arXiv:2305.03396v1 [math.NT] 5 May 2023

三次分拆的精确公式

LUKAS MAUTH

Abstract. 我们得到了三次分拆函数的一个精确公式，并证明了 Banerjee、Paule、Radu 和 Zeng 提出的一个猜想。

1. Introduction and statement of results

设 n 为非负整数。和为 n 的有限正整数非增序列称为 n. 的一个分拆。我们用 $p(n)$ 表示 n 的分拆数，它可由下列 q 级数的系数定义： [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \tag{1.1}$$

函数 $p(n)$ 是数论中研究最为广泛的函数之一，并满足许多引人注目的恒等式。下面是 S. Ramanujan[1], [10] 发现的一个恒等式。

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)q^n = 5\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q^n)^6}.$$

一个直接推论是 Ramanujan 著名的同余式之一，它断言对于任意非负整数

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

类似 与 (1.1) 类似，我们对非负整数定义三次分拆函数 $a(n)$ b y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)(1-q^{2n})}. \tag{1.2}$$

H. Chan 证明，函数 $a(n)$ 满足一个与上文给出的 Ramanujan 恒等式类似的恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(3n+2)q^n = 3\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^3)^3(1-q^6)^3}{(1-q)^4(1-q^2)^4},$$

$$a(3n+2) \equiv 0 \pmod 3,$$

参见 [6]。他的结果与拉马努金三次连分数密切相关，参见 [7]。关于拉马努金三次连分数的介绍，参见 [2],[4]。此外，由生成函数 (1.2) 显然可知， $a(n)$ 是满足以下条件的分拆对 (λ, μ) 的数量： $|\lambda| + |\mu| = n$ 且 μ 仅由偶数组成。这些联系催生了“三次分拆”这一术语。

Key words and phrases. 圆法， η-函数，分拆。

$a(n)$ 的前 30 个值为：1, 1, 3, 4, 9, 12, 23, 31, 54, 73, 118, 159, 246, 329, 489, 651, 940, 1242,1751, 2298, 3177, 4142, 5630, 7293, 9776, 12584, 16659, 21320, 27922, 35532, 46092.

三次分拆函数还有另一种组合解释。假设你有一个次数为 n. 的实系数多项式方程。那么， $a(n)$ 统计了其根为互不相等的实根、相等的实根（各种组合情况），或简单复共轭根或重复复共轭根的可能情况数。例如，对于一个实系数三次多项式，可能有 3 个互不相同的实根、3 个实根且其中两个相等，或者 1 个实根和一对由 2 个根组成的复共轭根。因此， $a(3) = 4$。

关于 $p(n)$，另一个自然而然的问题是它的增长速度有多快。20 世纪初，G.H. Hardy 和 Ramanujan 利用他们著名的圆法 [8]，证明了如下渐近展开。

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right), \quad n \to \infty. \tag{1.3}$$

Hardy 和 Ramanujan 广泛利用了生成函数 (1.1) 几乎是一个模形式这一事实。更准确地说，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\eta(\tau)} \tag{1.4}$$

，其中 $\eta(z)$ 是德德金式的】【，定义在上半平面 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(\tau) > 0\}$ 上的 η 函数为

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \quad q = \exp(2\pi i\tau).$$

函数 $\eta(\tau)$ 是权为 $_1$ $_2$ 的模形式，并满足如下变换律：对于 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon(a,b,c,d)\sqrt{-i(c\tau+d)}\eta(\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon(a,b,c,d) := \begin{cases} e^{\frac{\pi i b}{12}} & \text{if } c = 0, d = 1, \\ e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12} - s(d,c)\right)} & \text{if } c > 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

这里 $s(h,k)$ 是戴德金和

$$s(h,k) := \sum_{n=1}^{k-1} \frac{n}{k}\left(\frac{hn}{k} - \left\lfloor \frac{hn}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

证明见 [3]。几年后，Rademacher [9] 完善了圆法，并得到了精确公式

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \cdot \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left[\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right]}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right), \tag{1.6}$$

