lambda_g)\Omega_\omega^*\big) = \int |\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)|_V\, \overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1), \phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\big) \\ \overline{(\mathcal{F}_V \lambda_{g^{-1}}\overline{\zeta_1})}(q_1,\xi_1)\, \overline{(\mathcal{F}_V \lambda_{g^{-1}}\overline{\zeta_2})}(q_2,\xi_2)\, (\mathcal{F}_V\zeta_1')(q_1,\xi_1) \\ (\mathcal{F}_V\zeta_2')\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}q_2, \phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}\xi_2\big)\, \frac{dq_1}{|q_1|_V} d\xi_1 \frac{dq_2}{|q_2|_V} d\xi_2. \quad (3.13)\end{aligned}$$

注意，(3.13) 中的被积函数关于 $g \in G$ 绝对收敛且一致。事实上，被积函数的 L^1-范数有界于 $\|\zeta_1\|_2\|\zeta_1'\|_2\|\zeta_2\|_2\|\zeta_2'\|_2 \le \|f_1\|_{A(G)}\|f_2\|_{A(G)}$。公式 (3.7) 意味着

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes f_2)\big(\hat{\Delta}(\lambda_g)\Omega_\omega^*\big) = |q|_V^{-2} \int |\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)|_V\, \overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1), \phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\big) \\ (\mathcal{F}_V\zeta_1)(qq_1, -q^\flat\xi_1)\, (\mathcal{F}_V\zeta_2)(qq_2, -q^\flat\xi_2)\, (\mathcal{F}_V\zeta_1')(q_1,\xi_1) \\ (\mathcal{F}_V\zeta_2')\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}q_2, \phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}\xi_2\big)\, e^{-i\langle q^\flat(\xi_1+\xi_2), v\rangle}\, \frac{dq_1}{|q_1|_V} d\xi_1 \frac{dq_2}{|q_2|_V} d\xi_2.\end{aligned}$$

进行仿射变量替换 $\xi_2 \mapsto -q^{-1^\flat}\xi_2 - \xi_1$ 并应用富比尼定理，得到：

$$(f_1 \otimes f_2)\big(\hat{\Delta}(\lambda_g)\Omega_\omega^*\big) = (\mathcal{F}_V^* \tilde{f})(q,v), \quad (3.14)$$

其中我们定义了

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q,\xi) := |q|_V \int |\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)|_V\, \overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1), \phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big) \\ (\mathcal{F}_V\zeta_1)(qq_1, -q^\flat\xi_1)(\mathcal{F}_V\zeta_2)(qq_2, \xi + q^\flat\xi_1)\, (\mathcal{F}_V\zeta_1')(q_1,\xi_1) \\ (\mathcal{F}_V\zeta_2')\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}q_2, -\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}(q^{-1^\flat}\xi+\xi_1)\big)\, \frac{dq_1}{|q_1|_V} d\xi_1 \frac{dq_2}{|q_2|_V}.\end{aligned}$$

由于等式 (3.13) 右端的被积函数关于 g 一致可积，我们推得 $\tilde{f}$ 属于 $L^\infty(Q, L^1(\hat{V}))$，因此 (3.14) 右端定义了一个有界函数。令 $\xi' = -q^\flat\xi_1$，得到：

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q,\xi) = \int |\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi')|_V\, \overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi'), \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi')^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big) \\ (\mathcal{F}_V\zeta_1)(qq_1, \xi')\, (\mathcal{F}_V\zeta_2)(qq_2, \xi - \xi')\, (\mathcal{F}_V\zeta_1')(q_1, -q^{-1^\flat}\xi') \\ (\mathcal{F}_V\zeta_2')\big(\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi')^{-1}q_2, -\phi^{-1}(q^\flat\xi_0 - \xi')^{-1^\flat}(\xi - \xi')\big) \frac{dq_1}{|q_1|_V} d\xi' \frac{dq_2}{|q_2|_V}.\end{aligned}$$

执行左平移 $q_j \mapsto q^{-1}q_j$, $j=1$、2，并再次应用富比尼定理，我们得到：

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q,\xi) = \int \overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi'), \phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi')^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big)|q|_V \\ \Big(\int (\mathcal{F}_V\zeta_1)(q_1,\xi')\, (\mathcal{F}_V\zeta_1')(q^{-1}q_1, -q^{-1^\flat}\xi') \frac{dq_1}{|q_1|_V}\Big) |\phi^{-1}(q^\flat\xi_0 - \xi')|_V \\ \Big(\int (\mathcal{F}_V\zeta_2)(q_2, \xi - \xi')(\mathcal{F}_V\zeta_2')\big(\phi^{-1}(q^\flat\xi_0 - \xi')^{-1}q_2, -\phi^{-1}(q^\flat\xi_0 - \xi')^{-1^\flat}(\xi - \xi')\big) \frac{dq_2}{|q_2|_V}\Big) d\xi'.\end{aligned}$$

于是注意到，对于 $f=\varphi*\check{\varphi'}\in A(G)\cap L^2(G)$，我们有

$$\mathcal{F}_V(f)(q,\xi)=|q|_V\int(\mathcal{F}_V\varphi)(q_0,\xi)\,(\mathcal{F}_V\varphi')(q^{-1}q_0,-q^{-1^\flat}\xi)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}.$$

