arXiv:2305.03405v1 [math.AG] 5 May 2023

动机近邻循环函子、局部单值与普遍局部无环性



学位论文

为获得雷根斯堡大学数学系自然科学博士学位（Dr. rer. nat.）而提交

由

Benedikt Preis（来自 Roding）于 2023年提交

博士学位申请提交日期：01.02.2023

论文指导人：Denis-Charles Cisinski 教授

考试委员会：

主席：	Harald Garcke 教授
第一评审人：	Denis-Charles Cisinski 教授
第二评审人：	Alberto Vezzani 教授博士
其他审查人：	马克·瓦约瓦教授博士
替补考官：	Uli Bunke 教授、博士

摘要

本文给出了 Ayoub 的动机近邻循环函子的两项应用：首先，我们给出了 Grothendieck 经典局部单值化定理的一个推广。在相同的设定下，我们证明惯性群在“源自动机”的层的 étale 上同调上拟幺幂地作用。其次，我们研究动机的普遍局部无环性这一概念，并证明，对于 étale 动机，在优良的一维正则基底概形上的普遍局部无环性可由动机邻近循环函子检测。在此过程中，我们还证明了动机邻近循环函子的若干性质，这些性质本身也可能具有独立的研究价值。

目录

引言概述 指南 致谢 符号与约定 1 1 4 4 5

第1章. Étale 动机与动机邻近循环函子 1.1. 动机 ∞-范畴 1.2. Étale 动机 1.3. 特化系统 1.4. étale 动机的邻近循环函子 1.5. 附近循环函子的另一种描述 1.6. 补论：关于对数动机 1.7. 有理系数的邻近循环函子 7 7 9 19 21 27 35 42

第2章. étale 动机的 J-进实现的局部单值化定理 2.1. 动机邻近循环函子的 J-进实现 2.2. 局部单值 45 45 49

第3章. 动机的普遍局部无环性与邻近循环函子 3.1. 上同调对应 3.2. 普遍局部无环性 3.3. 用邻近循环函子检测普遍局部无环性 3.4. 应用：étale 动机的弱奇异支撑 57 57 59 66 91

附录 A. 双范畴中的可对偶对象 95参考文献 99

引言

概述

概形上的 étale Voevodsky动机理论 X 由 Ayoub 提出，见 [Ayo14]；与此同时，Cisinksi-Deglise 对其作了轻微变体，见 [CD16]。对于任意概形 X 和交换环 Λ，可关联一个三角范畴 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$，其对象为 étale 动机。该构造具有六函子形式主义，类似于 SGA4 和 SGA5 中发展的 étale挠层六函子形式主义。更确切地说，对于任意概形态射 $f:X\to Y$，都可得到一对伴随函子

$$f^*:\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)\rightleftarrows \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda):f_*,$$

如果 $f:X\to S$ 是拟紧拟分离概形之间的有限型态射，则可得到一个伴随函子关系

$$f_!:\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)\rightleftarrows \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda):f^!$$

并且 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 配备了一个张量积 $\otimes$，它是闭的（即 $_\otimes M$具有右伴随 $\mathrm{Hom}(M,_)$）。这六函子满足各种性质和相容性。

设 ℓ 是在 $\mathrm{O}(X)$ 中可逆的素数。那么在对 X 施加温和假设的条件下，我们可以定义 ℓ-*adic*实现函子。

$$\mathfrak{R}_\ell:\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Q})\longrightarrow \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Q}_\ell)$$

从可构造 étale 动机到 X 上可构造 ℓ–adic étale层系统的导出范畴。此函子的两侧都具有六函子，并且在温和假设下，ℓ-adic实现函子与六函子交换。

这个实现函子为 étale 动机提供了一个有趣的视角：理解 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Q})$ 中的现象，就能同时理解所有在 $\mathrm{O}(X)$ 中可逆的素数 ℓ 所对应的 ℓ-adic 版本。特别是，这些结果内在地具有“独立性 of ℓ”。反过来，一个独立于 ℓ 且“具有几何性质”的 ℓ-adic 现象，可以被视为某个动机现象在 ℓ-adic 实现下的影子。

设 S 是一个严格亨泽尔离散赋值环的谱，且 $f:X\to S$ 是一个有限型态射。将 S 的闭点记为 σ，开点记为 η。那么通过拉回，我们得到一个分解

$$\begin{array}{ccccc} X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\ \downarrow{\scriptstyle f_\eta} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sigma} \\ \eta & \xrightarrow{j} & S & \xleftarrow{i} & \sigma \end{array}$$

将 X 分解为其泛纤维和特殊纤维。在此设定下，可以利用六种运算定义 ℓ-进邻近循环函子

$$\Psi_f^\ell : \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X_\sigma, \mathbb{Q}_\ell)$$

（参见 [SGA73a，Exp. XIII], [BBD82，4.4]）。在 [Ayo14]Ayoub 定义了一个动机邻近循环函子

$$\Psi_f : \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X_\sigma, \Lambda),$$

并证明了它满足许多理想性质。特别是，如果 $\Lambda = \mathbb{Q}$ 在温和的假设下满足 $\mathfrak{R}_\ell \bigcirc \Psi_f^\ell \simeq \Psi_f \bigcirc \mathfrak{R}_\ell$。

在本论文中，我们将给出动机邻近循环函子在 étale 动机方面的两个应用：我们将格罗滕迪克的局部单值化定理推广到“源自动机的层”，并证明，在一维优良正则基上的普遍局部无环性可以通过邻近循环函子来检测。

让我们回顾格罗滕迪克著名的局部单值化定理：设 K 是亨泽尔离散赋值环 S 的分式域，X 是一个有限型的分离 K-概形。$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$设 $\bar{K}$ 是 K 的可分闭包，并将 X 拉回到 $\bar{K}$，记为 $\bar{X}$。于是，étale 上同调群 $H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ 自然地带有一个群作用

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell))$$

的绝对伽罗瓦群。我们称 $\lambda \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 在 $H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)^{\bar{}}$ 上的作用是幂零的，如果存在一个整数 m，使得 $(\rho(\lambda) - \mathrm{id})^m = 0$。令 $I \subset \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 表示惯性子群。那么，局部单值化定理断言，对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，都存在一个开子群 $H \subset I$，使得对于所有 $\lambda \in H$，λ 在 $H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用都是幂零的。此外，紧支撑上同调群的类似结论也成立$H^i_{\text{ét},\, c}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$。

格罗滕迪克最初在 [SGA72, Ex. I] 中以一种非常算术的方式证明了这一点。后来，他利用邻近循环理论给出了一个更具几何性的证明；该证明当时是有条件的，因为它依赖于绝对纯性猜想（现已由 Gabber 证明）和奇点消解（如今可以使用 de Jong 的修改）。局部单值化定理有许多应用。例如，它是格罗滕迪克的阿贝尔簇半稳定约化定理的重要依据 [SGA72, Ex. IX, 3.6]。此外，它还蕴含幂零算子 $N : H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$ 的存在，该算子导出 $H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ 的一个滤过，称为单值滤过。Deligne 在 [Del80] 中引入并研究了这一滤过，它也是单值-权猜想的研究对象（见 [Ill94, 3.9]）。

我们在以下意义上推广这一点：令 F 属于 $\hat{\mathrm{D}}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，且为
(1) 对某个可构造动机 M in $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X, \mathbb{Q})$，$\mathrm{F} = \mathfrak{R}_\ell(M)$；或 (2) 对某个可构造动机 M in $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(X, \mathbb{Q})$ 及某个 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{F} = {}^p\mathrm{H}^k(\mathfrak{R}_\ell(M))$（即第 k 个反常上同调层）。

同样，上同调群 $H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathrm{F}|_{\bar{X}})$ 和 $H^i_{\text{ét},c}(\bar{X}, \mathrm{F}|_{\bar{X}})$ 都带有 $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 的$\bar{}$作用。我们证明：

定理 A (2.2.10,2.2.13). 假设亨泽尔离散赋值环 S 是优良的。那么存在一个开子群 $H \subset I$，使得对于所有 $\lambda \in H$ 和所有 $i \in \mathbb{Z}$，λ 在 $H^i_{\acute{e}t}(\bar{X}、\mathcal{F}|_{\bar{X}})$ 上的作用都是幂零的。对于 $H^i_{\acute{e}t,c}(\bar{X}、\mathcal{F}|_{\bar{X}})$，类似的陈述也成立。

特别地，代入 $M = \mathbb{Q}$后，我们便得到格罗滕迪克的局部单值化定理（在额外假设优良性的条件下）。值得注意的是，我们的证明完全独立于现有的局部单值化定理证明。此外，这也证实（甚至推广了！）Illusie 在 [Ill94, §1].中提出的一个预期。</output>

局部无环性的概念可追溯至 [SGA73b，第 XV 论述]。它是证明 étale 挠层的光滑基变换定理的关键工具。考虑一个概形态射 $f : X \to S$ 以及一个在 $\mathcal{F}$ 上的 étale 挠层 X。如果对所有几何点 $\mathcal{F}$ 都称为关于 局部无环的， f 其中 x 是 X 的几何点，且 t 是 $S_{(f(x))}$ 的几何点，则典范映射

$$\mathcal{F}_x \simeq R\Gamma(X_{(x)}, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(f(x))}} t, \mathcal{F})$$

是一个同构。如果沿任意 $S' \to S$进行基变换后，类似结论仍成立，则称 F关于 f 普遍局部无环。当 S 是一个严格亨泽尔离散赋值环的谱时，我们可以考虑相应的邻近循环函子 Ψ_f。它带有一个典范映射

$$\alpha : i^*\mathcal{F} \longrightarrow \Psi_f(j^*\mathcal{F}).$$

容易看出，F 关于 f 局部无环，当且仅当 α 是一个等价：这可以在 X_σ 的几何点 x 的茎上检验，因为我们有

$$\Psi_f(j^*\mathcal{F})_x \simeq R\Gamma(X_{(x)} \times_S \eta, \mathcal{F}).$$

如果 f 此外属于有限型，那么根据 [LZ19，6.6]，局部无环实际上等价于普遍局部无环。

最近，Lu-Zheng [LZ22] 提出了普遍局部无环性的一种等价刻画，该刻画在任意六函子形式主义中均有意义。例如，Hansen-Scholze 就利用这一刻画在 [HS21] 中定义了一种相对 perverse t-结构。特别地，对于任何具有邻近循环理论的六函子形式主义 Ψ，我们都可以提出这样一个问题：它与Ψ 具有普遍局部无环性这一性质之间是否存在某种联系？我们对 étale 动机给出了肯定的回答：

定理 B (3.3.22)。 设 $f : X \to S$ 为有限型，其中 S 是一个优良严格亨泽尔离散赋值环的谱。设 Λ 为一个在 $\mathbb{Z}$上平坦的诺特环，且 M 为 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(X, \Lambda)$中的一个动机。那么，$M$ 关于 f 普遍局部无环，当且仅当典范映射

$$i^*M \longrightarrow \Psi_f(j^*M)$$

是一种等价关系。

作为一项应用，我们在命题 3.4.8 中证明，可以利用动机近邻循环函子来确定一个动机的弱奇异支撑。我们希望这一工具将有助于进一步研究动机的（弱）奇异支撑。

在此过程中，我们深入研究了动机邻近循环函子。给定一个概形态射 $f : X \to S$，其中 S 是严格亨泽尔离散赋值环的谱，Ayoub 定义的不仅有动机邻近循环函子 Ψ_f，还有一个函子

$$\Upsilon_f : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$$

他称之为幺幂近邻循环函子。存在一个典范的自然变换 $\Upsilon_f \to \Psi_f$。关于这一点，我们的主要结果如下：

定理 C (1.7.7)。 假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，且 S 是优良的。那么，对于每个有限型态射 $f : X \to S$ 以及 M 在 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda)$ 典范映射

$$\Upsilon_f(M) \longrightarrow \Psi_f(M)$$

是一个直和项的包含。

每当 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数时，Ayoub 都会构造一个有趣的单值算子$N : \Upsilon_f \to \Upsilon_f(-1)$。该定理使我们能够将单值算子 N 用作研究 Ψ_f的非常有效的工具。

指南

我们以介绍 étale 动机开启第 1 章。我们用∞-范畴的语言来进行介绍，并特别注意消除各种有限性假设。完成这些整理工作后，我们回顾 Ayoub 的特化系统形式主义以及动机邻近循环函子 Υ、Ψ^{tame} 和 Ψ的构造。借助我们的 ∞-范畴框架，我们可以用余极限来描述这些函子（命题 1.5.7）。最后，我们利用这一描述以及关于对数动机的一些观察，证明定理1.7.5，它将成为一项关键的技术工具。

在第2章中，我们证明局部单值化定理的推广（推论2.2.10 和2.2.13）。有了定理 1.7.5 ，这便是 Ayoub 的一个定理（定理2.1.11的一个相当容易的推论。在此之前，我们会介绍一些关于 J-进实现和经典 J-进邻近循环函子的背景。

在第3章中，我们引入动机的普遍局部无环性这一概念。我们用 Künneth 型公式给出普遍局部无环性的一个等价刻画（命题3.2.13），并证明一般普适局部无环性定理（命题3.2.21）。随后，在定理3.3.22 中，我们终于将普遍局部无环性这一概念与动机邻近循环函子联系起来。这部分内容相当技术性，涵盖了本章的大部分内容。作为一项应用，我们证明动机的弱奇异支撑由动机邻近循环函子确定（命题3.4.8）。

在附录 A 中，我们陈述了一些关于双范畴中可对偶对象的事实，并在定理 3.3.22 的证明中使用了这些事实。

致谢

我谨感谢我的导师 Denis-Charles Cisinski，他给予了我悉心的支持，并花费无数时间回答我的问题、分享他的见解。

我谨感谢 Han-Ung Kufner 和 Sebastian Wolf，感谢我们在咖啡休息时围绕 $\mathcal{L}og$-动机展开的讨论。回想起来，这些交流对本论文影响颇大。尤其是 §1.6 直接源于我们共同构思的想法。

首先，我要感谢在雷根斯堡攻读博士期间结识的所有朋友，以及我们共同度过的美好时光。

符号与约定

我们会自由地使用 ∞-范畴论的语言，该理论由 Lurie 在 [Lur17b]，[Lur17a] 和 [Lur18] 中发展。我们的符号与约定通常与同上文献中的相同。下面仍然回顾一些基本且常用的符号。

对于 X 和 Y 这两个 ∞-范畴 C 中的对象，我们用 $\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 表示映射空间。对于一个 ∞-范畴 C，我们可以关联一个同伦范畴 $h\mathsf{C}$，它是一个普通范畴，其态射集为 $\mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$。$\infty$-范畴之间的函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 诱导出同伦范畴之间的函子 $F : h\mathsf{C} \to h\mathsf{D}$。$\mathsf{C}$ 与 D 之间函子的 ∞-范畴记作 $\mathrm{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$。

我们称一个图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ Z & \xrightarrow[d]{} & W \end{array}$$

在 ∞-范畴 C 中交换，如果存在一个等价 $ba \simeq dc$ in $\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, W)$。等价地，诱导出的图表在 $h\mathsf{C}$ 中按经典意义交换。

我们还需要讨论大小问题。为此，我们使用格罗滕迪克宇宙来讨论小集合。若一个 ∞-范畴等价于某个底层单纯集合为小集合的 ∞-范畴，则称其为小范畴。我们称一个集合可能非小，若它在层级中下一个格罗滕迪克宇宙内是小的。这两个步骤足以满足我们的目的。

我们用 Cat_∞ 表示小 ∞-范畴的 ∞-范畴，用 $\widehat{\mathsf{Cat}}_\infty$表示可能非小的 ∞-范畴的 ∞-范畴。我们用 Pr^L 表示 $\widehat{\mathsf{Cat}}_\infty$ 的非全子范畴，其对象为可表的 ∞-范畴，态射为保小余极限的函子。我们用 $\mathsf{Pr}^{L,\,\mathrm{st}}$ 表示它的全子范畴，其对象为稳定的可表 ∞-范畴。

我们用 Spc 表示小空间的 ∞-范畴，用 Spt 表示其稳定化，即谱的∞–范畴。给定一个小范畴 C，我们将 C 上预层的∞-范畴记为 $\mathsf{PSh}(\mathsf{C}) := \mathrm{Fun}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Spc})$。注意，$\mathsf{PSh}(\mathsf{C})$ 是一个可表的 ∞-范畴，但它并非小范畴。

本文中，环一律指**交换环**。

本文中，光滑（分别地，étale）态射一律指**有限型**的光滑（分别地，étale）态射。

第1章

étale动机与动机邻近循环函子

我们首先将 [Ayo14] 所发展的étale动机经典理论提升到 ∞-范畴的层面。这是我们之后希望使用的语言，而且还能让我们去除对分离性的假设。我们完整证明了 Ayoub 的 étale 动机与 Cisinski-Deglise 的 h-动机在限制到有限维诺特概形时相一致（定理1.2.15）。这使我们能够使用这两个领域的结果。

接下来，我们介绍 Ayoub 的特化系统形式体系，并定义动机邻近循环函子。在命题1.5.7中，我们用（∞-范畴）余极限对这些函子作出另一种描述。

我们在第1.6节稍作旁论，转向更一般的设定。对于一个光滑交换群概形 X，我们可以关联一个余单纯动机；当 $X = \mathbb{G}_m$ 时，它已出现在 Ayoub 构造幺幂邻近循环函子 Υ的过程中。我们证明，这个对象可以视为与 X 相关联的对数动机的余单纯表示（推论1.6.12）。

最后，我们对对数动机的研究使我们得以证明一项关键的技术工具：在定理 1.7.5 中，我们证明，采用有理系数时，幂零邻近循环函子实际上是温和近邻循环函子的一个直因子。

1.1. 动机∞-范畴

1.1.1. 设 S 为一个拟紧拟分离（qcqs）概形，并用 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 表示 S 上的拟紧拟分离概形范畴。令 Sm 表示 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中光滑态射的集合。一个关于 S 的动机 ∞-范畴是一个函子

$$\mathcal{D}(_) : (\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}})$$

到 ∞-范畴（其对象为稳定、可呈现的对称幺半 ∞-范畴），这是一个$(*, \sharp, \otimes)$-形式体系，定义在$(\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}, \mathrm{Sm})$ 上，并满足[Kha21, §2] **中意义下的 Voevodsky 条件**. 给定一个概形态射 $f : X \to Y$ in $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$，我们将由 D(_) 诱导的函子记作 $f^* : \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X)$，并将其右伴随记作 $f_* : \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$。

我们来回顾一些性质：

(1) 对所有 $X \in \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$，$\mathrm{D}(X)$ 的幺半结构都是闭的。我们将内部 Hom 对象记为 Hom(_,_)。(2) 令 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{,F/S}$ 表示 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 的（非满）子范畴，其对象是 S 上的拟紧拟分离概形，态射是它们之间的有限型态射。于是存在一个函子

$$\mathcal{D}(_)_! : \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs},F}_{/S} \longrightarrow \mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}$$

其将有限型态射 $f : X \to Y$ 发送为函子 $f_! : \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$。我们将 $f_!$ 的右伴随记为 $f^!$。

(3) 对于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中所有有限型的 $f : X \to Y$，都存在一个自然变换$f_! \to f_*$，并且当 f 为真时，该自然变换是一个等价。
(4) 对于所有相对维数为 d 的光滑态射 $f : X \to Y$，都存在自然等价 $f^* \xrightarrow{\sim} f^!(-d)[-2d]$。这里 $(_)$ 表示 Tate 扭曲，$[_]$ 表示悬挂。

(5)（基变换）对于任意笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中，其中 f 为有限型，存在自然等价

$$g^* f_! \xrightarrow{\sim} f'_! g'^*,$$
$$g'_* f'^! \xrightarrow{\sim} f^! g_*.$$

(6)（投影公式）对于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中任意有限型态射 $f : X \to Y$，存在典范等价。

$$(f_! A) \otimes B \xrightarrow{\sim} f_!(A \otimes f^* B),$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, B) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! B),$$
$$f^! \underline{\mathrm{Hom}}(A, C) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, f^! B)$$

对于所有 A，C 属于 $\mathrm{D}(X)$ 且 B 属于 $\mathrm{D}(Y)$。
(7)（局部化序列）考虑一个闭浸入 $i : Z \to X$，其开补 $j : U \to X$ 属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$。那么存在如下（余）纤维序列

$$j_! j^! \xrightarrow{\text{counit}} \mathrm{id} \xrightarrow{\text{unit}} i_* i^*$$

and

$$i_! i^! \xrightarrow{\text{counit}} \mathrm{id} \xrightarrow{\text{unit}} j_* j^*.$$

动机 ∞-范畴还满足若干其他性质，例如切除、下降和纯性。更多细节请参阅 [Kha21, §2] 。

1.1.2. 事实上，上文（5）中的自然变换是更一般形式体系的特例：考虑一个自然变换

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{c} & F \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \overset{\alpha}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle d} \\ G & \xrightarrow[b]{} & H \end{array}$$

它是 ∞-范畴之间的函子，并假设 a 和 d 存在左伴随，分别记为 $a^\star$ 和 $d^\star$。由此，我们可以构造一个自然变换

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a^\star} & E \\ {\scriptstyle b}\downarrow & \overset{\mathrm{Ex}_\alpha}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle c} \\ H & \xrightarrow[d^\star]{} & F \end{array}$$

通过定义 Ex_α 为复合

$$d^\star b \xrightarrow{\mathrm{unit}} d^\star baa^\star \xrightarrow{\mathrm{id}\,\alpha\,\mathrm{id}} d^\star dca^\star \xrightarrow{\mathrm{counit}} ca^\star.$$

我们称 Ex_α 为相应的交换映射。交换映射的构造具有如下粘贴性质：考虑两个形如

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{c} & F & \xrightarrow{e} & I \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \overset{\alpha}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle d} & \overset{\beta}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle g} \\ G & \xrightarrow[b]{} & H & \xrightarrow[f]{} & J, \end{array}$$

其中 a, d 和 g 都有左伴随，分别记为 $a^\star, d^\star$ 和 $g^\star$。那么

$$\begin{array}{ccc} g^\star fb & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^{\beta\circ\alpha}} & eca^\star \\ & {\scriptstyle \mathrm{Ex}_\beta\, b}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle e\,\mathrm{Ex}_\alpha} & \\ & ed^\star b & \end{array}$$

交换（见 [CD19，1.1。7]）。

1.2. Étale 动机

1.2.1. 设 X 为一个概形，Λ 为一个环，并记 $\mathrm{D}(\Lambda) := \mathrm{Mod}_{H\Lambda}(\mathrm{Spt})$。这里 $H\Lambda$表示与 Λ 相关联的 Eilenberg–Mac Lane 谱，而 $\mathrm{Mod}_{H\Lambda}(\mathrm{Spt})$ 表示谱的 ∞-范畴中 $H\Lambda$-模的 ∞-范畴。注意，根据 Schwede-Shipley 定理（见 [Lur17a, 7.1.2.1]），$\mathrm{D}(\Lambda)$ 实际上等价于 Λ-模的无界导出 ∞-范畴。令 Sm/X 表示 X 上的光滑概形范畴，并记作

$$\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) := \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}) \otimes \mathcal{D}(\Lambda),$$

其中 $_ \otimes \mathcal{D}(\Lambda)$ 表示可呈现 ∞–范畴的 Lurie 张量积（参见 [Lur17a，§4.8。1]）。典范的保余极限函子$\mathrm{Spc} \to \mathcal{D}(\Lambda)$ 诱导出一个米田函子

$$\mathrm{y}_\Lambda : \mathrm{Sm}_{/X} \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}) \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)).$$

$\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}{}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))$ 是 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))$ 的全子范畴，由那些相对于 étale 超覆盖局部的对象 F 构成。其包含映射

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) \subset \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))$$

由 [Lur17b，5.5.4.15] 可得一个左伴随，记作 $L_{\text{ét}}$。若元素 F 属于 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}{}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))$，且对 Sm/X 中的$\mathbb{A}^1$-投影 $\pi_Y : \mathbb{A}^1_Y \to Y$，$\mathrm{F}(\pi_Y) : \mathrm{F}(Y) \to \mathrm{F}(\mathbb{A}^1_Y)$ 是等价，则称 F 为 $\mathbb{A}^1$-不变的。我们将 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 定义为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}{}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))$ 中由 $\mathbb{A}^1$-不变对象构成的全子范畴。同样，包含

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \subset \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))$$

由 [Lur17b，5.5.4.15] 可得一个左伴随， $L_{\mathbb{A}^1}$我们将其记作。记与一个 Y 在Sm/X 中的对象相关联的动机，通过

$$\mathrm{Sm}_{/X} \xrightarrow{\mathrm{y}_\Lambda} \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda) \xrightarrow{L_{\text{ét}}} \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) \xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1}} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

由 $\Lambda(Y)$ 给出。

1.2.2. $\mathrm{D}(\Lambda)$ 是对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{D}(\Lambda)^\otimes$ 的底层 ∞-范畴，且配备了一个典范对称幺半函子

$$\mathrm{Spc}^\times \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathrm{Spt}^\otimes \longrightarrow \mathcal{D}(\Lambda)^\otimes \tag{1.2.2.1}$$

由可呈示 ∞-范畴组成，其中 Spc 配备笛卡尔幺半结构，Spt 配备其 smash product（如 [Lur17a, §4.8.2] 中所定义）。常值层函子$\Gamma^* : \mathrm{Spc} \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X)$ 保持有限极限，因此赋予 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X)^\times$ 一个 $\mathrm{Spc}^\times$-代数结构，使其成为 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{P}r^L)$ 中的对象。根据 [Lur17a, 4.5.3.1] ，对称幺半函子 (1.2.2.1) 诱导出一个对称幺半函子

$$_ \otimes \mathcal{D}(\Lambda) : \mathrm{Mod}_{\mathrm{Spc}^\times}(\mathcal{P}r^L)^\otimes \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{D}(\Lambda)^\otimes}(\mathcal{P}r^L)^\otimes.$$

$\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X)$ 的对称幺半结构由一个函子表示

$$\mathrm{Fin}_* \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{Spc}^\times}(\mathcal{P}r^L)^\otimes$$

在 Fin_* 上。复合

$$\mathrm{Fin}_* \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{Spc}^\times}(\mathcal{P}r^L)^\otimes \xrightarrow{-\otimes\mathcal{D}(\Lambda)} \mathrm{Mod}_{\mathcal{D}(\Lambda)^\otimes}(\mathcal{P}r^L)^\otimes$$

在 Fin_* 上定义了 $\mathrm{P}r^L$ 中的一个 $\mathrm{D}(\Lambda)$-代数，我们将其记为 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))^\otimes$。由构造可知，其底层的 ∞-范畴是 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))$。由 [Lur17a, 2.2.1.9] 可知，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}\text{ét}\,(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))$ 是一个对称幺半 ∞- 范畴 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}\text{ét}\,(\mathrm{Sm}/X, \mathrm{D}(\Lambda))^\otimes$ 的底层 ∞- 范畴，使得层化函子提升为一个函子

$$L^\otimes_{\text{ét}} : \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))^\otimes \longrightarrow \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))^\otimes$$

的对称幺半 ∞-范畴。同样， $L_{\mathbb{A}^1}$ 也存在一个提升

$$L^\otimes_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))^\otimes \to \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)^\otimes$$

为对称幺半 ∞-范畴之间的函子。

1.2.3. 单位截面 $1 : X \to \mathbb{G}_{m,X}$ 诱导出一个态射

$$\Lambda(X) \to \Lambda(\mathbb{G}_{m,X}) \tag{1.2.3.1}$$

在 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 中。我们将 $\Lambda(1)$ 记为满足以下条件的对象： $\Lambda(1)[1]$ 是 (1.2.3.1) 的余纤维，并称其为*Tate* 对象。我们将带有 Λ 系数的 *étale* 动机范畴定义为图表的余极限

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \dots$$

由偏序集 $\mathbb{N} = \{0 \to 1 \to 2 \to \dots\}$ 在 ∞ 范畴 $\mathrm{P}r^L$ 中给出，并将其记为 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$。我们写出

$$\Sigma^\infty : \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

对于由典范函子诱导到上述 $\mathbb{N}$-指标图表的第 0 层的函子。稍微滥用一下记号，对于任意 Y in Sm/X，我们仍将对象 $\Sigma^\infty(\Lambda(Y))$ 记为 $\Lambda(Y)$。由于对象 $\Lambda(1)$ 是对称的（见 [Voe98, 4.4] 和 [Rob15, 2.16]），我们得到 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 带有一个对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)^\otimes$，使得 Σ^∞ 可提升为一个对称幺半函子（见 [Rob15, 2.2, 2.22]）。与 [Rob15, §2.4] 中一样，容易验证，$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 的同伦范畴连同其诱导的幺半结构，等价于 [Ayo14] 中所考虑的对称幺半三角范畴。

1.2.4. 对于任意概形映射 $f: X \to Y$，函子

$$_ \times_Y X : \mathrm{Sm}_{/Y} \longrightarrow \mathrm{Sm}_{/X}$$

通过前复合诱导函子

$$f_{\mathrm{PSh}\,*} : \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/Y}, \mathcal{D}(\Lambda))$$

它有一个左伴随

$$f^*_{\mathrm{PSh}} : \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/Y}, \mathcal{D}(\Lambda)) \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))$$

由左 Kan 延拓给出。由于 $_ \times_X Y$ 与有限积交换，其 Kan 延拓f^*_{PSh} 提升为对称幺半函子。函子 $_ \times_Y X$ 保留 étale 超覆盖，并将 $\mathbb{A}^1$-投影映射为 $\mathbb{A}^1$-投影。因此， $f_{\mathrm{PSh}\,*}$ 限制为一个函子

$$f_{\mathrm{eff}\,*} : \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda).$$

定义

$$f^*_{\mathrm{eff}} : \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$$

作为复合

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda) \xrightarrow{f^*_{\mathrm{PSh}}|_{\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)}} \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) \xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1} \circ L_{\text{ét}}} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda).$$

那么 f^*_{eff}是 $f_{\mathrm{eff}\,*}$的左伴随。由于 $L_{\text{ét}}$和 $L_{\mathbb{A}^1}$是对称幺半函子（见 1.2.3），我们可以推 deduce 出 $f^*{}_{\mathrm{eff}}$是对称幺半函子。结合 $f^*{}_{\mathrm{eff}}\Lambda(1) \simeq \Lambda(1)$这一事实，我们看到两个左伴随 f^*_{eff}和 $_ \otimes \Lambda(1)$ 可交换。因此根据 [Rob15，2.9，2。22]f^*_{eff} 诱导出一个函子

$$f^* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$$

在 $\mathcal{P}r^L$ 中，使得 $\Sigma_\infty \circ f^*_{\mathrm{eff}} \simeq f^* \circ \Sigma_\infty$，并且还提升为一个对称幺半函子。我们将 f^* 的右伴随记为 f_*。当 $f: X \to Y$光滑时，我们可以按照 [Kha21，1.23，1。26] 中的论证证明 f^* 具有一个左伴随 $f_\#$，满足光滑基变换和投影公式。

1.2.5. 设 S 是一个拟紧拟分离概形。仿照 [Rob14，§9.1，第 1 步）] 可以使 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_, \Lambda)$ 的构造函子化，即我们可以构造一个∞-范畴的函子

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda) : (\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}) \tag{1.2.5.1}$$

它将态射 $f: X \to Y$映为

$$f^* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda).$$

从上述观察中可以立即看出，这是一个 $(*,\#\ \otimes)$-形式体系，如 [Kha21，定义 2 中所定义。2]. 此外，可以证明 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda)$ 满足 Voevodsky

条件（参见 [Kha21，2。4]）类似于 [Kha21，2。5]。特别是 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\ \Lambda)$ 是一个动机 ∞-范畴，定义在 S 其意义与 1.1.1 中的定义一致。

1.2.6. 我们可以调整 [LZ12] 中的步骤 (3.3)-(3.8)，以便将 (1.2.5.1) 扩展为一个函子

$$\delta^*_{2,\{2\}}(((\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{\mathrm{op}})^{\sqcup,\mathrm{op}})^{cart}_{F,all} \longrightarrow \mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}} \tag{1.2.6.1}$$

(使用同上引文的记号）其中 F 表示局部有限型分离态射的集合。利用 [LZ12第 §4] 节中发展的下降机制，我们可以进一步将（1.2.6.1）扩展为一个函子

$$\delta^*_{2,\{2\}}(((\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{\mathrm{op}})^{\sqcup,\mathrm{op}})^{cart}_{F',all} \longrightarrow \mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}} \tag{1.2.6.2}$$

其中 F' 表示局部有限型但不一定分离的态射集合。将（1.2.6.2）限制到第一个方向并遗忘幺半群结构，便得到一个函子

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda)_! : \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs},F'}_{/S} \longrightarrow \mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}, \tag{1.2.6.3}$$

其中 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs},\ F'\ /S}$ 表示 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}\ /S}$ 的子范畴，该子范畴由局部有限型态射组成。该函子将局部有限型态射 $f : X \to Y$ 发送到例外推前】【。

$$f_! : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda).$$

我们将 $f_!$ 的右伴随记为 $f^!$。同样，很容易验证，当限制到拟射影态射时，由 f^*、f_*、$f^!$ $f_!$在同伦范畴上诱导的函子等价于 [Ayo14]中定义的函子。

六函子 f^*、f_*、$f^!$ $f_!$、$\otimes$ 以及$\mathrm{Hom}(_,_)$ 满足各种性质和相容性，例如 [Kha21, §2]中对此有讨论。

注 1.2.7. (1) 设 X 是一个概形。若在上述 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 和 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 的构造中，将 $\mathrm{D}(\Lambda)$ 替换为 Spt，我们便得到 SH^{S^1} ét (X) 和 $\mathrm{SH}_{\text{ét}}(X)$（例如 [Bac21] 中所讨论的）。$\mathrm{SH}_{\text{ét}}(X)$ 称为 étale 动机稳定同伦范畴。与上述构造一样，该构造可以函子化，从而得到一个函子

$$\mathbf{SH}_{\text{ét}}(_) : (\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}). \tag{1.2.7.1}$$

（2）存在一个典范等价

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) \simeq \mathbf{SH}_{\text{ét}}(X) \otimes \mathcal{D}(\Lambda).$$

事实上，由于 Lurie 张量积与局部化的相容性良好（见 [Lur17a，4.8.1.15] 的S^1 证明），我们看到 $\mathbf{SH}^{S^1}$ ét $(X)\otimes\mathrm{D}(\Lambda)$ 和 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 在 $\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X,\mathrm{D}(\Lambda)) \simeq \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/X,$ Spt) $\otimes\,\mathrm{D}(\Lambda)$ 中对应于相同的子范畴。我们将 Sm/Y 中一个 Ya 在 $/Y$ 下的像记为

$$\mathrm{Sm}_{/X} \overset{\mathrm{Yoneda}}{\longrightarrow} \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X},\mathrm{Spt}) \overset{L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{ét}}}{\longrightarrow} \mathbf{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X)$$

作者： $\mathbb{S}$（Y）并定义 Tate 扭曲 $\mathbb{S}$（1），其定义类似于1.2.3。$\mathrm{P}r^L$中的典范对称幺半函子 $\mathrm{Spt} \to \mathrm{D}(\Lambda)^{\mathrm{st}}$ 诱导出一个对称幺半

函子 $\mathbf{SH}^{S^1}{}_{\text{ét}}(X) \to \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}(X, \Lambda)$ in $\mathrm{Pr}^{L,\,\mathrm{st}}$ 它将 $\mathbb{S}(1)$ 映射为 $\Lambda(1)$。因此，我们得到一条等价链

$$\begin{aligned}\mathbf{SH}_{\text{ét}}(X) \otimes \mathcal{D}(\Lambda) &\simeq \left(\mathrm{colim}_{\mathbb{N}}(\mathbf{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X) \xrightarrow{-\otimes\mathbb{S}(1)} \dots)\right) \otimes \mathcal{D}(\Lambda) \\ &\simeq \mathrm{colim}_{\mathbb{N}}\left(\mathbf{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X) \otimes \mathcal{D}(\Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \dots\right) \\ &\simeq \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda).\end{aligned}$$

(3) 事实上，在上述构造中，可以将 $\mathbf{D}(\Lambda)$ 替换为任意 E_∞-环 A 对应的 $\mathbf{Mod}_A(\mathrm{Spt})$，从而得到一个取值于 E_∞-环的 étale 动机理论。由于下文不会用到这一点，为避免混淆，我们选择将讨论范围限制在普通环上。

1.2.8. 范畴 ∞-范畴Spt 带有一个 t-结构，其心等价于阿贝尔群的普通范畴（参见 [Lur17a,1.4.3.6]）。因此存在一个典范的全忠实函子

$$H : \mathrm{CRing} \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{Spt})$$

它将一个环映射到其 Eilenberg–Mac Lane 谱。考虑复合

$$\mathcal{D}(_) : \mathrm{CRing} \xrightarrow{H} \mathrm{CAlg}(\mathrm{Spt}) \xrightarrow{\mathrm{Mod}_{_}(\mathrm{Spt})} \mathrm{CAlg}(\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}), \tag{1.2.8.1}$$

其中，第二个函子由 [Lur17a,4.5.3.1] 中余笛卡尔纤维化的直化得到。该函子将环同态 $\rho : \Lambda \to \Lambda'$ 映射为一个对称幺半函子

$$\rho^* : \mathcal{D}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{D}(\Lambda')$$

在 $\mathrm{Pr}^{L,\,\mathrm{st}}$ 由此得到一个对称幺半系数变更函子

$$\rho^* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \simeq \mathbf{SH}_{\text{ét}}(X) \otimes \mathcal{D}(\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\rho^*} \mathbf{SH}_{\text{ét}}(X) \otimes \mathcal{D}(\Lambda') \simeq \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda')$$

在 $\mathrm{Pr}^{L,\,\mathrm{st}}$。

1.2.9. 令 $\text{Ét}/X$ 表示 X 上有限型 étale 概形的范畴。对于一个环 Λ 和一个概形 X，记 $\mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 为与阿贝尔范畴 ∞–相关联的无界导出 $\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\text{Ét}/X, \Lambda)$ 范畴，其中包含 $\text{Ét}/X$ 上取值于 Λ 的 étale 层。根据 [Lur18, 2.1.2.2]，存在一个典范等价

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\text{Ét}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))$$

对称幺半稳定可呈现 ∞-范畴。因此，étale site 的典范态射

$$\gamma : (\text{Ét}_{/X}, \text{ét}) \to (\mathrm{Sm}_{/X}, \text{ét})$$

诱导出一个对称幺半且保持余极限的函子

$$\iota^* : \mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \simeq \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\text{Ét}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) \xrightarrow{\gamma^*} \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda)) \xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1}} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

between stable presentable ∞-categories.