其中 $A_k(n)$ 是由下式给出的克洛斯特曼和

$$A_k(n) := \sum_{\substack{0 \le m < k \\ \gcd(m,k)=1}} \exp\left(\pi i\left(s(m,k) - \frac{2nm}{k}\right)\right).$$

请注意，级数 (1.6) 收敛极快，且首项给出了 Hardy 和 Ramanujan 的结果 (1.3)。本文将利用 Zuckerman 的一项结果 [12], ，该结果扩展了 Rademacher 的工作，并可视为经典圆法的巅峰，从而求得三次分拆函数 $a(n)$ 的 Rademacher 型精确公式。Zuckerman 运用圆法，根据底层子群的尖点以及该形式在每个尖点处的负系数，计算了有限指数子群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上任意非正权弱全纯模形式的傅里叶系数精确公式。我们将在第 2 节陈述 Zuckerman 的相关结果，并在第 3 节证明 $a(n)$ 的精确公式。与上述情形类似，我们将立即得到如下渐近展开

$$a(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}}{8\left(n-\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{4}}}, n \to \infty.$$

最后，我们将证明 Banerjee、Paule、Radu 和 Zeng [5] 提出的一个猜想，该猜想预测了 $\log a(n)$ 的以下渐近公式。

$$\log\left(a(n)\right) \sim \pi\sqrt{n} - \frac{5}{4}\log\left(n\right) - \log\left(8\right) - \left(\frac{15}{8\pi} + \frac{\pi}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty, \quad \frac{15}{8\pi} + \frac{\pi}{16} \approx 0.79$$

Acknowledgements

作者谨此感谢 Kathrin Bringmann 和 Walter Bridges 提出这一问题，感谢 William Craig 和 Andreas Mono 分享他们在模形式方面的知识并提供宝贵建议，同时感谢 Johann Franke 帮助我通过数值计算验证结果。作者获得了欧盟委员会欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：101001179）提供的资助。

2. Zuckerman's result

以下两个章节紧密遵循了 Zuckerman 的工作 [12] 。大部分结果均直接沿用原文，并转换为更现代的语言。他的方法由于具有一般性，涉及大量技术参数，这些参数出现在圆法中，若不了解其产生的背景，便难以理解其明确含义。因此，有兴趣的读者应参阅 [12] ，以获取更详细的论述。

设 Γ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的有限指数子群， F 是权为 $k = -r$ 的弱全纯模形式， $r > 0$. 因此， $F(\tau)$ 满足如下形式的变换方程。

$$F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon(-i(c\tau+d))^k F(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

其中， $\varepsilon = \varepsilon(a,b,c,d)$ 位于单位圆上，且仅取决于变换。若 $c \neq 0$，则将 c 取为正值，并选择满足以下条件的辐角分支。

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(-i(c\tau+d)) < \frac{\pi}{2}.$$

由于 Γ 在模群中具有有限指数，我们可以选取 Γ 的一个完备有限互不等价尖点系，将其记为 P_1、 $\ldots P_s$, 其中

$$P_g = \frac{p_q}{q_g}, \quad \gcd(p_q, g_q) = 1, \quad g_q > 0, \quad g = 1, \cdots, s.$$

为了对所有尖点一视同仁，我们必须假设无穷远点不属于所选的互不等价尖点集。这总可以通过改为考虑一个 Γ-等价的有理点来实现。我们将得到一组傅里叶展开 f_1、$\cdots$、f_s，它们对应于变量 $(\tau - P_g)^{-1}$. 中的尖点集。现在考虑任意变换 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，它不一定属于我们的子群 Γ. 。于是我们写成

$$F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon^*(-i(c\tau+d))^k F^*(\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \tag{2.1}$$

其中 $F^*(\tau)$ 现在是关于 τ 的通常傅里叶展开，由其中一个展开式得到

$$f_g(x) = \sum_{m=-\mu_g}^{\infty} a_m^{(g)} x^m \quad x = \exp\left(\frac{-2\pi i}{c_g(\tau - P_g)}\right),$$