事实上，首先注意到 $C_c(G)*C_c(G)$ 在 $A(G)\cap L^2(G)$ 中是稠密的，同时对于 $A(G)$ 和 $L^2(G)$ 的范数也是如此。这在引理 3.11] 的证明第二部分中得到了证明。因此，只需在 $\varphi,\varphi'\in C_c(G)$ 的情况下证明这一等式，而在这种情况下，由富比尼定理很容易得到证明：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_V(\varphi*\check{\varphi'})(q,\xi)&=\int e^{-i\langle\xi,v\rangle}\,\varphi(q_0,v_0)\,\varphi'\big(q^{-1}q_0,q^{-1}(v_0-v)\big)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}dv_0dv\\&=|q|_V\int(\mathcal{F}_V\varphi)(q_0,\xi)\,(\mathcal{F}_V\varphi')(q^{-1}q_0,-q^{-1^\flat}\xi)\,\frac{dq_0}{|q_0|_V}.\end{aligned}$$

因此，当 f_1 和 f_2 属于 $A(G)\cap L^2(G)$ 时，我们得到：

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q,\xi)=\int\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi'),\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi')^{-1}\phi^{-1}(\xi_0-q^{-1^\flat}\xi)\big)\\(\mathcal{F}_Vf_1)(q,\xi')\,(\mathcal{F}_Vf_2)\big(\phi^{-1}(q^\flat\xi_0-\xi'),\xi-\xi'\big)d\xi',\end{aligned}$$

而引理 3.11 给出了等式 (3.12)。这个等式也表明，$A(G)\cap L^2(G)$ 对乘积 $\star_\omega$封闭，构成一个代数。事实上，根据构造，(3.12) 的左边属于 $L^2(G)$，右边属于 $A(G)$。□

我们在本节最后澄清 [6] 中遗留的一个问题。关键在于，可以直接从乘积 $\star_\omega$ 定义对偶 2-余循环的另一种方式。具体而言，若我们将$\star_\omega$ 表示为

$$f_1\star_\omega f_2(g)=\int_{G\times G}k_\omega(g_1,g_2)\,f_1(gg_1)\,f_2(gg_2)\,dg_1\,dg_2,$$

对于 $G\times G$ 上的某个（Bruhat）分布 k_ω，可以通过以下公式定义一个对偶˜余循环 Ω_ω （的伴随算子）：

$$\tilde{\Omega}^*_\omega=\int_{G\times G}k_\omega(g_1,g_2)\,\lambda_{g_1}\otimes\lambda_{g_2}\,dg_1\,dg_2.\tag{3.15}$$

这是因为，至少形式上，$\star_\omega$ 的结合律等价于 Ω_ω 的对偶余循环˜方程 (2.5)。当然，这样的公式需要精确定义，并且必须证明其酉性。一般而言，这可能是一项非常困难的任务。不过请注意，定理 3.9 和 [6, 引理 3.10] 已表明，当$\omega=1$时，对偶 2-余循环 (2.5) 与 (3.15) 相等。

我们将证明，对于任意 2-余循环 $\omega\in Z^2(Q,\mathbb{T})$，这一等式仍然成立。首先，我们需要说明如何精确定义 (3.15)。从引理 3.11 给出的公式出发，在不考虑收敛性问题的情况下撤销傅里叶变换，得到

$$f_1\star_\omega f_2(g_0)=\int e^{i\langle q^\flat\xi_0-\xi_0,v\rangle}\,(\mathcal{F}_V^*\tilde{\omega}_q)(w)\,f_1(g_0(1,v))\,f_2(g_0(q,w))\,\frac{dq}{|q|_V}\,dv\,dw,$$

其中我们定义了

$$\tilde{\omega}_q(\xi):=\overline{\omega}(q,\phi^{-1}(q^{-1^\flat}\xi+\xi_0)).\tag{3.16}$$

注意，当 $\omega=1$ 时，傅里叶变换给出一个 δ 因子，我们得到在 [6] 中考虑的乘积 $\star_0$。因此，我们还需要赋予形式上的左卷积算子以下含义：

$$\tilde{\Omega}^*_\omega=\int_{G\times V}e^{i\langle q^\flat\xi_0-\xi_0,v\rangle}\,(\mathcal{F}_V^*\tilde{\omega}_q)(w)\,\lambda_{(1,v)}\otimes\lambda_{(q,w)}\,\frac{dq}{|q|_V}\,dv\,dw.$$

取伴随算子，忽略积分顺序，并利用

$$\int_V(\overline{\mathcal{F}_V^*\tilde{\omega}_q})(w)\lambda_{(q,w)^{-1}}dw=\lambda_{(q,0)^{-1}}\int_V(\mathcal{F}_V^*\overline{\tilde{\omega}_q})(w)\lambda_{(1,w)}dw=\lambda_{(q,0)^{-1}}\,\mathcal{F}_V^*\,\tilde{\omega}_q^*\,\mathcal{F}_V,$$

现在可以将对偶 2-余循环 (3.15) 定义为代数张量积 $C_c(G) \otimes \mathcal{F}C_c(G)$ 上的半双线性型（这里，$\mathcal{F}C_c(G)$ 表示由满足 $\mathcal{F}_V f \in C_c(Q \times V)$ 的 ˆ 函数 f 组成的 $L^2(G)$ 的稠密子空间），定义如下：

$$\tilde{\Omega}_\omega[f_1, f_2] := \int_G e^{-i\langle q^\flat \xi_0 - \xi_0, v\rangle} \left\langle f_1, \big(\lambda_{(1,v)^{-1}} \otimes \lambda_{(q,0)^{-1}}\big)\big(1 \otimes \mathcal{F}_V^* \, \tilde{\omega}_q^* \mathcal{F}_V\big) f_2 \right\rangle \frac{dqdv}{|q|_V}. \tag{3.17}$$