定理 1.2.10（刚性）。设 X 是一个局部诺特概形，n 是一个在 $\mathcal{O}(X)$ 中可逆的正整数，且 Λ 是满足 $n\Lambda = 0$ 的环。那么

$$\iota^* : \mathcal{D}_{\acute{e}t}(X, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X, \Lambda)$$

是等价关系。

证明。很容易从 [Bac21] 推导出一个不同于 [Ayo14, 41]中所给证明的证明。为完整起见，我们简要说明其推导过程。我们将直接使用 [Bac21]中的记号。

记作 $\omega^* := L_{\mathbb{A}^1} \circ \gamma^*$。étale 上同调的 $\mathbb{A}^1$- 不变性（见 [CD16, 1.3.2]）意味着

$$\omega^* = L_{\mathbb{A}^1} \circ \gamma^* : \mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

是完全忠实的。我们声称 $\Lambda(1)$ 在 $\mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 中已经是张量可逆的。这意味着

$$\Sigma^\infty : \mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

是一个等价。特别地， ι^* 是完全忠实的。

只需处理 $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的情形。考虑态射

$$e_n : \mathbb{G}_{m,X} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,X}$$

通过提升到 n 次幂给出，并令 $q : \mathbb{G}_{m,X} \to X$ 为投影。根据 [Bac21, 3.11] e_n 是一个典范的 μ_n 主齐性空间，沿单位映射 $1 : X \to \mathbb{G}_{m,S}$拉回后变为平凡。特别地，主齐性空间 e_n 由 $\tilde{\sigma}_n$ 中的一个元素分类，其中 $H^1_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,X}, \mu_n) \simeq \pi_0$ 映射$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S},\Lambda)(1, \mu_n[1])$。映射 $\tilde{\sigma}_n$经由 ω^* 被映为 $\mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,X}, \Lambda)$ 中的一个态射 $\mathbb{1} \to \omega^*\mu_n[1] \simeq q^*\omega^*\mu_n[1]$，它对应于 $\mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 中的一个映射 $\Lambda(\mathbb{G}_{m,X}) \to \omega^*\mu_n[1]$，使得复合

$$\Lambda(X) \longrightarrow \Lambda(\mathbb{G}_{m,X}) \longrightarrow \omega^*\mu_n[1]$$

由单位映射诱导的映射等价于零态射。特别地，我们得到一个映射$\Lambda(1)[1] \to \omega^*\mu_n[1]$ 我们将其记为 σ_n。由于 μ_n 在$\mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$中是张量可逆的，且和$\omega^*$ 是对称幺半的，因此只需证明 σ_n 是一个等价。我们可以将其拉回到 X 的严格局部化后进行检验，因此由 X 和 [CD16, 1.1.5] 的局部诺特性，我们可以假设 X 具有一致有限 étale 上同调维数。

令 ℓ^k 为整除 n的最大素数幂。上述 σ_n 的构造与沿环映射 $\rho_{\ell^k} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$ 的系数变换相容，即$\rho^*_{\ell^k}\sigma_n \simeq \sigma_{\ell^k}$。函子族 $\rho^*_{\ell^k}$（其中 ℓ^k 遍历整除 n 的最大素数幂）是保守的。因此，我们可以假设 $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$，其中 ℓ为在 $\mathrm{O}(X)$ 中可逆的素数。

考虑映射 $\sigma : \mathbb{1}(1)[1] \to \hat{}\mathbb{1}_p(1)[1]$ 属于 $\mathbf{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X)^\wedge_\ell$，其定义见 [Bac21 开头的 §6]。根据 [Bac21, 6.6] σ 是一个等价。典范函子 $_ \otimes H\Lambda : \mathrm{Spt} \to \mathcal{D}(\Lambda)$ 诱导出一个函子

$$\rho^*_\Lambda : \mathbf{SH}^{S^1}_{\text{ét}}(X)^\wedge_\ell \longrightarrow \mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda).$$

这里我们用到了 $\mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)^\wedge_\ell \simeq \mathrm{DA}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$，因为 $\ell^k\Lambda = 0$。我们断言 $\rho^*_\Lambda\sigma$ 和 σ_{ℓ^k}等价。这由以下事实可得：根据 [Bac21, 4.5]，两个映射都将主齐性空间 e_{ℓ^k}分类。

$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 中的每个对象都可以写成形如 $p_*\mathbb{1}(n)$ 的对象的余极限，其中 p 为真且 $n \in \mathbb{Z}$ （参见 [Ayo07a, 2.2.23] ）。如同在 [CD16, 4.4.3] 中那样，可以推得 ι^* 与 p_* 交换，其中 p 为真。此外，我们在上文已证明，对于 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathbb{1}(n)$ 属于 ι^* 的像。综合这些结果可知， ι^* 本质满，因此是一个等价。□

1.2.11. 设 X 为一个诺特概形，并用 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/X}$ 表示 X 上的有限型概形范畴。$\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/X}$ 上的 h-拓扑是指其覆盖由泛拓扑满态射构成的格罗滕迪克拓扑（参见 [Voe96, 3.1.2]）。令 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_h(\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/X}, \mathrm{D}(\Lambda))$ 表示 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/X}$ 上取值于 $\mathrm{D}(\Lambda)$ 的 ∞-范畴 h-超层，并将 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_h(X,\Lambda)$ 记为由 $\mathbb{A}^1$-不变对象构成的全子范畴。包含态射

$$\underline{\mathrm{DM}}^{\mathrm{eff}}_h(X,\Lambda) \subset \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_h(\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/X}, \mathcal{D}(\Lambda))$$

存在一个左伴随 $L_{\mathbb{A}^1}$，并且我们可以类似于 $\Lambda(1)$ 中那样定义对象 Λ1.2.3。令$\mathrm{DM}_h(X,\Lambda)$ 表示该图表的 $\mathbb{N}$-指标余极限

$$\underline{\mathrm{DM}}^{\mathrm{eff}}_h(X,\Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \underline{\mathrm{DM}}^{\mathrm{eff}}_h(X,\Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \underline{\mathrm{DM}}^{\mathrm{eff}}_h(X,\Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \dots$$

在 Pr^L 中，并将其记为 $\mathrm{DM}_h(X,\ \Lambda)$，它是包含形如 $\Lambda(Y)(n)$ 的对象（对所有 $Y \to X$ 光滑且 n 属于 $\mathbb{Z}$）并且对小余极限封闭的最小全稳定子范畴。位点的交换图

$$\begin{array}{ccc} & (\text{Ét}/_X, \text{ét}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ (\mathrm{Sm}/_X, \text{ét}) & \longrightarrow & (\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/X},\ h) \end{array}$$

诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \\ {\scriptstyle \iota^*}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \iota_h^*} \\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{DM}_h(X,\Lambda) \end{array} \tag{1.2.11.1}$$

在 $\mathrm{Pr}^{L,\ \mathrm{st}}$ 中。如 1.2.3 中所述，我们可以在 $\mathrm{DM}_h(X,\ \Lambda)$ 上赋予对称幺半结构，并将上面的图提升为 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{L,\ \mathrm{st}})$ 中的图。注意，对于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中的任意 $f: X \to Y$，φ^* 的构造都与 f^* 相容；对于 f 光滑的 $f_\#$，同样如此。

命题 1.2.12。设 X 是一个拟紧拟分离概形，Λ 是一个 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-代数，其中 $N = p^r$ 对某个素数 p 和正整数 r 成立。记 $X[1/p] := X \times_{\mathrm{Spec}\, Z} \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[1/p]$，并记 $j: X[1/p] \to X$ 为典范开浸入。则

$$j^*: \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X[1/p],\Lambda)$$

and

$$j^*: \mathrm{DM}_h(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DM}_h(X[1/p],\Lambda)$$

是范畴等价。

证明。这是 [CD16，A.3。4]。 □

1.2.13. 完全类似于 1.2.8，对于环同态 $\rho: \Lambda \to \Lambda'$我们得到一个对称幺半系数变更函子

$$\rho^*: \mathrm{DM}_h(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DM}_h(X,\Lambda')$$

在 $\mathrm{Pr}^{L,\mathrm{st}}$ 它与 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}$ 中的函子相容，具体而言

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{DM}_h(X,\Lambda) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^*} \\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda') & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{DM}_h(X,\Lambda') \end{array}$$

交换。

1.2.14. 给定一个环 Λ，我们将 $\rho_{\mathbb{Q}} : \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 和 $\rho_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} : \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 记作典范环态射，其中 ℓ 遍历所有素数构成的集合。

定理 1.2.15. 设 X 为一个有限维诺特概形。那么函子

$$\varphi^* : \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DM}_h(X,\Lambda)$$

是等价。更进一步，当限制到有限维诺特概形时，它与六种运算交换。

证明。 我们采用 [CD16，5.5 节中的论证。7]。首先注意，只需考虑 $\Lambda = \mathbb{Z}$ 这一情形，因为我们可以通过应用 φ^* $\mathrm{D}\mathcal{D}(\Lambda)$，由此情形得到 φ^*。由于 $f_\#$ 与光滑的 f 相容，且与小余极限交换，因此根据 $\mathrm{DM}_h(X,\ \Lambda)$ 的定义可立即得出 φ^* 是本质满的。因此，只需证明阿贝尔群之间的同态

$$\pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z})}(M,N) \longrightarrow \pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Z})}(\varphi^* M, \varphi^* N)$$

对于所有 M in $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)$ 和 N in $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$，它是一个同构。存在等价关系。

$$\pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Z})}(M,N)/\ell \xrightarrow{\sim} \pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}(\rho^*_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} M, \rho^*_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} N)$$

作者 [CD16，5.4。5] 和

$$\pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Z})}(M,N) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Q})}(\rho^*_{\mathbb{Q}} M, \rho^*_{\mathbb{Q}} N)$$

由 [CD16，5.4.9]。很容易调整这些证明，从而得出 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}$ 的相应结论。由于 φ^* 与系数变换相容，因此只需证明对于 $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，$\varphi^*$ 是一个等价，其中 ℓ 遍历所有素数，以及对于$\Lambda = \mathbb{Q}$的情形。 $\Lambda = \mathbb{Q}$ 的情形由 [CD16，5.2.2] 和 [CD19，16.2.18]得出：两边都等价于 Beilinson 动机。对于 $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的情形，注意到根据命题 1.2.12，我们可以假设 ℓ 在 $\mathrm{O}(X)$ 中可逆。因此，该结论由三角形 (1.2.11.1) 得出，因为根据定理 1.2.10 和 [CD16，5.5.4]，两个对角箭头分别都是等价。最后一句显然成立，因为 φ 是对称幺半的，并且对于所有 f，它都与 f^* 交换；对于光滑的 f，它也与 $f_\#$ 交换。□

命题 1.2.16。 设 Λ 是一个平坦的 $\mathbb{Z}$-代数，且 X 是一个有限维诺特概形。那么函子族

$$\rho^*_{\mathbb{Q}} : \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$
$$\rho^*_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} : \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}),$$

是保守的，其中 ℓ 遍历所有素数的集合。

证明。 由于 φ^* 在定理1.2.15 中是一个与系数变换相容的等价，我们可以应用 [CD16，5.4。12]。 □

定义 1.2.17。令 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X,\ \Lambda) \subset \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\ \Lambda)$ 为由形如 $\Lambda(Y)(n)$ 的对象（对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $f : Y \to X$ 属于 Sm/X）组成的最小幂等完备全稳定子范畴。若元素 A 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\ \Lambda)$ 可构造，则称其为可构造的。

定理 1.2.18. 设 $f : X \to Y$ 是概形的一个态射，Λ 是任意环。对于六函子作用下的可构造对象，我们有以下稳定性性质：

(1) f^* 保持可构造性。*(2)* 当 f 是拟紧拟分离概形之间的有限型态射时，$f_!$ 保持可构造性。*(3)* 当 f 是有限维拟优良诺特概形之间的有限型态射时，f_* 和 $f^!$ 保持可构造性。*(4)* 若 M、N 属于 $\mathrm{DA}_{ét}^{\mathrm{cons}}(X, \Lambda)$，则 $M \otimes N$ 是可构造的。*(5)* 若 M、N 属于 $\mathrm{DA}_{ét}^{\mathrm{cons}}(X, \Lambda)$，且 X 是有限维拟优良诺特概形，则 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 是可构造的。

证明。 命题 (1)、(2) 和 (4) 是标准结果，例如可见 [Kha21,2.56, 2.60]。命题 (3) 和 (5) 见 [CD16, 6.2。14] 对于 h-动机，这由定理 1.2.15 推出 étale 动机的对应结论。□

1.2.19。设 S 是一个严格局部诺特概形。根据 [CD16，1.15]，任意 $f : X \to S$ 上的有限型 S 概形的 étale 上同调维数有限，且 X 的剩余域具有一致有限 étale 上同调维数。由此可得以下结论：

命题1.2.20。设 S 是一个严格局部诺特概形，且 $f : X \to S$ 是一个有限型态射。那么，M 是$\mathrm{DA}_{ét}(X, \Lambda)$ 中的一个对象，当且仅当它是可构造的，当且仅当它是紧的。特别地，若 $h : X \to Y$ 是有限型概形之间的一个态射，则 h_* 和 $h^!$ 保小余极限。

证明。第一部分见 [CD16，5.2。4]。最后一句是第一部分的一个直接推论：由于 $h_!$ 和 h^* 根据定理1.2.18 保紧对象，因此容易验证它们的右伴随与小余极限可交换。□

注 1.2.21. 在下文中，我们几乎只讨论基底概形 S上的概形，其中 S 是一个严格亨泽尔离散赋值环的谱。定理 1.2.18 告诉我们，若要保持可构造性，就必须要求 S 具有优良性。此外，若要由可构造对象紧生成，命题 1.2.20 告诉我们，必须考虑有限型概形 S 上的概形。

注记 1.2.22. 设定一个准紧准分离基概形 S。在 1.2.8 中构造的系数变换函子，与对 $f : X \to Y \in \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 形成 f^* 这一操作交换。我们可以用一个函子来表示这一点：

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_, _) : (\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}_{/S}) \times \mathrm{CRing} \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}), \tag{1.2.22.1}$$

它在固定环 Λ 时限制为（1.2.5.1）。

事实上，给出一个函子 $F : \mathrm{C} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{P}r^{L,\mathrm{st}})$，其中 C 是一个具有余积的 ∞-范畴，等价于给出一个 ∞-运算子间的映射 $\tilde{F} : \mathrm{C}^{\amalg} \to (\widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty)^\times$，它经由 $(\mathrm{P}r^{L,\mathrm{st}})^\otimes \subset (\widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty)^\times$ 分解；参见 [Lur17a, 2.4.3.18]。因此，(1.2.7.1) 和 (1.2.8.1) 分别导出无穷运算子间的映射 $(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}{}_{/S})^{\amalg} \to (\widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty)^\times$ 和 $\mathrm{CRing}^{\amalg} \to (\widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty)^\times$。等价地，根据……，它们导出弱笛卡尔结构 $(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}{}_{/S})^{\amalg} \to \widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty$ 和 $\mathrm{CRing}^{\amalg} \to \widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty$。

[Lur17a，2.4.1。7]。给定两个 ∞-范畴$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，我们注意到，根据泛性质（参见 [Lur17a，2.4.3。1]），存在一个单纯集合的典范映射 $(\mathcal{C}\times\mathcal{D})^{\amalg}\to\mathcal{C}^{\amalg}\times\mathcal{D}^{\amalg}$，使得图表

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{C}\times\mathcal{D})^{\amalg} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\amalg}\times\mathcal{D}^{\amalg}\\ \downarrow{\scriptstyle p_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathcal{C}}\times p_{\mathcal{D}}}\\ \mathrm{Fin}_* & \xrightarrow{\Delta} & \mathrm{Fin}_*\times\mathrm{Fin}_*\end{array}$$

可交换。考虑复合

$$(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}_{/S}\times\mathrm{CRing})^{\amalg}\xrightarrow{(1)}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}_{/S})^{\amalg}\times\mathrm{CRing}^{\amalg}\xrightarrow{(2)}\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty\times\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty\xrightarrow{(3)}\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty,$$

其中，(1) 是上文所考虑的典范映射，(2) 分别是与 (1.2.7.1) 和 (1.2.8.1) 相关联的弱笛卡尔结构的乘积，(3) 则是由$\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 的笛卡尔幺半结构给出的乘积。不难看出，这是一个弱笛卡尔结构，且相应的 ∞-operad 映射 $(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}{}_{/S}{}^{\times}\mathrm{CRing})^{\amalg}\to(\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty)^{\times}$经由 $(\mathrm{Pr}^{L,\mathrm{st}})^{\otimes}$ 分解。由此得到所需的函子 (1.2.22.1)。

对于态射 $f:X\to Y$属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 以及环的态射 $\rho:\Lambda\to\Lambda'$，由（1.2.22.1）所体现的函子性导出一个等价

$$\rho^*f^*\xrightarrow{\sim}f^*\rho^*$$

从而得到一个相应的交换映射

$$\rho^*f_*\longrightarrow f_*\rho^*.$$

如1.2.5 中所述，我们可以应用 [LZ12, §3, §4] 中发展的形式体系，以便将（1.2.22.1）扩展为一个函子

$$\delta^*_{2,\{2\}}(((\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{\mathrm{op}}\times\mathrm{CRing})^{\sqcup,\mathrm{op}})^{cart}_{F',all}\longrightarrow\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}},\tag{1.2.22.2}$$

其中 F' 表示局部有限型态射的集合。将（1.2.22.2）限制在第一个方向并遗忘幺半群结构，便得到一个函子

$$\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(_,_)_!:\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs},F'}_{/S}\times\mathrm{CRing}\longrightarrow\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st}}.\tag{1.2.22.3}$$

特别地，对于 $f:X\to Y$ 中一个$\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 的局部有限型态射以及一个环同态 $\rho:\Lambda\to\Lambda'$，（1.2.22.3）的函子性给出一个自然等价

$$\rho^*f_!\xrightarrow{\sim}f_!\rho^*.$$

我们可以将交换映射与这个自然等价相联系

$$\rho^*f^!\longrightarrow f^!\rho^*.$$

命题 1.2.23。 考虑一个环同态 $\rho:\Lambda\to\Lambda'$。

(1) 设 $f:X\to Y$ 是有限维诺特概形之间的有限型态射。那么比较映射

$$\rho^*f_*M\longrightarrow f_*\rho^*M$$

and

$$\rho^*f^!N\longrightarrow f^!\rho^*N$$

上面构造的映射对于所有 M*in* $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$ 和 N*in* $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(Y,\Lambda)$都是等价。

(2) 设 X 是一个有限维诺特概形，M *in* $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)$ 且 N *in*$\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$。则比较映射

$$\rho^*\,\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)\longrightarrow\underline{\mathrm{Hom}}(\rho^*M,\rho^*N)$$

由.....转置得到

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)\to\underline{\mathrm{Hom}}(M,\rho_*\rho^*N)\simeq\rho_*\,\underline{\mathrm{Hom}}(\rho^*M,\rho^*N)$$

是一个等价。

证明。（1）可按照 [Ayo14，6。3] 中的方法证明，其中利用 [CD16，5.5。10]，即可省去关于上同调维数的假设。只需证明 $M=f_\#\mathbb{1}$ 在 $f:W\to X$对某个光滑的.....成立时，（2）成立。此时，（2）归结为证明比较映射 $\rho^*f_*f^*N\to f_*f^*\rho^*N$ 是一个等价，而这由（1）可知成立。□

定义 1.2.24. 设 X 是一个局部诺特概形，Λ 是一个环，$J\subset\Lambda$ 是一个理想，且 Λ/J 具有正特征，该特征在 $\mathsf{O}(X)$ 中可逆。记 ρ_J 为典范环映射 $\Lambda\to\Lambda/J$。我们称复合

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,J}:\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\xrightarrow{\rho_J^*}\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda/J)\xrightarrow{(\iota^*)^{-1}}\mathcal{D}_{\text{ét}}(X,\Lambda/J)$$

the模 J *étale* 实现函子。

注 1.2.25。 在命题 $\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,J}$ 的温和条件下，该构造与六函子交换。1.2.23。此外，若 Λ 在 $\mathbb{Z}$ 上平坦，且 $J=n\Lambda$ 对某个正整数 n 我们便可如 [CD16, 5.4.5] 所示推出，命题 1.2.23中的自然变换均为等价，而无需任何有限性条件。

1.3. 特化系统

1.3.1。 我们回顾 Ayoub 的特化系统形式体系（参见 [Ayo07b, §3。2] ）.

1.3.2. 设 S 为一个拟紧拟分离概形，并带有一个拟紧拟分离概形的分解

$$\sigma\xrightarrow{\ i\ }S\xleftarrow{\ j\ }\eta=S\smallsetminus\sigma$$

其中 i 是一个闭浸入，而 j 是其开补。一个概形态射$f:X\to S$ 给出一个图表

$$\begin{array}{ccccc}X_\sigma&\xrightarrow{\ i\ }&X&\xleftarrow{\ j\ }&X_\eta\\ \downarrow{\scriptstyle f_\sigma}&&\downarrow{\scriptstyle f}&&\downarrow{\scriptstyle f_\eta}\\ \sigma&\xrightarrow[\ i\ ]{}&S&\xleftarrow[\ j\ ]{}&\eta.\end{array}$$

在此以及下文中，稍微滥用记号，将 j和 i 在映射 f 下的任意拉回仍记为 j 和 i。

定义 1.3.3. 在 (S,i,j) 上的一个特化系统（针对 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\ \Lambda)$）是由函子 $\mathrm{sp}^f:\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\ \Lambda)\to\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\ \Lambda)$ 组成的集合，其中每个 $f:X\to S$in $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 都对应一个函子，并满足以下条件：

（1）对于任意映射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & S & \end{array} \tag{1.3.3.1}$$

在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中存在一个自然变换

$$\mathrm{Ex}^* : (h_\sigma)^* \mathrm{sp}_g \to \mathrm{sp}_f (h_\eta)^*,$$

当 h 光滑时，它是一个等价。

（2）对于

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{h} & Y & \xrightarrow{k} & Z \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow{\scriptstyle g} & \swarrow{\scriptstyle l} & \\ & & S & & \end{array}$$

在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中的方形

$$\begin{array}{ccccc} (h_\sigma)^*(k_\sigma)^* \mathrm{sp}_l & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & (h_\sigma)^* \mathrm{sp}_g (k_\eta)^* & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \mathrm{sp}_f (h_\eta)^* (k_\eta)^* \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ (kh)_\sigma^* \mathrm{sp}_l & & \xrightarrow{\qquad\mathrm{Ex}^*\qquad} & & \mathrm{sp}_f (kh)_\eta^* \end{array}$$

交换。

(3) 对于形如 (1.3.3.1) 的映射，自然变换

$$\mathrm{Ex}_* : \mathrm{sp}_g (h_\eta)_* \to (h_\sigma)_* \mathrm{sp}_f,$$

由复合得到

$$\mathrm{sp}_g (h_\eta)_* \xrightarrow{\mathrm{unit}} (h_\sigma)_* (h_\sigma^*) \mathrm{sp}_g (h_\eta)_* \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} (h_\sigma)_* \mathrm{sp}_f (h_\eta)^* (h_\eta)_* \xrightarrow{\mathrm{counit}} (h_\sigma)_* \mathrm{sp}_f$$

is an equivalence whenever h is proper.

1.3.4. 在 [Ayo07b, §3.2]中证明，任意特化系统都与 Thom 扭转相容，由此可推导出，对于任意形如 (1.3.3.1) 的映射，都存在自然变换

$$\mathrm{Ex}^! : \mathrm{sp}_f (h_\eta)^! \to (h_\sigma)^! \mathrm{sp}_g$$

and

$$\mathrm{Ex}_! : (h_\sigma)_! \mathrm{sp}_f \to \mathrm{sp}_g (h_\eta)_!$$

满足各种相容性条件（更多详情见 [Ayo07b, §3.2] ）。

定义 1.3.5. 给定两个定义在 $'$ 上的特化系统 sp 和 $\mathrm{sp}S, i, j)$ ，一个特化系统态射是由自然变换 $\mathrm{sp}_f \nrightarrow \mathrm{sp}'_f$ 组成的族，对每个 $f : X \to S$属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ ，使得对于任意形如 (1.3.3.1) 的映射，所诱导的方块

$$\begin{array}{ccc} (h_\sigma)^* \mathrm{sp}_g & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \mathrm{sp}_f (h_\eta)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h_\sigma)^* \mathrm{sp}'_g & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \mathrm{sp}'_f (h_\eta)^* \end{array}$$

交换。

定义 1.3.6. 如果一个特化系统 sp 定义在 (S,i,j) 上，并且它在同伦范畴上诱导出一个符合 [Ayo07b，3.1.12] 意义下的伪幺半特化系统，则称该特化系统 sp 为松幺半的。给定两个松幺半特化系统 sp 和 sp′，若一个特化系统态射 sp → sp′ 对所有 $f:X\to S$（属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$）而言，所诱导的自然变换 $\mathrm{sp}_f \to \mathrm{sp}'_f$ 在同伦范畴上诱导出一个幺半自然变换，则称该态射为松幺半的。

示例 1.3.7. 考虑所有 $f:X\to S$ in $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 的函子集合 $\chi_f := i^*j_* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda) \to \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)$。光滑适当基变换立即表明，这会产生一个特化系统。此外，由于 j_* 是松幺半的，它也是松幺半的。

1.4. étale 动机的邻近循环函子

1.4.1. 我们希望将 Ayoub 在 [Ayo07b] 和 [Ayo14] 中构造动机邻近循环函子的过程提升到我们的 ∞-范畴论框架中。为此，我们必须讨论概形图表上的动机。

构造 1.4.2. 考虑范畴 $\mathrm{DiaSch}_{/S}$，其对象 $(\mathcal{F}, I)$ 是函子 $\mathcal{F}: I \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$，其中 I 是一个小范畴，而态射 $(\theta,\alpha):(\mathcal{G}, J)\to(\mathcal{F}, I)$ 是由一个函子 $\alpha: J\to I$ 和一个自然变换 $\theta:\mathcal{G}\to\mathcal{F}\circ\alpha$ 构成的数据。该函子

$$\mathrm{Sm}_{/_} : \left(\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}\right)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Cat}_1 \subset \mathrm{Cat}_\infty,$$

将拟紧拟分离概形 X over S 赋给范畴 $\mathrm{Sm}_{/X}$，由此得到一个笛卡尔纤维化 $\mathrm{Sm} \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$。对于 $\mathrm{DiaSch}_{/S}$ 中的 $(\mathcal{F}, I)$，我们通过以下范畴的笛卡尔图表定义范畴 $\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Sm}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}. \end{array}$$

$\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)}$ 的一个对象是一个元组 $\{U\to\mathcal{F}(i)\ i\}$，其中 $i\in I$，且 $\mathcal{F}(i)$ 是一个光滑态射；映射 $\{U\to\mathcal{F}(i)\ i\}\to\{V\to\mathcal{F}(j)\ j\}$ 由 I 中的一个映射 $i\to j$ 以及 $\mathrm{Sm}_{/\mathcal{F}(i)}$ 中的一个映射 $U\to V\times_{\mathcal{F}(j)}\mathcal{F}(i)$ 组成。

对于 $\mathrm{DiaSch}_{/S}$ 中的任意 $(\mathcal{F}, I)$，我们将 $\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)}$ 上的 étale 拓扑定义为由以下映射族生成的格罗滕迪克拓扑 $\{(U_\alpha,i)\to(U,i)\}_\alpha$，其中 $\{U_\alpha\to U\}_\alpha$ 是通常的 étale 拓扑的一个覆盖族。

构造 1.4.3. 设 $\mathcal{F}: I\to\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 是一个函子，Λ 是一个环。我们定义

$$\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)},\mathcal{D}(\Lambda)) := \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)})\otimes\mathcal{D}(\Lambda).$$

Let

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)},\mathcal{D}(\Lambda))\subset\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)},\mathcal{D}(\Lambda))$$

由关于 étale 拓扑的超层构成的全子范畴。若层 $\mathcal{G}$ 属于 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}{}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)},\mathcal{D}(\Lambda))$，且对于 $\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)}$ 中所有投影映射 $(\pi_X,i):(\mathbb{A}^1_X,i)\to(X,i)$，$\mathcal{G}(\pi_X,i):\mathcal{G}(X,i)\to\mathcal{G}(\mathbb{A}^1_X,i)$ 都是等价，则称 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{A}^1$-局部的。我们将

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{F},I),\Lambda)\subset\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{F},I)},\mathcal{D}(\Lambda))$$

由 $\mathbb{A}^1$-局部对象构成的全子范畴。包含函子 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathrm{F}\ I)\ \Lambda)\ \subset \mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Sm}/(\mathcal{F},I),\mathrm{D}(\Lambda))$ 存在一个左伴随，记为 $L_{\mathbb{A}^1\circ}$。与 1.2.2 节一样，上文构造的所有范畴都具有对称幺半 ∞-范畴的结构，且局部化函子是对称幺半的。显然，根据构造，对于任意一个被视为图表 $X:*\to \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S$ 的概形X，有 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((X,*)\ \Lambda)\ \simeq \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$，其中 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 的定义见 1.2.1 节。

构造 1.4.4. 我们总可以将 $\mathrm{DiaSch}/_S$ 中的态射 $(\theta,\ \alpha)\ :(\mathrm{G}\ J)\ \to(\mathrm{F}\ \ I)$ 分解为

$$(\mathcal{G},J)\xrightarrow{(\theta,\mathrm{id})}(\mathcal{F}\circ\alpha,J)\xrightarrow{(\mathrm{id},\alpha)}(\mathcal{F},I).$$

对于形如 $(\theta,\ \mathrm{id})\ :(\mathrm{G}\ J)\ \to(\mathrm{H}\ J)$ 的态射，我们可以定义一个函子

$$\bar{\theta}:\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},J)}\longrightarrow\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{G},J)}$$

将光滑态射 $U\to \mathrm{H}(j)$ 映射为 $U\times_{\mathcal{H}(j)}\mathrm{G}(j)\ \to \mathrm{G}(j)$。通过左 Kan 延拓，这诱导出一个函子

$$(\theta_{\mathrm{PSh}})^*:\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},J)},\mathcal{D}(\Lambda))\longrightarrow\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{G},J)},\mathcal{D}(\Lambda)),$$

在 $\mathrm{Pr}^{L,\ \mathrm{st}}$ 中，由于 $\bar{\theta}$ 保持有限积，它可以提升为一个对称幺半函子。我们将 $(\theta_{\mathrm{PSh}})^*$ 的右伴随记作 $(\theta_{\mathrm{PSh}})_{*\circ}$ 如果 θ 逐层光滑，即对于 J 中所有的 j，$\theta(j):\mathrm{G}(j)\to\mathrm{H}(j)$ 都是光滑的，那么我们可以定义一个函子

$$\tilde{\theta}:\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{G},J)}\longrightarrow\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},J)}$$

通过将 $\{U\to\mathrm{G}(j)\ j\}$ 映至 $\{U\to\mathrm{G}(j)\ \to\mathrm{H}(j)\ j\}$。这通过左 Kan 延拓诱导出一个函子

$$(\theta_{\mathrm{PSh}})_{\#}:\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{G},J)},\mathcal{D}(\Lambda))\longrightarrow\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},J)},\mathcal{D}(\Lambda))$$

其右伴随等价于 $(\theta_{\mathrm{PSh}})^*$。形如 $(\mathrm{id}\ \alpha)\ :(\mathrm{H}\bigcirc\ \alpha,\ \ J)\ \to(\mathrm{H}\ I)$ 的态射，其中 $\alpha:J\to I$ 是某个函子，会导出一个函子

$$\bar{\alpha}:\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H}\circ\alpha,J)}\longrightarrow\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},I)},$$

which 将 $\{U\to\mathrm{H}(j)\ j\}$ 映至 $\{U\to\mathrm{H}(j)\ \alpha(j)\}$。这通过前复合诱导出一个函 or

$$\bar{\alpha}_*:\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H}\circ\alpha,J)},\mathcal{D}(\Lambda))\longrightarrow\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},I)},\mathcal{D}(\Lambda))$$

它有左伴随和右伴随。我们将 $(\alpha_{\mathrm{PSh}})^*:=\bar{\alpha}_*$ 记作……，并将 $(\alpha_{\mathrm{PSh}})_*$ 记作其右伴随，将 $(\alpha_{\mathrm{PSh}})\#$ 记作其左伴随。

给定一个形如 $(\theta,\ \mathrm{id})\ :(\mathrm{G}\ J)\ \to(\mathrm{H}\ J)$ 的态射，我们可以观察到 $(\theta_{\mathrm{PSh}})_*$ 保持 $\mathbb{A}^1$-局部 étale 超层。因此，它限制为一个函子

$$(\theta_{\mathrm{eff}})_*:\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{G},J),\Lambda)\longrightarrow\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H},J),\Lambda),$$

其左伴随由……给出

$$(\theta_{\mathrm{eff}})^*:\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H},J),\Lambda)\xrightarrow{\theta^*|_{\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H},J),\Lambda)}}\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{G},J)},\mathcal{D}(\Lambda))\xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{ét}}}\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{G},J),\Lambda).$$

若 $(\theta,\ \mathrm{id})$ 逐层光滑，则 $(\theta_{\mathrm{eff}})^*$ 的左伴随由以下复合给出

$$(\theta_{\mathrm{eff}})_{\#}:\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{G},J),\Lambda)\xrightarrow{(\theta_{\mathrm{PSh}})_{\#}|_{\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H},J),\Lambda)}}\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{H},J)},\mathcal{D}(\Lambda))\xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{ét}}}\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H},J),\Lambda).$$

类似地，对于形如 (id α) :(H $\bigcirc$ α, J) $\to$(H I) 的态射，我们注意到 $\bar{\alpha}_* = \alpha^*$ 保持 étale 超层和 $\mathbb{A}^1$-局部对象。如上所述，我们得到一个伴随

$$(\alpha_{\mathrm{eff}})_\# : \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H}\circ\alpha, J), \Lambda) \rightleftarrows \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{H}, I), \Lambda) : (\alpha_{\mathrm{eff}})^*.$$

构造 1.4.5. 对于 DiaSch/S 中任意的 (F I)，存在唯一的结构映射$\pi_{(\mathcal{F},I)}$:(F I) $\to$(S, $*$)，它诱导出一个函子

$$\pi^*_{(\mathcal{F},I)} : \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(S, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{F}, I), \Lambda).$$

考虑 Tate 对象 $\Lambda(1)$，它位于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(S,\ \Lambda)$ 中，其定义见 1.2.3；略微滥用记号，记 $\Lambda(1) := \pi^*_{(\mathcal{F},I)}\Lambda(1)$。我们将 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{F}\ I)\ \Lambda)$ 定义为 $\mathcal{P}r^L$ 中的 $\mathbb{N}$-指标图表的余极限

$$\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{F}, I), \Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{F}, I), \Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((\mathcal{F}, I), \Lambda) \xrightarrow{-\otimes\Lambda(1)} \dots$$

与 1.2.4 类似，我们得到诱导的伴随对

$$\theta^* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{H}, J), \Lambda) \rightleftarrows \mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{G}, J), \Lambda) : \theta_*$$

对于形如 (θ, id) :(G, J) $\to$(H, J) 的态射，

$$\theta_\# : \mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{G}, J), \Lambda) \rightleftarrows \mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{H}, J), \Lambda) : \theta^*$$

若 (θ, id) 是逐层光滑的，并且

$$\alpha_\# : \mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{H}\circ\alpha, J), \Lambda) \rightleftarrows \mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{H}, I), \Lambda) : \alpha^*$$

对于形如 (id α) :($\mathcal{H}\circ\alpha, J$) $\to$($\mathcal{H}$ I) 的态射。如 1.2.3 和 1.2.4 中所述，我们可以推导出 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}$ (($\mathcal{F}$ I) Λ) 具有对称幺半 ∞-范畴的结构，并且 θ^* 以及 α^* 都可提升为对称幺半函子。

注 1.4.6。不难验证，$\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{F}\ I)\ \Lambda)$的同伦范畴等价于 [Ayo07b, 4.5.2]。此外，由 $\theta_\# \dashv \theta^* \dashv \theta_*$ 和 $\alpha_\# \dashv \alpha^*$ 诱导的同伦范畴上的函子与 同上 中构造的函子一致。

1.4.7. 设 C 是一个具有有限积的 1-范畴，并考虑一个余跨。

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

在 $\mathcal{C}$中。然后，如 [Ayo07b，3.4 节1] 所示，我们可以将一个余单纯对象与该余跨关联起来

$$\mathrm{Bar}(f, g) : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$$

with

$$\mathrm{Bar}(f, g)([i]) = A \times B^i \times C.$$

对 $[i]$ 和 Δ。上余面映射和余退化映射定义如下：

(1) $d_0 : (a, b_0, \dots, b_i, c) \mapsto (a, f(a), b_0, \dots, b_i, c)$.
(2) $d_k : (a, b_0, \dots, b_i, c) \mapsto (a, b_0, \dots, b_k, b_k, \dots b_i, c)$ for $0 < k < i$.
(3) $d_i : (a, b_0, \dots, b_i, c) \mapsto (a, b_0, \dots, b_i, g(c), c)$.
(4) $s_k : (a, b_0, \dots, b_i, c) \mapsto (a, b_0, \dots, \widehat{b_k}, \dots, b_i, c)$ for $0 \le k \le i$.