其中 $c_g > 0$ 将在下文给出。注意，在 (2.1) 中选取单位矩阵，我们便得到通常的傅里叶展开 $F(\tau)$，这是我们之后需要用到的。对于每个尖点 P_g，我们都可以找到一个 Γ 中的变换

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$

它可以写成如下形式

$$\frac{1}{\tau' - P_g} = \frac{1}{\tau - P_g} + c_g, \quad c_g > 0.$$

我们可以将该变换还原为通常形式：

$$\tau' = \frac{(c_g P_g + 1) - c_g P_g^2}{c_g \tau + 1 - c_g P_g}.$$

然后我们通过方程 $\varepsilon e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{-2\pi i \alpha_g}$ 定义 α_g，其中 $0 \le \alpha_g < 1$ 和 ε 是相对于 τ'. 取的。现在我们说明如何根据傅里叶展开 f_g. 求出 $F^*(\tau)$。因此，我们任取一个变换 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。于是，当 $c \neq 0$ 时，$\frac{a}{c}$ 是一个有理点；当 $c = 0$. 时，它是无穷远点。无论哪种情况，$\frac{a}{c}$ 都与我们的尖点之一 P_g. 等价（关于 Γ），且恰好等价于其中一个。因此，我们可以找到一个变换

$$\frac{a_1 P_g + b_1}{c_1 P_g + d_1} = \frac{a}{c}, \quad c \ge 0, \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

它在 P_g 中取值 到 $\frac{a}{c}$. 我们便可将 $F^*(\tau)$ 表示为傅里叶展开 f_g，如下所示 s

$$F^*(\tau) = q_g^k \exp\left(\frac{2\pi i q_g^2}{c_g}\alpha_g \tau\right) \dot{f}_g\left(\exp\left(\kappa \frac{2\pi i q_g}{c_g}(a_1 d - c_1 b)\right) \exp\left(\frac{2\pi i q_g^2}{c_g}\tau\right)\right),$$

其中 $\kappa = \pm 1$ 取为下列方程的解

$$p_q = \kappa(a d_1 - c b_1), \quad q_g = \kappa(c a_1 - a c_1).$$

此外，可得

$$\varepsilon* = \varepsilon(a_1, b_1, c_1, d_1) \exp\left(\kappa \frac{\pi i r}{2}\right) \exp\left(\kappa \frac{2\pi i q_g}{c_g}\alpha_g (a_1 d - c_1 b)\right).$$

这便给出了在任意有理点 $\frac{a}{c}$ 处、形式上类似于 (2.1) 的傅里叶展开，其中包括无穷远点。使用这些变换方程执行圆法时，会出现许多

参数。首先，像往常一样考虑 Farey分数 $\frac{h}{k}$，$\gcd(h,k) = 1, k > 0, h \geq 0$.然后，考虑点 $P = P_g - \frac{k}{hc_g}$，它要么是有理点，要么是无穷远点。无论如何，它都与我们的某个尖点 P_β 在 Γ 下等价，其中 $\beta = \beta(h,k,g)$。存在一个 Γ 中的变换，将该点映射到 P_β

$$\frac{aP+b}{cP+d} = P_\beta, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

与此变换相关的参数 $\sigma_{h\,k}^{(g)}$,隐式定义为下列方程的解

$$a\left(\frac{c_g}{q_g}p_g h - k\right) + bc_g h = \sigma_{h,k}^{(g)} p_\beta,$$
$$c\left(\frac{c_g}{q_g}p_g h - k\right) + dc_g h = \sigma_{h,k}^{(g)} q_\beta.$$