命题 3.13. 对于 $f_1, f_2 \in C_c(G) \otimes \mathcal{F}C_c(G)$，有：

$$\tilde{\Omega}_\omega[f_1, f_2] = \langle f_1, \Omega_\omega f_2 \rangle.$$

证明. 令 $f_1, f_2 \in C_c(G) \otimes \mathcal{F}C_c(G)$。我们有

$$\tilde{\Omega}_\omega[f_1, f_2] = \int e^{-i\langle q^\flat \xi_0 - \xi_0, v\rangle} \left\langle (1 \otimes \mathcal{F}_V)\big(1 \otimes \lambda_{(q,0)}\big) f_1, \big(\lambda_{(1,v)^{-1}} \otimes 1\big)(1 \otimes \tilde{\omega}_q^* \mathcal{F}_V) f_2 \right\rangle \frac{dq}{|q|_V} \, dv.$$

然后利用 (3.7)，并记住 (3.16)，得到

$$\tilde{\Omega}_\omega[f_1, f_2] = \int e^{-i\langle q^\flat \xi_0 - \xi_0, v\rangle} \, \overline{(1 \otimes \mathcal{F}_V) f_1}(q_1, v_1; q_2, q^{-1^\flat} \xi_2) \, \omega(q, \phi^{-1}(q^{-1^\flat} \xi_2 + \xi_0))$$
$$(1 \otimes \mathcal{F}_V) f_2(q_1, v_1 + v; q q_2, \xi_2) \frac{dqdv}{|q|_V} \frac{dq_1 dv_1}{|q_1|_V} \frac{dq_2 d\xi_2}{|q_2|_V}.$$

ˆ 由于 $(1 \otimes \mathcal{F}_V) f_j \in C_c(G \times Q \times V)$，$j = 1, 2$，我们可以使用富比尼定理，将关于变量 v 和 v_1 的积分改写为傅里叶变换：

$$\tilde{\Omega}_\omega[f_1, f_2] = \int \overline{(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V) f_1}(q_1, q^\flat \xi_0 - \xi_0; q_2, q^{-1^\flat} \xi_2) \, \omega(q, \phi^{-1}(q^{-1^\flat} \xi_2 + \xi_0))$$
$$(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V) f_2(q_1, q^\flat \xi_0 - \xi_0; q q_2, \xi_2) \frac{dq}{|q|_V} \frac{dq_1}{|q_1|_V} \frac{dq_2 d\xi_2}{|q_2|_V}.$$

令 $\xi_1 := q^\flat \xi_0 - \xi_0$，得到：

$$\tilde{\Omega}_\omega[f_1, f_2] = \int \omega\big(\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1), \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)^{-1} \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2)\big)$$
$$\overline{(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V) f_1}(q_1, \xi_1; q_2, \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)^{-1^\flat} \xi_2)(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V) f_2(q_1, \xi_1; \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1) q_2, \xi_2) \frac{dq_1 d\xi_1}{|q_1|_V} \frac{dq_2 d\xi_2}{|q_2|_V}$$
$$= \int |\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)|_V^{-1} \omega\big(\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1), \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_2)\big) \overline{(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V) f_1}(q_1, \xi_1; q_2, \xi_2)$$
$$(\mathcal{F}_V \otimes \mathcal{F}_V) f_2(q_1, \xi_1; \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1) q_2, \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)^\flat \xi_2) \frac{dq_1 d\xi_1}{|q_1|_V} \frac{dq_2 d\xi_2}{|q_2|_V},$$

由定理 3.9，证明即告完成。 □

3.5. 乘法酉算子。根据 [7, 命题 5.4], ，局部紧量子群 ˆ $(W^*(G) \, \Delta_{\Omega_\omega})$ 的乘法酉算子由以下公式给出：

$$\hat{W}_{\Omega_\omega} = (\tilde{J} \otimes \hat{J}) \, \Omega_\omega \, \hat{W}^* \, (J \otimes \hat{J}) \, \Omega_\omega^*.$$

˜如前所述，计算它所缺少的要素是相对于 GNS 映射 (2.9) 的 G-Galois 对象 $(W^*(G, \Omega_\omega)$, Ad $\rho)$ 的规范权重 (2.8) 的模反演 J。要确定 J，处理与之同构（根据命题 2.9]）的 G-Galois 对象 $(B(L^2(Q))$, Ad $\pi_\omega)$ 会更容易。首先需要明确确定这个同构，至少要用生成元 $\pi_{\Omega_\omega}(f)$ 和 $\mathrm{Op}_\omega(f)$ 来表示。为此，我们将考虑第三个等价的 G-Galois 对象 $(L^{\star_\omega}(L^2(G))''$, Ad $\lambda)$。这里，$L^{\star_\omega}$ 是代数 $(L^2(G) \, \star_\omega)$ 的左正则表示，即它定义为

$$L^{\star_\omega}(f_1) f_2 = f_1 \star_\omega f_2.$$

通过 Op 的共轭，表示 $L^{\star_\omega}$ 对应于 $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ 在自身上的左正则表示。由于这一表示是 $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ 的标准表示的倍数

在 $\mathcal{H}$ 上，存在唯一同构 $B(\mathcal{H}) \cong L^{\star\omega}(L^2(G))''$，对于 $f \in L^2(G)$，它将 $\mathrm{Op}_\omega(f)$ 映射为 $L^{\star\omega}(f)$，并交织 Ad π_ω 与 Ad λ。