我们将 C 中的余跨范畴记作 $\mathrm{C}^{\to\leftarrow}$。容易看出，这一构造产生了一个函子

$$\mathrm{Bar}(_, _) : \mathcal{C}^{\to\leftarrow} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta, \mathcal{C}).$$

构造 1.4.8。设 S 是一个拟紧拟分离概形，并考虑余跨

$$\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{G}_{m,S} \xleftarrow{1} S$$

在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 其中 1 表示单位截面。如同 1.4.7 我们可以将这样一个余跨与一个余单纯对象相关联

$$\mathcal{A}_S := \mathrm{Bar}(\mathrm{id}, 1) : \Delta \longrightarrow \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}$$

with

$$\mathcal{A}_S([i]) \simeq \mathbb{G}_{m,S} \times_S (\mathbb{G}_{m,S})^{\times i}$$

对于 $[i]$ 在 $\Delta.$，我们将常值图表 $\Delta \to * \xrightarrow{\mathbb{G}_m} {}^S\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 在 $\mathbf{DiaSch}_{/S}$ 中记作 $(\mathbb{G}_{m,S}, \Delta)$。第一投影 $p_1 : \mathbb{G}_{m,S} \times_S (\mathbb{G}_{m,S})^{\times i} \to \mathbb{G}_{m,S}$ 诱导出一个典范映射

$$\theta^{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}_S, \Delta) \to (\mathbb{G}_{m,S}, \Delta) \tag{1.4.8.1}$$

在 $\mathbf{DiaSch}_{/S}$ 中。特别地，我们可以看到 $\mathbf{A}_S$ 分解为

$$\mathcal{A}_S : \Delta \longrightarrow \mathrm{Sm}_{/\mathbb{G}_{m,S}} \longrightarrow \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}.$$

对于正整数 n，令 $e_n : \mathbb{G}_{m,S} \to \mathbb{G}_{m,S}$ 为通过取 n 次幂给出的态射。

余跨的态射

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{G}_{m,S} & \xleftarrow{1} & S \\
{\scriptstyle e_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & \mathbb{G}_{m,S} & \xleftarrow[1]{} & S
\end{array}$$

导出一个映射

$$e_n : \mathcal{A}_S \to \mathcal{A}_S \tag{1.4.8.2}$$

在 $\mathbf{Fun}(\Delta, \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S})$ 中，该映射逐层定义为

$$(e_n, (e_n)^i) : \mathcal{A}_S([i]) \simeq \mathbb{G}_{m,S} \times_S (\mathbb{G}_{m,S})^{\times i} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \times_S (\mathbb{G}_{m,S})^{\times i} \simeq \mathcal{A}_S([i]).$$

记 $\mathbf{Fun}(\Delta, \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S})$ 中与余跨相关联的对象为

$$\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{e_n} \mathbb{G}_{m,S} \xleftarrow{1} S$$

由 $e_n^* \mathbf{A}_S$ 表示。如上所见，$e_n^* \mathbf{A}_S$ 的取值属于 $\mathbf{Sm}_{/\mathbb{G}_{m,S}}$。此外，存在一个典范映射

$$\varphi_n : \mathcal{A}_S \longrightarrow e_n^* \mathcal{A}_S \tag{1.4.8.3}$$

在 $\mathbf{Fun}(\Delta, \mathbf{Sm}_{/\mathbb{G}_{m,S}})$ 中由余跨的态射诱导的

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{G}_{m,S} & \xleftarrow{1} & S \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow[e_n]{} & \mathbb{G}_{m,S} & \xleftarrow[1]{} & S.
\end{array}$$

1.4.9. 设 S 是带有固定一致化子 π 的严格亨泽尔离散赋值环 R 的谱。我们将 S 的开点记为 η，将闭点记为 σ。一致化子 π 导出态射 $\pi : S \to \mathbb{A}^1_S$ 和 $\pi : \eta \to \mathbb{G}_{m,\,S}$。为固定记号，对于概形态射 $f : X \to S$，我们考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\
\downarrow{\scriptstyle f_\eta} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sigma} \\
\eta & \xrightarrow{j} & S & \xleftarrow{i} & \sigma \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\sigma} \\
\mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}^1_S & \xleftarrow{0} & S
\end{array}$$

由拉回方块构成。

对于小范畴 I，记 $(X,\ I)$ 为常值图表 $I \to * \xrightarrow{X} \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$。我们将 $p_I : (X,\ I) \to (X,\ *)$ 记为 $\mathrm{DiaSch}_{/S}$ 中的典范态射。对于配备有态射 $\theta^{\mathcal{B}} : (\mathrm{B}_S,\ I) \to (\mathbb{G}_{m,\,S})$ 的图表 $\mathrm{B}_S : I \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$，我们通过在 $\mathrm{DiaSch}_{/S}$ 中取拉回，考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathcal{B}_f, I) & \xrightarrow{\theta^{\mathcal{B}}_f} & (X_\eta, I) & \xrightarrow{j} & (X, I) & \xleftarrow{i} & (X_\sigma, I) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f_\eta, I)} & & \downarrow{\scriptstyle (f, I)} & & \downarrow{\scriptstyle (f_\sigma, I)} \\
(\mathcal{B}_{\mathrm{id}}, I) & \xrightarrow{\theta^{\mathcal{B}}_{\mathrm{id}}} & (\eta, I) & \xrightarrow{j} & (S, I) & \xleftarrow{i} & (\sigma, I) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi, I)} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi, I)} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_\sigma, I)} \\
(\mathcal{B}_S, I) & \xrightarrow{\theta^{\mathcal{B}}} & (\mathbb{G}_{m,S}, I) & \xrightarrow{j} & (\mathbb{A}^1_S, I) & \xleftarrow{i} & (0, I).
\end{array}$$

构造 1.4.10。 (1) 在 1.4.9 的情形下，考虑配备态射 $\theta^{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}_S,\ \Delta) \to (\mathbb{G}_{m,\,S},\ \Delta)$ (1.4.8.1) 的图表 1.4.9，则利用其记号，对任意概形态射 $f : X \to S$ 定义一个函子

$$\Upsilon_f : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$$

by

$$\Upsilon_f := (p_\Delta)_\# i^* j_* (\theta^{\mathcal{A}}_f)_* (\theta^{\mathcal{A}}_f)^* (p_\Delta)^*$$

并将其称为么幂近邻循环函子。

(2) 令 p 为 S 的剩余域的特征。我们将由不能被 p 整除的正自然数组成的偏序集记为 $\mathbb{N}'^{\times}$；当且仅当 m 整除 n 时，存在唯一的态射 $n \to m$。对于任意 $n \in \mathbb{N}'^{\times}$，我们将 $e_n : \mathbb{G}_{m,S} \to \mathbb{G}_{m,S}$ 记为由提升到 n 次幂给出的态射。我们定义图表 $\mathrm{R}_S \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N}'^{\times} \times \Delta,\ \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathbb{N}'^{\times},\ \mathrm{Fun}(\Delta,\ \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}))$：将 $\mathbb{N}'^{\times}$ 中满足 $k = n/m$ 的映射 $n \to m$ 发送到 $\mathrm{Fun}(\Delta,\ \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S})$ 中的映射 $e_k : \mathrm{A}_S \to \mathrm{A}_S$ (1.4.8.2)。映射 $\theta^{\mathcal{A}}$ 诱导出一个典范映射 $(\mathrm{R}_S, \mathbb{N}'^{\times} \times \Delta) \longrightarrow (\mathbb{G}_{m,S}, \mathbb{N}'^{\times} \times \Delta)$，记作 $\theta^{\mathcal{R}}$。我们定义函子

$$\Psi^{\mathrm{tame}}_f : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$$

by

$$\Psi_f^{\mathrm{tame}} := (p_{\Delta\times\mathbb{N}'^{\times}})_{\#} i^* j_* (\theta_f^{\mathcal{R}})_* (\theta_f^{\mathcal{R}})^* (p_{\Delta\times\mathbb{N}'^{\times}})^*$$

并称其为温和近邻循环函子。

构造 1.4.11. 在 1.4.9 的情形下，记 S^- 的函数域为 K，并固定 K 的一个可分闭包 $\bar{K}$。由于 S 是严格亨塞尔的，由亨塞尔引理可知，K 包含所有 n-次单位根，其中 n 属于 $\mathbb{N}'^{\times}$。这意味着 $\tilde{K} := K(\pi^{1/n} | n \in \mathbb{N}'^{\times}) \subset \bar{K}$ 是 K 的伽罗瓦扩张。令 $\mu_n(K)$ 表示 K 中的 n-次单位根群。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ 同构于 $\widehat{\mathbb{Z}}'(1) := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}'^{\times}} \mu_n(K)$，其中过渡映射 $\mu_n(K) \to \mu_m(K)$（$n \to m$ 属于 $\mathbb{N}'^{\times}$）由将一个 n-次根 ξ 提升至其 k 次幂 ξ^k（$k = n/m$）给出。存在一个群的短正合序列

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbb{Z}}'(1) \longrightarrow 0,$$

其中，P 是 $\bar{K}$ 的一个极大 pro-p子群，且 χ :$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to \widehat{\mathbb{Z}}'(1)$通过将 $\lambda \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$映射到单位根系统$\{\lambda(\pi^{1/k})/\pi^{1/k}\}_{k\in\mathbb{N}'^{\times}}$给出。根据 Schur-Zassenhaus 定理 [Suz82，8.10] 该正合列分裂。我们固定一个分裂 τ，并将对应于 $\widehat{\mathbb{Z}}'(1)$的 K 的扩张记为 M_τ，通过 τ将其视为 $\mathrm{Gal}(K/K)$的一个闭子群$^-$。我们将由 M_τ/K 的有限中间扩张构成、按包含关系排序的偏序集记为 Ξ_τ。

设 $f : X \to S$ 为概形之间的一个态射。对于 L 中的 Ξ_τ，我们将 S 在 L 中的正规化记为 S_L。我们将 $\eta_L := \mathrm{Spec}\, L$ 记为 $t_L : \eta_L \to \eta$，并将诱导的谱之间的态射记为 $t_L : S_L \to S$。对于概形之间的一个态射 $f : X \to S$，考虑如下交换方形。

$$\begin{array}{ccc} X_L & \xrightarrow{t_L} & X \\ {\scriptstyle f_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_L & \xrightarrow[t_L]{} & S \end{array}$$

通过拉回得到。将 X_L 视为一个 S 概形，其中 $t_L \bigcirc f_L$，并令 $\mathrm{R}_{t_L \bigcirc f_L}$ 为上文 1.4.10(2) 中定义的 $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}'^{\times} \times \Delta, \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S)$ 里的对象。于是，我们可以通过将 Ξ_τ 中的箭头 $L \to L'$ 映射到 $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}'^{\times} \times \Delta, \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S)$ 中的典范态射 $\mathrm{R}_{t_{L'} \bigcirc f_{L'}} \to \mathrm{R}_{t_L \bigcirc f_L}$，来定义 $\mathrm{Fun}(\Xi_\tau^{\mathrm{op}} \times \mathbb{N}'^{\times} \times \Delta, \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S)$ 中的对象 T_f。上文定义的映射 $\theta_f^{\mathcal{R}}$ 诱导出一个典范映射 $\theta_f^{\mathcal{T}} : (\mathrm{T}_f, \Xi_\tau^{\mathrm{op}} \times \mathbb{N}'^{\times} \times \Delta) \to (X_\eta, \Xi_\tau^{\mathrm{op}} \times \mathbb{N}'^{\times} \times \Delta)$。我们定义函子

$$\Psi_f : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$$

by

$$\Psi_f := (p_{\Xi_\tau^{\mathrm{op}}\times\Delta\times\mathbb{N}'^{\times}})_{\#} i^* j_* (\theta_f^{\mathcal{T}})_* (\theta_f^{\mathcal{T}})^* (p_{\Xi_\tau^{\mathrm{op}}\times\Delta\times\mathbb{N}'^{\times}})^*$$

并将其称为总近邻循环函子。

注 1.4.12。(1) 由构造和注 1.4.6 可立即得出，由 Υ_f、Ψ_f^{tame} 和 Ψ_f 诱导的同伦范畴上的函子，与 [Ayo14] 中定义的函子一致，只要 f 是拟射影的（关于 Ψ_f，见下文命题 1.5.7）。(2) [Ayo07b, 3.2.9] 中证明了（其结论足够稳健，可应用于我们的情形）Υ_f、Ψ_f^{tame} 和 Ψ_f 确实在 (S、i、j) 上给出了特化系统。此外，由 [Ayo07b, 3.2.12]，典范映射 (A Δ) $\to$ ($\mathbb{G}_m$、S、$*$)、(R $\mathbb{N}'^{\times} \times \Delta$) $\to$

$(\mathcal{A}\ \Delta)$ 和 $(\mathcal{T}\ \Xi_\tau^{\mathrm{op}}\times\mathbb{N}'^{\times}\times\Delta)\to(\mathcal{R}\ \mathbb{N}'^{\times}\times\Delta)$ 在 DiaSch/S 给出特化系统的态射 $\chi\to\Upsilon$，$\Upsilon\to\Psi^{\mathrm{tame}}$ 以及 $\Psi^{\mathrm{tame}}\to\Psi$ 分别是。(3) 根据 [Ayo07b，3.2.17、3.2。18] 特化系统 Υ、Ψ^{tame} 以及 Ψ 都是松幺半的，并且上述特化系统的态射是松幺半的

1.5. 附近循环函子的另一种描述

1.5.1. 设 K 是一个单纯集合，C 是一个允许 K 型余极限的 ∞– 范畴。单纯集合的典范映射 $K\to *$ 通过前复合诱导出对角函子

$$\delta:\mathcal{C}\longrightarrow \mathrm{Fun}(K,\mathcal{C}).$$

由于 C 允许 K 型余极限，δ 具有一个左伴随

$$\mathrm{colim}_K:\mathrm{Fun}(K,\mathcal{C})\longrightarrow\mathcal{C}$$

它将一个图表 $F:K\to\mathcal{C}$ 送到其余极限（见 [Lur17b，4.2.4。3]）。

引理 1.5.2。 设 X 是一个概形，I 是一个小范畴，并考虑 (X,I) 在 DiaSch/S 中的常值图表。则存在一个等价

$$\mathrm{DA}_{\acute{e}t}((X,I),\Lambda)\simeq\mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)\right)$$

使得复合

$$\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)\xrightarrow{(p_I)^*}\mathrm{DA}_{\acute{e}t}((X,I),\Lambda)\simeq\mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)\right)$$

等价于对角函子 δ。特别地，复合

$$\mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)\right)\simeq\mathrm{DA}_{\acute{e}t}((X,I),\Lambda)\xrightarrow{(p_I)_\#}\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$$

等价于 $\mathrm{colim}_{I^{\mathrm{op}}}$。

证明。注意到 $\mathsf{Sm}_{/(X,I)}\simeq I\times\mathsf{Sm}/X$，因此

$$\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(X,I)},\mathcal{D}(\Lambda))\simeq\mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Sm}_{/X}^{\mathrm{op}},\mathcal{D}(\Lambda))\simeq\mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X},\mathcal{D}(\Lambda))).$$

由定义可立即得出存在一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(X,I)},\mathcal{D}(\Lambda)) & \longleftarrow & \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}((X,I),\Lambda)\\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim\\ \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X},\mathcal{D}(\Lambda))) & \longleftarrow & \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda))\end{array}$$

的 ∞-范畴。此外，容易验证复合

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)\xrightarrow{p_I^*}\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}((X,I),\Lambda)\simeq\mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda))$$

就是对角函子 δ。我们将 $_\otimes\Lambda(1):\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)\to\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)$ 和 $_\otimes\Lambda(1):\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}((X,I)\ \Lambda)\to\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}((X,I)\ \Lambda)$ 的右伴随记为 Ω。于是存在等价。

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\simeq\lim_{\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}\left(\ldots\xrightarrow{\Omega}\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)\xrightarrow{\Omega}\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}(X,\Lambda)\right)$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{DA}_{\text{ét}}((X,I),\Lambda) &\simeq \lim_{\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}\left(\ldots \xrightarrow{\Omega} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((X,I),\Lambda) \xrightarrow{\Omega} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((X,I),\Lambda)\right)\\ &\simeq \lim_{\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}\left(\ldots \xrightarrow{\Omega_*} \mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\right) \xrightarrow{\Omega_*} \mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\right)\right)\\ &\simeq \mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\lim_{\mathbb{N}^{\mathrm{op}}}\left(\ldots \xrightarrow{\Omega} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda) \xrightarrow{\Omega} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\right)\right)\\ &\simeq \mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\right),\end{aligned}$$

其中，所有极限均取自$\mathcal{P}r^R$（或者等价地取自 $\widehat{\ }\mathrm{Cat}_\infty$，根据 [Lur17b，5.5.3。13]），并且Ω_*表示由与Ω进行后复合所给出的函子。

∞–类别的图表

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda))\\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle (\Sigma^\infty)_*}\\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda))\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \xrightarrow{(p_I)^*} & \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}((X,I),\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(X,\Lambda))\\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle (\Sigma^\infty)_*}\\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) & \xrightarrow{(p_I)^*} & \mathrm{DA}_{\text{ét}}((X,I),\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda))\end{array}$$

交换且事实上可以规范地提升为对称幺半复合范畴的图表。因此，DA$_{\text{ét}}$(X,Λ) $\simeq$ DA$^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}$($X$,$\Lambda$)[$\Lambda$(1)$^{-1}$]（见 [Rob15，2.9]）意味着 δ 等价于复合

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) \xrightarrow{(p_I)^*} \mathrm{DA}_{\text{ét}}((X,I),\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}\left(I^{\mathrm{op}},\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\right)$$

如所愿。

□

构造 1.5.3. 设 S 为一个概形，并记为

$$\Lambda(_):\mathrm{Sm}_{/\mathbb{G}_{m,S}} \xrightarrow{\mathrm{y}_\Lambda} \mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/\mathbb{G}_{m,S}},\mathcal{D}(\Lambda)) \xrightarrow{L_{\mathbb{A}^1}\circ L_{\text{ét}}} \mathrm{DA}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S},\Lambda) \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S},\Lambda)$$

for the composition .

我们来定义余单纯对象

$$\mathscr{A}_S := \Lambda(\mathcal{A}_S):\Delta \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S},\Lambda)$$

其中 $\mathcal{A}_S:\Delta \to \mathrm{Sm}_{/\mathbb{G}_{m,S}}$ 在构造 1.4.8中定义。根据构造，我们有

$$\mathscr{A}_S([i]) \simeq \Lambda(\mathbb{G}_{m,S}\times_S(\mathbb{G}_{m,S})^{\times i}),$$

其中 $\mathbb{G}_{m,S}\times_S(\mathbb{G}_{m,S})^{\times n}$ 被视为一个 $\mathbb{G}_{m,S}$-概形，其结构是通过第一投影给出的。记 $q:\mathbb{G}_{m,S}\to S$ 为结构态射。注意到

$$\Lambda(\mathbb{G}_{m,S}) \simeq q_\#\mathbb{1}_{\mathbb{G}_{m,S}} \simeq \mathbb{1}_S \oplus \mathbb{1}_S(1)[1]$$

在 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda)$ 中，且因此 $\Lambda(\mathbb{G}_{m,S})$ 按照 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda)$ 中 [Lur17a第 4.6.1 节的含义是可对偶的。7]因此

$$\mathscr{A}_S([i]) \simeq \Lambda(\mathbb{G}_{m,S}\times_S(\mathbb{G}_{m,S})^{\times n}) \simeq q^*\Lambda((\mathbb{G}_{m,S})^{\times n})$$

对于所有 $[i]$ in Δ，在 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S}, \Lambda)$ 中是可对偶的。

结构映射 $p_1 : \mathbb{G}_{m,S} \times_S (\mathbb{G}_{m,S})^{\times n} \to \mathbb{G}_{m,S}$ 为 $\mathscr{A}_S$ 赋予一个典范映射

$$\mathscr{A}_S \longrightarrow \underline{\mathbb{1}}_{\mathbb{G}_{m,S}} \tag{1.5.3.1}$$

in $\mathrm{Fun}(\Delta, \mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S}, \Lambda))$，其中 $\underline{\mathbb{1}}_{\mathbb{G}_{m,S}}$ 表示取值为 $\mathbb{1}_{\mathbb{G}_{m,S}}$ 的常值函子。

在构造 1.4.8 中，我们定义了另一个余单纯对象 $e_k^*\mathbf{A}_S : \Delta \to \mathrm{Sm}/_{\mathbb{G}_{m,S}}$。直接检验可得 $\Lambda(e_k^*\mathbf{A}_S) \simeq e_k^*\mathscr{A}_S$，因此 $\mathrm{Fun}(\Delta, \mathrm{Sm}/_{\mathbb{G}_{m,S}})$ 中的映射（1.4.8.3）诱导出一个映射

$$\varphi_k : \mathscr{A}_S \longrightarrow e_k^*\mathscr{A}_S \tag{1.5.3.2}$$

在 $\mathrm{Fun}(\Delta, \mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S}, \Lambda))$ 中。

1.5.4。让我们回顾一下 [CD19]**的某些记号**。固定一个基底概形 S。于是存在一个位于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S$ 之上的 Sm 纤维化模型范畴 $C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{\Lambda})))$，使得对于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S$ 中的 X，我们有

$$C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \Lambda)))[W^{-1}] \simeq h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

（见 [CD19，5.3。31]）。此处我们记

$$C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X}, \Lambda))) := C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}, \Lambda)))(X)$$

且 W 表示其模型结构中的弱等价。与 [CD19 第 3 节1] 中一样，我们可以为一个 $\mathbf{X} : I \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_S$（属于 $\mathrm{DiaSch}/_S$）定义范畴 $D(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/_{(\mathcal{X},I)}, \Lambda)))$，并赋予它两种模型结构：投射模型结构（见 [CD19，第 3.1 节6]）和单射模型结构（见 [CD19，第 3.1 节7]）。这两种模型结构具有相同的弱等价 W，而且不难证明

$$C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{X},I)}, \Lambda)))[W^{-1}] \simeq h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{X}, I), \Lambda).$$

我们将其记为

$$\gamma : C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{X},I)}, \Lambda))) \to h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{X}, I), \Lambda)$$

局部化函子。

$\mathrm{DiaSch}/_S$ 中的映射 $(\theta, \alpha) : (\mathbf{X}, I) \to (\mathbf{Y}, J)$ 诱导出一个 Quillen 伴随

$$(\theta, \alpha)^* : C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{X},I)}, \Lambda))) \rightleftarrows C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(\mathcal{X},I)}, \Lambda))) : (\theta, \alpha)_*$$

f或单射模型结构。取导出函子可得到一个伴随

$$L(\theta, \alpha)^* : h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{Y}, J), \Lambda) \rightleftarrows h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{X}, I), \Lambda) : R(\theta, \alpha)_*.$$

此外，若 (θ, α) 逐层光滑，则 $(\theta, \alpha)^*$ 在投射模型结构下存在奎伦左伴随 $(\theta, \alpha)\#$，且 $(\theta, \alpha)^*$ 保持弱等价。特别地，我们有 $L(\theta, \alpha)^* = (\theta, \alpha)^* = R(\theta, \alpha)^*$，取导出函子后得到一个伴随

$$L(\theta, \alpha)_\# : h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{X}, I), \Lambda) \rightleftarrows h\,\mathrm{DA}_{\text{ét}}((\mathcal{Y}, J), \Lambda) : R(\theta, \alpha)^* = (\theta, \alpha)^* = R(\theta, \alpha)^*.$$

这一点见 [CD19，3.111]。

不难验证，这些函子与构造1.4.5中定义的函子在同伦范畴上相同。

引理 1.5.5。考虑 *1.4.10(1)* 中的情形。对于一个概形态射 $f : X \to S$ 和 M 在 $\mathrm{DA}_{ét}(X_\eta, \Lambda)$ 我们记

$$\underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^*\pi^*\mathscr{A}_S, M) : \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{(f_\eta^*\pi^*\mathscr{A}_S)^{\mathrm{op}}} \mathrm{DA}_{ét}(X_\eta, \Lambda)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(_, M)} \mathrm{DA}_{ét}(X_\eta, \Lambda).$$

然后存在等价

$$\underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^*\pi^*\mathscr{A}_S, M) \simeq (\theta_f^{\mathcal{A}})_*(\theta_f^{\mathcal{A}})^*(p_\Delta)^* M$$

在 $\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{DA}_{ét}(X_\eta, \Lambda)) \simeq \mathrm{DA}_{ét}((X_\eta, \Delta), \Lambda)$。

证明。我们的思路是在模型范畴层面构造这个函子等价。为此，我们将使用 [CD 19] 的一些记号，并考虑 1.5.4 中的模型范畴。

为简便起见，记 $\theta := \theta_f^{\mathcal{A}} : (\mathrm{A}f, \Delta) \to (X_\eta, \Delta)$ 和 $\mathscr{A} := f_\eta^*\pi^*\mathscr{A}_S$。我们将 $\tilde{\mathscr{A}}$ 定义为如下图表

$$\Delta \xrightarrow{\mathcal{A}_f} \mathrm{Sm}_{/X_\eta} \xrightarrow{\text{Yoneda}} C(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X_\eta}, \Lambda)) \xrightarrow{\Sigma^\infty} C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X_\eta}, \Lambda))).$$

由构造可知，存在等价 $\gamma(\mathscr{A}) \simeq \mathscr{A}$，它位于 $h\mathrm{DA}_{ét}((X_\eta, \Delta), \Lambda)$ 中。$C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}^{/X_\eta}, \Lambda)))$ 中的张量积 $_ \otimes N$ 对于 N 具有一个 Quillen 右伴随，我们将其记为 $Hom(N, _)$。

对所有 $[i] \in \Delta$，将 $\to X_\eta$ $\theta_i : \mathrm{A}f([i])$ 记为典范映射。那么存在一个等价 $\mathscr{A}([i]) \simeq (\theta_i)_\#(\theta_i)^*\mathbb{1}$，因此我们有

$$(\theta_i)_*(\theta_i)^*_ \simeq Hom((\theta_i)_\#(\theta_i)^*\mathbb{1}, _) \simeq Hom(\tilde{\mathscr{A}}([i]), _). \tag{1.5.5.1}$$

对于一个映射 $\varphi : [j] \to [i]$ in Δ，考虑诱导映射 $\theta_\varphi : \mathrm{A}([j]) \to \mathrm{A}([i])$。则图表

$$\begin{array}{ccccc}
(\theta_i)_*(\theta_i)^* & \xrightarrow{\sim} & Hom(\theta_{i\#}\theta_i^*\mathbb{1}, _) & \xrightarrow{\sim} & Hom(\tilde{\mathscr{A}}([i]), _) \\
\downarrow{\scriptstyle \text{unit}} & & & & \\
(\theta_i)_*(\theta_\varphi)_*(\theta_\varphi)^*(\theta_i)^* & & & & \downarrow{\scriptstyle \theta_\varphi^*} \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & & & \\
(\theta_j)_*(\theta_j)^* & \xrightarrow{\sim} & Hom(\theta_{j\#}\theta_j^*\mathbb{1}, _) & \xrightarrow{\sim} & Hom(\tilde{\mathscr{A}}([j]), _)
\end{array}$$

交换。这表明存在自然等价

$$\theta_*\theta^*p_\Delta^* \simeq Hom(\tilde{\mathscr{A}}, _) : C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/X_\eta}, \Lambda))) \to C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}_{/(X_\eta,\Delta)}, \Lambda))).$$

因此，右导出函子之间存在一个等价。

$$R(\theta_*\theta^*p_\Delta^*) \simeq RHom(\mathscr{A}, _) : h\,\mathrm{DA}_{ét}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow h\,\mathrm{DA}_{ét}((X_\eta, \Delta), \Lambda).$$

回想一下，由于 θ 和 p_Δ 是逐层光滑的，我们有 $L(\theta^*) = \theta = R(\theta^*)$ 和 $L(p_\Delta^*) = p_\Delta^* = R(p_\Delta^*)$。因此，导出函子的泛性质诱导出一个自然变换。

$$RHom(\mathscr{A}, _) \simeq R(\theta_*\theta^*p_\Delta^*) \longrightarrow (R\theta_*)\theta^*p_\Delta^*. \tag{1.5.5.2}$$

只要我们能证明这是一个等价，便可得出该引理。

对于所有 $[i]$ in Δ，我们将 DiaSch/S 中由函子 $i : * \to \Delta$ 诱导的典范映射记为 $i : (X_\eta, *) \to (X_\eta, \Delta)$，该函子映射到 $[i]$。那么函子族

$$Li^* = i^* = Ri^* : h\,\mathrm{DA}_{ét}((X_\eta, \Delta), \Lambda) \longrightarrow h\,\mathrm{DA}_{ét}((X_\eta), \Lambda)$$

遍历所有 $[i]$ in Δ 是保守的，这是由单射模型结构和投射模型结构中的弱等价的定义决定的。由于 i^* 是 Quillen 右伴随，且其性质.....

到单射模型结构，通过 [CD19，3.1。13] 以及 $i^* = Ri^*$ 典范自然变换

$$i^* R\theta_* \to (R\theta_{i*})i^*$$

是一个等价（见 [CD19，3.1。15]）。此外，典范自然变换

$$RHom(\mathscr{A}([i]), _) \to i^* RHom(\mathscr{A}, _)$$

是一个等价。

由于 $\theta_i^* \mathbb{1}$ 在 $C(\mathrm{Sp}(\mathrm{PSh}(\mathrm{Sm}/\mathcal{A}([i]), \Lambda)))$ 中是余纤维，我们有

$$\mathscr{A}([i]) \simeq \gamma(\tilde{\mathscr{A}}([i])) \simeq L(\theta_{i\#})\theta_i^* \mathbb{1}.$$

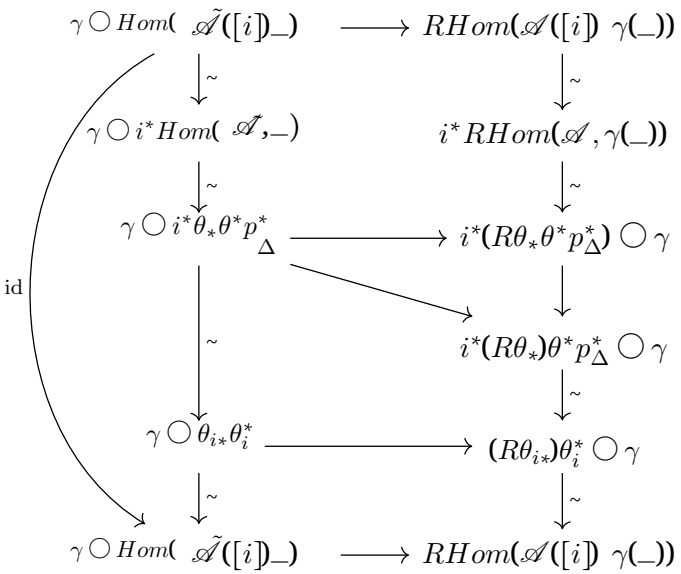
特别地，存在等价

$$(R\theta_{i*})\theta_i^* \simeq RHom((L\theta_{i\#})\theta_i^* \mathbb{1}, _) \simeq RHom(\mathscr{A}([i]), _).$$

因此，为了证明（1.5.5.2）是一个等价，我们可以证明复合

$$\begin{aligned} RHom(\mathscr{A}([i]), _) &\simeq i^* RHom(\mathscr{A}, _) \\ &\simeq i^* R(\theta_* \theta^* p_\Delta^*) \\ &\to i^* (R\theta_*)\theta^* p_\Delta^* \\ &\simeq (R\theta_{i*})\theta_i^* \\ &\simeq RHom(\mathscr{A}([i]), _) \end{aligned}$$

是恒等映射，其中第三行的箭头是通过将 i^* 应用于（1.5.5.2）得到的。根据右导出函子的泛性质，这等价于证明



交换。这里从左到右的映射是由相应右导出函子的泛性质诱导的典范映射。这一点很容易验证。□

1.5.6. 固定一些记号： S 是一个严格亨泽尔离散赋值环的谱，其一致化子为 π. 。对于 n 中的 $\mathbb{N}'^{\times}$，记 S_n 为 S 在$K(\pi^{1/n})$中的正规化。由于 S 是严格亨塞尔的， S_n 又是一个严格亨泽尔离散赋值环，其一致化子为 $\pi_n := \pi^{1/n}$，其中 $\pi_n := \pi^{1/n}$ 是 π的某个 n次根。记 $\eta_n := \mathrm{Spec}\, K(\pi^{1/n})$。

将 $t_n : \eta_n \to \eta$ 和 $t_n : S_n \to S$ 记为谱的诱导态射。对于概形态射 $f : X \to S$，考虑如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{t_n} & X \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_n & \xrightarrow[t_n]{} & S \end{array}$$

o通过拉回得到。其一般纤维是交换图中的上方方块

$$\begin{array}{ccccc} & & (X_n)_\eta & \xrightarrow{t_n} & X_\eta \\ & & {\scriptstyle (f_n)_\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_\eta} \\ & & \eta_n & \xrightarrow{t_n} & \eta \\ & {\scriptstyle \pi_n}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{G}_{m,S_n} & \xrightarrow{e_n} & \mathbb{G}_{m,S_n} & \xrightarrow{t_n^{\mathbb{G}_m}} & \mathbb{G}_{m,S}, \end{array} \tag{1.5.6.1}$$

其中 $t_n^{\mathbb{G}_m}$表示沿投影 $q : \mathbb{G}_{m,S} \to S$ 对 $t_n : S_n \to S$ 作基变换。

如 1.4.10(1) 中所示，我们通过一致化子 $\pi_n : S_n \to \mathbb{A}^1_{S_n}$，由 $f_n : X_n \to S_n$ 和 $\theta^{\mathcal{A}} : (\mathbf{A}_{S_n}, \Delta) \to (\mathbb{G}_{m,S_n}, \Delta)$ 得到图表态射 $\theta^{\mathcal{A}}_{f_n} : (\mathbf{A}_{f_n}, \Delta) \to (X_n, \Delta)$。

命题 1.5.7. 考虑 1.4.9 中的情形。对于任意概形态射$f : X \to S$ 以及任意 M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X_\eta, \Lambda)$，存在等价

$$\Upsilon_f(M) \simeq \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, M),$$

$$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) \simeq \mathrm{colim}_{n \in (\mathbb{N}'^\times)^{\mathrm{op}}} \Upsilon_{f_n}(t_n^* M)$$

and

$$\Psi_f(M) \simeq \mathrm{colim}_{L \in \Xi_\tau} \Psi^{\mathrm{tame}}_{t_L \circ f_L}(t_L^* M).$$

证明。 利用引理 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}((X, I)\ \Lambda) \simeq \mathrm{Fun}(I^{op}, \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X, \Lambda))$ 1.5.2 中的识别以及引理1.5.2 和引理1.5.5，可得

$$\begin{aligned} \Upsilon_f(M) &= (p_\Delta)_\# i^* j_* (\theta_f^{\mathcal{A}})_* (\theta_f^{\mathcal{A}})^* (p_\Delta)^* M \\ &\simeq \mathrm{colim}_{i \in \Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* (\theta_f^{\mathcal{A}})_* (\theta_f^{\mathcal{A}})^* (p_\Delta)^* M \\ &\simeq \mathrm{colim}_{i \in \Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, M). \end{aligned}$$

将 $q : (\mathbb{G}_{m,S}, \mathbb{N}'^\times \times \Delta) \to (\mathbb{G}_{m,S}, \mathbb{N}'^\times)$ 记为由第一投影 $\mathbb{N}'^\times \times \Delta \to \mathbb{N}'^\times$ 诱导的 $\mathbf{DiaSch}_{/S}$ 中常值图表的映射。于是我们有

$$\begin{aligned} \Psi_f^{\mathrm{tame}} M &= (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_\# i^* j_* (\theta_f^{\mathcal{R}})_* (\theta_f^{\mathcal{R}})^* (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* M \\ &\simeq (p_{\mathbb{N}^\times})_\# q_\# i^* j_* (\theta_f^{\mathcal{R}})_* (\theta_f^{\mathcal{R}})^* (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* M \\ &\overset{(1)}{\simeq} \mathrm{colim}_{n \in (\mathbb{N}'^\times)^{\mathrm{op}}} q_\# i^* j_* (t_n)_* (\theta^{\mathcal{A}}_{f_n})_* (\theta^{\mathcal{A}}_{f_n})^* t_n^* M \\ &\overset{(2)}{\simeq} \mathrm{colim}_{n \in (\mathbb{N}'^\times)^{\mathrm{op}}} q_\# i^* j_* (\theta^{\mathcal{A}}_{f_n})_* (\theta^{\mathcal{A}}_{f_n})^* t_n^* M \\ &\simeq \mathrm{colim}_{n \in (\mathbb{N}'^\times)^{\mathrm{op}}} \Upsilon_{f_n}(t_n^* M). \end{aligned}$$

这里 (1) 由引理 1.5.2 得出，而 (2) 则由以下方块的事实得出：i n

$$\begin{array}{ccccc} \eta_n & \xrightarrow{j} & S_n & \xleftarrow{i} & \sigma \\ {\scriptstyle t_n}\downarrow & & {\scriptstyle t_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \eta & \xrightarrow{j} & S & \xleftarrow{i} & \sigma \end{array}$$

是笛卡尔图，且由于 t_n 是有限的，有限真基变换蕴含 $i^*j_*(t_n)_* \simeq i^*(t_n)_*j_* \simeq i^*j_*$。

最后一个等价关系可用类似的方法得出。 □

注 1.5.8。 由上面的命题1.5.7中对邻近循环函子的描述可知，对所有 $f : X \to S$ 都有一个典范自然变换

$$i^*j_* \longrightarrow \Upsilon_f$$

由典范映射 $\mathscr{A}_S \longrightarrow \mathbb{1}$ (1.5.3.1) 诱导，并且还有自然变换 s

$$\Upsilon_f \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}} \text{ and } \Psi_f^{\mathrm{tame}} \longrightarrow \Psi_f$$

由映入相应余极限的典范映射给出。不难验证，这些自然变换与注 1.4.12 (2) 中考虑的自然变换一致。

注 1.5.9. 容易验证，命题 1.5.7 中的余极限的过渡映射如下所示：

(1) 对于映射 $\varphi : n \to m$ in $\mathbb{N}^\times$，记作 $k = \frac{n}{m}$。此外，记 $t_k : \eta_n \to \eta_m$ and$t_k : (X_n)_\eta \to (X_m)_\eta$ 为沿 $(f_m)_\eta$ 的基变换。则过渡映射 τ_φ由下式给出

$$\begin{aligned} \Upsilon_{f_m}(t_m^*M) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^*j_* \underline{\mathrm{Hom}}((f_m)_\eta^*\pi_m^*\mathscr{A}_{S_m}, t_m^*M) \\ &\xrightarrow{\text{unit}} \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^*j_*t_{k*}t_k^* \underline{\mathrm{Hom}}((f_m)_\eta^*\pi_m^*\mathscr{A}_{S_m}, t_m^*M) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^*j_*t_{k*} \underline{\mathrm{Hom}}(t_k^*(f_m)_\eta^*\pi_m^*\mathscr{A}_{S_m}, t_k^*t_m^*M) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^*j_* \underline{\mathrm{Hom}}(t_k^*(f_m)_\eta^*\pi_m^*\mathscr{A}_{S_m}, t_n^*M) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^*j_* \underline{\mathrm{Hom}}((f_n)_\eta^*\pi_n^*e_k^*\mathscr{A}_{S_n}, t_n^*M) \\ &\longrightarrow \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} i^*j_* \underline{\mathrm{Hom}}((f_n)_\eta^*\pi_n^*\mathscr{A}_{S_n}, t_n^*M) \\ &\xrightarrow{\sim} \Upsilon_{f_n}(t_n^*M). \end{aligned}$$

如上面的证明所示，第四行中的等价来自以下事实：

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xleftarrow{i} & \sigma \\ {\scriptstyle t_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ S_m & \xleftarrow{i} & \sigma \end{array}$$

这是一个拉回方块以及真基变换。第五行中的等价由以下等价诱导

$$t_k^*\pi_m^* \simeq \pi_n^*e_n^*(t_k^{\mathbb{G}_m})^*,$$

这由图表（1.5.6.1）展示，同时结合以下观察：

$$(t_k^{\mathbb{G}_m})^*\mathscr{A}_{S_m} \simeq \mathscr{A}_{S_n}.$$

最后，倒数第二个映射由典范映射诱导而来 $\varphi_k : \mathscr{A}_{S_n} \to e_k^* \mathscr{A}_{S_n}$(见（1.5.3.2）。

(2) 对于态射 $u : L \to L'$ in Ξ_τ，我们也用 $u.$ 表示概形的诱导态射 $S_{L'} \to S_L$ 和 $X_{L'} \to X_L$。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} X_{L'} & \xrightarrow{u} & X_L \\ {\scriptstyle f_{L'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_L} \\ S_{L'} & \xrightarrow{u} & S_L \\ & {\scriptstyle t_{L'}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle t_L} \\ & & S. \end{array}$$

那么过渡映射 τ_u 就由下列复合给出

$$\Psi^{\mathrm{tame}}_{t_L\circ f_L}(t_L^* M) \simeq u_\sigma^* \Psi^{\mathrm{tame}}_{t_L\circ f_L}(t_L^* M) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} \Psi^{\mathrm{tame}}_{t_L\circ f_L\circ u}(u_\eta^* t_L^* M) \simeq \Psi^{\mathrm{tame}}_{t_{L'}\circ f_{L'}}(t_{L'}^* M).$$

其中 Ex^* 是描述特化系统函子性的交换映射 Ψ^{tame} (见定义 1.3.3(1)。

1.5.10. 设 $f : X \to S$ 是有限型态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$。那么我们得到一个比较映射

$$\mathrm{comp}_\Psi : \Psi_f(\mathbb{D}_\eta(M)) \longrightarrow \mathbb{D}_\sigma(\Psi_f(M))$$