它满足 $-c_g \leq \sigma_h^{(g)}{}_{,k} \leq c_g, \sigma_h^{(g)}{}_{,k} \neq 0.$ 陈述 Zuckerman的结果所需的其余技术参数为

$$\delta_{h,k}^{(g)} = \begin{cases} -1 & \text{if } \sigma_{h,k}^{(g)} > 0, \\ 1 & \text{if } \sigma_{h,k}^{(g)} < 0, \end{cases} \quad G_{h,k}^{(g)} = -\frac{2\pi}{kc_\beta}\sigma_{h,k}^{(g)} q_\beta (cP_g + d),$$
$$\Omega_{h,k} = \varepsilon^{-1}(a,b,c,d)\exp\left((1-\delta_{h,k})\frac{\pi i r}{2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\left(\alpha_g h + \frac{\sigma_{h,k}^{(g)} q_\beta (cP_g+d)\alpha_\beta}{c\beta}\right)\right).$$

最后，Zuckerman的结果现在表述如下。

定理 2.1（Zuckerman的精确公式）。假设采用上述记号和假设，并用 I_r 表示 r. 阶贝塞尔函数。若 $n + \alpha_g > 0$，则有

$$a_n^{(g)} = \frac{2\pi c_g^{\frac{r-1}{2}}}{(\alpha_g+n)^{\frac{r+1}{2}}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{0\leq h<k \\ (h,k)=1}}\Omega_{h,k}^{(g)}\exp\left(-2\pi i n\frac{h}{k}\right)$$
$$\times\sum_{\nu=1}^{\mu_\beta} a_{-\nu}^{\beta}\exp\left(-\nu G_{h,k}^{(g)} i\right)\frac{\left|\sigma_{h,k}^{(g)}\right| q_\beta(\nu-\alpha_\beta)^{\frac{r+1}{2}}}{kc_\beta^{\frac{r+1}{2}}}\dot{I}_{r+1}\left(\frac{4\pi|\sigma_{h,k}^{(g)}|q_\beta\sqrt{(\nu-\alpha_\beta)(\alpha_g+n)}}{k\sqrt{c_g c_\beta}}\right).$$

3. Exact formula for the cubic partition function

回顾一下，三次分拆函数由以下恒等式定义：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)(1-q^{2n})},$$

它等于 q 的某个幂，亦即 $(\eta(\tau)\eta(2\tau))^{-1}$.。利用关系

$$2\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{a(2\tau)+2b}{\frac{c}{2}(2\tau)+d}$$

根据 (1.5)，我们可以将 $\eta(2\tau)$ 视为子群 $\Gamma_0(2)$ 上的一个权为 $\frac{1}{2}$ 的模形式，其中该子群是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的子群，且其乘子为

$$\varepsilon = \varepsilon\left(a, 2b, \frac{c}{2}, d\right),$$

因此，我们发现，

$$F(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)\eta(2\tau)}$$

是一个权为 -1 、带有乘子的弱模形式，因此我们可以应用Zuckerman的结果求出 $F(\tau)$ 的傅里叶系数，从而得到 $a(n)$ 的一个公式。群 $\Gamma_0(2)$ 有两个不等价尖点 0 和 $\frac{1}{2}$。我们考虑这些变换。

$$\tau' = \frac{\tau}{2\tau+1}, \quad \tau' = \frac{3\tau-1}{4\tau-1}$$

我们将其写作

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} + 2, \quad \frac{1}{\tau' - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau - \frac{1}{2}} + 4.$$

因此，我们发现 $c_1 = 2$ 和 $c_2 = 4$. 此外，现在我们可以确定 α_1 和 α_2. 由于 $F(\tau)$ 具有乘子

$$\varepsilon = \varepsilon(a,b,c,d)^{-1}\varepsilon\left(a, 2b, \frac{c}{2}, d\right)^{-1},$$

经过简短计算可得 $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{7}{8}$. 由于无穷远点与 $\frac{1}{2}$ 是 $\Gamma_0(2)$-等价的，我们得到 $F^*(\tau))$ 可用傅里叶展开 f_2. 表示。为了求出 $F^*(\tau))$ 的精确表达式，我们采用 Zuckerman 的方法，选取一个将 $\frac{1}{2}$ 映射到无穷远点的变换。显然。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = i\infty.$$