$\hat{}$ 定义 3.14. 用 $\mathcal{L}_0(Q \times V)$ 表示对 $\hat{}\,\hat{}Q$ 的紧子集对 (K, L) 取并所得的空间 $\mathcal{L}_{K,L}(Q \times V)$ 的并；这些空间由定义在 $Q \times V$ 上、基本支撑于紧集

$$\{(q, \xi) \in Q \times \hat{V} | q \in K,\ \xi_0 - q^{-1^\flat}\xi \in \phi(L)\}.$$

令 $\mathcal{FL}_0(G)$ 为 $L^2(G)$ 的子空间，由其傅里叶变换 $\hat{}$ 属于 $\mathcal{L}_0(Q \times V)$ 的函数构成。

定义 3.15. 令 T 为 $L^2(G)$ 上的无界算子，其定义域为 $\mathcal{FL}_0(G)$，定义如下：

$$\mathcal{F}_V T f(q, \xi) = \frac{\Delta_Q\big(\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big)^{1/2}}{\big|\phi^{-1}(\xi_0 - q^{-1^\flat}\xi)\big|_V^{1/2}} \mathcal{F}_V f(q, \xi), \tag{3.18}$$

这里回顾一下，Δ_Q 表示 Q 的模函数。

注 3.16. [6,引理 3.16]中证明了，$\mathcal{FL}_0(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密，$\mathcal{FL}_0(G) \cap A(G)$ 在 $A(G)$ 中稠密，T稳定 $\mathcal{FL}_0(G)$，且 $T(\mathcal{FL}_0(G) \cap A(G))$ 在 $L^2(G)$ 中稠密。

显然，算子 T 关联于由 $\mathcal{F}_V^* L^\infty(Q \times V)\mathcal{F}_V$ 给出的 $B(L^2(Q))\hat{}$ 的交换冯·诺伊曼子代数。还要注意，引理 3.5 中定义的酉算子 $\mathcal{V}_\omega$ 属于同一交换冯·诺伊曼代数，并且稳定 $\mathcal{FL}_0(G)$。因此，T 与 $\mathcal{V}_\omega$ 在定义域 $\mathcal{FL}_0(G)$ 上交换。

命题 3.17. 我们有 $W^*(\hat{G}, \Omega_\omega) = \mathcal{J}\, L^{\star\omega}(L^2(G))''\, \mathcal{J}$。更确切地说，我们有：

$$\pi_{\Omega_\omega}(f) = \mathcal{J}\, L^{\star\omega}(Tf)\, \mathcal{J} \quad for\ all \quad f \in \mathcal{FL}_0(G) \cap A(G).$$

证明。首先，我们断言，在极大定义域上定义的、由模函数 Δ_G 在 $L^2(G)$ 上给出的乘法算子关联于 $L^{\star\omega}(L^2(G))''$。事实上，令 $\mathcal{V}_\omega$ 为引理 3.5 中定义的酉算子，则有

$$L^{\star\omega}(f) = \mathcal{V}_\omega^*\, L^\star(\mathcal{V}_\omega f)\, \mathcal{V}_\omega, \quad \forall f \in L^2(G),$$

因此 $L^{\star\omega}(L^2(G))'' = \mathcal{V}_\omega^*\, L^\star(L^2(G))''\, \mathcal{V}_\omega$。由以下事实即可得到该断言：$\Delta_G$ 关联于 $L^\star(L^2(G))''$ ([6, 命题 3.17])，$\mathcal{V}_\omega$ 保持 Δ_G 的极大定义域，并且 $\mathcal{V}_\omega$ 与 Δ_G 在该定义域上交换。

于是，我们声称，对于所有 $f \in \mathcal{FL}_0(G)$，在定义域$L^2(G) \cap \Delta_G^{-1/2} L^2(G)$ 上都有 $\Delta_G^{-1/2} L^{\star\omega}(f) \Delta_G^{1/2} = L^{\star\omega}(Tf)$。事实上，根据 [6,命题 3.17],，我们知道在该定义域上有 $\Delta_G^{-1/2} L^\star(f) \Delta_G^{1/2} = L^\star(Tf)$。接着，由于 $\mathcal{V}_\omega$保持 $L^2(G) \cap \Delta_G^{-1/2} L^2(G)$，我们便在定义域 $L^2(G) \cap \Delta_G^{-1/2} L^2(G)$ 上得到以下等式：

$$\begin{aligned}\Delta_G^{-1/2} L^{\star\omega}(f) \Delta_G^{1/2} = \Delta_G^{-1/2} \mathcal{V}_\omega^* L^\star(\mathcal{V}_\omega f) \mathcal{V}_\omega \Delta_G^{1/2} &= \mathcal{V}_\omega^* \Delta_G^{-1/2} L^\star(\mathcal{V}_\omega f) \Delta_G^{1/2} \mathcal{V}_\omega \\ &= \mathcal{V}_\omega^* L^\star(T\mathcal{V}_\omega f)\mathcal{V}_\omega = \mathcal{V}_\omega^* L^\star(\mathcal{V}_\omega T f)\mathcal{V}_\omega = L^{\star\omega}(Tf).\end{aligned}$$