作为下列复合的转置

$$\begin{aligned} \Psi_f(\mathbb{D}_\eta(M)) \otimes \Psi_f(M) &\longrightarrow \Psi_f(\mathbb{D}_\eta(M) \otimes M) \\ &\xrightarrow{\Psi_f\,\mathrm{id}^t} \Psi_f(f_\eta^! \mathbb{1}) \\ &\xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} f_\sigma^! \Psi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) \\ &\xrightarrow{\sim} f_\sigma^! \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Here

$$\mathrm{id}^t : M \otimes \mathbb{D}_\eta(M) \longrightarrow f_\eta^! \mathbb{1}$$

是关于 $\otimes \dashv \mathsf{Hom}$ 伴随的 $\mathsf{id} : \mathbb{D}_\eta(M) \to \mathbb{D}_\eta(M)$ 的转置。

1.5.11。 我们汇总一下在 [Ayo14中证明的邻近循环函子的主要性质]:

定理 1.5.12。 考虑*1.4.9*中的情形。假设 S 是优良的，且 S 的剩余特征在 Λ中可逆。则有以下结论:

(1) 复合

$$\mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{unit}} \chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) \longrightarrow \Psi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})$$

是一个等价。

(2) 设 $f : X \to S$ 为有限型且 M 属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(X_\eta, \Lambda)$。则存在一个 L 属于Ξ_τ，使得对于所有 $u : L \to L'$ 属于 Ξ_τ，过渡映射

$$\tau_u : \Psi^{\mathrm{tame}}_{t_L\circ f_L}(t_L^* M) \longrightarrow \Psi^{\mathrm{tame}}_{t_{L'}\circ f_{L'}}(t_{L'}^* M)$$

是一个等价。特别地，典范映射

$$\Psi^{\mathrm{tame}}_{t_L\circ f_L}(t_L^* M) \longrightarrow \Psi_f(M)$$

是一种等价关系。

(3) 设 $f : X \to S$ 为有限型。那么 $\Psi_f^{\mathrm{tame}}(_)$ 和 $\Psi_f(_)$ 保持可构造性。*(4)* 设 $f : X \to S$ 和 $g : Y \to S$ 为有限型。那么对于任意 $M \in \mathrm{DA}(X_{\eta}, \Lambda)$ 以及任意 $N \in \mathrm{DA}_{\acute{e}t}(Y_{\eta}, \Lambda)$，典范比较映射

$$\Psi_f(M) \boxtimes \Psi_g(N) \longrightarrow \Psi_{f\times g}(M \boxtimes N)$$

由 Ψ 的松幺半结构诱导的等价。

(5) 设 $f : X \to S$ 为有限型，且 M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_{\eta}, \Lambda)$。那么比较映射

$$\mathrm{comp}_{\Psi} : \Psi_f(\mathbb{D}_{\eta}(M)) \longrightarrow \mathbb{D}_{\sigma}(\Psi_f(M))$$

是一个等价关系。

证明。 陈述 (1) 证明于 [Ayo14，10。18]。注意到 (2)-(5) 可在 X上局部按扎里斯基拓扑检验 $f : X \to S$。因此不妨设 [Ayo14，10。13], (3) 由 (2) 和 [Ayo14，10。9], (4) 为 [Ayo14，10。19]而 (5) 为 [Ayo14，10。20]。 □

1.6. 旁论：关于对数动机

1.6.1. 设 S 是一个拟紧拟分离概形，且 (X, s) 是一个带基点的光滑 S-概形。也就是说，这是一个光滑概形 $\pi : X \to S$ over S，并带有一个截面 $s : S \to X$ of π。考虑余跨

$$[X \xrightarrow{\mathrm{id}} X] \xrightarrow{\Delta} [X \times_S X \xrightarrow{p_1} X] \xleftarrow{(\mathrm{id},s)} [X \xrightarrow{\mathrm{id}} X]$$

在 Sm/X 中。由 1.4.7 可将这样的余跨关联到一个余单纯对象

$$\mathcal{A}_{(X,s)} := \mathrm{Bar}(\Delta, (\mathrm{id}, s)) : \Delta \longrightarrow \mathrm{Sm}_{/X}$$

with

$$\mathcal{A}_{(X,s)}([i]) = [X \times_S X^{\times i} \xrightarrow{p_1} X]$$

在 Δ 中的 $[i]$。

或者，我们可以将余跨关联到

$$[X \xrightarrow{\pi} S] \xrightarrow{\mathrm{id}} [X \xrightarrow{\pi} S] \xleftarrow{s} [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S].$$

在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中的余单纯对象

$$\mathcal{A}'_{(X,s)} := \mathrm{Bar}(\mathrm{id}, s) : \Delta \longrightarrow \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}$$

with

$$\mathcal{A}'_{(X,s)}([i]) = X \times_S X^{\times i}.$$

第一投影 $p_1 : X \times_S X^{\times i} \to X$ 赋予 $\mathrm{A}'_{(X,s)}([i])$ 光滑X-概形的结构。对于 Δ 中所有的 $[i]$，这与下述分解相容：$\mathrm{A}'_{(X,s)}$ 分解为

$$\mathcal{A}'_{(X,s)} : \Delta \longrightarrow \mathrm{Sm}_{/X} \longrightarrow \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}$$

请注意，这正是我们在 1.4.8 中针对 $(X, s) = (\mathbb{G}_{m,S}, 1)$ 所做的。容易验证，这两个余单纯对象 $\mathrm{A}^{(X,s)}$ 和 $\mathrm{A}'_{(X,s)}$ 在 Sm/X中一致。

1.6.2. 考虑稳定动机同伦范畴 $\mathbf{SH}(X)$，例如 [Rob15 §2.4 中所讨论的情形。3]。通过函子

$$\Sigma^\infty : \mathrm{Sm}_X \longrightarrow \mathbf{SH}(X)$$

(参见 [Rob15，2.39]) 余单纯形概形 $\mathcal{A}^{(X,s)}$ 导出一个余单纯对象 ct

$$\mathscr{A}_{(X,s)} : \Delta \xrightarrow{\mathcal{A}_{(X,S)}} \mathrm{Sm}_{/X} \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathbf{SH}(X).$$

设 $\mathcal{D}(_)$ 是定义在 ∞ 上的动机 S-范畴。这里指的是在 $(*, \# \otimes)$-形式体系，定义在$(\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}, \mathrm{Sm}/S)$ 上，并满足 Kha [Kha21] 所述意义下的 Voevodsky条件。则存在唯一一组保持余极限的函子

$$R_Y : \mathbf{SH}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}(Y)$$

对所有 Y 属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 的对象，它们与 f^*、张量积以及 $f_\#$ 对光滑对象的函子可交换（参见 f Kha21，2.14]）。我们将该余单纯对象仍记为

$$\Delta \xrightarrow{\mathscr{A}_{(X,s)}} \mathbf{SH}(X) \xrightarrow{R_X} \mathcal{D}(X)$$

再次记作 $\mathscr{A}_{(X,s)}$。

$\mathrm{A}^{(X,s)}$ 作为余单纯 X-概形的结构诱导出一个典范映射

$$\varepsilon : \mathscr{A}_{(X,s)} \to \underline{\mathbb{1}}_X \tag{1.6.2.1}$$

在 Fun(Δ，D(X)) 中，其中 $\underline{\mathbb{1}}_X$ 表示取值为张量单位 $\mathbb{1}_X$ 的常值函子。容易检验，余单纯对象

$$s^*\mathscr{A}_{(X,s)} : \Delta \xrightarrow{\mathscr{A}_{(X,s)}} \mathcal{D}(X) \xrightarrow{s^*} \mathcal{D}(S)$$

等价于由余跨得到的 D(S) 中的余单纯对象

$$[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \xrightarrow{s} [X \xrightarrow{\pi} S] \xleftarrow{s} [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S]$$

在 Sm/S 中。特别地，存在一个典范映射

$$\eta : \underline{\mathbb{1}}_S \to s^*\mathscr{A}_{(X,s)} \tag{1.6.2.2}$$

它位于 Fun(Δ，D(S)) 中，并由余跨的映射诱导

$$\begin{array}{ccccc}
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xleftarrow{\mathrm{id}} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \\
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{s} & [X \xrightarrow{\pi} S] & \xleftarrow{s} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S]
\end{array}$$

在 Sm/S 中。

引理 1.6.3。 设 $(\pi : X \to S, s)$ 是一个光滑的带基点 S-概形。则复合 n

$$\underline{\mathbb{1}}_S \xrightarrow{\eta} s^*\mathscr{A}_{(X,s)} \xrightarrow{s^*\varepsilon} \underline{\mathbb{1}}_S$$

等价于恒等映射。

证明。这由以下事实得出：该复合由余跨自上而下的复合诱导。

$$\begin{array}{ccccc}
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xleftarrow{\mathrm{id}} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{s} & [X \xrightarrow{\pi} S] & \xleftarrow{s} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xleftarrow{\mathrm{id}} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S]
\end{array}$$

它是恒等映射。

□

定义 1.6.4. 设 $\pi : X \to S$ 是一个光滑映射，D(_) 是一个六函子形式主义。我们将 D(X) 中包含形如 $\pi^* N$ 的对象（对所有 N 属于 D(S)）的最小稳定全子范畴记为 Uni$_\pi$(X)。称 Uni$_\pi$(X) 中的对象 M 为<中style id='12'>幂零</中style>对象。

注 1.6.5. 对于一个光滑带基点的 S–概形 (X, s)，我们有

$$\mathscr{A}_{(X,s)}([i]) \simeq \Sigma^\infty [X \times_S X^{\times i} \xrightarrow{p_1} X] \simeq \pi^* \Sigma^\infty [X^{\times i} \to S].$$

因此 $\mathscr{A}_{(X,s)}$ 可分解为

$$\mathscr{A}_{(X,s)} : \Delta \longrightarrow \mathrm{Uni}_\pi(X) \subset \mathcal{D}(X).$$

引理 1.6.6. 设 $(\pi : X \to S, s)$ 是一个光滑带基点的 S-概形。那么对于任意属于$\mathcal{D}(S)$ 的 N，复合

$$N \xrightarrow{\mathrm{unit}} \pi_* \pi^* N \xrightarrow{\varepsilon^\#} \mathrm{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, \pi^* N),$$

是一个等价。这里最后一个箭头由 $\varepsilon : \mathscr{A}_{(X,s)} \to \mathbb{1}_X$ *(1.6.2.1)* 诱导。

证明。考虑映射 $(\theta, \mathrm{id}_\Delta) : (\mathbb{A}^{(X,s)}, \Delta) \to (X, \Delta)$, $(\pi, \mathrm{id}_\Delta) : (X, \Delta) \to (S, \Delta)$ 以及 $p_\Delta : (S, \Delta) \to (S, \star)$，它们属于 DiaSch$_S$。我们断言

$$\mathrm{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, \pi^* N) \simeq (p_\Delta)_\# (\pi, \mathrm{id}_\Delta)_* (\theta, \mathrm{id}_\Delta)_* (\theta, \mathrm{id}_\Delta)^* (\pi, \mathrm{id}_\Delta)^* (p_\Delta)^* N.$$

事实上，我们可以逐字沿用引理 1.5.5 的证明。此外，从该等价的构造可知，引理的断言等价于复合

$$\begin{aligned}
N &\longrightarrow \pi_* \pi^* N \\
&\xrightarrow{\sim} (p_\Delta)_\# (\pi, \mathrm{id}_\Delta)_* (\pi, \mathrm{id}_\Delta)^* (p_\Delta)^* N \\
&\xrightarrow{\mathrm{unit}} (p_\Delta)_\# (\pi, \mathrm{id}_\Delta)_* (\theta, \mathrm{id}_\Delta)_* (\theta, \mathrm{id}_\Delta)^* (\pi, \mathrm{id}_\Delta)^* (p_\Delta)^* N
\end{aligned}$$

是等价。我们可以按照 [Ayo07b, 3.4.9] 逐字进行说明，其中讨论了情形 $(X, s) = (\mathbb{G}_{m,S}, 1)$。□

1.6.7. 存在一个典范比较映射

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _) &\xrightarrow{\text{unit}} \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* s_* s^* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} s^* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _) \\ &\longrightarrow \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \underline{\mathrm{Hom}}(s^*\mathscr{A}_{(X,s)}, s^*_) \\ &\xrightarrow{\eta^\#} s^*_,\end{aligned}$$

在 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{ex}}(\mathrm{D}(X), \mathrm{D}(S))$ 中，其中最后一个箭头由 $\eta : \mathbb{1} \to s^*\mathscr{A}_{(X,s)}$ 诱导。

定理 1.6.8. 设 $(\pi : X \to S, s)$ 是一个光滑的带基点 S-概形。那么对于任意 $M \in \mathrm{Uni}_\pi(X)$，比较映射

$$\operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, M) \longrightarrow s^* M$$

由以下内容得到：*1.6.7* 是一个等价。

证明。只需在 $M = \pi^* N$ 的情形下证明该断言，其中 N 属于 $\mathrm{D}(S)$。考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccc}
N & \xrightarrow{\text{unit}} & \pi_*\pi^*N & \xrightarrow{\varepsilon^\#} & \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, \pi^*N) \\
& \searrow^{\sim} & \downarrow{\scriptstyle \text{unit}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{unit}} \\
& & \pi_*s_*s^*\pi^*N & \xrightarrow{\varepsilon^\#} & \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \pi_* s_* s^* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, \pi^*N) \\
& & \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
& & s^*\pi^*N & \xrightarrow{\varepsilon^\#} & \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} s^* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, \pi^*N) \\
& & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & (1) & \downarrow \\
& & s^*\pi^*N & \xrightarrow{(s^*\varepsilon)^\#} & \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} \underline{\mathrm{Hom}}(s^*\mathscr{A}_{(X,s)}, s^*\pi^*N) \\
& & & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \eta^\#} \\
& & & & s^*\pi^*N.
\end{array}$$

这里，上标$(_)^\#$ 表示由相应映射诱导的映射。顶端水平行的复合根据引理 1.6.6 是一个等价，右侧竖直复合是 1.6.7 的比较映射。因此，接下来只需证明该图表交换。底部三角形的交换性由引理1.6.3 得出，而未标记方块的交换性显然。为了验证 (1) 交换，我们将按照引理1.6.6的证明，将该图表改写为由 DiaSch/S 中的映射诱导的函子所构成的图表。记该图表为

$$\Delta \xrightarrow{\mathcal{A}_{(X,s)}} \mathrm{Sm}_{/X} \xrightarrow{-\times_X S} \mathrm{Sm}_{/S}$$

由 $s^*\mathbf{A}^{(X,s)}$。这里，$_ \times_X S$ 表示沿 $s : S \to X$ 拉回所给出的函子。将 $\mathbf{DiaSch}/S$ 中的典范映射记为 $(\theta_S, \mathrm{id}_\Delta) : (s^*\mathbf{A}^{(X,s)}, \Delta) \to (S, \Delta)$。那么交换性

式 (1) 等价于下图的交换性

$$\begin{array}{ccc}
(p_\Delta)_\#(s,\mathrm{id}_\Delta)^*(\pi,\mathrm{id}_\Delta)^*(p_\Delta)^*N & \xrightarrow{\text{unit}} & (p_\Delta)_\#(s,\mathrm{id}_\Delta)^*(\theta,\mathrm{id}_\Delta)_*(\theta,\mathrm{id}_\Delta)^*(\pi,\mathrm{id}_\Delta)^*(p_\Delta)^*N \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ex}} \\
(p_\Delta)_\#(s,\mathrm{id}_\Delta)^*(\pi,\mathrm{id}_\Delta)^*(p_\Delta)^*N & \xrightarrow{\text{unit}} & (p_\Delta)_\#(\theta_S,\mathrm{id}_\Delta)_*(\theta_S,\mathrm{id}_\Delta)^*(s,\mathrm{id}_\Delta)^*(\pi,\mathrm{id}_\Delta)^*(p_\Delta)^*N.
\end{array}$$

这由交换映射的粘贴性质得出（参见1.1.2）。 □

1.6.9. 令 $\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X)$ 表示 $\mathrm{Uni}_\pi(X)$ 中由可构造幂零对象组成的全子范畴。特别地，$\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X)$ 是一个小的 ∞-范畴。显然，$\mathscr{A}_{(X,s)}$ 分解为

$$\mathscr{A}_{(X,s)} : \Delta \longrightarrow \mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X) \subset \mathcal{D}(X).$$

考虑复合关系。

$$\Delta \xrightarrow{\mathscr{A}_{(X,s)}} \mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X) \xrightarrow{j} \mathrm{Fun}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X), \mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}, \tag{1.6.9.1}$$

其中，j 表示相反的米田函子（即将 M 发送到 $\mathrm{map}_{\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X)}(M,_)$）。我们将 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X), \mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}$ 中 (1.6.9.1) 的余极限记为 $\mathscr{A}_{(X,s)}$。 —

1.6.10. 设 C 为一个小型 ∞-范畴。回顾一下，Pro(C) 是 $\mathrm{Fun}(C, \mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}$ 的全子范畴，由保持有限极限的函子构成。等价地，Pro(C) $=(\mathrm{Ind}(C^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathrm{Fun}(C, \mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}$ 的子范畴，由那些可以写成可表函子的小型余滤过极限的函子构成（参见 [Lur17b, 5.3.5.4]）。

推论 1.6.11. 假设 $\mathcal{D}(S)$ 中的张量单位 $\mathbb{1}$ 是紧的。那么存在自然等价

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X),\mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}}(\underline{\mathscr{A}}_{(X,s)}, j_) \xrightarrow{\sim} \mathrm{map}_{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1}, s^*_)$$

在 函子(普遍局部无环$_\pi^{\mathrm{cons}}(X)$,空间)$^{\mathrm{op}}$ 中。特别地，$\underline{\mathscr{A}}_{(X,s)}$ 属于 原(普遍局部无环$_\pi^{\mathrm{cons}}(X)$)。

证明。$\mathbb{1}$ 在 D(S) 中的紧性蕴含以下等价

$$\begin{aligned}
\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X),\mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}}(\underline{\mathscr{A}}_{(X,s)}, j_) &\simeq \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{map}_{\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X)}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _) \\
&\simeq \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(\mathbb{1}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _)) \\
&\simeq \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{map}_{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1}, \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _)) \\
&\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1}, \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _)).
\end{aligned}$$

将 映射$_{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1},_)$ 应用于 1.6.7 中的复合，得到一个自然变换

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1}, \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}_{(X,s)}, _)) \longrightarrow \mathrm{map}_{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1}, s^*_)$$

根据定理 1.6.8，将其限制到幂零对象上时，它是一个等价。最后一句由 $\mathrm{map}^{\mathcal{D}(S)}(\mathbb{1}, s^*_)$ 与有限极限交换这一事实推出。□

推论 *1.6.12.* 假设 *D(_)* 是 $DA_{ét}(_, \Lambda)$，其中 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。设 S 是一个有限维诺特概形，X 是定义在 S 上的光滑交换群概形，且 $s : S \to X$ 是单位截面。若 S 的特征为 *0* 或 X 是仿射的，则 $\mathscr{A}_{(X,s)}$ 在 *Pro(Uni$_\pi^{\mathrm{cons}}$(X))* 中等价于 *[HK18, §4]* 中定义的对数动机 *Log* 。 —

证明. 由于 S 是有限维诺特概形，根据 [CD16, 1.1.4]，它具有关于 Λ-系数的有限 étale 上同调维数。由标准论证可知，这意味着 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda)$ 和 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda)$ 的紧对象恰为可构造对象，并且 π_* 与小余极限交换。从 [HK18, §4] 中的构造显然可知，$\mathcal{L}og$ 是 $\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X)$ 中的一个 pro-对象。此外，将 $\mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda)}(1,_)$ 应用于 [HK18, 4.5.2] 中的等价，我们得到一个等价

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X),\mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}}(\mathcal{L}og, j_) \xrightarrow{\sim} \mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda)}(\mathbb{1}, s^*_)$$

in 函子$(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X)$，$\mathrm{Spc})^{\mathrm{op}}$。因此，推论 1.6.11 表明存在一个等价

$$\mathcal{L}og \xrightarrow{\sim} \underline{\mathscr{A}}_{(X,s)}$$

在 $\mathrm{Pro}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X))$ 中。 □

注 1.6.13。 该推论告诉我们，可以将 $\mathscr{A}_{(X,s)}$ 视为经典对数动机的余单纯表示。注意，尽管$\mathcal{L}og$ 的构造需要有理系数，但对 $\mathscr{A}_{(X,s)}$的系数没有任何限制。因此$\mathscr{A}_{(X,s)}$ 或许可用于像 [HK18, §5] 中那样整体地定义多对数类。

命题 1.6.14。 假设$\mathbb{1}$ 在$\mathcal{D}(S)$ 中是紧的，并设 $f:(X,x)\to(Y,y)$ 是光滑带基点 S-概形之间的一个态射。则存在唯一的（在同伦意义下）映射 $\gamma_f:\mathscr{A}_{(X,x)}\to f^*\mathscr{A}_{(Y,y)}$，它属于 $\mathrm{Pro}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X))$ 且满足以下性质

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & & \\ & \overset{\eta_{(X,x)}}{\swarrow} & & \overset{\eta_{(Y,y)}}{\searrow} & \\ x^*\underline{\mathscr{A}}_{(X,x)} & \xrightarrow{x^*\gamma_f} & x^*f^*\underline{\mathscr{A}}_{(Y,y)} & \xrightarrow{\sim} & y^*\underline{\mathscr{A}}_{(Y,y)} \end{array}$$

交换。

证明。 由推论 1.6.11我们有一个等价

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Pro}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X))}(\underline{\mathscr{A}}_{(X,x)}, f^*\underline{\mathscr{A}}_{(Y,y)}) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(S))}(\mathbb{1}, x^*f^*\underline{\mathscr{A}}_{(Y,y)}).$$

通过比较映射展开这一等价的构造 1.6.7我们便得到这一结论。 □

注 1.6.15. 事实上，我们可以给出上面命题 1.6.14 中映射 γ_f 的一个非常显式的构造。注意，$f^*\mathscr{A}_{(Y,y)}$ 是由 Sm/X 中通过余跨得到的余单纯对象所关联的 pro-对象。

$$[X \overset{\pi_X}{\to} S] \xrightarrow{f} [Y \overset{\pi_Y}{\to} S] \xleftarrow{y} [S \overset{\mathrm{id}}{\to} S].$$

这先验上是$\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中的一个余单纯对象，但正如 1.6.1 中所示，我们可以通过到 $\mathrm{Sm}_{/X}$ 的投影映射，将其视为其中的一个余单纯对象 X。那么，余跨之间的映射

$$\begin{array}{ccccc} [X \overset{\pi_X}{\to} S] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & [X \overset{\pi_X}{\to} S] & \xleftarrow{x} & [S \overset{\mathrm{id}}{\to} S] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ [X \overset{\pi_X}{\to} S] & \xrightarrow{f} & [Y \overset{\pi_Y}{\to} S] & \xleftarrow{y} & [S \overset{\mathrm{id}}{\to} S] \end{array}$$

给出一个映射 $\tilde{\gamma}_f : \underline{\mathscr{A}_{(X,\ x)}} \to f^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,\ y)}}$。容易验证，$x^*\underline{\mathscr{A}_{(X,\ x)}}$ 是与该余跨相关联的 pro 对象

$$[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \xrightarrow{x} [X \xrightarrow{\pi_X} S] \xleftarrow{x} [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S]$$

并且 $x^*f^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,y)}} \simeq y^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,y)}}$ 与之相关

$$[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \xrightarrow{y} [Y \xrightarrow{\pi_Y} S] \xleftarrow{y} [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S].$$

此外，映射 $x^*\tilde{\gamma}_f : x^*\underline{\mathscr{A}_{(X,x)}} \to x^*f^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,y)}} \simeq y^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,y)}}$ 由余跨图表的映射诱导

$$\begin{array}{ccccc}
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{x} & [X \xrightarrow{\pi_X} S] & \xleftarrow{x} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
[S \xrightarrow{\mathrm{id}} S] & \xrightarrow{y} & [Y \xrightarrow{\pi_Y} S] & \xleftarrow{y} & [S \xrightarrow{\mathrm{id}} S].
\end{array}$$

现在考虑到定义 1.6.2.2) 是通过余跨图表的映射给出的，我们看到图表

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{1} & & \\
 & \swarrow^{\eta_{(X,x)}} & & \searrow^{\eta_{(Y,y)}} & \\
x^*\underline{\mathscr{A}_{(X,x)}} & \xrightarrow{x^*\tilde{\gamma}_f} & x^*f^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,y)}} & \xrightarrow{\sim} & y^*\underline{\mathscr{A}_{(Y,y)}}
\end{array}$$

交换。因此，命题 1.6.14 中的唯一性表明 $\tilde{\gamma}_f$ 和 γ_f 等价。

引理 1.6.16. 假设 $\mathcal{D}(_)$ 是 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(_, \Lambda)$，其中 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。设 S 是一个有限维诺特概形，$f : X \to Y$ 是定义在 S 上、纤维连通的光滑交换群概形之间的一个态射。假设 S 的特征为零，或者 X 和 Y 是仿射的。将分别与 X 和 Y 相关联的对数动机记为 $\mathcal{L}og_X$ 和 $\mathcal{L}og_Y$。那么

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}og_X & \xrightarrow{f_\#} & f^*\mathcal{L}og_Y \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\underline{\mathscr{A}_{(X,x)}} & \xrightarrow{\gamma_f} & f^*\underline{\mathscr{A}_{(X,x)}}
\end{array}$$

交换。这里的垂直等价是推论 1.6.12 中的等价，而映射 $f_\#$ 是 [HK18，4.4。1]。

证明。我们处于推论1.6.12的情形中。在 [HK18，4.3 节。1]构造了一个映射 $\eta^{\mathcal{L}og_X} : \mathbb{1} \to s^*\mathcal{L}og_X$。不难看出，

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{1} & \xrightarrow{\eta^{\mathcal{L}og_X}} & \mathcal{L}og_X \\
 & \searrow^{\eta_{(X,x)}} & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
 & & \underline{\mathscr{A}_{(X,x)}}
\end{array}$$

交换：事实上，[HK18，4.5 节中2]等价的构造表明，$\eta^{\mathcal{L}og_X}$对应于$\mathrm{id}:\mathcal{L}og_X\to\mathcal{L}og_X$在该等价关系下

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Pro}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X))}(\mathcal{L}og_X,\mathcal{L}og_X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{map}_{\mathrm{Pro}(\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda))}(\mathbb{1},s^*\mathcal{L}og_X).$$

类似地，定理 1.6.8中的等价构造表明，$\eta_{(X,x)}$ 在该等价下对应于 $\mathrm{id}:\mathscr{A}_{(X,x)}\to\mathscr{A}_{(X,x)}$

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Pro}(\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(X))}(\underline{\mathscr{A}}_{(X,x)},\underline{\mathscr{A}}_{(X,x)})\xrightarrow{\sim}\mathrm{map}_{\mathrm{Pro}(\mathrm{DA}_{\text{ét}}(S,\Lambda))}(\mathbb{1},s^*\underline{\mathscr{A}}_{(X,x)}).$$

从 [HK18, §4] 中的显式构造可以直接得出

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & & \\ & \swarrow^{\eta^{\mathcal{L}og_X}} & & \searrow^{\eta^{\mathcal{L}og_Y}} & \\ x^*\mathcal{L}og_X & \xrightarrow{x^*f_\#} & x^*f^*\mathcal{L}og_Y & \xrightarrow{\sim} & y^*\mathcal{L}og_Y \end{array}$$

交换。因此命题 1.6.14 的唯一性性质蕴含了该断言。 □

1.7. 具有有理系数的邻近循环函子

1.7.1. 令 Λ 为一个 $\mathbb{Q}$-代数，并考虑 [HK18, §6.4] 中构造的 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_m,\Lambda)$ 的概形对象 $\mathrm{L}og$。注意，概形对象 $\mathrm{L}og$ 的构造与 [Ayo07b, §3.6] 中归纳对象 $\mathrm{L}og^\vee$ 的构造互为对偶。[Ayo14, 11.14] 中证明了，当 f 为有限型时，在命题 1.5.7 对 Υ_f 的描述中，我们基本上可以用 $\mathrm{L}og$ 替换 $\mathscr{A}_S$。结合推论 1.6.12，可以将此说法精确化。对数动机对于下面的引理至关重要：

引理 1.7.2. 考虑命题*1.5.7* 中的情形，并假设 Λ 是一个$\mathbb{Q}$-代数。那么对于所有 n 中的 $\mathbb{N}'^\times$ 映射

$$\mathrm{colim}_{\Delta^{op}}\underline{\mathrm{Hom}}((f_n)_\eta^*\pi_n^*e_k^*\mathscr{A}_{S_n},t_n^*M)\longrightarrow\mathrm{colim}_{\Delta^{op}}\underline{\mathrm{Hom}}((f_n)_\eta^*\pi_n^*\mathscr{A}_{S_n},t_n^*M)$$

由典范映射 $\varphi_k:\mathscr{A}_{S_n}\to e_k^*\mathscr{A}_{S_n}$ 诱导的映射是一个等价。

证明。余单纯对象 $\varphi_k:\mathscr{A}_{S_n}\to e_k^*\mathscr{A}_{S_n}$ in $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,S_n},\Lambda)$ 的映射诱导出映射 $\varphi_k:\mathscr{A}_{S_n}\to e_k^*\mathscr{A}_{S_n}$ in Pro $\mathrm{Uni}_\pi^{\mathrm{cons}}(\mathbb{G}_{m,S_n})$。因此，只需证明原对象映射$\varphi_k$ 是一个等价。

由 φ_k 在1.5.3 中的显式构造以及注1.6.15 中的构造可知，φ_k 等价于命题 γ_{e_k} 1.6.14中的映射。由于$e_k:\mathbb{G}_{m,\,S_n}\to\mathbb{G}_{m,\,S_n}$是一个同源$(e_k)_\#:\mathcal{L}og\to e_k^*\mathcal{L}og$ 根据 [HK18，4.4.2]是一个等价。因此，引理1.6.16表明φ_k 是一个等价，正如所需。□

引理 1.7.3. 设 $h:Y\to X$ 是一个有限满射态射，其中 X 是一个正规诺特有限维概形，并考虑一个 $\mathbb{Q}$-代数 Λ。那么单位映射

$$M\longrightarrow h_*h^*M$$

对 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$中的每个 M 都存在一个收缩。此外，对任意映射 $X'\to X$进行基变换后，此结论仍然成立。

证明。利用 [CD16，5.5。10]和 [CD19，4.2。13] 我们可以归约到以下情形：$M\simeq f_*\mathbb{1}$ 对于某个真 $f:W\to X$。利用 [CD16，5.5。12] 可以观察到，只需在 $\Lambda\simeq\mathbb{Q}$的情形下证明该引理。有限维诺特概形上的有理 étale 动机 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\mathbb{Q})$ 与 Beilinson 动机 $\mathrm{DM}_B(_)$ 等价

作者 [CD16，5.2。2]。这意味着 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_, \mathbb{Q})$ 由 [CD19，14.3。3] 在限制于有限维诺特概形时是分离的。因此我们可以应用 [CD19，3.3。40]。□

引理 1.7.4. 设 I 是一个可数滤序偏序集，且$\mathcal{C}$ 是一个具有可数余极限的稳定 ∞-范畴。考虑一个函子 $F : I \to \mathcal{C}$，使得对于任意映射 $i \to j$，诱导态射 $F(i) \to F(j)$ 都是直和项的包含。那么对于每个 i，典范映射 $F(i) \to$余极限 F都是直和项的包含。

证明。首先注意到，我们可以找到一个共终函子 $\varphi : \mathbb{N} \to I$，其中 $\mathbb{N}$ 表示自然数集 $\{0 < 1 < 2 < \dots\}$ 按通常顺序排列所得的线性有序集。这是众所周知的；为完整起见，我们给出证明。由于 I 可数，我们可以找到一个双射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathrm{Ob}\, I$。不妨设 I 有一个始对象 $\sigma(0)$。对于 I 中任意两个对象 i, j，当偏序集 I 中存在映射 $i \to j$ 时，记作 $i \prec j$。现在归纳定义函子 $\varphi : \mathbb{N} \to I$，规则如下：$\varphi(0) = \sigma(0)$，$\varphi(m) \prec \varphi(n)$，且对所有 $m < n$，$\sigma(m) \prec \varphi(n)$。第二条规则确保 φ 是函子，而第三条规则则蕴含 φ 是共终的。

因此，只需在 $I = \mathbb{N}$ 的情形下证明引理，这归结为以下问题：给定一个由 $\mathbb{N}$ 索引的对象族 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，它们属于 C，图表

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{i\le n} x_i \longrightarrow \bigoplus_{i\le n+1} x_i \longrightarrow \dots$$

在 C 中的余极限等价于 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} x_i$。这是显然的。□

定理 1.7.5. 设 S 是一个严格亨泽尔离散赋值环的谱，并假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。那么，对于每个有限型态射 $f : X \to S$、每个属于 $\mathrm{DA}_{ét}(X_{\eta}, \Lambda)$ 的 M，以及每个属于 $\mathbb{N}'^{\times}$ 的 n，典范映射

$$\Upsilon_{f_n}(t_n^* M) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$$

是一个直和项的包含映射。

证明。根据 Ψ_f^{tame}在命题1.5.7 和上文的引理 1.7.4中的描述，只需证明，对于任意属于 $\varphi : n \to m$ 的 $\mathbb{N}'^{\times}$，过渡映射

$$\tau_\varphi : \Upsilon_{f_m}(t_m^* M) \longrightarrow \Upsilon_{f_n}(t_n^* M)$$

存在一个收缩。

由于 f 是有限型的，函子 j_* 和 t_{k*} 由 1.2.20 可知与余极限交换。因此，引理1.7.2 表明，1.5.9 (1) 中的映射诱导出一个等价

$$\Upsilon_{f_n}(t_n^* M) \simeq i^* j_* t_{k*} t_k^* \operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \underline{\mathrm{Hom}}((f_m)_\eta^* \pi_m^* \mathscr{A}_{S_m}, t_m^* M),$$

且过渡映射 τ_φ 正是由单位映射 $\mathrm{id} \to t_{k*} t_k^*$诱导的。因此 τ_φ由引理1.7.3 可知存在一个收缩。□

推论 1.7.6。设 S 是一个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱，并假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。那么，对每个有限型的 $f : X \to S$ 以及每个属于 $\mathrm{DA}_{ét}^{\mathrm{cons}}(X_{\eta}, \Lambda)$ 的 M，都存在一个 n 属于 $\mathbb{N}'^{\times}$，使得典范映射

$$\Upsilon_{f_n}(t_n^* M) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$$

是一个等价。

证明。根据命题 1.2.20，$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$ 中的可构造对象与紧对象一致，因此$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$由定理 1.5.12 (3) 可知是紧对象。到余极限的典范映射

$$\Upsilon_{f_n}(t_n^* M) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$$

根据定理1.7.5，这些映射是直和项的包含。由紧致性，$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$ 的恒等映射可分解为

$$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) \longrightarrow \Upsilon_{f_n}(t_n^* M) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$$

对于某个 n，属于 $\mathbb{N}'^{\times}$。特别地，$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$ 是 $\Upsilon_{f_n}(t_n^* M)$ 的一个直和项。但由于 $\Upsilon_{f_n}(t_n^* M)$ 是 $\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$ 的一个直和项，这意味着典范映射

$$\Upsilon_{f_n}(t_n^* M) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$$

是一个等价。 □

推论 1.7.7。设 S 是一个优良严格亨泽尔离散赋值环的谱，并假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。那么对于每个有限型的 $f : X \to S$ 以及每个属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_{\eta}, \Lambda)$ 的 M，典范映射

$$\Upsilon_{(t_L \circ f_L)_n}(t_n^* t_L^* M) \longrightarrow \Psi_f(M)$$

对于所有属于 $\mathbb{N}'^{\times}$ 的 n 和属于 Ξ_τ 的 L，都是一个直和项的包含。特别地，我们可以找到一个 $\mathbb{N}'^{\times}$ 中的 n 和一个 Ξ_τ 中的 L，使得此映射是一个等价。

证明。由于所讨论的映射可分解为

$$\Upsilon_{(t_L \circ f_L)_n}(t_n^* t_L^* M) \longrightarrow \Psi_{(t_L \circ f_L)_n}(t_n^* t_L^* M) \xrightarrow{\sim} \Psi_f(M)$$

我们可以假设 $K = L$ 和 $n = 1$。

由定理 1.5.12 (2)，存在一个 $u : K \to F$ 属于 Ξ_τ，使得典范映射

$$\Psi_{t_F \circ f_F}^{\mathrm{tame}}(t_F^* M) \longrightarrow \Psi_f(M)$$

是一个等价。考虑复合

$$\tilde{\tau}_u : \Upsilon_f(M) \simeq u_\sigma^* \Upsilon_f(M) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} \Upsilon_{f \circ u}(u_\eta^* M) \simeq \Upsilon_{t_F \circ f_F}(t_F^* M)$$

（使用注 1.5.9 (2) 中的记号）。由注 1.5.9 (2) 中对过渡映射的显式描述以及 $\Upsilon \to \Psi^{\mathrm{tame}}$ 是特化系统的映射这一事实，我们可知

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_f(M) & \longrightarrow & \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\tau}_u} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_u} \\ \Upsilon_{f_F \circ \tau_F}(t_F^* M) & \longrightarrow & \Psi_{f_F \circ \tau_F}^{\mathrm{tame}}(t_F^* M) \end{array}$$

交换。由于底部的水平映射是由定理1.7.5 给出的一个直和项的包含，因此只需证明 $\tilde{\tau}_u$ 是一个直和项的包含。

这由引理1.7.3得出，因为 $\tilde{\tau}_u$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, M) &\xrightarrow{\sim} i^* j_* \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, M) \\ &\xrightarrow{\mathrm{unit}} i^* j_* t_{F*} t_F^* \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, M) \\ &\xrightarrow{\sim} i^* j_* \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \underline{\mathrm{Hom}}(t_F^* f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, t_F^* M) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}((f \circ t_F)_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, t_F^* M). \end{aligned}$$

最后一句可类比推论 1.7.6 得出。

□

第2章

étale 动机的 J-进整数环实现的局部单值化定理

本章的主要目标是证明格罗滕迪克局部单值化定理的两个推广：推论2.2.10 和推论 2.2.13。事实证明，这可以相当容易地由 Ayoub 的一个定理（定理 2.1.11）和推论 1.7.6 得出。

我们首先介绍 étale 动机的 J-进实现和 J-进邻近循环函子。

2.1. 动机邻近循环函子的 J-进实现

2.1.1. 在本章中，我们固定如下情形： S 是一个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱 R，其一致化子 π固定。记$K :=$ 分式域(S)， $\kappa := S/(\pi)$，并用 p 表示 κ的特征。固定一个可分闭包$\bar{K}$，并记 K 为 $\tilde{K} := K(\pi^{1/n} | n \in \mathbb{N}'^{\times}) \subset \bar{K}$。回顾 1.4.11，存在一个群的短正合序列

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbb{Z}}'(1) \longrightarrow 0$$

以及一个同构 Gal($\tilde{K}/K$) $\simeq \widehat{\mathbb{Z}}'$(1)，在该同构下， χ 对应于限制映射¯ ˜Gal(K/K) →Gal(K/K)。

最后，设 Λ 为一个环， $J \subset \Lambda$ 为一个理想，使得 Λ/J 具有正特征，且 m在 O(S) 中可逆。

2.1.2. 设 Y为一个概形。由于本章不需要任何 ∞-范畴工具，我们将 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y, \Lambda)$ 记为在 ∞-范畴上取同伦范畴所得的三角范畴，该 -范畴定义于 1.2.3。