因此， $\kappa = -1$ 和

$$F^*(\tau) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{8}\tau\right) f_1(-\exp(2\pi i\tau)) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{14\pi i}{8}\right)\sum_{m=-\mu_1}^{\infty}(-1)^m a_m^{(1)}.$$

此外，我们考虑点 $\frac{a}{c} = \frac{0}{1}$，它对应于变换 $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.。在这种情况下，显然与之等价的点就是 0，而恒等式就是对应的变换。因此，在这种情况下

$$F^*(\tau) = \exp\left(\frac{7\pi i}{8}\tau\right) f_2(\exp(\pi i\tau)).$$

现在我们求出 $a_{-1}^{(g)}$ 和 $\mu_{-2}^{(g)}$. 。在第一种情况下，一方面我们有

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tau\right) = F(\tau) = \varepsilon^*(-1,0,2,-1)\frac{1}{2}\exp\left(\frac{14\pi i}{8}\tau\right)\sum_{m=-\mu_1}^{\infty}(-1)^m a_m^{(1)}$$

另一方面，根据定义，我们有 $\varepsilon^* = e^{\frac{7\pi i}{8}}$.

$$F(\tau)=e^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\left(a(0)+a(1)e^{2\pi i\tau}+\dots\right)=e^{\frac{2\pi i7}{8}\tau}\left(a(0)e^{-2\pi i\tau}+a(1)+\dots\right)\tag{3.1}$$

比较系数可知 $\mu_{-1}^{(2)}=1$ 和 $a_{-1}^{(2)}=-2e^{\frac{\pi i}{8}}$. 此外，(3.1) 表明，傅里叶系数恰好是 $a(n)$ 向下平移一位后的结果。因此，我们可以通过关系式 $n=m+1$. 求出 $a(n)$。类似的计算表明 $\mu_{-1}^{(1)}=1$ 和 $a_{-1}^{(2)}=\frac{e^{-\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{2}}$.

我们现在继续确定剩余的参数，但仅针对 $g=2$ ，因为在 $_{1\,2}$ 处的傅里叶展开给出了精确公式。对于 $\beta(h,k,2)$，需要找到将 $P_g-\frac{k}{c_gh}$ 变换为 P_β. 的变换。设 h',h'',h''' 为任意满足以下条件的解。

$$\left(\frac{k}{2}-h\right)h'\equiv 1\pmod{2h},\quad h'>0,\quad \text{for } k\equiv 0\pmod 4,$$
$$kh''\equiv -1\pmod{h},\quad h''>0,\quad \text{for } k\equiv 0\pmod 2,$$
$$(k-2h)h'''\equiv 1\pmod{4h},\quad h'''>0,\quad \text{for } k\equiv 1\pmod 2.$$

然后，fo 下表给出了应用定理 2.1 所需的其余参数。

k	a	b	c	d	β	$\sigma_{h,k}^{(2)}$	$\delta_{h,k}^{(2)}$	$G_{h,k}^{(2)}$
$\equiv 1$ （模 2）	h'''	$\frac{(k-2h)h'''-1}{4h}$	$2h'''+4h$	$\frac{(k-2h)h'''-1}{2h}-2h+k$	2	-1	1	$\left(\frac{h'''k-1}{2kh}+1\right)\pi$
$\equiv 0$ （模 4）	h'	$\frac{\left(\frac{k}{2}-h\right)h'-1}{2h}$	$2h'+2h$	$\frac{\left(\frac{k}{2}-h\right)h'-1}{h}+\frac{k}{2}-h$	2	-2	1	$\left(\frac{h'k-2}{kh}+1\right)\pi$
$\equiv 2$ （模 4）	h	$\frac{k-2h}{4}$	$4h''$	$\frac{kh''+1}{h}-2h''$	1	4	-1	$-\left(\frac{4h''k+4}{kh}\right)\pi$