令 $\star_{\Omega_\omega}$ 为 $A(G)$ 上由 (3.12) 右端给出的结合乘积。根据 [16, 第 4.1] 节，我们知道对于所有 $f_1 \in A(G)$ 和 $f_2 \in A(G) \cap C_c(G)$，都有 $\pi_{\Omega_\omega}(f_1)\check{}\, f_2 = (f_1 \star_{\Omega_\omega} f_2\check{})$。因此，由命题 3.12 可得，对于 $f \in A(G) \cap \mathcal{FL}_0(G)$，在 $A(G) \cap C_c(G)$ 上有 $\pi_{\Omega_\omega}(f) = \mathcal{J}\Delta_G^{-1/2} L^{\star\omega}(f) \Delta_G^{1/2} \mathcal{J}$，进而由稠密性可知，该等式在 $L^2(G)$ 上也成立，因为等式两边都定义了有界算子。由于 $A(G) \cap C_c(G) \subset L^2(G) \cap \Delta_G^{-1/2} L^2(G)$，由前述结果可得$\pi_{\Omega_\omega}(f) = \mathcal{J}\, L^{\star\omega}(Tf)\, \mathcal{J}$，至少对于 $f \in A(G) \cap \mathcal{FL}_0(G)$ 成立。

第一个结论由 $\mathcal{FL}_0(G) \cap A(G)$ 在 $A(G)$ 中的稠密性，以及 $T(\mathcal{FL}_0(G) \cap A(G))$ 在 $L^2(G)$中的稠密性得出。□

推论 3.18. 在同构 $(W^*(\hat{G}, \Omega_\omega), \mathrm{Ad}\ \rho) \cong (B(L^2(Q)), \mathrm{Ad}\ \pi_\omega)$ 下，对于 $f \in A(G) \cap \mathcal{FL}_0(G)$，算子 $\pi_{\Omega_\omega}(f)$ 被映射为 $\mathrm{Op}_\omega(Tf)$，其中 T 在（3.18）中给出。

命题 3.19. 关于 GNS 映射（2.9）， G-Galois 对象 $\hat{}(W^*(G,\Omega_\omega),\mathrm{Ad}\ \rho)$ 的典范权 φ 的模反演为:

$$\tilde{J} = \mathcal{J}\mathcal{U}_\omega \mathcal{J} J,$$

其中， $\mathcal{U}_\omega$ 是引理 3.6 中定义的酉算子。

证明。证明与 [6, 命题 3.24]的证明相同。 □

$\hat{}\,\hat{}$ 设 W_Ω 是与局部紧量子群（$W^*(G),\Omega\Delta(.)\Omega^*$）相关联的乘法酉算子，该局部紧量子群由真表示 π所依据的对偶余循环 Ω 定义。根据 [6, 定理 3.26]，对于 $f\in L^2(Q\times\hat{}V\times Q\times\hat{}V)$（测度为 $|q_1|^{-1}dq_1d\xi_1|q_2|^{-1}dq_2d\xi_2$），有:

$$(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\hat{W}_\Omega(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f = d_w^{1/2}\,(f\circ w),$$

其中， $w:(Q\times\hat{}V)^2\to(Q\times\hat{}V)^2$ 是式（2.21）中给出的五边形变换， d_w 是其拉东-尼科迪姆导数。根据 [6, 定理 4.1], ，五边形变换 w 来自对偶交叉积 $\hat{}Q\ltimes V$的子群 $G_1=Q$、 $G_2=(1,\xi_0)Q(1,\xi_0)^{-1}$ 所构成的匹配对。

我们现在可以陈述本文的主要结果。

定理 3.20。对于 $\omega\in Z^2(Q,\mathbb{T})$，令 $\Theta_\omega:(Q\times\hat{}V)\times(Q\times\hat{}V)\to\mathbb{T}$ 为几乎处处由以下内容给出的可测函数

$$\Theta_\omega(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2) := \omega\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)$$
$$\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big). \quad (3.19)$$

局部紧量子群 $(W^*(G),\Omega_\omega\Delta(.)\Omega_\omega^*)$ 的乘法酉算子 W_{Ω_ω} 为

$$\hat{W}_{\Omega_\omega} = (\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)\Theta_\omega(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\hat{W}_\Omega.$$

$\hat{}$ 因此，$(W^*(G),\Omega_\omega\Delta(.)\Omega_\omega^*)$ 与由 $Q\ltimes\hat{}V$ 的子群 $G_1=Q$, $G_2=(1,\xi_0)Q(1,\xi_0)^{-1}$ 所构成的匹配对以及五边形 2-余循环 Θ_ω 所定义的余循环双交叉积量子群同构。此外，映射 $\omega\mapsto\Theta_\omega$ 诱导出一个从可测上同调 $H^2(Q,\mathbb{T})$ 到五边形上同调 $H^2(w,\mathbb{T})$ 的群同态。

证明。由命题 3.19，我们有公式:

$$\hat{W}_{\Omega_\omega} = (\mathcal{J}\mathcal{U}_\omega J\mathcal{J}\otimes\hat{J})\,\Omega_\omega\,\hat{W}^*\,(J\otimes\hat{J})\,\Omega_\omega^*.$$