2.1.3. 令 $\mathbb{N}$表示偏序集 $\{0 \to 1 \to 2 \to \dots\}$，令 Λ/J^*表示如下图表

$$\{\dots \longrightarrow \Lambda/J^3 \longrightarrow \Lambda/J^2 \longrightarrow \Lambda/J \longrightarrow 0\}$$

由偏序集 $\mathbb{N}^{op}$索引的环图表。我们可以将 Λ/J^* 视为预层（集合）拓扑斯中的一个环对象。特别地，我们可以讨论 Λ/J^*-模的阿贝尔范畴。

设 Y为一个概形，使得 Λ/J 的特征在 $\mathcal{O}(Y)$中可逆。我们将 $\mathcal{D}_{\text{ét}}(Y, \Lambda/J^*)$ 记为 Y 上取值于 Λ/J^*-模的 étale层的无界导出范畴。若 Y 是局部诺特的，我们可以依照 [Ayo14, §5] 得到一个三角对称幺半函子

$$\mathfrak{R}_J : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{D}_{\text{ét}}(Y, \Lambda/J^*).$$

对于 s 在 $\mathbb{N}$ 中，存在典范函子

$$s^* : \mathcal{D}_{\text{ét}}(Y, \Lambda/J^*) \longrightarrow \mathcal{D}_{\text{ét}}(Y, \Lambda/J^s),$$

它们根据 [Ayo14，5。4]。令

$$\hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)\subset\mathcal{D}_{\text{ét}}(Y,\Lambda/J^*)$$

表示由满足以下条件的对象 K 组成的全子范畴：典范映射

$$(s+1)^*K\otimes_{\Lambda/J^{s+1}}\Lambda/J^s\longrightarrow s^*K$$

对所有 s 在 $\mathbb{N}$中都是等价。（注意，我们始终讨论导出函子，只是不会ˆ明确说明这一点。）于是 $\mathfrak{R}_J$经由 $\mathcal{D}_{\text{ét}}$（Y， Λ_J）分解，依据 [Ayo14，5。8]。略微滥用记号，我们写作

$$\mathfrak{R}_J:\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)\longrightarrow\hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)$$

并称其为 *J-adic实现函子*。

$\mathrm{D}_{\text{ét}}(_,\Lambda/J^*)$ 的构造带有六函子。当限制于诺特有限维概形之间的有限型态射时，函子f^*、f_*、$f_!$、$f^!$和 $\otimes$限制到子范畴 ˆ$\mathrm{D}_{\text{ét}}(_,\Lambda_J)$（利用命题 1.2.23，我们可以将证明扩展自 [Ayo14，6.7]）。如同 [Ayo14，6.9] 中那样，我们可以推得 J-adic实现

$$\mathfrak{R}_J:\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda)\longrightarrow\hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}(_,\Lambda_J)$$

与六函子 f^*、f_*、$f_!$、$f^!$ 以及 $\otimes$ 交换，限于诺特有限维概形之间的有限型态射时如此。此外，限于 $\mathrm{DA}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(_,\Lambda)$ 中的可构造对象时，它与 Hom 的构造交换。

ˆ 2.1.4. 如果 $K\in\mathrm{D}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)$，则称其为可构造的，若对于所有 $s\in\mathbb{N}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，对象 $H^n(s^*K)$ 在经典意义下是可构造 étale 层（即按照 [SGA73b, IX, 2.3] 的意义），并且对于除有限多个 n 之外的所有 n，$H^n(s^*K)=0$。我们将由可构造对象组成的 $\mathrm{D}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)$ 的全子范畴记为 $\mathrm{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)$ ˆ。

ˆ ˆ 我们将 $\mathrm{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J\otimes\mathbb{Q})$ 定义为 $\mathrm{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)$ 的伪阿贝尔包络。$\otimes\mathbb{Q}$. 此处，ˆ$\mathrm{D}^{\text{const}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)\otimes\mathbb{Q}$ 表示这样一个范畴，其对象是 ˆ$\mathrm{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)$ 的对象，并且

$$\mathrm{map}_{\hat{\mathcal{D}}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)\otimes\mathbb{Q}}(A,B)=\mathrm{map}_{\hat{\mathcal{D}}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J)}(A,B)\otimes\mathbb{Q}$$

ˆ ˆ对于 A，B在 $\mathcal{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}$（$Y$， Λ_J）中。如 [Ayo14，9.4] $\mathcal{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}$（$Y$， $\Lambda_J\otimes\mathbb{Q}$）具有三角范畴的规范结构。此外，上述函子 $\mathfrak{R}_J$ 诱导出一个三角函子

$$\mathfrak{R}_J:\mathrm{DA}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})\longrightarrow\hat{\mathcal{D}}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(Y,\Lambda_J\otimes\mathbb{Q})$$

由 [Ayo14，9.5]。

ˆ当限制于拟优良诺特有限维概形之间的有限型态射时，$\mathrm{D}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(_,\Lambda_J\otimes\mathbb{Q})$的构造带有六函子以及实现函子

$$\mathfrak{R}_J:\mathrm{DA}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(_,\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})\longrightarrow\hat{\mathcal{D}}^{\text{cons}}_{\text{ét}}(_,\Lambda_J\otimes\mathbb{Q})$$

在这些限制下与六种运算交换。（将 [Ayo14，9.7]中的证明运用定理即可推广。）

回顾 2.1.1 中确定的情形： S 是一个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱 R。特别地，在此情形下，限制于 J-进实现函子与六函子在 S上的有限型概形之间交换。

2.1.5. 考虑一个有限型态射 $f : X \to S$，并记 S（分别为 S）为 S在 K（分别为 K）中的整闭包。记 $\eta := \mathrm{Spec}\ K$、$\tilde{\eta} := \mathrm{Spec}\, K$、$\bar{\eta} := \mathrm{Spec}\, K$和 $\sigma := \mathrm{Spec}\, \kappa$。则存在分解

$$\tilde{\eta} \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{S} \xleftarrow{\tilde{i}} \sigma$$

and

$$\bar{\eta} \xrightarrow{\bar{j}} \bar{S} \xleftarrow{\bar{i}} \sigma$$

将 S 和 S 分解为一个闭浸入及其开补。记 $f : X \to S$（分别为 $f : X \to S$）为沿 $\theta : S \to S$（分别为 $\theta : S \to S$）对 f 的拉回。于是我们得到图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{\tilde{\eta}} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{i}} & X_\sigma \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\tilde{\eta}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sigma} \\ \tilde{\eta} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{S} & \xleftarrow{\tilde{i}} & \sigma. \end{array}$$

通过取拉回。我们定义温和 J-进邻近循环函子 为

$$\Psi_f^{J,\mathrm{tame}} := \tilde{i}^* \tilde{j}_* \tilde{\theta}^* : \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\sigma, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}).$$

类似地，我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_\sigma \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\bar{\eta}}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sigma} \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{S} & \xleftarrow{\bar{i}} & \sigma. \end{array}$$

并将 总 J-进邻近循环函子定义为

$$\Psi_f^{J} := \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{\theta}^* : \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\sigma, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}).$$

根据 [Ayo14, 10.12, 10.17] 该 J-adic realization 与温和邻近循环的形成相容，即

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda \otimes \mathbb{Q})) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J} & \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}) \\ {\scriptstyle \Psi_f^{\mathrm{tame}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}} \\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\sigma, \Lambda \otimes \mathbb{Q})) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J} & \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\sigma, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda \otimes \mathbb{Q})) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J} & \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}) \\ {\scriptstyle \Psi_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_f^{J}} \\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\sigma, \Lambda \otimes \mathbb{Q})) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J} & \hat{\mathcal{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\sigma, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q}) \end{array}$$

交换。

2.1.6. 设 A 是 $\hat{\mathrm{D}}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 的一个对象，ξ 是 $\widehat{\mathbb{Z}}'(1) \simeq$ 伽罗瓦群$(\tilde{K}/K)$ 中的一个元素。稍微滥用一下记号，记 $\xi : \tilde{\eta} \to \tilde{\eta}$ 和 $\xi : S \to S$ 为诱导态射

~ ~ ~ ~ ~仿射概形。此外，我们记 $\xi : X_{\tilde{\eta}} \to X_{\tilde{\eta}}$、$\xi : X \to X$、$\theta : X \to X$、$\theta : X_{\tilde{\eta}} \to X_{\eta}$ 为沿 $f : X \to S$ 基变换诱导的概形态射。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{\tilde{\eta}} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{i}} & X_{\sigma} \\ {\scriptstyle\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\xi} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ X_{\tilde{\eta}} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{i}} & X_{\sigma} \\ {\scriptstyle\tilde{\theta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\theta}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ X_{\eta} & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_{\sigma}. \end{array}$$

然后我们可以定义映射 $\xi : \Psi^{J}{}_{,f}{}^{\mathrm{tame}}(A) \to \Psi^{J}{}_{,f}{}^{\mathrm{tame}}(A)$为复合

$$\tilde{i}^{*}\tilde{j}_{*}\tilde{\theta}^{*}A \xrightarrow{\sim} \tilde{i}^{*}\xi^{*}\tilde{j}_{*}\tilde{\theta}^{*}A \xrightarrow{\sim} \tilde{i}^{*}\tilde{j}_{*}\xi^{*}\tilde{\theta}^{*}A \xrightarrow{\sim} \tilde{i}^{*}\tilde{j}_{*}\tilde{\theta}^{*}A.$$

– – –完全类似地，对于 λ in $\mathrm{Gal}(K/K)$，我们将诱导得到的仿射概形态射记为 $\lambda : \bar{\eta} \to \bar{\eta}$, $\lambda : S \to S$，并将沿 f 进行基变换所得到的态射记为 $\lambda : X_{\bar{\eta}} \to X_{\bar{\eta}}$, $\lambda : X \to X$, $\theta : X \to X$, $\theta : X_{\bar{\eta}} \to X_{\eta}$。考虑如下图表。

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_{\sigma} \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_{\sigma} \\ {\scriptstyle\bar{\theta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\theta}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ X_{\eta} & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_{\sigma}. \end{array}$$

然后我们可以将映射 $\lambda : \Psi^{J}_{f}(A) \to \Psi^{J}_{f}(A)$ 定义为复合

$$\bar{i}^{*}\bar{j}_{*}\bar{\theta}^{*}A \xrightarrow{\sim} \bar{i}^{*}\lambda^{*}\bar{j}_{*}\bar{\theta}^{*}A \xrightarrow{\sim} \bar{i}^{*}\bar{j}_{*}\lambda^{*}\bar{\theta}^{*}A \xrightarrow{\sim} \bar{i}^{*}\bar{j}_{*}\bar{\theta}^{*}A.$$

~可以直接验证，这些规则在$\Psi^{J}{}_{,f}{}^{\mathrm{tame}}(A)$上给出 $\mathrm{Gal}(K/K)$ 的作用，并在 $\hat{}\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}_{\text{ét}}(X_{\sigma}, \Lambda_{J} \otimes \mathbb{Q})$ 中的 $\Psi^{J}_{f}(A)$ 上给出 $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 的作用。

2.1.7. 设 m 为 Λ/J 的特征，并将 $\Lambda_{J}(1)$ 记为由 $\mathbb{N}_{>0}$ 编号的阿贝尔群系统 $\{\mu_{m^k}(K) \otimes_{\mathbb{Z}/m^k\mathbb{Z}} \Lambda/J^k\}_{k\in\mathbb{N}>0}$˙。通过 2.1.1 中的群同态 χ^{-}，该系统被赋予 $\mathrm{Gal}(K/K)$ 的作用，因此我们可以将 $\Lambda_{J}(1)$ 视为 $\hat{}\mathrm{D}_{\text{ét}}(\eta, \Lambda_{J})$ 中的一个对象。由于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\, J^k}\mathbb{1}(1) \simeq \mu_{m^k}(K) \otimes_{\mathbb{Z}/m^k\mathbb{Z}} \Lambda/J^k$ 属于 $\mathrm{D}_{\text{ét}}(\eta, \Lambda/J^k)$（参见定理 1.2.10 的证明），根据 $\mathfrak{R}_{J}$ 的构造可得 $\mathfrak{R}_{J}\mathbb{1}(1) \simeq \Lambda_{J}(1)$。

通过复合

$$\widehat{\mathbb{Z}}'(1) \simeq \lim_{n\in\mathbb{N}'^{\times}}(\mu_{n}(K)) \to \lim_{k\in\mathbb{N}}(\mu_{m^k}(K)) \to \lim_{k\in\mathbb{N}}\left(\mu_{m^k}(K) \otimes_{\mathbb{Z}/m^k\mathbb{Z}} \Lambda/J^k\right)$$

一个元素 $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}'(1)$ 会产生 $\Lambda_{J}(1)$ 中的一个元素，或者等价地，产生一个映射。

$$\xi : \Lambda_{J} \longrightarrow \Lambda_{J}(1)$$

ˆ在 $\mathrm{D}_{\text{ét}}(\eta, \Lambda_{J})$ 中。

2.1.8. 设 $f : X \to S$是概形态射，且 M属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_{\eta}, \Lambda\otimes\mathbb{Q})$。根据 [Ayo14,11.16]存在一个映射

$$N : \Upsilon_{f}(M) \longrightarrow \Upsilon_{f}(M)(-1),$$

the s，称为 单值算子，它包含在 单值 *distinguished* 三角

$$\chi_f(M) \longrightarrow \Upsilon_f(M) \xrightarrow{N} \Upsilon_f(M)(-1).$$

此外，当 M 可构造且 f 为有限型时， N 是幂零的。

2.1.9. 结合这两个观察，对于任意有限型的 $f : X \to S$ 和属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda \otimes \mathbb{Q})$ 的 M，我们可以定义一个映射

$$N \cdot \xi : \mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M) \simeq \mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M) \otimes \Lambda_J \xrightarrow{\mathfrak{R}_J N \otimes \xi} \mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M)(-1) \otimes \Lambda_J(1) \simeq \mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M).$$

由于 N 是幂零的，因此存在一个定义良好的映射。

$$\exp(N \cdot \xi) \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(N \cdot \xi)^{\circ i}}{i!} : \mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M) \longrightarrow \mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M).$$

2.1.10. 对于 $M \in \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$ 以及 $k \in \mathbb{N}'^{\times}$，记作

$$i_k : \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) \longrightarrow \Psi_f(M) \simeq \mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}'^{\times}} \Upsilon_{f_n}(t_n^* M)$$

到余极限的典范映射。

定理 2.1.11。 设 $f : X \to S$ 为有限型， M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda \otimes \mathbb{Q})$ 且 $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}'(1)$。那么图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J i_1} & \mathfrak{R}_J\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(\mathfrak{R}_J M) \\
{\scriptstyle \exp(N\cdot\xi)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\
\mathfrak{R}_J\Upsilon_f(M) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J i_1} & \mathfrak{R}_J\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(\mathfrak{R}_J M)
\end{array}$$

交换。

证明。 这是 [Ayo14,11.17]. □

2.2. 局部单值性

2.2.1. 对于 K 中的有限域扩张 L/K ，令 S_L 表示 S 在L 中的正规化，并记 $f_L : X_L \to S_L$ 为 f 沿典范映射 $S_L \to S$的基变换。我们将诱导的仿射概形映射记为 $\eta_L \coloneqq \mathrm{Spec}\, L$ 和 $t_L : \eta_L \to \eta$ ，并将 t_L 沿 f_η的基变换记为$t_L : (X_L)_\eta \to X_\eta$。那么存在函子典范等价。

$$\varphi_L : \Psi_{f_L}^J(t_L^* _) \simeq \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{\theta}_L^* t_L^* \simeq \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{\theta}^* \simeq \Psi_f^J(_).$$

引理 2.2.2。 对于任意有限可分扩张 L/K 在 K中， $\lambda \in$ 伽罗瓦群(K/L) ⊂伽罗瓦群(K/K)以及 A 在 $\hat{\mathcal{D}}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 中的平方

$$\begin{array}{ccc}
\Psi_{f_L}^J(t_L^* A) & \xrightarrow{\varphi_L} & \Psi_f^J(A) \\
{\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\
\Psi_{f_L}^J(t_L^* A) & \xrightarrow{\varphi_L} & \Psi_f^J(A)
\end{array}$$

交换。

证明。这由.....的交换性表示

$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}^*A & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\lambda^*\bar{j}_*\bar{\theta}^*A & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\bar{j}_*\lambda^*\bar{\theta}^*A & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}^*A \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
\bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}_L^*t_L^*A & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\lambda^*\bar{j}_*\bar{\theta}_L^*t_L^*A & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\bar{j}_*\lambda^*\bar{\theta}_L^*t_L^*A & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}_L^*t_L^*A.
\end{array}$$

□

2.2.3. 对于 n in $\mathbb{N}'^{\times}$，存在群同构 Gal($\tilde{K}/K(\pi^{1/n})) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}'(1)$，在该同构下，包含映射 $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K(\pi^{1/n})) \subset \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ 对应于单射群同态

$$(.)^n : \widehat{\mathbb{Z}}'(1) \longrightarrow (\widehat{\mathbb{Z}}'(1))^n \subset \widehat{\mathbb{Z}}'(1).$$

如 1.5.6 中一样，记 S_n 为 S 在 $K(\pi^{1/n})$ 的正规化，并记 $f_n : X_n \to S_n$为 f 沿典范映射 $S_n \to S$ 的基变换。记 $\eta_n := \operatorname{Spec} K(\pi^{1/n})$ 和 $t_n : \eta_n \to \eta$ 为仿射概形的诱导态射，以及 $t_n : (X_n)_\eta \to X_\eta$ 为 t_n 沿 f_η的基变换。那么存在函子典范等价

$$\varphi_n : \Psi_{f_n}^{J,\mathrm{tame}}(t_n^*_) \simeq \tilde{i}^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}_n^*t_n^* \simeq \tilde{i}^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* \simeq \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(_).$$

引理 2.2.4. 对于 n *in* $\mathbb{N}'^{\times}$, $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}'(1) \simeq$ 伽罗瓦群($\tilde{K}/K(\pi^{1/n})$) 以及 A *in* $\hat{}\mathcal{D}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 该方块

$$\begin{array}{ccc}
\Psi_{f_n}^{J,\mathrm{tame}}(t_n^*A) & \xrightarrow{\varphi_n} & \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(A) \\
{\scriptstyle\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\xi^n} \\
\Psi_{f_n}^{J,\mathrm{tame}}(t_n^*A) & \xrightarrow{\varphi_n} & \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(A)
\end{array}$$

交换。

证明。 与引理 2.2.2类似。 □

2.2.5. 令 $\theta : \bar{\eta} \to \tilde{\eta}$ 表示典范映射，并将基变换 $\bar{\ }$ $\tilde{\ }$ 和 $X \to X$ 所诱导的映射也记作 θ. 。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_\sigma \\
{\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\
X_{\tilde{\eta}} & \xrightarrow[\tilde{j}]{} & \tilde{X} & \xleftarrow[\tilde{i}]{} & X_\sigma
\end{array}$$

由拉回方块组成。则复合

$$\tilde{i}^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* \xrightarrow{\sim} \bar{i}^*\theta^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* \xrightarrow{\mathrm{Ex}} \bar{i}^*\bar{j}_*\theta^*\tilde{\theta}^* \simeq \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}^*$$

定义了一个自然变换 $\alpha : \Psi^{J}{}_{,f}{}^{\mathrm{tame}}(_) \to \Psi_f^J(_)$。其中 Ex 表示与左侧拉回方块相关联的交换映射。

引理 2.2.6. 对于任意 $\lambda \in$ 伽罗瓦群(K/K) 以及 $A \in \mathcal{D}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_{\eta}, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 图表

$$\begin{array}{ccc} \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(A) & \xrightarrow{\chi(\lambda)} & \Psi_f^{J,\mathrm{tame}}(A) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \Psi_f^{J}(A) & \xrightarrow{\lambda} & \Psi_f^{J}(A) \end{array}$$

交换。

证明。注意，该图表

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\lambda} & \bar{X} \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\chi(\lambda)} & \tilde{X} \end{array}$$

交换。因此很容易验证该图表的内部方格】【。

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{i}^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* & \xrightarrow{\sim} & \tilde{i}^*\chi(\lambda)^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ex}} & \tilde{i}^*\tilde{j}_*\chi(\lambda)^*\tilde{\theta}^* & \xrightarrow{\sim} & \tilde{i}^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \bar{i}^*\theta^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\theta^*\chi(\lambda)^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ex}} & \bar{i}^*\theta^*\tilde{j}_*\chi(\lambda)^*\tilde{\theta}^* & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\theta^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* \\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Ex}} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Ex}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Ex}} \\ & & \bar{i}^*\lambda^*\theta^*\tilde{j}_*\tilde{\theta}^* & & \bar{i}^*\tilde{j}_*\theta^*\chi(\lambda)^*\tilde{\theta}^* & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Ex}} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \\ \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}^* & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\lambda^*\bar{j}_*\bar{\theta}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ex}} & \bar{i}^*\bar{j}_*\lambda^*\bar{\theta}^* & \xrightarrow{\sim} & \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{\theta}^* \end{array}$$

可交换。此处 Ex 表示相应的典范交换映射。 □

2.2.7. 设 C 为一个加性范畴，G 是一个群，X 是 C 中的一个对象，且带有 G 的作用。这里指存在一个群同态

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X).$$

对于一个 $g \in G$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们将 $(\rho(g)-1)^m$ 记作端同态$\rho(g) - \mathrm{id} : X \to X$的 m 重复复合。若 $(\rho(g) - \mathrm{id})^m : X \to X$是零映射，我们就称$(g-1)^m$ 在 X 上的作用为零。如果存在一个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $(g-1)^m$ 在 X 上的作用为零，则有时称群 $g \in G$ 在 X 上的作用是幂零 的。

定理 2.2.8。设 S 是一个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱，$f : X \to S$ 是一个有限型态射，且 M 属于$\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X, \Lambda \otimes \mathbb{Q})$。那么存在一个开子群 $H \subset$伽罗瓦群(K/K) 和一个正整数 m，使得对于所有 $\lambda \in H$，$(\lambda - 1)^m$在 $\Psi_f^J(\mathfrak{R}_J(M))$上的作用为零。

证明。设 L/K 属于 Ξ_τ，且是定理 1.5.12(2) 中所述的有限扩张，使得典范映射的复合

$$\Psi_{f_L}^{\mathrm{tame}}(t_L^* M) \longrightarrow \Psi_{f_L}(t_L^* M) \xrightarrow{\sim} \Psi_f(M)$$

¯ ¯是一个等价。由于 伽罗瓦群(K/L) ⊂伽罗瓦群(K/K) 是一个开子群，因此只需找到¯一个满足该条件的开子群 H ⊂伽罗瓦群(K/L) 因此，利用引理 2.2.2 我们可以假设典范映射

$$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) \longrightarrow \Psi_f(M) \tag{2.2.8.1}$$

是一个等价关系。

由推论 1.7.6可知存在一个 k 属于 $\mathbb{N}'^{\times}$ 使得

$$i_k : \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) \longrightarrow \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M)$$

是一个等价。由于 i_k 分解为

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) & \xrightarrow{\quad i_k \quad} & \Psi_f^{\mathrm{tame}}(M) \\ & {\scriptstyle i_1}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \sim} & \\ & \Psi_{f_k}^{\mathrm{tame}}(t_k^* M) & \end{array}$$

我们特别看到，

$$i_1 : \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) \longrightarrow \Psi_{f_k}^{\mathrm{tame}}(t_k^* M)$$

是一个等价关系。令 $(\widehat{\mathbb{Z}}'(1))^k \subset \widehat{\mathbb{Z}}'(1)$ 为由形如 ξ^k 的元素组成的有限指数子群，其中 ξ 属于 $\widehat{\mathbb{Z}}'(1)$，并设 $H := \chi^{-1}((\widehat{\mathbb{Z}}'(1))^k)$ ⊂伽罗瓦群$(\bar{K}/K)$。

由引理2.2.4 和2.2.6，我们归结为证明存在一个正整数 m，使得 $(\chi(\lambda) - 1)^m$ 在 $\Psi^J_{f_k}{}^{\mathrm{tame}}(\mathfrak{R}_J t_k^* M)$ 上的作用对所有 $\lambda \in H$ 都为零。由于

$$N : \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) \longrightarrow \Upsilon_{f_k}(t_k^* M)(-1)$$

是幂零的，依据 [Ayo14，11。16] 存在一个正整数 m 使得

$$(\exp(N \cdot \xi) - \mathrm{id})^m : \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) \longrightarrow \Upsilon_{f_k}(t_k^* M)$$

对于每个 $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}'(1) \simeq$伽罗瓦群$(\tilde{K}/K(\pi^{\frac{1}{k}}))$，它都是零映射。

根据定理 2.1.11平方

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{R}_J \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J i_1} & \mathfrak{R}_J \Psi_{f_k}^{\mathrm{tame}}(t_k^* M) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{f_k}^{J,\mathrm{tame}}(\mathfrak{R}_J t_k^* M) \\ {\scriptstyle \exp(N\cdot\chi(\lambda))}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \chi(\lambda)} \\ \mathfrak{R}_J \Upsilon_{f_k}(t_k^* M) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_J i_1} & \mathfrak{R}_J \Psi_{f_k}^{\mathrm{tame}}(t_k^* M) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{f_k}^{J,\mathrm{tame}}(\mathfrak{R}_J t_k^* M) \end{array}$$

交换，且其水平映射均为等价，因为根据构造， i_1 是一个等价。这表明，$(\chi(\lambda) - 1)^m$ 在 $\Psi^J_{f_k}{}^{\mathrm{tame}}(\mathfrak{R}_J t_k^* M)$上的作用如预期为零。□

2.2.9. 设 S 为一个优良严格亨泽尔离散赋值环的谱，且 $g : Y \to \eta$ 为一个有限型态射。考虑拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & Y \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \bar{\eta} & \xrightarrow[\bar{\theta}]{} & \eta. \end{array}$$

ˆ对于 $\mathrm{D}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(Y, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 中的 A，记作

$$R\Gamma(\bar{Y}, A|_{\bar{Y}}) := \bar{g}_* \bar{\theta}^* A$$

and

$$R\Gamma_c(\bar{Y}, A|_{\bar{Y}}) := \bar{g}_! \bar{\theta}^* A.$$

对于 Gal(K/K) 中的 λ，考虑概形的诱导态射 $\lambda : Y \to Y$。于是 λ 通过以下方式作用于 $R\Gamma(Y, A|_{\bar{Y}})$ 上：

$$\lambda : \bar{g}_* \bar{\theta}^* A \xrightarrow{\text{unit}} \bar{g}_* \lambda_* \lambda^* \bar{\theta}^* A \simeq \bar{g}_* \bar{\theta}^* A$$

以及类似地，在 $R\Gamma_c(Y, A|_{\bar{Y}})$ 上。

考虑 $\Lambda = \mathbb{Z}$ 且 $J = (\ell)$ 的情形，其中 $\ell \neq p$ 是某个素数，并记 $\mathrm{D}(\mathbb{Q}_\ell) := \hat{}\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{Spec}\ K, \mathbb{Z}_\ell \otimes \mathbb{Q})$，以及 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_\ell) := \mathrm{D}(\mathrm{Spec}\ K, \mathbb{Z}_\ell)$。此外，分别用 $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Q}_\ell)}(-, -)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_\ell)}(-, -)$ 表示这些范畴中的态射阿贝尔群。

于是我们得到公式

$$\begin{aligned}
H^i(R\Gamma(\bar{Y}, A|_{\bar{Y}})) &\simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Q}_\ell)}(\mathbb{1}, \bar{g}_* \bar{\theta}^* A[i]) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{1}, \bar{g}_* \bar{\theta}^* A[i]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\
&\simeq H^i\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{1}, \bar{g}_* \bar{\theta}^* A)\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\
&\simeq H^i\left(R\varprojlim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{1}, (\bar{g}_* \bar{\theta}^* A)/\ell^k)\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\
&\overset{(1)}{\simeq} \varprojlim_k H^i\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z}/\ell^k)}(\mathbb{1}, \bar{g}_* \bar{\theta}^* (A/\ell^k))\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\
&\simeq \varprojlim_k H^i_{\text{ét}}(\bar{Y}, A/\ell^k|_{\bar{Y}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

这里 $H^i_{\text{ét}}(\bar{Y}, A/\ell^k|_{\bar{Y}})$ 仅表示系数取值于 $\mathbb{Z}/\ell^k$-模 $\bar{\theta}^* A/\ell^k$ 的经典 étale 上同调。等价 (1) 源于如下系统这一事实

$$\left\{\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{1}, (\bar{g}_* \bar{\theta}^* A)/\ell^k)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

是一个Mittag-Leffler系统，因此逆极限是正合的。这可由Artin消失定理以及 A 是可构造的这一事实推出。

对于 $H^i(R\Gamma_c(\bar{Y}, A|_{\bar{Y}}))$，也有类似的公式。

推论2.2.10。设 S 是一个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱，$g : Y \to \eta$ 是一个分离有限型态射，且 M 属于$\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(Y, \Lambda \otimes \mathbb{Q})$。则：

(1) 存在一个开子群 $H \subset$伽罗瓦群(K/K) 和一个正整数 m，使得对所有 $\lambda \in H$，$(\lambda - 1)^m$ 在 $R\Gamma(Y, \mathfrak{R}_J M|_{\bar{Y}})$ 上的作用为零。*(2)* 存在一个开子群 $H' \subset$伽罗瓦群(K/K) 和一个正整数 m'，使得对所有 $\lambda \in H'$，$(\lambda - 1)^{m'}$ 在 $R\Gamma_c(\bar{Y}, \mathfrak{R}_J M|_{\bar{Y}})$ 上的作用为零。

证明。 通过使用 Temkin 版本的 Nagata紧化 [Tem11] 我们得到一个真态射 $f : X \to S$ 以及一个仿射开浸入 $Y \to X$ 使图表

$$\begin{array}{ccc}
Y & \longrightarrow & X \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
\eta & \xrightarrow{\ j\ } & S
\end{array}$$

通勤。考虑该图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & X_{\eta} & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\bar{\eta}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\eta}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \eta & \xrightarrow{j} & S \end{array}$$

通过拉回得到。上述拉回诱导出典范映射 $k : Y \to X_{\eta}$ and $\bar{k} : Y \to X_{\eta}$，这些映射是开仿射的，并构成一个笛卡尔方块。

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{k}} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & X_{\eta}. \end{array}$$

真光滑基变换给出一个等价

$$R\Gamma(\bar{Y}, \mathfrak{R}_J M|_{\bar{Y}}) \simeq (f_{\bar{\eta}})_* \bar{k}_* \bar{\theta}^* \mathfrak{R}_J M \simeq (f_{\sigma})_* \Psi_f^J(\mathfrak{R}_J k_* M) \tag{2.2.10.1}$$

¯其为伽罗瓦群(K/K)-等变的。由定理 2.2.8 可得一个子群 H 和一个整数m，使得 $(\lambda - 1)^m$ 在 $\Psi_f^J(\mathfrak{R}_J k_* M)$上作用为零映射。因此，（2.2.10.1）意味着该 H 和 m 满足条件（1）。在上述论证中，将 k_* 替换为 $k_!$，即可得到条件（2）。□

注 2.2.11。 (1) 在 $\Lambda = \mathbb{Z}$ 且 $J = (\ell)$ 的情形下，对于某个素数 $\ell \neq p$，我们可以从证明中看出，定理 H 和 m 中的 2.2.8 以及推论 2.2.10中的 ℓ与 H 无关。也就是说，我们在定理 m 的证明中构造的 2.2.8 仅依赖于动机 M，并且对所有 $\ell \neq p$同时成立。

(2) 在 $\Lambda = \mathbb{Z}$、 $J = (\ell)$ 对某个素数 $\ell \neq p$ 以及 $M = \mathbb{1}$ 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(Y, \Lambda \otimes \mathbb{Q})$推论 2.2.10 在仅附加 [Ill94, §1]中所述的一个较弱假设—— S 是优良的——的条件下，重新得到 Grothendieck 经典局部单值化定理。请注意，这个证明完全独立于文献中已有的证明。有趣的是，由此我们可以推知经典单值算子

$$N : H^i_{\text{ét}}(\bar{Y}, \mathbb{Q}_{\ell}) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(\bar{Y}, \mathbb{Q}_{\ell})(-1)$$

是由（动机的！）单值算子 $N : \Upsilon_f \to \Upsilon_f(-1)$诱导的。特别地，它由对数动机的单值性诱导（见 [Ayo14, 第 86页）。在 p-adic 情形下， [BKV22, 附录 A]中也有类似观察。

ˆ2.2.12. $\mathrm{D}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(_, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 在限制到有限维拟优良诺特概形时，满足 [BBD82, 1.4.3] 的公理。因此，依照上述文献，我们可以为这样的概形 W 在 $\hat{\mathrm{D}}^{\text{cons}}(W, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 上定义 perverse t-结构。对于 $\hat{\mathrm{D}}_{\text{ét}}^{\text{cons}}(W, \Lambda_J \otimes \mathbb{Q})$ 中的 A，记 j-次上同调（相对于 perverse$t$-结构）为 ${}^p\mathrm{H}^j(A)$。

推论 2.2.13。推论 *2.2.10* 中的结论在以下情形下仍然成立：将 *(1)* 和 *(2)* 中的 $\mathfrak{R}_J M$替换为 ${}^p\mathcal{H}^j(\mathfrak{R}_J M)$，其中 为任意整数 j。

证明。 我们采用推论 2.2.10 及其证明中的记号。由于 k 是开仿射k_*，且 $k_!$ 相对于 perverse t-结构是 t-正合的，这由 [BBD82, 4.1.3]可知。此外

$\Psi_f^J[-1]$ 由 [BBD82, 4.4.2] 结合 [Ill94, 4.2]可知是 t-正合的。这意味着存在一个 伽罗瓦群(K/K)-等变等价

$$\Psi_f^J(k_*{}^p\mathcal{H}^j(\mathfrak{R}_J M))[-1] \simeq {}^p\mathcal{H}^j(\Psi_f^J((\mathfrak{R}_J k_* M))[-1]).$$

因此，定理 2.2.8 给出了一个子群 H ⊂伽罗瓦群(K/K) 以及一个整数 m ，使得 $(\lambda-1)^m$ 在 $\Psi_f(k_*{}^p\mathcal{H}^j(\mathfrak{R}_J M))$ 上的作用对所有 $\lambda \in H$ 都为零。再次存在一个 伽罗瓦群 (K/K)- 等变等价

$$R\Gamma(\bar{Y}, {}^p\mathcal{H}^j(\mathfrak{R}_J M)|_{\bar{Y}}) \simeq (f_\sigma)_* \Psi_f^J(k_*{}^p\mathcal{H}^j(\mathfrak{R}_J M))$$

这使我们能够得出与上文推论的证明中类似的结论2.2.10。 □

注 2.2.14。 特别是，推论 2.2.13 意味着局部单值化定理对“几何起源的层”成立（参见 [BBD82，§6。2]）。Illusie 在 [Ill94，§1] 中已经预期这一结论成立。

第3章

动机的普遍局部无环性与邻近循环函子

我们首先着手发展动机 ∞-范畴的普遍局部无环性理论。其中很大一部分是 étale 层情形的类比，该理论由 [LZ22]和 [HS21]所发展。

我们用 Künneth 型公式建立了普遍局部无环性的一个非常有用的刻画（命题 3.2.13），并且不费多少力气就得到了一个“泛普遍局部无环性定理”（命题 3.2.21），它推广了 Deligne 的经典结果。

接着，我们转而证明本章的主要结果：定理 3.3.22表明，对于 étale 动机，在优良正则一维基底上的普遍局部无环性可由邻近循环函子检测。本章很大一部分篇幅用于证明，而证明过程遗憾地十分技术性。

最后，作为一项应用，我们引入 Beilinson 对 étale 动机定义的弱奇异支撑，并展示它可以通过邻近循环函子来刻画。

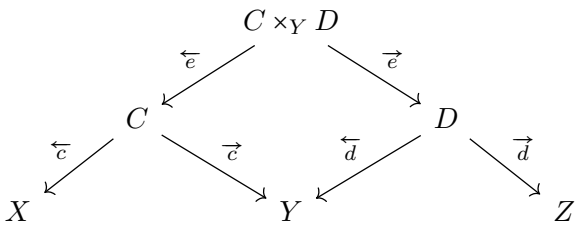
3.1. 上同调对应

构造 3.1.1. 设 S 为一个拟紧拟分离概形，且 $\mathcal{D}(_)$ 是一个定义在 ∞上的动机 S -范畴（参见 1.1.1）。记 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ 为定义在 S上的有限型概形范畴。我们考虑取值于 $\mathrm{D}_{S,\mathcal{D}}$ 的上同调对应双范畴 $\mathcal{D}(_)$，例如可按 [LZ22]中的构造得到。该双范畴的定义如下：

(1) 对象是形如 (X,M) 的对，其中 $X\in\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$，且 $M\in\mathrm{D}(X)$。 (2) 对于任意两个对象 X,Y，在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ 中，固定一个拉回 $X\times_S Y$。不同的拉回选择将产生等价双范畴。态射 $(C,\alpha):(X,M)\to(Y,N)$ 由一个对应构成

$$(\overleftarrow{c},\overrightarrow{c}):C\longrightarrow X\times_S Y$$

以及映射 $\alpha:\overleftarrow{c}^{*}M\to\overrightarrow{c}^{!}N$，其中 $h\mathrm{D}(C)$。给定另一个映射 $(D,\beta):(Y,N)\to(Z,P)$，为了定义复合映射 $(D,\beta)\bigcirc(C,\alpha)$，考虑概形图表。



通过拉回得到。然后，$(D,\beta)\bigcirc(C,\alpha)$ 由对应给出。

$$(\overleftarrow{c}\,\overleftarrow{e}\,,\overrightarrow{e}\,\overrightarrow{d}\,):C\times_Y D\longrightarrow X\times_S Z$$

以及映射

$$\gamma:\overleftarrow{e}^*\overleftarrow{c}^*M\xrightarrow{\overleftarrow{e}^*\alpha}\overleftarrow{e}^*\overrightarrow{c}^!N\xrightarrow{\mathrm{Ex}}\overrightarrow{e}^!\overleftarrow{d}^*N\xrightarrow{\overrightarrow{e}^!\beta}\overrightarrow{e}^!\overrightarrow{d}^!P$$

在 $h\mathbf{D}(C\times_Y D)$ 中，其中 Ex 是关于伴随 $(_)_!\dashv(_)^!$ 的交换映射，且该方块

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{D}(C) & \xrightarrow{\overleftarrow{e}^*} & \mathcal{D}(C\times_Y D)\\ {\scriptstyle\overrightarrow{c}_!}\downarrow & \overset{\mathrm{Ex}}{\swarrow\!\!\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle\overrightarrow{e}_!}\\ \mathcal{D}(Y) & \xrightarrow[\overleftarrow{d}^*]{} & \mathcal{D}(D),\end{array}$$

其 2-胞腔根据真基变换是可逆的。由于此复合依赖于拉回的选择，因此它作为严格复合并没有良好定义。给定一个对象（X，M），恒等映射是（在等价意义下）态射

$$(\Delta_X,\mathrm{id}_M):\mathrm{id}^*M\simeq M\xrightarrow{\mathrm{id}}M\simeq\mathrm{id}^!M,$$