由于定理 2.1 中的级数绝对收敛，因此可以重新排列各项。综合所有结果，并注意到平移量 $n=m+1$，可得

$$\begin{aligned}a(n)=&\frac{e^{-\frac{\pi i}{2}}}{2\sqrt{2}}\sum_{\substack{k\equiv 2\pmod 4\\k>0}}A_k(n+1)\frac{1}{n-\frac{1}{8}}I_2\left(\frac{2\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}{k}\right)\\&-\frac{\pi e^{\frac{\pi i}{8}}}{2}\sum_{\substack{k\equiv 0\pmod 4\\k>0}}\frac{1}{k}A_k(n+1)\frac{1}{n-\frac{1}{8}}I_2\left(\frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}{k}\right)\\&-\frac{\pi e^{\frac{\pi i}{8}}}{4}\sum_{\substack{k\equiv 1\pmod 2\\k>0}}\frac{1}{k}A_k(n+1)\frac{1}{n-\frac{1}{8}}I_2\left(\frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}{2k}\right),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}A_k(n)=\sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1}}&\varepsilon\left(h,\frac{k-2h}{4},4h'',\frac{kh''+1}{h}-2h''\right)^{-1}\exp(\pi i)\\&\times\exp\left(-\frac{2\pi i7}{8k}h+\frac{1}{8}\left(\frac{2h''k+2}{kh}\right)\pi i-2\pi in\frac{h}{k}\right),\quad k\equiv 2\pmod 4,\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1}} \varepsilon\left(h', \frac{\left(\frac{k}{2}-h\right)h'-1}{2h}, 2h'+2h', \frac{\left(\frac{k}{2}-h\right)h'-1}{h}+\frac{k}{2}-h\right)^{-1}\exp(\pi i)$$
$$\times \exp\left(-\frac{2\pi i 7}{8k}h - \frac{1}{8}\left(\frac{h'k-2}{kh}+1\right)\pi i - 2\pi i n\frac{h}{k}\right), \quad k\equiv 0 \pmod 4, \quad (3.4)$$

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1}} \varepsilon\left(h''', \frac{(k-2h)h'''-1}{4h}, 2h'''+4h, \frac{(k-2h)h'''-1}{2h}-2h+k\right)^{-1}\exp(\pi i)$$
$$\times \exp\left(-\frac{2\pi i 7}{8k}h - \frac{1}{8}\left(\frac{h'''k-1}{2kh}+1\right)\pi i - 2\pi i n\frac{h}{k}\right), \quad k\equiv 2 \pmod 4, \quad (3.5)$$

最后一次改变求和顺序，我们得到如下结果

定理 3.1。对于 $n\ge 0$，我们有精确公式

$$a(n) = \frac{\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}}{4\sqrt{2}\left(n-\frac{1}{8}\right)} \sum_{\substack{l\equiv 1 \pmod 2\\ l>0}} \frac{1}{l} A_{l'}(n+1) I_2\left(\frac{\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}{l}\right)$$
$$- \frac{\pi e^{\frac{\pi i}{8}}}{2\left(n-\frac{1}{8}\right)} \sum_{\substack{l\equiv 0 \pmod 2\\ l>0}} \frac{1}{l} A_{l'}(n+1) I_2\left(\frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}{l}\right), \quad (3.6)$$

其中，当 $l\equiv 1$（模 2）时，$l'=l$；当 $l\equiv 0$（模 4）时，$l'=l$；当 $l\equiv 2$（模 4）时，$l'=\frac{l}{2}$。

容易看出，级数收敛很快，且项 $l=1$ 占据了其余各项之和的主导地位。因此，我们可以得出结论：

$$a(n) \sim \frac{\pi}{4\sqrt{2}\left(n-\frac{1}{8}\right)} I_2\left(\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}\right).$$

对于阶数为 $\nu\in\mathbb{N}$ 的贝塞尔函数，已知其渐近展开如下：

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_k(\nu)}{z^k}, \quad (3.7)$$

参见 [11], ，其中 $a_k(\nu)$ 定义为

$$a_k(\nu) = (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{2^k k!}, \quad k=0,1,2,\ldots \quad (3.8)$$