$\hat{}$ $(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)W_{\Omega_\omega}(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)$ 的显式表达式可通过对 [6, 定理 3.26] 的证明中所给计算进行简单推广而得到；只需追踪额外的三个 ω 因子即可。更准确地说，定理 (3.9)（及其证明）给出了 $(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\Omega_\omega(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)$ 和 $(\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\Omega_\omega^*(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)$ 的公式。我们还有（参见 [6,定理 3.26] 的证明）：

$$(\mathcal{F}_V J\mathcal{F}_V^*\,f)(q,\xi) = \overline{f(q,-\xi)},\qquad (\mathcal{F}_V\hat{J}\mathcal{F}_V^*\,f)(q,\xi) = \frac{|q|^{3/2}}{\Delta_Q(q)^{1/2}}\overline{f\big(q^{-1},q^{-1^\flat}\xi\big)},$$

and

$$\big((\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)\hat{W}^*(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big)(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2) = |q_2|f\big(q_2^{-1}q_1,q_2^{-1^\flat}\xi_1;q_2,\xi_1+\xi_2\big).$$

此外，我们由引理 3.6 推导出，我们几乎处处有

$$(\mathcal{F}_V\mathcal{J}\mathcal{U}_\omega\mathcal{J}\mathcal{F}_V^*f)(q,\xi) = \frac{|\phi^{-1}(\xi_0+\xi)|^{3/2}}{\Delta_Q\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi)\big)^{1/2}}\omega(\phi^{-1}(\xi_0+\xi),\phi^{-1}(\xi_0+\xi)^{-1})$$
$$f\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi)^{-1}q,\phi^{-1}(\xi_0+\xi)^{-1^\flat}\xi\big).$$

由此可得几乎处处成立。

$$\big((\mathcal{F}_V\otimes\mathcal{F}_V)(\mathcal{J}\mathcal{U}_\omega\mathcal{J}\otimes1)(J\otimes\hat{J})\,\Omega_\omega\,\hat{W}^*\,(J\otimes\hat{J})\,\Omega_\omega^*(\mathcal{F}_V^*\otimes\mathcal{F}_V^*)f\big)(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2) =$$

$$\omega(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1})\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1},\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)$$
$$\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big)|\phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0+\xi_1)|$$
$$f\big(q_2q_1,q_2^\flat\xi_1;\phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2-\xi_1)\big).$$

对于 $(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)\ \phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1},\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2))$，余循环恒等式（加上我们的归一化）给出

$$\omega\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)\omega\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1},\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)$$
$$=\omega(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}),$$

由此即可得到该公式。

ˆˆ 由于 W_Ω 和W_{Ω_ω} 是乘法酉元，我们推得 Θ_ω 在五边形上同调群 $H^2(w,\mathbb{T})$中定义了一个类。因此，$(W^*(G),\Omega_\omega\hat{}\Delta(.)\Omega_\omega^*)$与一个余循环双交叉积量子群同构。

显然，映射 $\omega\mapsto\Theta_\omega$ 是一个群同态。接下来需要证明该映射在上同调中诱导出一个映射 $H^2(Q,\mathbb{T})\to H^2(w,\mathbb{T})$。因此，假设 ω 是平凡的，即 $\omega=\partial u=\frac{u\otimes u}{\Delta u}$，其中 $u:Q\to\mathbb{T}$ 是可测的。我们需要证明 $\Theta_{\partial u}$ 也是平凡的，即存在一个可测函数 $a:Q\times\hat{}V\to\mathbb{T}$，使得 $\Theta_{\partial u}=\ ^{a\otimes a}{}_{(a\otimes a)\circ w_\circ}$ 经过计算可得：

$$\Theta_{\partial u}(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)=\frac{u(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1))u(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2))}{u(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2))}$$
$$\frac{u(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2))}{u(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1))u(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2))}.$$

ˆ 现在，考虑函数 $a:Q\times V\to\mathbb{T}$，它几乎处处定义为

$$a(q,\xi):=u\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi)\big)\ \overline{u}\big(\phi^{-1}(\xi_0+q^{-1^\flat}\xi)\big).$$

于是我们有：

$$\frac{(a\otimes a)}{(a\otimes a)\circ w_\Omega}(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)=\frac{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)\big)}{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_1^{-1^\flat}\xi_1)\big)}\frac{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big)}{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^{-1^\flat}\xi_2)\big)}\frac{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_1^{-1^\flat}\xi_1)\big)}{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_2^\flat\xi_1)\big)}$$
$$\frac{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2-\xi_1))\big)}{u\big(\phi^{-1}(\xi_0+\phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2-\xi_1))\big)},$$

经过一些化简后，恰好得到 $\Theta_{\partial u}(q_1,\xi_1;q_2,\xi_2)$。 □

我们看不出群同态

$$H^2(Q,\mathbb{T})\to H^2(w,\mathbb{T}),\quad [\omega]\to[\Theta_\omega],\tag{3.20}$$

一般为何必须是满射，但我们相信它总是单射。不过，目前我们只能证明一个较弱的结论。具体而言，在对偶轨道满足稍强一些的假设时，此映射在连续上同调群 $H_c^2(Q,\mathbb{T})$ 上的限制确实是单射：

命题 3.21. 假设映射 $\phi:Q\to\hat{}V,\ q\mapsto q^\flat\xi_0$ 是开映射。若 $\omega:Q\times Q\to\mathbb{T}$ 是连续的 2-余循环，且 $[\Theta_\omega]=[1]\in H^2(w,\mathbb{T})$，则 $[\omega]=[1]\in H^2(Q,\mathbb{T})$。

证明。将对偶轨道记为 $\mathcal{O}:=\phi(Q)$。根据假设，$\mathcal{O}$ 是一个开集，且 $\phi:Q\to\mathcal{O}$是一个同胚。考虑连续映射

$$F:\hat{V}\times Q\times\hat{V}\to\hat{V}\times\hat{V}\times\hat{V}\times\hat{V},\quad(\xi_1,q,\xi_2)\mapsto(\xi_0+\xi_1,\xi_0+q^\flat\xi_1,\xi_0+\xi_2,\xi_0+q^{-1^\flat}\xi_2),$$