其中 $\Delta_X=(\mathrm{id},\mathrm{id}):X\to X\times_S X$ 是对角态射。

(3) 给定两个态射 $(C,\alpha),(D,\beta):(X,M)\to(Y,N)$，一个 2-胞腔 $(\Theta,f):(C,\alpha)\to(D,\beta)$ 由一个适当态射 $f:C\to D$ 给出，它适合图表。

$$\begin{array}{ccccc}C & & \xrightarrow{\quad f\quad} & & D\\ & {\scriptstyle(\overleftarrow{c},\overrightarrow{c})}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle(\overleftarrow{d},\overrightarrow{d})} & \\ & & X\times_S Y & & \end{array}$$

使得 β 等于复合

$$f_*\alpha:\overleftarrow{d}^*M\to f_*f^*\overleftarrow{d}^*M\simeq f_*\overleftarrow{c}^*M\xrightarrow{f_*\alpha}f_*\overrightarrow{c}^!N\simeq f_*f^!\overrightarrow{d}^!N\to\overrightarrow{d}^!N,$$

其中，第一个和最后一个箭头分别由单位 $\mathrm{id}\to f_*f^*$ 和余单位 $f_*f^!\simeq f_!f^!\to\mathrm{id}$ 诱导。这个 2-胞腔的概念使得 (2) 中的复合在适当的弱意义下定义良好。

3.1.2. 我们可以在双范畴 $\mathbf{C}_{S,\mathcal{D}}$ 上赋予一个对称幺半结构，其中张量积定义为

$$(X,M)\otimes(Y,N):=(X\times_S Y,M\boxtimes N).$$

那么，给定态射 $(C,\alpha):(X,M)\to(Z,P)$ 和 $(D,\beta):(Y,N)\to(W,Q)$，诱导态射

$$(C,\alpha)\otimes(D,\beta):(X\times_S Y,M\boxtimes N)\to(Z\times_S W,P\boxtimes Q)$$

由对应给出

$$(\overleftarrow{e}\,,\overrightarrow{e}\,)=(\overleftarrow{c}\times\overleftarrow{d}\,,\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}\,):C\times_S D\to(X\times_S Y)\times_S(Z\times_S W)$$

以及映射

$$\overleftarrow{e}^*(M\boxtimes N)\simeq\overleftarrow{c}^*M\boxtimes\overleftarrow{d}^*N\xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta}\overrightarrow{c}^!P\boxtimes\overrightarrow{d}^!Q\longrightarrow\overrightarrow{e}^!(P\boxtimes Q),$$

其中最后一个箭头是典范 Künneth 态射。

引理 3.1.3。 对于 (X,M) 中的任意对象 $\mathcal{C}_{S,\mathcal{D}}$ 函子

$$_ \otimes (X,M) : \mathcal{C}_{S,\mathcal{D}} \to \mathcal{C}_{S,\mathcal{D}}$$

具有右伴随 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,\mathcal{D}}}((X,M)\ _)$。这些内部映射对象由下式给出

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{C_{S,\mathcal{D}}}((X,M),(Y,N)) \simeq (X \times_S Y, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}(X\times_S Y)}(p_X^* M, p_Y^! N)).$$

证明。 参见 [LZ22，2.8。]。 □

构造 3.1.4. 给定概形 $g : T \to S$ 之间的一个态射 $g : T \to S$，记 $\mathrm{D}(_)|_T$ 为 $\mathrm{D}(_)$ 在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/T}$ 上的限制。我们将概形$f : X \to S$ 沿着 g 的拉回记为 $f_T : X_T \to T.$。此外，对于概形 X 在 S 上的情形，略去记号滥用，我们将诱导的逆像函子记为 $g^* : \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(X_T)$。

我们如下定义一个函子 $g^\diamond : \mathrm{C}_{S,\mathcal{D}} \to \mathrm{C}_{T,\mathcal{D}|_T}$：将一个态射 $(C, \alpha) : (X, M) \to (Y, N)$ 送到 $(C_T, g^*\alpha) : (X_T, g^*M) \to (Y_T, g^*N)$，其中 $g^*\alpha$ 表示复合

$$\overleftarrow{c_T}{}^* g^* M \simeq g^* \overleftarrow{c}{}^* M \xrightarrow{g^*\alpha} g^* \overrightarrow{c}{}^! N \xrightarrow{\mathrm{Ex}} \overrightarrow{c_T}{}^! g^* N.$$

给定两个态射 $(C,\alpha),(D,\beta) : (X,M) \to (Y,N)$，一个 2-胞腔 $(\Theta, f) : (C,\alpha) \to (D,\beta)$ 由一个真态射 $f : C \to D$ 给出，则被映到由真态射 $f_T : C_T \to D_T$ 诱导的 2-态射 $g^\diamond\Theta : (C_T, g^*\alpha) \to (D_T, g^*\beta)$。由真基变换可轻易验证，这定义了一个良定义的双范畴函子。此外，这些等价

$$((X \times_S Y)_T, g^*(M \boxtimes N)) \to ((X_T \times_T Y_T), g^*M \boxtimes g^*N)$$

and

$$(T, g^*\mathbb{1}) \to (T, \mathbb{1})$$

赋予 $g^\diamond : \mathrm{C}_{S,\mathcal{D}} \to \mathrm{C}_{T,\mathcal{D}}$ 严格幺半函子的结构。

3.2. 普遍局部无环性

3.2.1. 固定一个拟紧拟分离概形 S，并令 $\mathcal{D}(_)$ 为一个动机 ∞-范畴，其底为 S。本节所讨论的大部分内容本质上归功于 [LZ22] 和 [HS。

定义 3.2.2。 设 $f : X \to S$ 是有限型的，且 $M \in \mathcal{D}(X)$。 M 称为关于 f的普遍局部无环，如果 $(f : X \to S, M)$ 在 $\mathcal{C}_S$中是可对偶的（见定义 A.2）。

3.2.3. 为方便起见，我们也将 'f-ULA' 或 '关于 f 的 ULA' 写作 '关于 f 的普遍局部无环'。

注 3.2.4. 由定义立即可知，对象 M 是 $\mathrm{D}(S)$ 的可对偶化对象，当且仅当它关于 S 的恒等映射是 ULA。

3.2.5. 对于任意有限型的 $f : X \to S$ 以及 $\mathrm{D}(X)$ 中的 M，记作

$$\mathbb{D}_S(M) := \underline{\mathrm{Hom}}(M, f^!\mathbb{1}).$$

注意，由引理3.1.3 可得

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_{S,\mathcal{D}}}((X,M),(S,\mathbb{1}_S)) \simeq (X, \mathbb{D}_S(M))$$

在 C_S中，$\mathcal{D}$。

3.2.6. 对于任意两个概形态射 $f : X \to S$ 和 $g : Y \to S$，记 $p_1 : X \times_S Y \to X$ 为第一投影，记 $p_2 : X \times_S Y \to Y$为第二投影。

命题 3.2.7。 设 $f : X \to S$ 为有限型且 M 属于 $\mathcal{D}(X)$。则以下各项等价：

(1) M 相对于 f具有普遍局部无环性（*ULA*）。（2）对于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ 中的每个 $g : Y \to S$ 以及 $\mathcal{D}(Y)$ 中的每个 N，典范映射

$$p_1^* \mathbb{D}_S(M) \otimes p_2^* N \to \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M, p_2^! N)$$

是一个等价。
（3）典范映射

$$p_1^* \mathbb{D}_S(M) \otimes p_2^* M \to \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M, p_2^! M)$$

是一个等价。

证明。 这由引理A.5以及 $\mathcal{C}_S$、$\mathcal{D}$ 中对对称积和内部 Hom 的描述，以及引理 3.1.3得出。 □

引理 3.2.8. 设 $f : X \to S$ 为有限型，且 $M \in \mathcal{D}(X)$ 关于 f 满足普遍局部无环条件。*(1)* 如果 $h : X \to Y$ *in* $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 是真态射，那么 $h_* M$ 是 k-普遍局部无环，其中 $k : Y \to S$ 表示 Y 的结构态射。*(2)* 如果 $h : Y \to X$ *in* $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 是光滑的，那么 $h^* M$ 是 $f \circ h$- 普遍局部无环。*(3)* 如果 $g : S \to S'$ 是光滑的，那么 M 是 $g \circ f$- 普遍局部无环。

证明。我们来证明 (1)。(2) 和 (3) 的结论也可类似地得出。我们有

$$\begin{aligned} p_1^* \mathbb{D}_S(h_* M) \otimes p_2^* h_* M &\simeq (1 \times h_*)(p_1^* \mathbb{D}_S(h_* M) \otimes p_2^* M) \\ &\simeq (h \times h)_* (p_1^* \mathbb{D}_S(M) \otimes p_2^* M) \\ &\simeq (h \times h)_* \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M, p_2^! M) \\ &\simeq (h \times 1)_* \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M, (1 \times h)_* p_2^! M) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* h_* M, p_2^! h_* M). \end{aligned}$$

<escape>这里前两个等价由投影公式和真基变换得出，第三个等价由命题 3.2.7 得出，最后两个等价则直接由伴随对 $(1 \times h)^* \dashv (1 \times h)_*$ 和 $(h \times 1)_! \dashv (h \times 1)^!$ 得出。利用命题 3.2.7 的刻画（3），可知 $h_* M$ 是 k-普遍局部无环。□</escape>

命题 3.2.9. 设 $f : X \to S$ 为有限型，并考虑 $\mathcal{D}(X)$ 中一个关于 f 普遍局部无环的 M。

(1) 设 $g : S' \to S$ 是一个拟紧拟分离概形之间的映射，$f' : X \times_S S' \to S'$ 是 f 沿 g 的基变换，M' 是 M 沿 $X \times_S S' \to X$ 的拉回。那么 M' 是 f'-普遍局部无环的。*(2)* 典范映射

$$M \to \mathbb{D}_S \mathbb{D}_S(M)$$

是一个等价关系。
(3) 对于任意 Y *in* $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ *and* $N \in \mathcal{D}(Y)$ 典范映射

$$M \boxtimes N \to \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* \mathbb{D}_S M, p_2^! N)$$

是一个等价。

(4) 对任意 Y 属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ 且 $N \in \mathcal{D}(Y)$，典范映射

$$\mathbb{D}_S(M \boxtimes N) \to \mathbb{D}_S(M) \boxtimes \mathbb{D}_S(N)$$

是一个等价。

（*5*）对于 Sch 中的任意态射 $h : Y' \to Y$ 以及 $N \in \mathcal{D}(Y)$，典范映射

$$M \boxtimes h^! N \to (1 \times h)^! (M \boxtimes N)$$

是一个等价。

（*6*）对于 Sch 中的任意态射 $h : Y' \to Y$ 以及 $N \in \mathcal{D}(Y')$，典范映射

$$M \boxtimes h_* N \to (1 \times h)_* (M \boxtimes N)$$

是一个等价。

证明。这基本上是 [LZ22, 2.11.]。为完整起见，我们给出论证。事实上，由于 3.1.4 的诱导函子 $g^\diamond : \mathbf{C}_{S,\mathcal{D}} \to \mathbf{C}_{S',\mathbf{D}|_{S'}}$ 是对称幺半的，(1) 可由推论 A.8 得出。(2) 显然，因为 $(X, \mathbb{D}_S(M))$ 是 $\mathbf{C}_{S,\mathcal{D}}$ 中 (X, M) 的对偶，因此典范映射 $(X, M) \to (X, \mathbb{D}_S \mathbb{D}_S(M))$ 是 $\mathbf{C}_{S,\mathcal{D}}$ 中的等价。(3) 是 (2) 与命题 3.2.7 的刻画 (2) 的结合。(4) 中的等价由以下等价链得出。

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_S(M) \boxtimes \mathbb{D}_S(N) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M, p_2^! \mathbb{D}_S(N)) \\
&\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M, \mathbb{D}_S(p_2^* N)) \\
&\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* M \otimes p_2^* N, p_2^! g^! \mathbb{1}) \\
&\simeq \mathbb{D}_S(M \boxtimes N),
\end{aligned}$$

其中第一个等价由（3）给出。（5）由（3）推出，通过

$$\begin{aligned}
M \boxtimes h^! N &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* \mathbb{D}_S(M), p_2^! h^! N) \\
&\simeq \underline{\mathrm{Hom}}((1 \times h)^* p_1^* \mathbb{D}_S(M), (1 \times h)^! p_2^! N) \\
&\simeq (1 \times h)^! \, \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* \mathbb{D}_S(M), p_2^! N) \\
&\simeq (1 \times h)^! (M \boxtimes N).
\end{aligned}$$

同理，(6) 可由 (3) 得出：

$$\begin{aligned}
M \boxtimes h_* N &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* \mathbb{D}_S(M), p_2^! h_* N) \\
&\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* \mathbb{D}_S(M), (1 \times h)_* p_2^! N) \\
&\simeq (1 \times h)_* \, \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* \mathbb{D}_S(M), p_2^! N) \\
&\simeq (1 \times h)_* (M \boxtimes N).
\end{aligned}$$

□

引理 3.2.10. 设 $f : X \to S$ 为有限型，并考虑 $M \in \mathcal{D}(X)$。则以下条件等价：

(1) 对于 $' \to Y$ 中的任意态射 $h : Y^{\mathrm{ft}}_{/S} \mathrm{Sch}$，以及 $N \in \mathcal{D}(Y)$ 典范映射

$$M \boxtimes h^! N \to (1 \times h)^! (M \boxtimes N)$$

是一个等价。

(2) 对于 $\prime \to Y$ 中任意一个态射 $h : Y\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ 以及 $N \in \mathcal{D}(Y')$，典范映射

$$M \boxtimes h_* N \to (1 \times h)_*(M \boxtimes N)$$

是一个等价。

证明。固定映射 $g : Y \to S$ 和 $h : Y' \to Y$，其中 $^{\mathrm{ft}}_{/S}$属于 Sch。假设 M 满足 (1)。性质 (2) 可以在 Y上通过扎里斯基局部检验。因此，我们可以假设 h 是分离的，从而利用 Nagata 紧化将 h 分解为先开浸入、后真映射。由于投影公式对真映射成立，我们只需检验开浸入 $j : U \to Y$是否满足 (2)。将补集记为 $i : Z \to Y$。考虑由局部化序列得到的纤维序列映射

$$\begin{array}{ccccc} M \boxtimes i_* i^! N & \longrightarrow & M \boxtimes N & \longrightarrow & M \boxtimes j_* j^* N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (1 \times i)_*(1 \times i)^!(M \boxtimes N) & \longrightarrow & M \boxtimes N & \longrightarrow & (1 \times j)_*(1 \times j)^*(M \boxtimes N). \end{array} \tag{3.2.10.1}$$

容易验证上方所有方块都可交换。将性质 (1) 应用于映射 $i : Z \to Y$，并结合闭浸入 $i : Z \to Y$的投影公式，可知左侧的垂直箭头是一个等价。因此，右侧的垂直映射也是一个等价，这正是所需的性质 (2)，其中 $j : U \to Y$。

反过来，假设 M 满足条件 (2)。我们可以在 Y 的扎里斯基局部范围内检验条件 (1)，因此不妨假设 h 是拟射影的。于是我们可以将 f 分解为先一个闭浸入，随后一个光滑态射。这就将条件 (1) 归结为 h 是一个闭浸入$i : Z \to Y$的情形。令 $j : U \to Y$ 为 i的开补。然后，我们可以再次考虑由这些 i 和 j构成的图表（3.2.10.1）。现在，右侧的垂直映射是一个等价，因为 A满足条件 (2)，并且对于任意 M，只要 h 是一个开浸入，条件 (1) 就总是成立。□

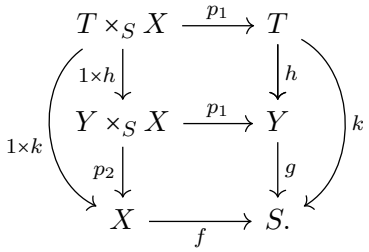
3.2.11. 对任意 X in $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$，我们将 $\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(X)$ 记作 $\mathrm{D}(X)$ 中包含对所有 $n \in \mathbb{Z}$ and$h : Y \to X$ 光滑的 $h_\sharp \mathbb{1}(n)$ 形式对象的最小幂等完备全稳定子范畴。若对象 M in $\mathrm{D}(X)$ 属于 $\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(X)$，则称其为可构造 。

引理 3.2.12. 设 $f : X \to S$ 为有限型且 $M \in \mathcal{D}(X)$。假设 M 满足引理 *3.2.10*中的两个等价条件。那么，对所有 $g : Y \to S$ 和 $N \in \mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(Y)$，典范映射

$$\mathbb{D}_S(N) \boxtimes M \to \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^* N, p_2^! M)$$

是一个等价。

证明。由于所有涉及的运算都与有限余极限和 Tate 扭曲相交换，只需对 $N = h_\sharp \mathbb{1}$ 证明该断言，其中 $h : T \to Y$ 是一个光滑态射。为固定记号，考虑如下图表



于是存在等价

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_S(h_!\mathbb{1})\boxtimes M &\simeq (h_*k^!\mathbb{1})\boxtimes M\\ &\overset{(1)}{\simeq} (h\times 1)_*(k^!\mathbb{1}\boxtimes M)\\ &\overset{(2)}{\simeq} (h\times 1)_*(1\times k)^!M\\ &\simeq (h\times 1)_*\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{1},(1\times k)^!M)\\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*h_!\mathbb{1},p_2^!M),\end{aligned}$$

其中 (1) 和 (2) 由引理 3.2.10 的等价条件推出。 □

命题 3.2.13。 设 $f:X\to S$ 为有限型，且 $M\in\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(X)\subset\mathcal{D}(X)$。以下条件等价：

(1) M 关于 f 是普遍局部无环的。*(2)* 对任意态射 $h:Y\prime\to Y$，其中 $\to Y$ 属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$，以及 $N\in\mathcal{D}(Y)$，典范映射

$$M\boxtimes h^!N\to(1\times h)^!(M\boxtimes N)$$

是一个等价。

(3) 对任意态射 $h:Y\prime\to Y$，其中 $\to Y$ 属于 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$，以及 $N\in\mathcal{D}(Y')$，典范映射

$$M\boxtimes h_*N\to(1\times h)_*(M\boxtimes N)$$

是一个等价。

证明。 我们已经证明了命题 ⇒ 3.2.9 中的蕴含 (1) → (2),(3)。引理 3.2.10说明 (2) 和 (3) 等价。假设等价条件 (2) 和 (3) 成立。于是，将引理 3.2.12 应用于情形 $g=f$ 和 $M=N$ 可知，典范映射

$$p_1^*\mathbb{D}_X(M)\otimes p_2^*N\to\underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*M,p_2^!N)$$

是一个等价。因此 M 相对于 f 是普遍局部无环的，这由命题 3.2.7得出。 □

注 3.2.14。 设 $f:X\to S$ 为有限型，并考虑 $M\in\mathcal{D}(X)$。那么在 [JY21b，4.1。2] M 称为相对于 f 强局部无环的，如果对于任意 $h:T\to S$以及任意 $N\in\mathcal{D}(T)$ 典范映射

$$M\boxtimes h_*N\to(1\times h)_*(M\boxtimes N)$$

是一个等价。此外， M 称为相对于 普遍强局部无环，如果沿每个 f 拉回 f 并 M 回拉后，相应的结论仍成立 $S'\to S$。容易验证， M 相对于 f 普遍强局部无环，当且仅当它满足引理 3.2.10中的等价条件。特别地，可构造的 M 相对于 f 普遍强局部无环，当且仅当它相对于 f是普遍局部无环的。

3.2.15。 对于 $f:X\to S$ 在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中，我们称 $\mathcal{D}(X)$ 由 可构造对象紧生成，如果 $\mathcal{D}(X)$ 是紧生成的，且每个可构造对象都是紧的。注意，在这种情况下，一个对象是紧的，当且仅当它是可构造的（见 [CD19，1.4。11]）。

命题 3.2.16。 设 $f:X\to S$ 为有限型，并假设$\mathcal{D}(X)$ 和$\mathcal{D}(X\times_S X)$ 均由可构造对象紧生成。若 M 在$\mathcal{D}(X)$ 中关于 f是普遍局部无环的，则 M 是可构造的。

证明。 这实质上是 [HS21，3.4 (iii)]。由于 M 相对于 f 是普遍局部无环的，对任意 N 属于 $\mathcal{D}(X)$ 一个等价

$$p_1^*\mathbb{D}_S(M)\otimes p_2^*N \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*M, p_2^!N).$$

将 $\Delta_X^!$ 和 $\mathrm{map}^{\mathcal{D}(X)}(\mathbb{1}_X, _)$ 应用于此等价，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(\mathbb{1}_X, \Delta^!(p_1^*\mathbb{D}_S(M)\otimes p_2^*N)) &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(\mathbb{1}_X, \Delta^!(\underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*M, p_2^!N))\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(\mathbb{1}_X, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N))\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(M,N).\end{aligned}$$

注意，根据假设， $\mathbb{1}_X$ 是紧的，且 $\Delta^!$ 与小滤过余极限交换：对于 $\mathrm{D}(X)$ 中的每个紧生成元 A （即上述的可构造 A ），以及 $\mathrm{D}(X\times_S X)$ 中的每个小滤过图表 $F: I\to$ ，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(A, \Delta^!(\mathrm{colim}_I F(i))) &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X\times_S X)}(\Delta_! A, \mathrm{colim}_I F(i))\\ &\simeq \mathrm{colim}_I \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X\times_S X)}(\Delta_! A, F(i))\\ &\simeq \mathrm{colim}_I \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(A, \Delta^! F(i))\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}(X)}(A, \mathrm{colim}_I \Delta^! F(i)).\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\Delta_!$ 保持可构造对象（参见 [Kha21, 2.60]）。这表明$\mathrm{map}^{\mathcal{D}(X)}(\mathbb{1}_X, \Delta^!(p_1^*M\otimes p_2^*N))$ 与小滤过余极限交换于 N，因此 M 是 $\mathcal{D}(X)$
. □中的一个紧对象

3.2.17. 我们称一个函子

$$\mathcal{F}: (\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S})^{op} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$$

***étale*-连续的**，如果对于每个小余滤过图表 $\{Y_i\}_I : I \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ （其过渡映射均为仿射且 étale），典范函子

$$\mathrm{colim}_{i\in I}\mathcal{F}(Y_i) \longrightarrow \mathcal{F}(\lim_{i\in I} Y_i)$$

是一个等价。

3.2.18. 给定一个有限型态射 $f: X\to S$ 和一个拟紧拟分离概形之间的映射 $g: T\to S$，记

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(X\times_S T/T)\subset \mathcal{D}(X\times_S T)$$

为由相对于沿 g 拉回的 f 为普遍局部无环的元素构成的全子范畴。这便得到一个子函子

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(X\times_S _/_)\subset \mathcal{D}(X\times_S _).$$

引理 3.2.19。 设 $f: X\to S$ 为有限型，并假设 $\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(_)$ 是 ***étale*-连续的**。则 $\mathcal{D}^{ULA}(X\times_S _/_)\cap\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(X\times_S _)\subset\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(X\times_S _)$ 是一个 ***étale*-连续子函子**。

证明。令 $T=\lim_I T_i$ be 是 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$ 中一个具有仿射 étale 过渡映射的逆极限，并将 $f_T: X_T\to T$ 和 $f_{T_i}: X_{T_i}\to T_i$ 分别记为 f 的拉回。此外，对于 I 中任意 $\varphi: j\to i$，我们将概形态射 $\varphi: X_{T_j}\to X_{T_i}$ 记为。

考虑 $\mathrm{D}^{\mathrm{ULA}}(X_T/T)\cap\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(X_T)\subset\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(X_T)$ 中的一个 M。由于 $\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(_)$ 是连续的，存在一个 $i\in I$ 和一个 $\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(X_{T_i})$ 中的 M_i，使得它在 X_T 上的拉回为 M。考虑典范映射

$$\theta_{M_i}:p_1^*\mathbb{D}_S(M_i)\otimes p_2^*M_i\to\underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*M_i,p_2^!M_i)$$

在 $\mathrm{D}(X_{T_i}\times_{T_i}X_{T_i})$ 中。由于过渡映射是 étale 的，交换图中的垂直映射

$$\begin{array}{ccc}\varphi^*(p_1^*\mathbb{D}_S(M_i)\otimes p_2^*M_i) & \xrightarrow{\theta_{M_i}} & \varphi^*\,\underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*M_i,p_2^!M_i)\\ \downarrow & & \downarrow\\ p_1^*\mathbb{D}_S(\varphi^*M_i)\otimes p_2^*\varphi^*M_i & \xrightarrow{\theta_{\varphi^*M_i}} & \underline{\mathrm{Hom}}(p_1^*\varphi^*M_i,p_2^!\varphi^*M_i)\end{array}$$

对任意 $\varphi:j\to i$ 在 I 中都是等价。由于 M 是 $f-ULA$，θ_M 根据命题 3.2.7的判据（3），是等价。因此存在一个 $\varphi:j\to i$ 在 I 中，使得 $\theta_{\varphi^*M_i}$ 是等价。特别地，φ^*M_i 关于 f_{T_j} 再次根据命题3.2.7的判据（3）是普遍局部无环的。□

3.2.20. 我们称 $\mathrm{D}(_)$ 满足 *Künneth* 公式，如果满足以下条件：考虑一对交换三角形

$$\begin{array}{ccc}X & \xrightarrow{k} & X'\\ & \searrow & \downarrow\\ & \mathrm{Spec}(K) & \end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc}Y & \xrightarrow{l} & Y'\\ & \searrow & \downarrow\\ & \mathrm{Spec}(K) & \end{array}$$

在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{ft}}_{/S}$ 中，其中 K 是一个域。于是，对于任意 $M\in\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(X)$ 和 $N\in\mathrm{D}^{\mathrm{cons}}(Y)$，典范映射

$$k_*M\boxtimes l_*N\longrightarrow(k\times l)_*(M\boxtimes N)$$

是一个等价。

命题 3.2.21（泛普遍局部无环性）。 假设 $\mathcal{D}(_)$ 满足 *Künneth* 公式，且 $\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(_)$ 是 *étale-* 连续的。设 $f:X\to S$ 为有限型，且 $M\in\mathcal{D}^{\mathrm{cons}}(X)$。那么存在一个稠密开子概形 $U\subset S$，使得 $M|_{X_U}$ 关于 $f_U:X\times_S U\to U$ 是普遍局部无环的。

证明。只需对 S 的任意不可约分支 S_i 找到一个满足定理所述结论的稠密开子集 $U_i\subset S_i$。因此，可以假设 S 是不可约的，其泛点为 $\eta.$。根据 Künneth 公式并结合命题 3.2.13，M 限制到 $f_\eta:X\times_S\eta\to\eta$ 后关于 f_η 是普遍局部无环的。令 $k(\eta)$ 表示 η 的剩余域。那么 $k(\eta)\simeq\mathrm{colim}_I A_i$，其中 A_i 遍历 η 在 S 中的所有仿射开邻域。引理 3.2.19 表明，存在 η 的一个开仿射邻域 A_i，使得 M 限制到 $f_{A_i}:X\times_S\mathrm{Spec}(A_i)\to\mathrm{Spec}(A_i)$ 后关于 f_{A_i} 是普遍局部无环的。由于 $\mathrm{Spec}(A_i)$ 包含泛点，因此它在 S 中是稠密开集，正如所需。□

注 3.2.22. 命题 3.2.21 例如，以下两种情形满足这些条件：

(1) $\mathcal{D}(_)$ 是动机 ∞-范畴$\mathbf{SH}(_)[\mathcal{P}^{-1}]$，其中 $\mathcal{P}$ 是那些作为 S 的剩余特征出现的素数所构成的集合。事实上，$\mathbf{SH}(_)$ 是连续的：这由 [Kha21,2.18]以及可构造对象

与紧对象一致。此外，将S 的剩余特征求逆后，它满足 Künneth 公式 [JY21a,2.1.14]。

(2) D(_) 是 h-动机的动机 ∞-范畴 $\mathrm{DM}_h(_,\Lambda)$，适用于“足够好”的环Λ （见 [CD16, 6.3.6]）。根据 [CD16, 6.3.9]，它是连续的，并满足 [Cis21, 3.1.12] 中的 Künneth 公式。特别是，当 S 局部诺特且 Λ 是一个特征在 S 中可逆的挠环时，我们通过刚性 [CD16, 5.5.4] 得到 Deligne 的经典结果 [Del77, Th. finitude, 2.13]。此外，当 S 是有限维诺特时，定理 1.2.15 意味着命题 3.2.21 也适用于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda)$。

3.3. 借助邻近循环函子检测万有局部无环性

3.3.1. 在本节中，我们固定一个环 Λ。本章余下部分，我们将只考虑动机 ∞-范畴 $\mathcal{D}(_) = \mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda)$。此外，设 S 是一个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱。我们固定一个一致化子π 属于 S，以及 τ 中短正合序列 1.4.10的一个截面。我们构造的所有邻近循环函子，均相对于这些选择的 π 和 τ。

3.3.2. 设 $f : X \to S$ 是一个有限型态射，并考虑分解

$$\begin{array}{ccccc} X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\ \downarrow{\scriptstyle f_\eta} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sigma} \\ \eta & \xrightarrow[j]{} & S & \xleftarrow[i]{} & \sigma. \end{array}$$

对于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 中的任意 M，存在一个纤维序列

$$i^! M \to i^* M \to i^* j_* j^* M \tag{3.3.2.1}$$

在 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)$ 中，它是将 i^* 应用于局部化序列所得。此外，存在一个等价链

$$\begin{aligned} i^! \mathbb{D}_S(M) &= i^! \,\underline{\mathrm{Hom}}(M, f^! \mathbb{1}) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(i^* M, i^! f^! \mathbb{1}) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(i^* M, f_\sigma^! i^! \mathbb{1}) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(i^* M, f_\sigma^! \mathbb{1})(-1)[-2] \\ &\simeq \mathbb{D}_\sigma(i^* M)(-1)[-2]. \end{aligned} \tag{3.3.2.2}$$

<escape>这里我们利用了对于 $i : \sigma \to S$ 我们有 $i^! \mathbb{1} \simeq \mathbb{1}(-1)[-2]$ 相对纯性（参见 [CD16, 5.6。2]）。此外，请注意，式（3.3.2.2）第二行中的等价是由投影诱导的</escape>

通过典范等价得到的公式

$$\begin{aligned}\mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)}(N,\underline{\mathrm{Hom}}(i^*M,i^!f^!\mathbb{1})) &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)}(N\otimes i^*M,i^!f^!\mathbb{1})\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)}(i_!(N\otimes i^*M),f^!\mathbb{1})\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)}(i_!N\otimes M,f^!\mathbb{1})\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)}(i_!N,\underline{\mathrm{Hom}}(M,f^!\mathbb{1}))\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)}(N,i^!\underline{\mathrm{Hom}}(M,f^!\mathbb{1}))\end{aligned}$$

对于任意 $N\in \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\ \Lambda)$ 的映射空间。

3.3.3. 设 $f:X\to S$ 为一个有限型态射。设 M 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$，并记为

$$\mathrm{id}^t: M\otimes \mathbb{D}_\eta(M)\longrightarrow f_\eta^!\mathbb{1}$$

相对于 $\otimes\dashv\mathrm{Hom}$ 伴随，$\mathrm{id}:\mathbb{D}_\eta(M)\to\mathbb{D}_\eta(M)$ 的转置。χ_f 的松幺半结构诱导出一个典范态射

$$\begin{aligned}\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M))\otimes\chi_f(M)&\longrightarrow \chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes M)\\ &\xrightarrow{\chi_f\,\mathrm{id}^t}\chi_f(f_\eta^!\mathbb{1})\\ &\xrightarrow{\mathrm{Ex}^!}f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})\\ &\longrightarrow f_\sigma^!i^!\mathbb{1}[1]\\ &\xrightarrow{\sim}f_\sigma^!\mathbb{1}(-1)[-1].\end{aligned}$$

这里倒数第二个箭头由序列 (3.3.2.1) 诱导，最后一个等价来自相对纯性。

根据 $\otimes\dashv\mathrm{Hom}$ 伴随将此态射转置，我们得到一个比较态射

$$\mathrm{comp}_\chi:\chi_f\mathbb{D}_\eta(M)\to\mathbb{D}_\sigma\chi_f(M)(-1)[-1].$$

引理 3.3.4。 设 $f:X\to S$ 是一个有限型态射。对于 $\mathrm{DA}_{ét}$（X，Λ）中的每个 M，方块

$$\begin{array}{ccc} i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M) & \longrightarrow & i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi}\\ \mathbb{D}_\sigma(i^*i_*j^*M)(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(i^*M)(-1)[-1]\end{array}$$

交换。这里的水平箭头由序列（*3.3.2.1*）诱导，左侧的竖直映射是在 *3.3.3* 中构造的比较映射，右侧的竖直映射 φ 是等价链（*3.3.2.2*）的复合。

证明。根据两个垂直映射的构造，转置图表分解为

$$\begin{array}{ccc}
i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*M & \longrightarrow & i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*j_*j^*M \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & & i^*j_*j^*(\mathbb{D}_S(M)\otimes M) \\
 & & \downarrow \\
i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\otimes i^*M & & i^*j_*j^*(f^!\mathbb{1}) \\
{\scriptstyle \varphi\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Hom}}(i^*M, i^!f^!\mathbb{1})[1]\otimes i^*M & & f_\sigma^!i^*j_*j^*\mathbb{1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Hom}}(i^*M, f_\sigma^!i^!\mathbb{1})[1]\otimes i^*M & \longrightarrow & f_\sigma^!i^!\mathbb{1}[1].
\end{array} \tag{3.3.4.1}$$

对于态射 $g: Y \to X$ 和对象 A（位于 $\mathbf{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 中）以及 B（位于 $\mathbf{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)$ 中），我们将复合记为

$$(g_*B)\otimes A \xrightarrow{\text{unit}} g_*g^*((g_*B)\otimes A) \simeq g_*(g^*g_*B\otimes g^*A) \xrightarrow{\text{counit}} g_*(B\otimes g^*A)$$

由 $\mathbf{proj}_g$。定义一个映射

$$\theta: i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\otimes i^*M \longrightarrow i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)[1] \tag{3.3.4.2}$$

作为.....的转置

$$i_*(i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\otimes i^*M) \xleftarrow{\text{proj}_i} (i_*i^!\mathbb{D}_S(M))\otimes M[1] \xrightarrow{\text{counit}} \mathbb{D}_S(M)\otimes M[1].$$

这里，第一个映射由真映射的投影公式给出等价，第二个映射则由余单位映射 $\varepsilon: i_*i^! \to \mathrm{id}$ 诱导。该图表

$$\begin{array}{ccc}
i^*j_*j^*(\mathbb{D}_S(M)\otimes M) & \longrightarrow & i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)[1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
i^*j_*j^*(f^!\mathbb{1}) & \longrightarrow & i^!f^!\mathbb{1}[1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
f_\sigma^!i^*j_*j^*\mathbb{1} & \longrightarrow & f_\sigma^!i^!\mathbb{1}[1]
\end{array} \tag{3.3.4.3}$$

交换。因此，将图表 (3.3.4.1) 和 (3.3.4.3) 拼接起来后，只需证明图表

$$\begin{array}{ccc}
i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*M & \longrightarrow & i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*j_*j^*M \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & (1) & i^*j_*j^*(\mathbb{D}_S(M)\otimes M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\otimes i^*M & \xrightarrow{\theta} & i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)[1] \\
{\scriptstyle\varphi\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Hom}}(i^*M, i^!f^!\mathbb{1})[1]\otimes i^*M & (2) & i^!f^!\mathbb{1}[1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Hom}}(i^*M, f_\sigma^!i^!\mathbb{1})[1]\otimes i^*M & \longrightarrow & f_\sigma^!i^!\mathbb{1}[1]
\end{array}$$

交换。该图表

$$\begin{array}{ccc}
(j_*j^*\mathbb{D}_S(M))\otimes M & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{unit}} & (j_*j^*\mathbb{D}_S(M))\otimes(j_*j^*M) \\
 & {\scriptstyle\mathrm{proj}_j}\searrow & \downarrow \\
 & & j_*j^*(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)
\end{array}$$

c利用三角等式可轻易证明其交换。因此，我们可以证明 t

$$\begin{array}{ccc}
i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*M & \xrightarrow{i^*\mathrm{proj}_j} & i^*j_*j^*(\mathbb{D}_S(M)\otimes M) \\
\downarrow & (1)' & \downarrow \\
i^!\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*M & \xrightarrow{\theta} & i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)[1]
\end{array}$$

交换，从而证明（1）交换。考虑以下纤维序列态射

$$\begin{array}{ccccc}
(i_*i^!\mathbb{D}_S(M))\otimes M & \longrightarrow & \mathbb{D}_S(M)\otimes M & \longrightarrow & (j_*j^*\mathbb{D}_S(M))\otimes M \\
{\scriptstyle(i_*\theta)\circ\mathrm{proj}_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{proj}_j} \\
i_*i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M) & \longrightarrow & \mathbb{D}_S(M)\otimes M & \longrightarrow & j_*j^*(\mathbb{D}_S(M)\otimes M).
\end{array} \tag{3.3.4.4}$$

事实上，证明右侧方块交换，只需利用三角等式进行简单验证；左侧方块则由 θ. 将（3.3.4.4）平移一个方块并应用 i^* 即可得到 $(1)'$的交换性。

显然，（2）的交换性归结为以下图表的交换性

$$\begin{array}{ccc}
i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\otimes i^*M & \xrightarrow{\theta} & i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)[1] \\
{\scriptstyle\varphi\otimes\mathrm{id}}\downarrow & (2)' & \downarrow{\scriptstyle i^!\,\mathrm{id}^t} \\
\underline{\mathrm{Hom}}(i^*M, i^!f^!\mathbb{1})[1]\otimes i^*M & \xrightarrow[\mathrm{id}^t]{} & i^!f^!\mathbb{1}[1]
\end{array}$$

where id^t 表示恒等映射各自的转置。这相当于证明 t

$$\begin{array}{ccc} i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\otimes i^*M & \xrightarrow{\theta} & i^!(\mathbb{D}_S(M)\otimes M)[1] \\ & \searrow^{\varphi^t} & \downarrow{\scriptstyle i^!\,\mathrm{id}^t} \\ & & i^!f^!\mathbb{1}[1] \end{array} \tag{3.3.4.5}$$

是可交换的，其中 φ^t 表示 φ的转置。可以直接验证

$$i_*(i^!\mathbb{D}_S(M)\otimes M)\xleftarrow{\mathrm{proj}_i}(i_*i^!\mathbb{D}_S(M))\otimes M\xrightarrow{\mathrm{counit}}\mathbb{D}_S(M)\otimes M\xrightarrow{\mathrm{id}^t}f^!\mathbb{1}$$

通过 φ^t 对应于

$$\mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)}(i^!\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*M, i^!f^!\mathbb{1})\simeq\mathrm{map}_{\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)}(i_*(i^!\mathbb{D}_S(M)\otimes i^*M), f^!\mathbb{1}).$$