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \quad (3.9)$$

$$(\lambda)_0 = 1 \quad (3.10)$$

因此，我们得出一阶近似为

$$I_2(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

现在我们得到以下渐近展开。

推论3.2。我们有

$$a(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}}}{8\left(n-\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{4}}} \tag{3.11}$$

作为最后一个推论，我们证明了 Banerjee、Paule、Radu 和 Zeng 提出的一个猜想。

推论3.3。我们有

$$\log a(n) \sim \pi\sqrt{n} - \frac{5}{4}\log n - \log 8 - \left(\frac{15}{8\pi} + \frac{\pi}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

证明。我们需要将近似从 $n - \frac{1}{8}$ 移至 $n.$。因此，写作

$$e^{\pi\sqrt{n-\frac{1}{8}}} = e^{\pi\sqrt{n}}\left(1 - \frac{\pi}{16\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\frac{1}{8\left(n-\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{8n^{\frac{5}{4}}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

结合贝塞尔函数的二阶近似

$$I_2(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 - \frac{15}{8z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

我们得到

$$a(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{n}}}{8n^{\frac{5}{4}}}\left(1 - \frac{15}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{\pi}{16\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{\pi}{16\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

取对数后，我们得到，正如猜想的那样。

$$\log a(n) \sim \pi\sqrt{n} - \frac{5}{4}\log n - \log 8 - \left(\frac{15}{8\pi} + \frac{\pi}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

□

注：我们可以进一步完善证明，并得到如下形式的更强渐近展开。

$$\log a(n) \sim \pi\sqrt{n} - \frac{5}{4}\log n - \log 8 - \left(\frac{15}{8\pi} + \frac{\pi}{16}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{c_j}{n^{\frac{j}{2}}}$$

对于某个实数 c_i，通过对所涉及的函数进行更高阶展开。

References

[1] G. Andrews, *The Theory of Partitions*, 数学及其应用百科全书，第 2 卷，G.-C. Rota 编，Addison-Wesley，雷丁，1976 年（再版：剑桥大学出版社，剑桥，1998 年）。[2] G. Andrews 和 B. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook*，第一部分，施普林格出版社，纽约，2005 年。[3] *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory* 1976 T. Apostol, ，施
[4] *Ramanujan's Notebooks Part III* 1991
普林格出版社，B. Berndt, ，，施普林格出版社，纽约，。[5] K. Banerjee、P. Paule、C. Radu 和 W. Zeng, *New inequalities for p*（*n*） *and* log *p*（*n*），《拉马努金杂志》（2022 年）。[6] H. Chan,
Ramanujan's cubic continued fraction and an analog of his "most beautiful identity"，《国际数论杂志》第 06 卷第 03 期，第 673–680 页（2010 年）。
[7] *Congruences for the Number of Cubic Partitions Derived from Modular Forms* 0910 1263 W. Chen 和
[8] *Asymptotic formulae in combinatory analysis* 2 **17**
B. Lin, ，arXiv:。G. Hardy 和 S. Ramanujan, ，《伦敦数学会会刊》系列（1918 年），第 75–115 页。[9] H. Rademacher,
A convergent series for the partition function p（*n*），《美国国家科学院院刊》，1937 年 2 月 1 日，第 23 卷第 2 期，第 78–84 页。[10] S. Ramanujan, *Collected Papers*，剑桥大学出版社，剑桥，1927 年；Chelsea 于 1962 年在纽约再版；美国数学会于 2000 年在普罗维登斯再版。[11] N. Temme, *Asymptotic Methods for Integrals*，世界科学出版社（2014 年）。[12] H. Zuckerman,
On the coefficients of certain modular forms belonging to subgroups of the modular group，《美国数学会会刊》第 45 卷（1939 年），第 298a321 页。

Department of Mathematics and Computer Science, Division of Mathematics,
University of Cologne,Weyertal 86-90, 50931 Cologne, Germany*Email address*: lmauth@uni-koeln.de