并定义开集：

$$U := Q \times F^{-1}(\mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset Q \times \hat{V} \times Q \times \hat{V}.$$

容易看出，补集 U^c 的测度为零。由群余循环 ω 的连续性，我们可以推知，在 (3.19) 中给出的五边形余循环 Θ_ω 在 U 上是连续的。此外，考虑连续映射

$$H : \hat{V} \times Q \to \hat{V} \times \hat{V}, \quad (\xi, q) \mapsto (\xi_0 + \xi, \xi_0 + q^\flat \xi),$$

我们看到，式 (2.21) 中给出的五边形变换 w 在开稠密集上是连续的。

$$\tilde{U} := Q \times H^{-1}(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \times \hat{V} \supset U.$$

˄设 $a\colon Q \times V \to \mathbb{T}$ 是一个可测函数，使得 $\Theta_\omega = (a \otimes a)((\overline{a} \otimes \overline{a}) \circ w)$。当然，这至少是在 U 上成立的连续函数等式。具体来说，我们有

$$\frac{a \otimes a}{(\overline{a} \otimes \overline{a}) \circ w}(q_1, \xi_1; q_2, \xi_2) = \frac{a(q_1, \xi_1)\, a(q_2, \xi_2)}{a\big(q_2 q_1, q_2^\flat \xi_1\big)\, a\big(\phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0 + \xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1), \phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0 + \xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2 - \xi_1)\big)}.$$

对于 $q_1 \in Q$ 和 ξ_1、$\xi_2 \in \mathcal{O} - \xi_0$，我们有 $(q_1,\ \xi_1;\ e,\ \xi_2) \in U$ 和 $\Theta_\omega\,(q_1,\ \xi_1;\ e,\ \xi_2) = 1$。因此，

$$a(e, \xi_2) = a\big(e, \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)^{-1^\flat}(\xi_2 - \xi_1)\big),$$

这意味着，对于所有 $\xi \in \mathcal{O} - \xi_0$，$a(e, \xi) = a(e, 0)$。当然，我们还可以进一步假设 $a(e, 0) = 1$。由于 Θ_ω 不依赖于变量 q_1，我们推得存在一个 ˄ 可测函数 $c\colon Q \times V \to \mathbb{T}$，使得

$$a(q_2 q_1, q_2^\flat \xi_1) = c(q_2, \xi_1)\, a(q_1, \xi_1).$$

代入 $q_1 = e$，我们得到

$$c(q, \xi) = \overline{a}(e, \xi)\, a(q, q^\flat \xi) = a(q, q^\flat \xi).$$

˄ 这表明可测函数 $a\colon\ Q \times V \to \mathbb{T}$ 满足函数方程：

$$a(q_2 q_1, q_2^\flat \xi_1) = a(q_2, q_2^\flat \xi_1)\, a(q_1, \xi_1). \tag{3.21}$$

现在，上述方程的（可测）解全都具有以下形式

$$a(q, \xi) = k(\xi)\overline{k}(q^{-1^\flat}\xi), \tag{3.22}$$

其中 $k\colon\ V \to \mathbb{T}$ 可测，当然，我们可以假设 $k(0) = 1$。显然，形式如 (3.22) 的函数满足 (3.21)。反过来，如果 a 满足 (3.21)，令 $k(\xi) := \overline{a}(\phi^{-1}(\xi)^{-1}, \xi_0)$，其中 $\xi \neq 0$ 且 $k(0) = 1$，我们得到

$$\frac{k(\xi)}{k(q^{-1^\flat}\xi)} = \frac{a(\phi^{-1}(q^{-1^\flat}\xi)^{-1}, \xi_0)}{a(\phi^{-1}(\xi)^{-1}, \xi_0)} = \frac{a(\phi^{-1}(\xi)^{-1}q, \phi^{-1}(\xi)^{-1^\flat}\xi)}{a(\phi^{-1}(\xi)^{-1}, \phi^{-1}(\xi)^{-1^\flat}\xi)} = a(q, \xi),$$

其中最后一个等式由 (3.21) 得出。因此，我们有

$$\frac{a \otimes a}{(\overline{a} \otimes \overline{a}) \circ w}(q_1, \xi_1; q_2, \xi_2) = \frac{k(\xi_1)\, k(\xi_2)\, k\big(\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2 - \xi_1)\big)}{k(q_2^\flat \xi_1)\, k\big(\phi^{-1}(q_2^{-1^\flat}\xi_0 + \xi_1)^{-1^\flat}(q_2^{-1^\flat}\xi_2 - \xi_1)\big)\, k(q_2^{-1^\flat}\xi_2)}.$$

现在，固定 $q_1 \in Q$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{O} - \xi_0$，并令 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Q 中的一个序列，使得 $q_n^\flat \to 0$ 在 End(˄ V) 中逐点成立。由于 $q_n^\flat \xi_j \to 0 \in \mathcal{O} - \xi_0$, $j = 1, 2$，我们推得 $(q_1, q_n^\flat \xi_1, q_n, q_n^\flat \xi_2)$ 最终将属于 U。此外，注意到

$$\Theta_\omega(q_1, \xi_1; q_n, q_n^\flat \xi_2) = \omega\big(\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1), \phi^{-1}(\xi_0 + \xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 + \xi_2)\big)$$
$$\overline{\omega}\big(\phi^{-1}(\xi_0 + q_n^\flat \xi_1), \phi^{-1}(\xi_0 + q_n^\flat \xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0 + q_n^\flat \xi_2)\big),$$