根据 θ 的定义，这恰好意味着 (3.3.4.5) 交换。

□

3.3.5. 考虑一个概形态射 $f:X\to S$。如 1.4.12 (2) 中所述，存在典范自然变换 $\mu:i^*j_*\to\Upsilon_f$ 和 $\gamma:\Upsilon_f\to\Psi_f$，由此得到特化系统的态射。对于任意 M 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$

$$\beta_M:i^*M\xrightarrow{\mathrm{unit}}i^*j_*j^*M\xrightarrow{\mu_{j^*M}}\Upsilon_f(j^*M)$$

and

$$\alpha_M:i^*M\xrightarrow{\beta_M}\Upsilon_f(j^*M)\xrightarrow{\gamma_{j^*M}}\Psi_f(j^*M)$$

表示这些复合。

引理 3.3.6. 设 $f:X\to S$ 是一个有限型态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$。假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。如果

$$\alpha_M:i^*M\longrightarrow\Psi_f(j^*M)$$

是一个等价，那么

$$\beta_M:i^*M\longrightarrow\Upsilon_f(j^*M)$$

and

$$\gamma_{j^*M}:\Upsilon_f(j^*M)\longrightarrow\Psi_f(j^*M)$$

二者都是等价。

证明。 这源于以下事实：γ_{j^*M} 根据推论1.7.7，这是一个直和项的包含映射。□

3.3.7. 假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。那么对于任意概形态射 $f:X\to S$，都有一个纤维序列

$$\chi_f\longrightarrow\Upsilon_f\xrightarrow{N}\Upsilon_f(-1) \tag{3.3.7.1}$$

作者： [Ayo14，11。16]。我们称 N 为单值算子。

若 $f:X\to S$ 是有限型态射，且 M 属于$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$ 则我们如1.5.10 中所示，得到一个比较映射

$$\mathrm{comp}_\Upsilon:\Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(M))\longrightarrow\mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(M))$$

作为该复合的转置

$$\begin{aligned}\Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(M))\otimes\Upsilon_f(M)&\longrightarrow\Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes M)\\&\xrightarrow{\Upsilon_f\,\mathrm{id}^t}\Upsilon_f(f_\eta^!\mathbb{1})\\&\xrightarrow{\mathrm{Ex}^!}f_\sigma^!\Upsilon_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})\\&\xrightarrow{\sim}f_\sigma^!\mathbb{1}.\end{aligned}$$

由 [Ayo14，1116] 可知，此比较映射与来自3.3.3 的比较映射合在一起构成纤维序列态射

$$\begin{array}{ccccccc}\Upsilon_f\mathbb{D}_\eta(M)(1)&\xrightarrow{-N_{\mathbb{D}_\eta(M)}(1)}&\Upsilon_f\mathbb{D}_\eta(M)&\longrightarrow&\chi_f\mathbb{D}_\eta(M)(1)[1]&\longrightarrow&\Upsilon_f\mathbb{D}_\eta(M)(1)[1]\\\downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\Upsilon(1)}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\Upsilon}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\chi(1)[1]}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\Upsilon(1)[1]}\\\mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(M)))(1)&\xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma(N_M)}&\mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(M)))&\longrightarrow&\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(M)))&\longrightarrow&\mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(M)))(1)[1].\end{array}\tag{3.3.7.2}$$

只要 M 是可构造的

$$\mathrm{comp}_\Upsilon:\Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(M))\longrightarrow\mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(M))$$

由 [Ayo14，1021]可知，它是一个等价。特别地，在这种情况下，纤维序列映射（3.3.7.2）蕴含

$$\mathrm{comp}_\chi:\chi_f\mathbb{D}_\eta(M)\longrightarrow\mathbb{D}_\sigma\chi_f(M)(-1)[-1]$$

也同样是一个等价。

引理 3.3.8。 设 $f:X\to S$ 是一个有限型态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)$。假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。若

$$\alpha_M:i^*M\longrightarrow\Psi_f(j^*M)$$

是等价，那么……也是

$$\alpha_{\mathbb{D}_S(M)}:i^*\mathbb{D}_S(M)\longrightarrow\Psi_f(j^*\mathbb{D}_S(M)).$$

证明。由引理3.3.6 可知，映射 β_M 和γ_{j^*M} 都是等价。考虑 j^*M的单值化序列：

$$i^*j_*j^*M\longrightarrow\Upsilon_f(j^*M)\xrightarrow{N_{j^*M}}\Upsilon_f(j^*M)(-1).\tag{3.3.8.1}$$

由于等价映射 β_M 可分解为

$$i^*M\longrightarrow i^*j_*j^*M\longrightarrow\Upsilon_f(j^*M)$$

它导出了（3.3.8.1）的一个分裂。引理 3.3.4 意味着存在一个纤维序列映射

$$\begin{array}{ccccc}i^*\mathbb{D}_S(M)&\longrightarrow&i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M)&\longrightarrow&i^!\mathbb{D}_S(M)[1]\\\downarrow{\scriptstyle\vartheta}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\chi}&&\downarrow{\scriptstyle\varphi}\\\mathbb{D}_\sigma(i^!M)(-1)[-2]&\longrightarrow&\mathbb{D}_\sigma(i^*j_*j^*M)(-1)[-1]&\longrightarrow&\mathbb{D}_\sigma(i^*M)(-1)[-1]\end{array}$$

对某个 ϑ （由于 compχ 和 φ 都是等价，因此它也是等价）。考虑这个交换图

$$\begin{array}{ccccc} i^*\mathbb{D}_S(M) & \longrightarrow & i^*j_*j^*\mathbb{D}_S(M) & \longrightarrow & \Upsilon_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\Upsilon} \\ \mathbb{D}_\sigma(i^!M)(-1)[-2] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(i^*i_*j^*M)(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M)), \end{array} \tag{3.3.8.2}$$

其中，右侧方框是（3.3.7.2）的一部分。注意，（3.3.8.2）的顶部复合恰好是 $\beta_{\mathbb{D}_S(M)}$ $: i^*\mathbb{D}_S(M) \longrightarrow \Upsilon_f(j^*\mathbb{D}_S(M))$，且垂直映射均为等价。因此，为了证明$\beta_{\mathbb{D}_S(M)}$ 是一个等价，只需证明（3.3.8.2）的底部复合是一个等价。

对此，考虑以下纤维序列态射。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D}_\sigma(i^!M)(-1)[-2] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(i^*j_*j^*M)(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(i^*M)(-1)[-1] \\ \omega\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma(\beta_M^{-1})(-1)[-1]} \\ \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M)) & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(i^*j_*j^*M)(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M))(-1)[-1], \end{array}$$

其中 ω 是诱导映射，因此是一个等价。这里的上方序列由 (3.3.2.1) 得到，而下方序列则是通过将 $\mathbb{D}_\sigma(_)$ 应用于该纤维序列

$$\Upsilon_f(j^*M)(1)[1] \to i^*j_*j^*M(1)[1] \simeq \Upsilon_f(j^*M)(1)[1] \oplus \Upsilon_f(j^*M) \to \Upsilon_f(j^*M)$$

通过 β_M 分裂（3.3.8.1）得到。根据构造，(3.3.8.2) 的底部复合恰好是 ω，因此是一个等价。这表明 $\beta_{\mathbb{D}_S(M)}$ 是一个等价。

由于 $\Upsilon \to \Psi$ 是松幺半特化系统的一个态射，因此可以直接验证该图表

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta j^*M) & \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{D}_\eta j^*M}} & \Psi_f(\mathbb{D}_\eta j^*M) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\Upsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\Psi} \\ \mathbb{D}_\sigma\Upsilon_f(j^*M) & \xleftarrow{\mathbb{D}_\sigma(\gamma_{j^*M})} & \mathbb{D}_\sigma\Psi_f(j^*M) \end{array}$$

交换。垂直比较映射均为等价，并且正如在证明一开始所观察到的，γ_{j^*M} 是一个等价。因此，$\gamma_{\mathbb{D}_\eta j^*M}$ 也是一个等价，这意味着.....

$$\alpha_{\mathbb{D}_S(M)} : i^*\mathbb{D}_S(M) \xrightarrow{\beta_{\mathbb{D}_S(M)}} \Upsilon_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) \xrightarrow{\gamma_{j^*\mathbb{D}_S M}} \Psi_f(j^*\mathbb{D}_S(M))$$

是一个等价关系。 □

引理 3.3.9。 设 $f : X \to S$ 是一个有限型态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X, \Lambda)$。如果典范映射

$$\alpha_M : i^*M \longrightarrow \Psi_f(j^*M)$$

and

$$\alpha_{\mathbb{D}_S(M)} : i^*\mathbb{D}_S(M) \to \Psi_f(j^*\mathbb{D}_S(M))$$

是等价，那么

$$\alpha_{M\boxtimes\mathbb{D}_S(M)} : i^*(M \boxtimes \mathbb{D}_S(M)) \longrightarrow \Psi_{f\times f}(j^*(M \boxtimes \mathbb{D}_S(M)))$$

是一个等价。

证明。考虑该图表

$$\begin{array}{ccccc} i^*M \boxtimes i^*\mathbb{D}_S(M) & \longrightarrow & \chi_f(j^*M) \boxtimes \chi_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) & \longrightarrow & \Psi_f(j^*A) \boxtimes \Psi_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & (1) & \downarrow & (2) & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ (i\times i)^*(M \boxtimes \mathbb{D}_S(M)) & \longrightarrow & \chi_{f\times f}(j^*M \boxtimes j^*\mathbb{D}_S(M)) & \longrightarrow & \Psi_{f\times f}(j^*M \boxtimes j^*\mathbb{D}_S(M)). \end{array}$$

右侧垂直映射由定理 1.5.12 (3) 可知是等价。考虑到 j_* 的伪幺半结构，（1）的交换性很容易验证。（2）的交换性由以下事实得出：$\chi \to \Psi$ 是松幺半特化系统的态射（参见注 1.4.12 (3)）。根据假设，顶部的水平映射是等价。因此，底部的水平映射也如所需地是等价。□

3.3.10. 设 $f : X \to S$ 是有限型的，M 属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 并假设 Λ 是一个$\mathbb{Q}$-代数。回想一下我们在引理 3.3.8 的证明开头所观察到的内容：如果

$$\alpha_M : i^*M \longrightarrow \Psi_f(j^*M)$$

是一个等价，这由引理 3.3.6 可知

$$\beta_M : i^*M \xrightarrow{\text{unit}} \Upsilon_f(j^*M) \xrightarrow{\mu_{j^*M}} \Upsilon_f(j^*M)$$

是一个等价。特别地，β_M 分裂了单值化序列

$$\chi_f(j^*M) \xrightarrow{\mu_{j^*M}} \Upsilon_f(j^*M) \xrightarrow{N} \Upsilon_f(j^*M)(-1).$$

因此存在一个等价

$$\chi_f(j^*M) \simeq \Upsilon_f(j^*M) \oplus \Upsilon_f(j^*M)(-1)[-1]. \tag{3.3.10.1}$$

特别地，存在纤维序列

$$\Upsilon_f(j^*M) \xrightarrow{i_1} \chi_f(j^*M) \xrightarrow{p_2} \Upsilon_f(j^*M)(-1)[-1]$$

and

$$\Upsilon_f(j^*M)(-1)[-1] \xrightarrow{i_2} \chi_f(j^*M) \xrightarrow{p_1} \Upsilon_f(j^*M),$$

其中 i_1、i_2 表示包含映射，而 p_1、p_2 表示相对于直和分解（3.3.10.1）的投影。

注意，在上述情形中，$\alpha_{\mathbb{D}_S(M)}$ 根据引理 3.3.8 也是一个等价，因此 $\beta_{\mathbb{D}_S(M)}$ 诱导了与上述类似的 $\mathbb{D}_S(M)$ 单值化序列的一个分裂。

引理 3.3.11. 设 $f : X \to S$ 是一个概形态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$。假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，且 $\alpha_M : i^*M \to \Psi_f(j^*M)$ 是一个等价。那么图表

$$\begin{array}{ccc} \chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)) & \xrightarrow{\sim} & \Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)) \oplus \Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M))(-1)(-1) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{comp}_\Upsilon(-1)[-1] \\ \mathrm{comp}_\Upsilon & 0 \end{pmatrix}} \\ \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(j^*M))(-1)[-1] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M))(-1)[-1] \oplus \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M)) \end{array}$$

交换。这里的水平等价是由β_M 和$\beta_{\mathbb{D}_S(M)}$ 诱导的直和分解，如上所述。

证明。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
\Upsilon_f(j^*\mathbb{D}_S(M))) & \xrightarrow{i_1} & \chi_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) & \xrightarrow{p_2} & \Upsilon_f(j^*\mathbb{D}_S(M)))(-1)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle \beta^{-1}_{\mathbb{D}_S(M)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \vdots \\
i^*\mathbb{D}_S(M) & \longrightarrow & \chi_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) & \longrightarrow & i^!\mathbb{D}_S(M)[1] \\
\vdots & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
\mathbb{D}_\sigma(i^!M)(-1)[-2] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(j^*M))(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma(\mathrm{unit})} & \mathbb{D}_\sigma(i^*M)(-1)[-1] \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma(\beta_M)(-1)[-1]} \\
\mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M)) & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma(p_2)} & \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(j^*M))(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma(i_1)} & \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M))(-1)[-1]
\end{array} \tag{3.3.11.1}$$

水平行是纤维序列，实线方块交换（右侧中间方块由引理 3.3.4交换），虚线箭头是通过补全纤维序列映射所诱导的映射。注意，所有竖直映射都是等价。我们断言，(3.3.11.1) 中右侧从上到下的竖直映射复合等价于复合$\Upsilon(-1)[-1]$。事实上，仔细考察即可由

$$\begin{array}{ccc}
\Upsilon_f(j^*\mathbb{D}_S(M))(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathrm{comp}_\Upsilon(-1)[-1]} & \mathbb{D}_\sigma(\Upsilon_f(j^*M))(-1)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma(\mu_{j^*M})(-1)[-1]} \\
\chi_f(j^*\mathbb{D}_S(M)) & \xrightarrow{\mathrm{comp}_\chi} & \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(j^*M))(-1)[-1] \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma(\mathrm{unit})(-1)[-1]} \\
i^!\mathbb{D}_S(M) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}_\sigma(i^*M)(-1)[-1].
\end{array}$$

请注意，右侧竖直映射的复合为 $\mathbb{D}_\sigma(\beta_M)(-1)[-1]$。顶部方块由 (3.3.7.2) 交换，底部方块的交换性由引理3.3.4给出。利用纤维序列映射 (3.3.7.2)，我们看到 (3.3.11.1) 中左侧竖直映射的复合必已等价于 复合Υ ，由此完成证明。□

引理 3.3.12。 设 k 是一个具有有限 *étale* 上同调维数的域，其系数为 Λ，且 $g : Y \to \mathrm{Spec}\, k$ 是一个有限型态射。那么对于 $M \in \mathrm{DA}_{ét}(Y, \Lambda)$，以下条件等价：

(1) M 是可构造的。*(2)* M 相对于 g 是普遍局部无环的。

特别是，当 k 是严格局部诺特 *схем* 中某个点的剩余域时，此结论成立。

证明。我们声称 Y 和 $Y \times_k Y$ 具有有限的 Λ-上同调维数。事实上，与 [CD16, 1.1.5] 的证明类似，我们可以假设 $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，其中 n 是某个正整数。由于 k 具有有限的 Λ-上同调维数，由 [Sta22, 0F0V] 可知， Y 和 $Y \times_k Y$ 具有有限的 Λ-上同调维数。因此，根据 [CD16, 5.2.4]，$\mathrm{DA}_{ét}(Y, \Lambda)$ 和 $\mathrm{DA}_{ét}(Y \times_k X, \Lambda)$ 均由可构造对象紧生成。现在，3.2.16 表明，每个关于 g 满足 ULA 条件的 M 都已经是可构造的。

反之，任意可构造的 M 是 g-普遍局部无环：这是因为 Künneth 公式对域上的 étale 动机成立（参见 [Cis21，3.1。12]）以及命题 3.2.13。

引理的最后一句由以下事实得出：这类 k 具有有限 étale 上同调维数，这可由 [CD16, 1.1。5]。□

注 3.3.13. 设 $g : Y \to \operatorname{Spec} k$ 为有限型，其中 k 是有限 Λ- 上同调维数的域。记 $\mathbb{D}(_) := \mathbb{D}_{\operatorname{Spec} k}(_) = \operatorname{Hom}(_, g^!\mathbb{1})$。由引理3.3.12 可得一个等价——

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(Y,\Lambda) \simeq \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{ULA}}(Y/\operatorname{Spec} k)$$

的子范畴 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)$。因此命题 3.2.9 意味着，对于任意 M 属于$\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(Y,\Lambda)$ 典范映射 $M \to \mathbb{D}\mathbb{D}M$ 是一个等价。特别地，函- 子

$$\mathbb{D}(_) : \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(Y,\Lambda)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(Y,\Lambda)$$

是一个对合（即满足 $\mathbb{D} \circlearrowright \mathbb{D} \simeq \mathrm{id}$）。这有时称为*Verdier* 对偶。设 $h : Z \to Y$是一个有限型态射，且 M属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)$。典范映射

$$h^!\mathbb{D}M \longrightarrow \mathbb{D}h^*M \tag{3.3.13.1}$$

由.....的转置得到

$$h^!\mathbb{D}M \otimes h^*M \xrightarrow{\theta} h^!(\mathbb{D}M \otimes M) \longrightarrow h^!f^!\mathbb{1}$$

(其中 θ 按 (3.3.4.2) 中的方式定义）始终是等价（例如参见 [Kha21, 2.34(iv)]）。若 M 此外还是可构造的，则由 Verdier 对偶可得一个等价

$$h^*\mathbb{D}M \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\mathbb{D}h^*\mathbb{D}M \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}h^!\mathbb{D}\mathbb{D}M \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}h^!M. \tag{3.3.13.2}$$

引理 3.3.14. 设 $f : X \to S$ 和 $g : Y \to X$ 均为有限型，并令 $h : Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} S$表示其复合。对于任意 $M \in \mathrm{DA}_{ét}(X_\eta, \Lambda)$，图表

$$\begin{array}{ccc}
\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} & g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle g_\sigma^!\,\mathrm{comp}_\chi} \\
\chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^*M)) & & g_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(M))(-1)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\mathbb{D}_\sigma(\chi_h(g_\eta^*M))(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma\,\mathrm{Ex}^*} & \mathbb{D}_\sigma(g_\sigma^*\chi_f(M))(-1)[-1]
\end{array} \tag{3.3.14.1}$$

交换。如果 M 还假设为可构造，那么图表

$$\begin{array}{ccc}
g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta(M)) \\
\downarrow{\scriptstyle g_\sigma^*\,\mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(M))(-1)[-1] & & \chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^!M)) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} \\
\mathbb{D}_\sigma(g_\sigma^!\chi_f(M))(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma\,\mathrm{Ex}^!} & \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(g_\eta^!M))(-1)[-1]
\end{array} \tag{3.3.14.2}$$

也进行交换。

证明。可以直接验证复合函母

$$\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M)) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)) \xrightarrow{g_\sigma^!\,\mathrm{comp}_\chi} g_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(M))(-1)[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_\sigma(g_\sigma^*\chi_f(M))(-1)[-1]$$

是复合的转置

$$\begin{aligned}\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M)) \otimes g_\sigma^*\chi_f(M) &\xrightarrow{\mathrm{Ex}^!\otimes\mathrm{id}} g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)) \otimes g_\sigma^*\chi_f(M)\\ &\xrightarrow{\theta} g_\sigma^!(\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes\chi_f(M))\\ &\longrightarrow h_\sigma^!\mathbb{1}(-1)[-1].\end{aligned}$$

这里最后一个映射是复合

$$\begin{aligned}g_\sigma^!(\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes\chi_f(M)) &\longrightarrow g_\sigma^!(\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes M))\\ &\xrightarrow{g_\sigma^!(\chi_f\,\mathrm{id}^t)} g_\sigma^!(\chi_f(f_\eta^!\mathbb{1}))\\ &\xrightarrow{g_\sigma^!\,\mathrm{Ex}^!} g_\sigma^!f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})\\ &\longrightarrow h_\sigma^!\mathbb{1}(-1)[-1].\end{aligned}$$

因此，为了证明 (3.3.14.1) 交换，只需证明其转置图表

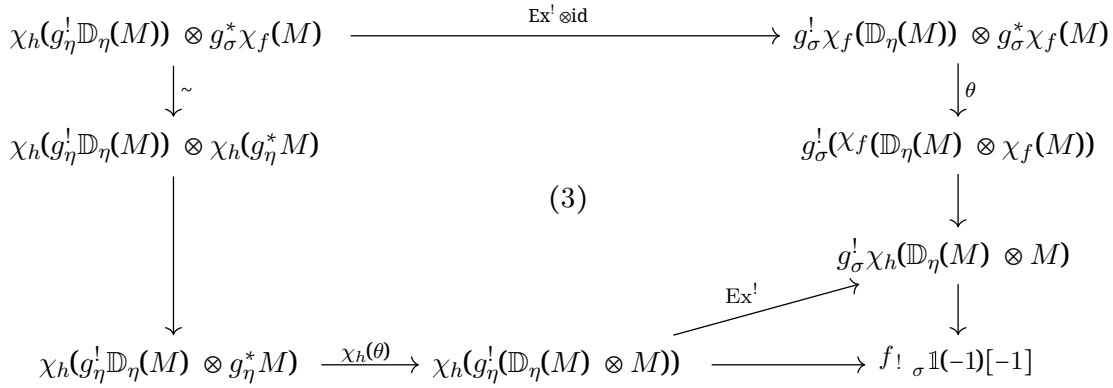
$$\begin{array}{ccc}\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M))\otimes g_\sigma^*\chi_f(M) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!\otimes\mathrm{id}} & g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M))\otimes g_\sigma^*\chi_f(M)\\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\theta}\\ \chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^*M))\otimes g_\sigma^*\chi_f(M) & & g_\sigma^!(\chi_f(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes\chi_f(M))\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}\otimes\mathrm{Ex}^*} & & \downarrow\\ \chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^*M))\otimes\chi_h(g_\eta^*M) & \longrightarrow & h_\sigma^!\mathbb{1}(-1)[-1]\end{array}\tag{3.3.14.3}$$

交换。注意，

$$\begin{array}{ccccc}\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M))\otimes g_\sigma^*\chi_f(M) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{Ex}^*} & \chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M))\otimes\chi_f(g_\eta^*M) & \longrightarrow & \chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta(M)\otimes g_\eta^*M)\\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & & & \downarrow{\scriptstyle\chi_h(\theta)}\\ \chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^*M))\otimes g_\sigma^*\chi_f(M) & & (1) & \overset{\sim}{\nearrow} & \chi_h(g_\eta^!(\mathbb{D}_\eta(M)\otimes M))\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}\otimes\mathrm{Ex}^*} & & & (2) & \downarrow\\ \chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^*M))\otimes\chi_h(g_\eta^*M) & \longrightarrow & \chi_h(\mathbb{D}_\eta(g_\eta^*M)\otimes g_\eta^*M) & \longrightarrow & \chi_h(h^!\mathbb{1})\end{array}$$

交换。事实上，(1) 直接由松幺半结构的函子性得出χ_h，而 (2) 通过构造得以交换(3.3.13.1)。因此，为了证明 (3.3.14.3)

它交换，只需证明

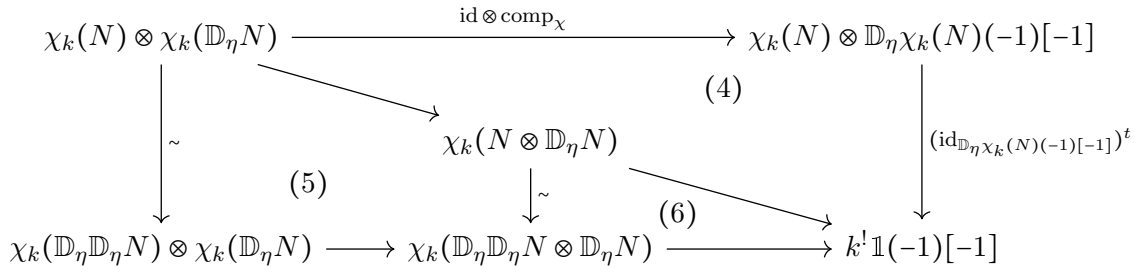


交换。(3) 的交换性为 [Ayo07b，3.1。15] 且三角形显然成立。

由于 S 是优良的，且所考虑的所有概形都是 S 上的有限型概形，因此根据定理 1.2.18，所有函子都保持可构造性。假设 M 是可构造的。我们要利用对合 $\mathbb{D}_\sigma(_)$ 和 $\mathbb{D}_\eta(_)$，由（3.3.14.1）的交换性推出（3.3.14.2）的交换性。首先，我们要证明，对于每个 N 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$，以及每个 $k:Z\to S$ 有限型概形，下面的方形

$$\begin{array}{ccc}\chi_k(N) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma\chi_k(N)\\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathbb{D}_\sigma(\mathrm{comp}_\chi)(-1)[-1]}\\ \chi_k(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta N) & \xrightarrow{\mathrm{comp}_\chi} & \mathbb{D}_\sigma\chi_k(\mathbb{D}_\eta N)(-1)[-1]\end{array}\tag{3.3.14.4}$$

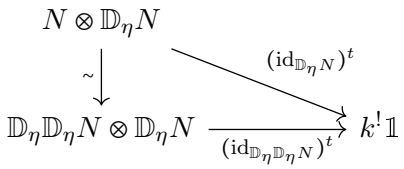
是交换的。外侧图表



是（3.3.14.4）的转置。（4）是交换的，因为根据构造，两个复合都转置为

$$\mathrm{comp}_\chi:\chi_k(\mathbb{D}_\eta N)\longrightarrow\mathbb{D}_\sigma\chi_k(N)(-1)[-1].$$

Clea同理，（5）是交换的。最后，要证明（6）是交换的，只需证明 at



交换。这是因为两个复合都转置为典范映射 $N\to\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta N$.

我们得到一个交换图。

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma \mathrm{Ex}^*} & \mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma\chi_f(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma \mathrm{comp}_\chi} \\
\mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) & & \mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^! \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma \mathrm{Ex}^!} & \mathbb{D}_\sigma\chi_f(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1]
\end{array} \tag{3.3.14.5}$$

通过将 M 替换为 $\mathbb{D}_\eta M$ 在（3.3.14.1）中应用 $\mathbb{D}_\sigma$（_）（−1）[−1]. 因此，只需证明

$$\begin{array}{ccc}
g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) \\
\downarrow{\scriptstyle g_\sigma^* \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\chi_f(M)(-1)[-1] & (7) & \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^! \mathrm{comp}_\chi} \\
\mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(M)(-1)[-1] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1]
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma\chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) & \xleftarrow{\sim} & \chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma(\mathrm{comp}_\chi)} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\mathbb{D}_\sigma\chi_h(\mathbb{D}_\eta g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & (8) & \chi_h(\mathbb{D}_\eta g_\eta^!M) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} \\
\mathbb{D}_\sigma\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma\chi_f(g_\eta^!M)(-1)[-1]
\end{array}$$

交换。则 (3.3.14.2) 是下图的外方块

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bullet & (7) & \bullet & (3.3.14.5) & \bullet & (8) & \bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet
\end{array}$$

因此交换。

（7）的交换性由以下式子的交换性推出

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) \\
 & \overset{\sim}{\nearrow} & & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) & \xrightarrow{\sim} & g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & (9) & \downarrow{\scriptstyle g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma \mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^! \mathrm{comp}_\chi} \\
g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M) & \xrightarrow{g_\sigma^* \mathrm{comp}_\chi} & g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1].
\end{array}$$

事实上，（9）的交换性即3.3.14.4），其余部分显而易见，且容易验证复合

$$\begin{array}{c} g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M) \end{array} \xrightarrow{g_\sigma^*\,\mathrm{comp}_\chi} g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1]$$

等价于

$$\begin{array}{c} g_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta M) \\ \downarrow{\scriptstyle g_\sigma^*\,\mathrm{comp}_\chi} \\ g_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\chi_f(M)(-1)[-1] \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(M)(-1)[-1] \end{array} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_\sigma g_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1].$$

最后，（8）的交换性由交换性可得。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_\sigma\mathbb{D}_\sigma\chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) & \xleftarrow{\sim} & \chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\sigma(\mathrm{comp}_\chi)} & (10) & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathbb{D}_\sigma\chi_h(\mathbb{D}_\eta g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xleftarrow{\mathrm{comp}_\chi} & \chi_h(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathbb{D}_\sigma\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xleftarrow{\mathrm{comp}_\chi} & \chi_h(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta g_\eta^* M). \end{array}$$

这里 (10) 再次交换，这是由 (3.3.14.4) 得出的，并且可以验证这些复合

$$\begin{array}{ccc} & & \chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ & & \chi_h(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathbb{D}_\sigma\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xleftarrow[\mathrm{comp}_\chi]{} & \chi_h(\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta g_\eta^* M) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} & & \chi_h(g_\eta^*\mathbb{D}_\eta M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ & & \chi_h(\mathbb{D}_\eta g_\eta^!M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{comp}_\chi} \\ \mathbb{D}_\sigma\chi_h(g_\eta^!\mathbb{D}_\eta\mathbb{D}_\eta M)(-1)[-1] & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{D}_\sigma\chi_f(g_\eta^!M)(-1)[-1] \end{array}$$

是等价的。

□

注 3.3.15. (1) 我们将 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(_,\Lambda)$ 简写为 $\mathrm{DA}(_)$，并分别将 $\mathrm{DA}(_)$ 限制到 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_\sigma$ 和 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}/_\eta$ 上，记作 $\mathrm{DA}|_\sigma(_)$ 和 $\mathrm{DA}|_\eta(_)$。我们将应用构造3.1.1于所得范畴记为 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 和 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$，

$$\mathcal{D}(_)=\mathrm{DA}_\eta(_):\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}\xrightarrow{-\times_S\eta}\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/\eta}\xrightarrow{\mathrm{DA}|_\eta}\mathcal{P}r^{L,\otimes,\mathrm{st}}$$

and

$$\mathcal{D}(_)=\mathrm{DA}_\sigma(_):\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}\xrightarrow{-\times_S\sigma}\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/\sigma}\xrightarrow{\mathrm{DA}|_\sigma}\mathcal{P}r^{L,\otimes,\mathrm{st}}$$

分别。这意味着，例如，$\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中的一个对象是一个对 $(f:X\to S,M)$，其中 f 是 S 上的有限型对象，而 M 是 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$的一个对象。

对于 (S,η,σ) 上的任意特化系统 sp，[Ayo07b, 3.1] 中的函子性结果表明，存在一个良定义的双范畴函子 $\mathrm{sp}:\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}\to\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$，定义如下：态射 $(C,\alpha):(f:X\to S,M)\to(g:Y\to S,N)$ 被映为 $(C,\mathrm{sp}(\alpha)):(f:X\to S,\mathrm{sp}^f(M))\to(g:Y\to S,\mathrm{sp}^g(N))$，其中 $\mathrm{sp}(\alpha)$ 表示复合

$$\overleftarrow{c}_\sigma{}^*\mathrm{sp}_f(M)\xrightarrow{\mathrm{Ex}^*}\mathrm{sp}_{f\circ\overleftarrow{c}}(\overleftarrow{c}_\eta{}^*M)\xrightarrow{\mathrm{sp}_{f\circ\overleftarrow{c}}\alpha}\mathrm{sp}_{g\circ\overrightarrow{c}}(\overrightarrow{c}_\eta{}^!N)\xrightarrow{\mathrm{Ex}^!}\overrightarrow{c}_\sigma{}^!\mathrm{sp}_g(N).$$

(2) 假设 S 的剩余特征在 Λ 中可逆。等价

$$\mathbb{1}\xrightarrow{\sim}\Psi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})$$

and

$$\Psi_f(M)\boxtimes\Psi_g(N)\xrightarrow{\sim}\Psi_{f\times g}(M\boxtimes N)$$

对于任意两个对象 $(f:X\to S,M)$，$(g:Y\to S,N)$ 属于 $\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$（见定理 1.5.12）表明，特化系统 Ψ 导出一个对称幺半函子$\Psi:\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}\to\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$。特别地，这意味着典范映射

$$\Psi_f(\mathbb{D}_\eta(M))\to\mathbb{D}_\sigma(\Psi_f(M))$$

对于 (X,M) 中 $\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$的任意可对偶化对象都是等价。注意，将这一观察与引理 3.3.12 结合起来，可得定理1.5.12(5) 的另一种证明。

(3) 令 $k:W\to S$ 为 $j:\eta\to S$ 或 $i:\sigma\to S$。考虑函子

$$\mathrm{DA}_W(_):\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/S}\xrightarrow{-\times_S W}\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}_{/W}\xrightarrow{\mathrm{DA}|_W}\mathcal{P}r^{L,\mathrm{st},\otimes}$$

并令 $\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_W}$ 为通过将构造 3.1.1应用于$\mathcal{D}(_)=\mathrm{DA}_W(_)$得到的范畴。于是我们可以定义一个双范畴函子

$$k^*:\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}}\to\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_W}$$

将态射 $(C,\alpha):(X,M)\to(Y,N)$ 发送到 $(C,k^*\alpha):(X,k^*M)\to(Y,k^*N)$，其中 $k^*\alpha$ 表示（略微滥用记号）复合

$$\overleftarrow{c_W}{}^*k^*M\simeq k^*\overleftarrow{c}{}^*M\xrightarrow{k^*\alpha}k^*\overrightarrow{c}{}^!N\xrightarrow{\mathrm{Ex}}\overrightarrow{c_W}{}^!k^*N.$$

考虑两个态射 $(C,\alpha),(D,\beta):(X,M)\to(Y,N)$，以及一个 2-胞腔 $(\Theta,h):(C,\alpha)\to(D,\beta)$，它由一个真态射 $h:C\to D$ 给出。随后，通过沿 k 进行基变换得到的真态射 $h_W:C_W\to D_W$ 导出一个 2-胞腔

$(k^*\Theta, h) : (C, k^*\alpha) \to (D, k^*\beta)$。很容易验证，这给出了一个定义良好的函子。这些等价

$$(X \times_S Y, k^*(M \boxtimes N)) \to (X \times_S Y, k^*M \boxtimes k^*N)$$

and

$$(S, k^*\mathbb{1}) \to (S, \mathbb{1})$$

在 (X, M) 和 (Y, N) 中是自然的，并赋予 $k^* : \mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}} \to \mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_W}$ 对称幺半函子的结构。

函子 $k^\diamond : \mathcal{C}_{S,\ \mathrm{DA}} \to \mathcal{C}_{W,\ \mathrm{DA}|_W}$ 如 3.1.4 中所定义，不应与上文的 k^* 混淆。不过请注意，对于有限型的 $f : X \to S$，以及 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_W,\ \Lambda)$ 中的 M，对象 $(X_W,\ M)$ 在 $\mathsf{C}_{W,\ \mathrm{DA}|_W}$ 中是强可对偶的，当且仅当 $(X,\ M)$ 在 $\mathsf{C}_{S,\ \mathrm{DA}_W}$ 中是强可对偶的。

(4) 很容易验证，这些自然变换

$$i^* \longrightarrow \chi_f j^* \longrightarrow \Upsilon_f j^* \longrightarrow \Psi_f j^*$$

对于所有概形态射 $f : X \to S$，都会产生自然变换。

$$i^* \longrightarrow \chi j^* \longrightarrow \Upsilon j^* \longrightarrow \Psi j^*$$

在 $\mathrm{Fun}(\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}}, \mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma})$ 中。此外，复合 $\alpha : i^* \to \Psi j^*$ 是一个对称幺半自然变换。

(5) 对所有 X in $\mathrm{Sch}^{\mathrm{qcqs}}{}_{/S}$，函子

$$i_* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda) \to \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

and

$$j_* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \to \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$$

都是全忠实的，且存在左正合左伴随 i^*，并且 j^* 它们联合保守 $j^*i_* \simeq 0$（参见 [Kha21, § 2]）。因此，$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 按照 [Lur17a, A.8.1] 的意义，是 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$ 与 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$ 的再黏合。由 [Lur17a, A.8.11] 可知，存在一个左正合对应 $p : \mathsf{M} \to \Delta^1$，使得 $\mathrm{DA}(X)$ 等价于 $\mathrm{Fun}_{\Delta^1}(\Delta^1, \mathsf{M})$。展开 $p : \mathsf{M} \to \Delta^1$ 的构造可知，$\mathrm{Fun}_{\Delta^1}(\Delta^1, \mathsf{M})$ 中的一个对象是一个三元组

$$(F_\sigma, F_\eta, \varphi : F_\sigma \to i^*j_*F_\eta),$$

其中 F_σ 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$，而 F_η 属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$。函子 $\mathrm{Fun}_{\Delta^1}(\Delta^1, \mathsf{M})$ 中一个态射的数据，恰好是一个态射 $a_\sigma : \mathsf{F}_\sigma \to G_\sigma$，它属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda)$，以及一个态射 $a_\eta : F_\eta \to G_\eta$，它属于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$，并且满足图表

$$\begin{array}{ccc} F_\sigma & \longrightarrow & i^*j_*F_\eta \\ \downarrow{\scriptstyle a_\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle i^*j_*a_\eta} \\ G_\sigma & \longrightarrow & i^*j_*G_\eta, \end{array}$$

在 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\ \Lambda)$ 中交换。特别是，这一对

$$i^* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \to \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda),$$
$$j^* : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda) \to \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$$

共同检测恒等态射。这意味着这对对称幺半函子

$$i^*:\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}}\to\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma},$$
$$j^*:\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}}\to\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$$

共同检测恒等映射。换言之，映射 (C,α) $:(X,M)$ $\to(X,M)$ 是 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}}$ 中的恒等映射，当且仅当 $i^*(C,\alpha)$ 和 $j^*(C,\alpha)$ 分别是 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$ 中 (X,i^*M) 以及 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中 (X,j^*M) 的恒等映射。

命题 3.3.16。 设 $f:X\to S$ 是有限型态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$。假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。若典范映射

$$\alpha_M:i^*M\longrightarrow\Psi_f(j^*M)$$

是等价，则 M 是 f–普遍局部无环的。

证明。 我们将通过为对象$(X,M):=(f:X\to S,M)$构造一个明确的对偶数据来证明此结论，该对象位于 $\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}}$。关于双范畴中的可对偶化性，详见附录 A。

由命题 3.2.7 中对普遍局部无环性的刻画可知，问题 M 是否为 f–普遍局部无环，在 X上是扎里斯基局部的。由于映射 α_M 也与沿开浸入的逆像相容，我们可以假设 $f:X\to S$ 是分离的。特别地，对角态射 $\Delta:X\to X\times_S X$ 是闭浸入。

记

$$(\Delta,\varepsilon_M):(X\times_S X,\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M)\longrightarrow(S,\mathbb{1})\tag{3.3.16.1}$$

为与 $(\Delta,\mathrm{id}_{\mathbb{D}_S(M)})$ $:(\mathbb{D}_S(M)$ $M)$ $\to(\mathbb{D}_S(X)$ $M)$ in $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}}$相转置的映射，并令

$$(\Delta,\varepsilon_{j^*M}):(X\times_S X,\mathbb{D}_\eta(j^*M))\boxtimes j^*M)\simeq(X\times_S X,j^*(\mathbb{D}_S(M))\boxtimes M))\xrightarrow{j^*\varepsilon_M}(S,\mathbb{1}).$$