收敛到

$$\omega\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1),\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1}\phi^{-1}(\xi_0+\xi_2)\big).$$

另一方面，我们有

$$\frac{a\otimes a}{(\overline{a}\otimes\overline{a})\circ w}(q_1,\xi_1;q_n,q_n^\flat\xi_2)=\frac{k(\xi_1)\,k\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}(\xi_2-\xi_1)\big)\,k(q_n^\flat\xi_2)}{k(\xi_2)\,k(q_n^\flat\xi_1)\,k\big(\phi^{-1}(\xi_0+q_n^\flat\xi_1)^{-1^\flat}(q_n^\flat\xi_2-q_n^\flat\xi_1)\big)}.$$

其收敛至

$$\frac{k(\xi_1)\,k\big(\phi^{-1}(\xi_0+\xi_1)^{-1^\flat}(\xi_2-\xi_1)\big)}{k(\xi_2)}.$$

现在设定 $q_j:=\phi^{-1}(\xi_0+\xi_j)^{-1}$ 和 $u(q):=k(q^{-1^\flat}\xi_0-\xi_0)$，我们得到

$$\omega(q_1,q_1^{-1}q_2)=\frac{u(q_1)u(q_1^{-1}q_2)}{u(q_2)},$$

因此， ω 在 $H^2(Q,\mathbb{T})$ 中表示平凡类。 □

注 3.22。当 Q 是阿贝尔的时，我们有 $H^2(Q,\mathbb{T})\simeq H^2_c(Q,\mathbb{T})$。在这种情况下，只要 ϕ 是开集，映射 (3.20) 就是单射。

References

[1] P. Aniello，《相对中心子群模掉后的平方可积射影表示与平方可积表示》，Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 3 (2006)，第 2 期，233–267。[2] S. Baaj 和 G. Skandalis，《C*-代数交叉积的乘法酉算子与对偶性´e》，Ann. scient. ´Ec. Norm. Sup. 26 (1993)，第 4 期，425–488。[3] S. Baaj 和 G. Skandalis，《五边形变换》。C.R. Acad. Sci., Paris, S´er. I 327 (1998)，623–628。[4] S. Baaj、G. Skandalis 和 S. Vaes，《源自数论的非半正则量子群》，Comm. Math. Phys. 235 (2003)，139–167。[5] S. Baaj、G. Skandalis 和 S. Vaes，《双交叉积的可测 Kac 上同调》，Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005)，第 4 期，1497–1524。[6] P. Bieliavsky、V. Gayral、S. Neshveyev 和 L. Tuset，《仿射群子群的量子化》，J. Funct. Anal. 280 (2021)，第 4 期。[7] K. De Commer，《局部紧量子群的伽罗瓦对象与余循环扭曲》，J. Operator Theory 66 (2011)，第 1 期，59–106。[8] M. Duflo 和 C.C. Moore，《非幺模局部紧群的正则表示》，J. Funct. Anal. 21 (1976)，第 2 期，209–243。[9] G. Folland，《 *A course in abstract harmonic analysis*》，第二版，Textbooks in Mathematics。CRC Press，博卡拉顿，FL，2016。[10] D. Jondreville，《由局部域仿射群量子化导出的局部紧量子群》，Lett. Math. Phys. 109 (2019)，781–797。[11] E. Koelink 和 J. Kustermans，《SU(1, 1) 在 SL(2, $\mathbb{C}$) 中的正规化子的局部紧量子群类比》，Comm. Math. Phys. 233 (2003)，第 2 期，231–296。[12] J. Kustermans 和 S. Vaes，《局部紧量子群》，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. 33 (2000)，837–934。[13] J. Kustermans 和 S. Vaes，《冯·诺依曼代数框架中的局部紧量子群》，Math. Scand. 92 (2003)，68–92。[14] C.C. Moore，《 p-进与阿代尔线性群的群扩张》，Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 35 (1968)，157–222。[15] C.C. Moore，《局部紧群的群扩张与上同调。III》，Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976)，第 1 期，1–33。[16] S. Neshveyev 和 L. Tuset，《由局部紧量子群上的余循环变形 C*-代数》，Adv. Math. 254 (2014)，454–496。[17] P. Stachura，《论量子“ax+b”群》，Journal of Geometry and Physics 73 (2013)，125–149。[18] S. Vaes 和 L. Vainerman，《局部紧量子群的扩张与双交叉积构造》，Adv. Math. 175 (2003)，第 1 期，1–101。[19] V. Varadarajan，《 *Geometry of quantum theory*》，第二版，Springer-Verlag，纽约，1985。[20] S. L. Woronowicz，《量子

E 2 **23** 1991 2, 251 263

( )群及其庞特里亚金对偶》，Lett. Math. Phys. ( )，第 – 期。[21] S. L. Woronowicz，《关联于 C^*-代数的无界元与非紧量子群》，Comm. Math. Phys. 136 (1991)，第 2 期，399–432。

Email address: victor.gayral@univ-reims.fr

Laboratoire de Mathématiques, CNRS FRE 2011, Université de Reims Champagne-Arden ne, Moulin de
la Housse - BP 1039, 51687 Reims, France

Email address: valentin.marie@univ-reims.fr

Laboratoire de Mathématiques, CNRS FRE 2011, Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse - BP 1039, 51687 Reims, France