注意， j^*M是 f_η-普遍局部无环，这由引理 3.3.12可知。因此，由引理 A.12 可知，$(\Delta,\varepsilon_{j^*M})$以及

$$\begin{aligned}(\Delta,\eta_{j^*M}):(S,\mathbb{1})&\xrightarrow{\varepsilon^t_{j^*M}}(X\times_S X,\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)))\\&\xrightarrow{\sim}(X\times_S X,j^*M\boxtimes\mathbb{D}_\eta(j^*M))\end{aligned}$$

是 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中 (X,j^*M) 的对偶数据。记 $\Delta_\eta:X_\eta\to X_\eta\times_\eta X_\eta$ 和 $\Delta_\sigma:X_\sigma\to X_\sigma\times_\sigma X_\sigma$ 为对角态射。此外，我们记

$$\eta^t_{j^*M}:\Delta_{\eta*}f^*_\eta\mathbb{1}\to j^*M\boxtimes\mathbb{D}_\eta(j^*M)$$

对于.....的转置

$$\eta_{j^*M}:f^*_\eta\mathbb{1}\to\Delta^!_\eta(j^*M\boxtimes\mathbb{D}_\eta(j^*M)).$$

考虑该图表

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_{\sigma *} i^* f^* \mathbb{1} & \longrightarrow & \Delta_{\sigma *} \chi_f (j^* f^* \mathbb{1}) & \longrightarrow & \Delta_{\sigma *} \Psi_f (j^* f^* \mathbb{1}) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
i^* \Delta_* f^* \mathbb{1} & \longrightarrow & \chi_{f\times f}(\Delta_{\eta *} j^* f^* \mathbb{1}) & \longrightarrow & \Psi_{f\times f}(\Delta_{\eta *} j^* f^* \mathbb{1}) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{f\times f}(\eta^t_{j^* M})} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{f\times f}(\eta^t_{j^* M})} \\
\downarrow{\scriptstyle \eta^t_i} & (1) & \chi_{f\times f}(j^* M \boxtimes \mathbb{D}(j^* M)) & \longrightarrow & \Psi_{f\times f}(j^* M \boxtimes \mathbb{D}(j^* M)) \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
i^*(M \boxtimes \mathbb{D}(M)) & \longrightarrow & \chi_{f\times f} j^*(M \boxtimes \mathbb{D}(M)) & \longrightarrow & \Psi_{f\times f} j^*(M \boxtimes \mathbb{D}(M))
\end{array} \tag{3.3.16.2}$$

其中，上方的水平复合为 $\Delta_* \alpha_{i^* f^* \mathbb{1}}$，下方的水平复合为$\alpha_{M\boxtimes \mathbb{D}(M)}$。不难验证实线图表交换。根据引理3.3.9，典范映射$\alpha_{M\boxtimes \mathbb{D}(M)}$ 是一个等价，因此存在唯一的虚线映射，我们将其称为（略带暗示意味的） η^t_i，使外层图表交换。

我们断言方形图表 (1) 交换。下面说明如何由此推出该命题。为了在 $\mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}}$ 中为 (X, M) 构造对偶数据，我们希望构造一个映射

$$\eta_M : f^* \mathbb{1} \to \Delta^! (M \boxtimes \mathbb{D}(M))$$

或等价地，一个映射

$$\eta^t_M : \Delta_* f^* \mathbb{1} \to M \boxtimes \mathbb{D}(M). \tag{3.3.16.3}$$

这便得到一个映射 $(\Delta, \eta_M) : (S, 1) \to (X \times X, M \boxtimes \mathbb{D}(M))$，其属于 $\mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}}$。将 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X \times_S X, \Lambda)$ 看作是通过左正合函子 $\chi_{f\times f} = i^* j_*$ 对 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta \times_\eta X_\eta, \Lambda)$ 和 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma \times_\sigma X_\sigma, \Lambda)$ 进行再黏合所得。于是，构造映射 (3.3.16.3) 等价于构造映射 η^t_i 和 η^t_j，使图表

$$\begin{array}{ccc}
i^* \Delta_* f^* \mathbb{1} & \xrightarrow{\eta^t_i} & i^*(M \boxtimes \mathbb{D}_S(M)) \\
\downarrow{\scriptstyle \text{unit}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{unit}} \\
i^* j_* j^* \Delta_* f^* \mathbb{1} & \xrightarrow[i^* j_*(\eta^t_j)]{} & i^* j_* j^* (M \boxtimes \mathbb{D}_S(M))
\end{array} \tag{3.3.16.4}$$

可交换。因此，(1) 的交换性导出了一个映射（3.3.16.3）。我们要证明，(Δ, η_M) 和 (Δ, ε_M) 这一对是 (X, M) 在 $\mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}}$ 中的对偶数据。

正如注 3.3.15(5) 中所观察到的，函子 $i^* : \mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}} \to \mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$ and $j^* : \mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}} \to \mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 共同检测等价。因此，根据推论 A.10，只需检查这两对 $((\Delta, \eta_M)_{i^*}, (\Delta, \varepsilon_M)_{i^*})$ 和 $((\Delta, \eta_M)_{j^*}, (\Delta, \varepsilon_M)_{j^*})$（使用 A.6 中的记号）分别在 $\mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$ 和 $\mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中给出对偶数据。由于 $j : X_\eta \to X$ 是开浸入，典范映射

$$j^* \mathbb{D}_S(M) \to \mathbb{D}_\eta(j^* M)$$

作为.....的转置得到

$$j^* \mathbb{D}_S(M) \otimes j^* M \xleftarrow{\simeq} j^*(\mathbb{D}_S(M) \otimes M) \xrightarrow{j^*(\mathrm{id}^t_{\mathbb{D}(M)})} j^* f^! \mathbb{1} \longrightarrow f^!_\eta j^* \mathbb{1}.$$

是一个等价。我们知道，$((\Delta, \eta_{j^* M}), (\Delta, \varepsilon_{j^* M}))$ 是 $\mathrm{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中 $(X, j^* M)$ 的对偶数据。我们声称 $(\Delta, \eta_M)_{j^*}$ 等价于 $(\Delta, \eta_{j^* M})$，并且 $(\Delta, \varepsilon_M)_{j^*}$ 是

等价于 $(\Delta, \varepsilon_{j^*M})$，这意味着 $((\Delta,\eta_M)_{j^*}, (\Delta,\varepsilon_M)_{j^*})$ 是 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中 (X, j^*M) 的对偶数据。第一个断言等价于 $\eta^t_{j^*M}$ 等价于

$$\Delta_* f_\eta^* j^* \mathbb{1} \simeq j^* \Delta_* f^* \mathbb{1} \xrightarrow{j^*\eta^t_M} j^*(M \boxtimes \mathbb{D}(M)) \xrightarrow{\simeq} j^*M \boxtimes \mathbb{D}(j^*M)$$

这通过 η_M 的构造（借助（3.3.16.2）中的交换方块（1））成立，而第二个断言则通过上述ε_{j^*M} 的构造成立。

还需证明 $((\Delta, \eta_M)_{i^*}, (\Delta, \varepsilon_M)_{i^*})$ 是 (X, i^*M) 的对偶数据。由于自然变换 $\alpha : i^* \to \Psi j^*$ 是对称幺半的，存在交换图表

$$\begin{array}{ccc} (S,\mathbb{1}) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & (S,\mathbb{1}) \\ {\scriptstyle(\Delta,(\eta_M)_{i^*})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\Delta,(\eta_M)_{\Psi j^*})} \\ (X\times_S X, i^*M \boxtimes i^*\mathbb{D}_S(M)) & \xrightarrow{(\Delta,\alpha_M\boxtimes\alpha_{\mathbb{D}_S(M)})} & (X\times_S X, \Psi_f(j^*M)\boxtimes\Psi_f(j^*\mathbb{D}_S(M))) \end{array} \tag{3.3.16.5}$$

and

$$\begin{array}{ccc} (X\times_S X, i^*M \boxtimes i^*\mathbb{D}_S(M)) & \xrightarrow{(\Delta,\alpha_M\boxtimes\alpha_{\mathbb{D}_S(M)})} & (X\times_S X, \Psi_f(j^*M)\boxtimes\Psi_f(j^*\mathbb{D}_S(M))) \\ {\scriptstyle(\Delta,(\varepsilon_M)_{i^*})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\Delta,(\varepsilon_M)_{\Psi j^*})} \\ (S,\mathbb{1}) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & (S,\mathbb{1}) \end{array} \tag{3.3.16.6}$$

在 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$ 中。注意，$(\eta_M)_{\Psi j^*}$和 $(\varepsilon_M)_{\Psi j^*}$是 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\sigma}$ 中 $(X, \Psi_f j^* M)$ 的对偶数据：我们上面看到，$(\eta_M)_{j^*}$和 $(\varepsilon_M)_{j^*}$是 $\mathsf{C}_{S,\mathrm{DA}_\eta}$ 中 (X, j^*M) 的对偶数据，因此由推论 A.8，$(((\eta_M)_{j^*})_\Psi \simeq (\eta_M)_{\Psi j^*}$和 $(((\varepsilon_M)_{j^*})_\Psi \simeq (\varepsilon_M)_{\Psi j^*}$这一对是 $\Psi_f j^* M$ 的对偶数据。根据假设和引理 3.3.8，映射 $\alpha_M \boxtimes \alpha_{\mathbb{D}_S}(M)$ 是一个等价。因此，我们可以将引理 A.11 应用于图表 (3.3.16.5) 和 (3.3.16.6)。这表明，$(((\eta_M)_{i^*}, (\varepsilon_M)_{i^*})$ 是 (X, i^*M) 的一组对偶数据。

最后，让我们证明方框 (1) 在 (3.3.16.2) 中交换。注意，利用交换映射的粘贴性质（见 1.1.2），可观察到

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\sigma *} f_\sigma^* i^* \mathbb{1} & \xrightarrow{\mathrm{unit}} & \Delta_{\sigma *} f_\sigma^* \chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Ex}} \\ & & \Delta_{\sigma *}\chi_f(f_\eta^* j^*\mathbb{1}) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \Delta_{\sigma *} i^* f^* \mathbb{1} & \xrightarrow{\mathrm{unit}} & \Delta_{\sigma *}\chi_f(j^* f^*\mathbb{1}) \end{array} \tag{3.3.16.7}$$

交换。映射

$$\alpha_{\mathbb{1}} : i^*\mathbb{1} \to \chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \to \Psi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1})$$

and

$$\alpha_{M\boxtimes\mathbb{D}_S(M)} : i^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M)) \to \chi_{f\times f}(j^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M))) \to \Psi_{f\times f}(j^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M)))$$

是等价映射，依据定理 1.5.12 (1) 和引理 3.3.9 。由引理 3.3.6 可知 $\Upsilon_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \simeq \Psi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1})$ 以及 $\Upsilon_{f\times f}(j^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M))) \simeq \Psi_{f\times f}(j^*(M\boxtimes$

$\mathbb{D}_S(M)))$。此外，正如 3.3.10 中所解释的，映射 $\beta_{\mathbb{1}}$ 和 $\beta_{M\boxtimes\mathbb{D}_S M}$ 分别分裂相应的单值化序列，从而产生直和分解

$$\chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \simeq \Upsilon_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \oplus \Upsilon_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1})(-1)[-1](\simeq \mathbb{1}\oplus\mathbb{1}(-1)[-1])$$

and

$$\chi_{f\times f}(j^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M))) \simeq \Upsilon_{f\times f}(j^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M))) \oplus \Upsilon_{f\times f}(j^*(M\boxtimes\mathbb{D}_S(M)))(-1)[-1].$$

利用（3.3.16.7）的交换性，我们可以观察到，(1) 交换当且仅当复合

$$\Delta_{\sigma*}f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} \Delta_{\sigma*}\chi_f(f_\eta^* j^*\mathbb{1}) \xrightarrow{\sim} \chi_{f\times f}(\Delta_{\eta*}j^*f^*\mathbb{1}) \xrightarrow{\chi_{f\times f}(\eta^t_{j^*M})} \chi_{f\times f}(j^*M\boxtimes\mathbb{D}_\eta(j^*M)) \tag{3.3.16.8}$$

相对于上述直和分解由一个对角矩阵给出。等价地，我们可以证明复合

$$f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} \chi_f(f_\eta^*\mathbb{1}) \xrightarrow{\chi_f(\eta_{j^*M})} \chi_f(\Delta_\eta^!(j^*M\boxtimes\mathbb{D}_\eta(j^*M))) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} \Delta_\sigma^!\chi_{f\times f}(j^*M\boxtimes\mathbb{D}_\eta(j^*M)) \tag{3.3.16.9}$$

相对于上述直和分解由一个对角矩阵给出。

回忆证明一开始的映射 $\varepsilon_M = \mathrm{id}^t : \mathbb{D}_S(M)\otimes M \to f^!\mathbb{1}$ (3.3.16.1)。图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\Delta_\sigma^* i^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M)) & \xrightarrow{\sim} & i^*\Delta^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M)) & \xrightarrow{i^*\varepsilon_M} & i^*f^!\mathbb{1} & \xrightarrow{\mathrm{Ex}} & f_\sigma^! i^*\mathbb{1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Delta_\sigma^*\chi_f(j^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M))) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \chi_f(j^*\Delta^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M))) & \xrightarrow{\chi_f j^*\varepsilon_M} & \chi_f(j^*f^!\mathbb{1}) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} & f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Delta_\sigma^*\Psi_f(j^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M))) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \Psi_f(j^*\Delta^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M))) & \xrightarrow{\Psi_f j^*\varepsilon_M} & \Psi_f(j^*f^!\mathbb{1}) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} & f_\sigma^!\Psi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1})
\end{array} \tag{3.3.16.10}$$

是可交换的。我们将中间一行从左到右的复合记为 θ。注意，左侧的垂直复合是 $\Delta_\sigma^*\alpha_{\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M}$，右侧的垂直复合是$f_\sigma^!\alpha_{\mathbb{1}}$。特别地，它们都是等价，并诱导出直和分解

$$\Delta_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M) \simeq \Delta_\sigma^*\Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M) \oplus \Delta_\sigma^*\Upsilon_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)(-1)[-1]$$

and

$$f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \simeq f_\sigma^!\Upsilon_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \oplus f_\sigma^!\Upsilon_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1})(-1)[-1].$$

(3.3.16.10) 的交换性还意味着复合

$$\Delta_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M) \xrightarrow{\sim} \Delta_\sigma^*\chi_f(j^*(\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M))) \xrightarrow{\theta} f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(j^*\mathbb{1}) \tag{3.3.16.11}$$

is 相对于这些分解是一个对角矩阵。注意，复合

$$\Delta_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M) \longrightarrow \chi_f(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)) \xrightarrow{\chi_f(\varepsilon_{j^*M})} \chi_f(f_\eta^!\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})$$

等价于复合（3.3.16.11）。

我们声称，如果能够证明该图表3.3.16.9）（是一个对角矩阵），那么命题成立（即

$$\begin{array}{ccc}
f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) & \longrightarrow & \Delta_\sigma^!\chi_f(j^*M \boxtimes \mathbb{D}_\eta(j^*M)) \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{1})) & & \Delta_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)) \\
\downarrow{\scriptstyle f_\sigma^*\,\mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_\sigma^!\,\mathrm{comp}_\chi} \\
f_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})(-1)[-1] & & \Delta_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))(-1)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
\mathbb{D}_\sigma(f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}))(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(\Delta_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))(-1)[-1]
\end{array} \tag{3.3.16.12}$$

交换。这里，顶部水平映射是复合（3.3.16.9），底部水平映射是将 $\mathbb{D}_\sigma(_)(-1)[-1]$ 作用于复合（3.3.16.11）所得。事实上，由于所有相关的直和分解都是由等价 $\alpha_{\mathbb{1}}$, $\alpha_{M\boxtimes\mathbb{D}_S(M)}$ 和$\alpha_{\mathbb{D}_S(M)\boxtimes M}$ 诱导的，因此容易验证，左右两个竖直映射的形式为

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

由引理3.3.11 而底部的水平映射（3.3.16.11）的形式为

$$\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$$

关于这些分解。这一点以及竖直复合是等价这一事实，意味着（3.3.16.12）的顶部水平映射正如所期望的那样是一个对角矩阵。

为了证明 (3.3.16.12) 交换，我们将其分解为几个小图表。首先注意到

$$\begin{array}{ccc}
f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^*} & \chi_f(f_\eta^*\mathbb{1}) \\
{\scriptstyle\sim}\downarrow & (4) & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{1})) & \xrightarrow[\mathrm{Ex}^*]{} & \chi_f(f_\eta^*\mathbb{D}_\eta(\mathbb{1}))
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
\chi_f(\Delta_\eta^!(j^*M \boxtimes \mathbb{D}_\eta(j^*M))) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}^!} & \Delta_\sigma^!\chi_f(j^*M \boxtimes \mathbb{D}_\eta(j^*M)) \\
{\scriptstyle\sim}\downarrow & (5) & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
\chi_f(\Delta_\eta^!(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))) & \xrightarrow[\mathrm{Ex}^!]{} & \Delta_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))
\end{array}$$

显然交换。根据 η_{j^*M} 的构造（就在证明的开头），图表

$$\begin{array}{ccc}
\chi_f(f_\eta^*\mathbb{1}) & \xrightarrow{\chi_f(\eta_{j^*M})} & \chi_f(\Delta_\eta^!(j^*M \boxtimes \mathbb{D}_\eta(j^*M))) \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
\chi_f(f_\eta^*\mathbb{D}_\eta(\mathbb{1})) & & \chi_f(\Delta_\eta^!(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))) \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})) & \xrightarrow{\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\varepsilon_{j^*M}))} & \chi_f((\mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)))
\end{array} \tag{6}$$

交换。接下来注意,

$$\begin{array}{ccc}
f_\sigma^*\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{1})) & \longrightarrow & \chi_f(f_\eta^*\mathbb{D}_\eta(\mathbb{1})) \\
\downarrow{\scriptstyle f_\sigma^*\,\mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
f_\sigma^*\mathbb{D}_\sigma\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})(-1)[-1] & & \chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})) \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\chi} \\
\mathbb{D}_\sigma(f_\sigma^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}))(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(f_\eta^!\mathbb{1}))(-1)[-1]
\end{array} \tag{7}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
\chi_f(\Delta_\eta^!(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))) & \longrightarrow & \Delta_\sigma^!\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)) \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta_\sigma^!\,\mathrm{comp}_\chi} \\
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))) & & \Delta_\sigma^!\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))(-1)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\chi} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)))(-1)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\sigma(\Delta_\sigma^*\chi_f(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))(-1)[-1]
\end{array} \tag{8}$$

由引理可交换3.3.14。最后我们声称

$$\begin{array}{ccc}
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})) & \xrightarrow{\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\varepsilon_{j^*M}))} & \chi_f(\mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))) \\
{\scriptstyle\mathrm{comp}_\chi}\downarrow & (9) & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{comp}_\chi} \\
\mathbb{D}_\sigma(\chi_f(f_\eta^!\mathbb{1}))(-1)[-1] & \xrightarrow{\mathbb{D}_\sigma\chi_f(\varepsilon_{j^*M})(-1)[-1]} & \mathbb{D}_\sigma(\chi_f(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)))(-1)[-1]
\end{array}$$

交换。考虑其转置图表。

$$\begin{array}{ccc}
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})) \otimes \chi_f(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \chi_f(\varepsilon_{j^*M})} & \chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})) \otimes \chi_f(f_\eta^!\mathbb{1}) \\
{\scriptstyle\chi_f(\mathbb{D}_\eta\varepsilon_{j^*M})\otimes\mathrm{id}}\downarrow & (9)^t & \downarrow \\
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M))) \otimes \chi_f(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M) \boxtimes j^*M)) & \longrightarrow & f^!\mathbb{1}(-1)[-1]
\end{array}$$

这里右侧的竖直映射和底部的水平映射定义如下3.3.7。由此构造可直接推出，为了证明$(9)^t$交换，只需证明

$$\begin{array}{ccc}
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})\otimes\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)) & \xrightarrow{\chi_f(\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{j^*M})} & \chi_f(\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})\otimes f_\eta^!\mathbb{1}) \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_f(\mathbb{D}_\eta\varepsilon_{j^*M}\otimes\mathrm{id})} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_f\,\mathrm{id}^t} \\
\chi_f(\mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)\otimes\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)) & \xrightarrow{\chi_f\,\mathrm{id}^t} & \chi_f(f^!\mathbb{1})
\end{array}$$

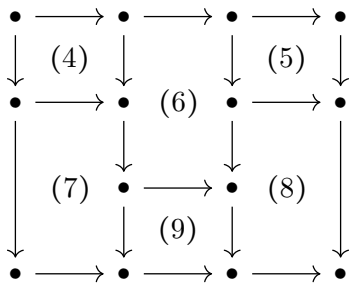
交换。这是因为其转置图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})\otimes\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{j^*M}} & \mathbb{D}_\eta(f_\eta^!\mathbb{1})\otimes f_\eta^!\mathbb{1} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}_\eta\varepsilon_{j^*M}\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}^t} \\
\mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M))\otimes\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M) & \xrightarrow{\mathrm{id}^t} & f^!\mathbb{1}
\end{array}$$

恰好是

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}_\eta f^!\mathbb{1} & \xrightarrow{\mathbb{D}_\eta\varepsilon_{j^*M}} & \mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\mathbb{D}_\eta f^!\mathbb{1} & \xrightarrow{\mathbb{D}_\eta\varepsilon_{j^*M}} & \mathbb{D}_\eta(\Delta_\eta^*(\mathbb{D}_\eta(j^*M)\boxtimes j^*M)).
\end{array}$$

由于（3.3.16.12）是



这就完成了证明。 □

命题 3.3.17。 设 $f:X\to S$ 是一个有限型态射，且 M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)$。如果 M 是 f-普遍局部无环的，则每个典范映射

$$i^*M\longrightarrow\Upsilon_f(j^*M)\longrightarrow\Psi_f^{\mathrm{tame}}(j^*M)\longrightarrow\Psi_f(j^*M)$$

是等价关系。

证明。 这本质上是 [JY21b，4.1.7。] 利用命题 3.2.13中关于普遍局部无环性的等价刻画。存在一条等价链

$$\begin{aligned}\Upsilon_f(j^*M) &\simeq \operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}(f_\eta^* \pi^* \mathscr{A}_S, j^* M)\\ &\overset{(1)}{\simeq} \operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* (j^* M \otimes f_\eta^* \underline{\mathrm{Hom}}(\pi^* \mathscr{A}_S, \mathbb{1}))\\ &\overset{(2)}{\simeq} \operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} i^* (M \otimes f^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}(\pi^* \mathscr{A}_S, \mathbb{1}))\\ &\simeq i^* M \otimes f^* \operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} i^* j_* \underline{\mathrm{Hom}}(\pi^* \mathscr{A}_S, \mathbb{1}))\\ &\simeq i^* M \otimes f^* \Upsilon_{\mathrm{id}}(\mathbb{1})\\ &\overset{(3)}{\simeq} i^* M.\end{aligned}$$

这里的（1）源于余单纯对象 $\mathscr{A}_S$ 的每一项在 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_m, S, \Lambda)$ 中都是可对偶的（参见 1.5.3）。(2) 直接由 M 是 f-普遍局部无环以及命题 3.2.13中的等价条件（3）得出。最后，（3）源于 Υ_{id}的幺元性（参见 [Ayo14，10。2]不难验证，上述等价关系从下到上的复合等价于所需的映射。

回顾一下，M 是 f–普遍局部无环的蕴含着 $t_n^* M$ 是 f_n-普遍局部无环。因此，根据上述观察，我们有

$$\Psi_f^{\mathrm{tame}}(j^* M) \simeq \operatorname{colim}_{n \in (\mathbb{N}'^{\times})^{\mathrm{op}}} \Upsilon_{f_n}(t_n^* j^* M)) \simeq \operatorname{colim}_{n \in (\mathbb{N}'^{\times})^{\mathrm{op}}} i^* t_n^* M \simeq i^* M.$$

同样，我们有 $t_L^* M$ 是 f_L-普遍局部无环的，因此根据 $t_L^* M$ 是 $t_L \circ f_L$-普遍局部无环（引理 3.2.8）。于是得到

$$\Psi_f(j^* M) \simeq \operatorname{colim}_{L \in \Xi_\tau} \Psi_{t_L \circ f_L}^{\mathrm{tame}}(t_L^* j^* M) \simeq \operatorname{colim}_{L \in \Xi_\tau} i^* t_L^* M \simeq i^* M.$$

□

3.3.18. 根据目前为止得到的结论，我们可以推导出以下关于普遍局部无环性延拓的有趣判据：

推论 3.3.19。 设 $f : X \to S$ 为有限型，其中 S 是优良严格亨泽尔离散赋值环的谱，且 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。对于$\mathrm{DA}_{\acute{e}t}^{\mathrm{cons}}(X_\eta, \Lambda)$ 中的一个 M，以下条件等价：

(1) 存在一个 M 属于 $\mathrm{DA}_{\acute{e}t}(X, \Lambda)$，它相对于 f 是 *ULA*，并且满足 $j^* M \simeq M$。*(2)* 典范映射 $\Upsilon_f(M) \to \Psi_f(M)$ 是一个等价，且正合列中的单值算子 N

$$\chi_f(M) \longrightarrow \Upsilon_f(M) \xrightarrow{N} \Upsilon_f(M)(-1) \tag{3.3.19.1}$$

等价于零映射。

证明。 假设 (1) 成立。则由命题 3.3.17可知，复合

$$\alpha_{\widetilde{M}} : i^* \widetilde{M} \to i^* j_* j^* \widetilde{M} \simeq i^* j_* M \to \Upsilon_f(M) \to \Psi_f(M)$$

是等价。因此典范映射 $\Upsilon_f(M) \to \Psi_f(M)$ 是等价，引理3.3.6 并且如引理3.3.8 的证明中所示，我们看到序列（3.3.19.1）分裂，这意味着 $N \simeq 0$。

反过来，假设 (2) 成立。那么 $\Upsilon_f(M) \simeq \Psi_f(M)$ 是 i^*j_*M 的直因子，因此该直因子的嵌入给出一个映射

$$\Psi_f(M) \to i^*j_*M. \tag{3.3.19.2}$$

考虑到 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$ 是 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)$ 与 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$ 的再黏合（见注3.3.15 (5)），映射（3.3.19.2）由此产生一个元素 $\widetilde{M}$，属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\text{ét}}(X,\Lambda)$，使得复合

$$i^*\widetilde{M} \to i^*j_*j^*\widetilde{M} \to \Psi_f(j^*\widetilde{M}) \simeq \Psi_f(M)$$

$\widetilde{\ }$是一个等价。因此 M 是 f–根据命题 3.3.16，具有普遍局部无环性。 □

注 3.3.20. 单值算子 N 可以解释为“单值作用的对数”（参见 [Ayo14, 11.17]，其中给出了 étale 实现后的精确表述）。有了这一解释，推论 3.3.19 表明，M 在 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$ 中可扩张为 $\widetilde{\ }$，且它在 f 上是普遍局部无环的，当且仅当单值作用在 $\Upsilon_f(M) \simeq \Psi_f(M)$ 上是平凡的。换言之，动机的“良约化”由 $\Psi_f(M)$ 的单值作用决定。

引理3.3.21。设 $g: Y \to T$ 是有限型的，其中 T 是有限维诺特概形，且 M 属于$\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{ét}(Y,\ \Lambda)$。假设 Λ 在 $\mathbb{Z}$上是平坦的。那么 M 是 g-普遍局部无环，当且仅当 $\rho^*_{\mathbb{Q}}M$ 和 $\rho^*_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}M$ 是 g-普遍局部无环，其中 ℓ 遍历所有素数。（这里 $\rho^*_{\mathbb{Q}}$ 和 $\rho^*_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 的定义同*1.2.14*。）

证明。由于 $\rho^*_{\mathbb{Q}}$ 和 $\rho^*_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 与六函子可交换（命题1.2.23），结论由命题1.2.16 以及命题3.2.7中普遍局部无环刻画 (2) 得出。□

定理3.3.22。设 $f: X \to S$ 是有限型的，其中 S 是某个优异严格亨泽尔离散赋值环的谱。设 Λ 是一个在 $\mathbb{Z}$ 上平坦的诺特环，且 M 属于$\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{ét}(X,\Lambda)$。那么 M 关于 f 是普遍局部无环，当且仅当典范映射

$$\alpha_M : i^*M \longrightarrow \Psi_f(j^*M)$$

是一个等价。

证明。“仅当”部分由命题 3.3.17 得出。对于“若”部分，根据引理 3.3.21，只需检验 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，以及对所有素数 ℓ，Λ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-代数的情形。若 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，则这就是命题 3.3.16，因为根据引理 3.3.12，j^*M 是 f_η-普遍局部无环。令 p 表示 S的剩余特征。若 Λ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-代数，其中 $\ell = p$，则 M 显然是 f-普遍局部无环：事实上，令 $k: X[1/p] \to X$ 表示开浸入。那么根据命题 1.2.12，函子 $k^*: \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X,\Lambda) \to \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X[1/p],\Lambda)$ 是一个等价，因此 M 关于 f 是普遍局部无环，当且仅当 k^*M 关于 $f[1/p]: X[1/p] \to S[1/p]$ 是普遍局部无环。由于 $S[1/p]$ 要么是 η，要么是空概形，$\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\text{ét}}(X[1/p],\Lambda)$ 中的任意 M，关于 $f[1/p]$ 都是普遍局部无环，这由引理 3.3.12 可得，或是显然成立。若Λ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-代数，其中 $\ell \neq p$，则模-ℓ 实现函子

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell} : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda)$$

and

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell} : \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda)$$

根据刚性（见定理1.2.10），它们是范畴等价。由 [Ayo14，10。16]这些等价与邻近循环函子的构造相容，其意义是

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}} & \mathcal{D}_{\text{ét}}(X_\eta,\Lambda) \\ \Psi_f\downarrow & & \downarrow\Psi_f \\ \mathrm{DA}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}} & \mathcal{D}_{\text{ét}}(X_\sigma,\Lambda) \end{array}$$

交换，其中 Ψ_f 右侧表示 étale 层的经典邻近循环函子。由于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}$是对称幺半等价，$(X,M)$ 在$\mathcal{C}_{S,\mathrm{DA}_{\text{ét}}}$中可对偶，当且仅当$(X,\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}(M))$ 在$\mathcal{C}_{S,\mathcal{D}_{\text{ét}}}$中可对偶。根据 [CD16，5.5.4] $\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}$限制为一个全忠实嵌入

$$\mathrm{DA}_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)\longrightarrow\mathcal{D}_{\text{ét}}^{\mathrm{cft}}(X,\Lambda).$$

最后，[LZ22，2.16] 证明了 $\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}M\in\mathcal{D}_{\text{ét}}^{\mathrm{cft}}(X,\Lambda)$ 关于 f是普遍局部无环，当且仅当 $\mathfrak{R}_{\mathrm{mod}\,\ell}(\alpha_M)$是一个等价。□

注3.3.23. 定理3.3.22 特别指出，我们可以利用动机邻近循环函子检测优秀正则一维概形 T 上的普遍局部无环性。具体来说，设 Λ 是一个平坦于 $\mathbb{Z}$的诺特环，$g:Y\to T$是一个有限型态射，且 M 属于$\mathrm{DA}_{\text{ét}}(Y,\Lambda)$。那么，由 [CD19，4.3.9] 以及命题3.2.7 中对普遍局部无环性的刻画可知，f-普遍局部无环性可通过将 M 拉回到 T的严格局部化后进行检验。此时恰好满足应用定理3.3.22的条件。

3.4. 应用：étale 动机的弱奇异支撑

3.4.1。在本节中，固定一个域 K。我们始终将光滑 K-概形理解为配备有到 $\mathrm{Spec}(K)$的有限型光滑态射的概形。让我们回顾 Beilinson 关于弱奇异支撑的定义（参见 [Bei16]）。

3.4.2. 设 X 为一个光滑的 K-概形，并记其余切丛为 $\mathbb{T}^*X$。光滑 K-概形之间的态射 $f:X\to Y$诱导出向量丛态射

$$df:\mathbb{T}^*Y\times_Y X\longrightarrow\mathbb{T}^*X$$

在 X上。若子集 $C\subset\mathbb{T}^*X$ 在 $\mathbb{T}^*X$上的典范 $\mathbb{G}_{m,K}$-作用下封闭，则称其为锥形。

定义 3.4.3. 设 X 为一个光滑的 K-概形，且 $C\subset\mathbb{T}^*(X/K)$ 为一个闭锥形子集。

(1) 光滑 K-概形之间的态射 $h:U\to X$ 称为在几何点 $u\to U$ 处 C-横截的，如果

$$\ker(dh_u)\cap C_{h(u)}\smallsetminus\{0\}=\varnothing.$$

我们称 h 是 C-横截的，如果它在 U 的所有几何点处都是 C-横截的。

（2）光滑 K-概形之间的态射 $f:X\to Y$ 被称为在几何点 $x\to X$ 处 C-横截，如果

$$(df_x)^{-1}(C_x)\smallsetminus\{0\}=\varnothing.$$

我们称 f 是 C-横截的，如果它在 X 的所有几何点处都是 C-横截的。

3.4.4. 测试对 (h, f) 是光滑 K-概形之间的一个对应 $X \xleftarrow{h} U \xrightarrow{f} Y$。弱测试对 是指满足以下条件的测试对： f 具有 $f : X \to \mathbb{A}^1_K$ 的形式，且 h 或者

（1）如果 K 是无限的，则为开浸入；或者（2）如果 K 是有限的，则为复合 $U = V \times_K K' \to V \xrightarrow{h'} X$，其中 K' 是 K 的有限扩张，且 h' 是开浸入。

设 $C \subset \mathbb{T}^*(X/K)$ 是一个闭锥形子集，并考虑一个弱测试对 (h, f)。显然，由于这样的 h 是 étale 的，因此它是 C-横截的。如果 f 也为 C-横截的，我们就称测试对 (h, f) 为 C-横截的。

定义 3.4.5. 设 X 是一个光滑的 K-概形， C 是 $\mathbb{T}^*(X/K)$ 的一个闭锥形子集，且 M 属于 $\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$。如果对于所有 C- 横截的弱测试对 (h, f)， h^*M 都是 f-ULA，则称 M 在 C 上是弱微支撑的。我们将 $\mathbb{T}^*(X/K)$ 上使 M 弱微支撑的最小锥形子集称为 M 的弱奇异支撑，并记作 $SS^w(M)$。

注 3.4.6。 对于 M中的 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$，记 $\mathcal{C}'(M)$ 为 $\mathbb{T}^*(X/K)$ 中所有使得 M 弱微支撑的闭锥形子集所成的集合。弱奇异支撑是良定义的：事实上，正如 Beilinson 在 [Bei16] $\mathcal{C}'(M)$ 中指出的那样，该集合关于交封闭。

3.4.7. 我们固定一些记号：设 $f : U \to \mathbb{A}^1_K$ 是一个概形态射， $s \to \mathbb{A}^1_K$是一个几何点。我们将 $(\mathbb{A}^1_K)_{(s)}$ 写作 $\mathbb{A}^1_K$ 在 s 中的严格亨泽尔化，并考虑拉回方块

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftarrow & U_{(s)} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{(s)}} \\ \mathbb{A}^1_K & \longleftarrow & (\mathbb{A}^1_K)_{(s)} \end{array}$$

这是沿典范映射 $(\mathbb{A}^1_K)_{(s)} \to \mathbb{A}^1_K$对 f进行拉回得到的。对于 $\mathrm{DA}_{\text{ét}}(U, \Lambda)$ 中的 M，我们将其沿 $U_{(s)} \to U$的限制写作 $M_{(s)}$。$(\mathbb{A}^1_K)_{(s)}$要么是一个域的谱（在 s 映射到泛点的情形下），要么是一个严格亨塞尔离散赋值环的谱。我们固定一个映射到 $\mathbb{A}^1_K = \mathrm{Spec} K[X]$ 的闭点、由理想 (X)给出的几何点 0。对于不映射到泛点的几何点 s ，考虑分解

$$\begin{array}{ccccc} U_s & \xrightarrow{i} & U_{(s)} & \xleftarrow{j} & U_{\eta_s} \\ {\scriptstyle f_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{(s)}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\eta_s}} \\ s & \xrightarrow[i]{} & \mathbb{A}^1_{(s)} & \xleftarrow[j]{} & \eta_s, \end{array}$$

其中 η_s 表示 $\mathbb{A}^1_{(s)}$的泛点。然后我们可以构造邻近循环函子$\Psi_{f_{(s)}}(_)$，并得到典范自然变换

$$\alpha : i^*_ \longrightarrow \Psi_{f_{(s)}}(j^*_).$$

我们用 $\Phi_{f_{(s)}}(_)$ 表示 α 的余纤维。 $\Phi_{f_{(s)}}(_)$ 有时也称为消失循环函子。

命题 3.4.8。 假设 K 是完美的，设 X 为一个光滑的 K-概形， M 属于$\mathrm{DA}^{\mathrm{cons}}_{\acute{e}t}(X,\Lambda)$ ，且 C 是 $\mathbb{T}^*(X/K)$的一个闭锥形子集。此外，假设 Λ 是一个平坦于 $\mathbb{Z}$的诺特环。以下条件等价：

(1) $SS^w(M) \subset C$. *(2)* 对于所有 C-横截的弱测试对 (h,f)，动机 $(h^*M)^{(0)}$ 相对于 $f_{(0)} : U_{(0)} \to (\mathbb{A}^1_K)^{(0)}$ 是普遍局部无环的。*(3)* 对于所有 C-横截的弱测试对 (h,f)，我们有 $\Phi_{f_{(0)}}((h^*M)^{(0)}) \simeq 0$.

证明。 （2）和（3）根据定理3.3.22等价。显然，（1）蕴含（2），因为普遍局部无环性在基变换 $(\mathbb{A}^1_K)_{(s)} \to \mathbb{A}^1_K$ 下保持不变，这由命题3.2.9(1) 得出。

假设 (2) 成立，并且 $(h,\ f)$ 是一个 C-横截的弱测试对。根据 [CD19，4.3。9] 以及命题 3.2。7 h^*M 中对普遍局部无环性的刻画，关于 f 具有普遍局部无环性，当且仅当 $(h^*M)^{(s)}$ 关于 $f_{(s)}$ 的所有几何点 s 均具有普遍局部无环性，其中 $\mathbb{A}^1_K$。

根据引理 3.3.12 $(h^*M)^{(s)}$ 关于 $f_{(s)}$ 是普遍局部无环的，只要 s 映到 $\mathbb{A}^1_K$的泛点。因此，我们可以假设 s 映到一个闭点。由于我们可以在 $\mathbb{A}^1_K$ 上 étale 局部地检验普遍局部无环性，且 K 是完美的，因此可以假设 s 的像由 $K[X]$ 中的极大理想给出，该理想由某个 $a \in K$的 $x-a$ 生成。令 $-s : \mathbb{A}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$表示由 K-代数映射 $K[X] \to K[X]$ 诱导的同构，该映射将 x 映到 $x-a$，并记 $f-s := -s \bigcirc f$.。图表

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftarrow & U_{(s)} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{(s)}} \\ \mathbb{A}^1_K & \longleftarrow & (\mathbb{A}^1_K)^{(s)} \\ {\scriptstyle -s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathbb{A}^1_K & \longleftarrow & (\mathbb{A}^1_K)^{(0)} \end{array}$$

由拉回方块组成。因此可知，$(h^*M)^{(s)}$是 $f_{(s)}$-普遍局部无环的，当且仅当$(h^*M)^{(s)}$是$(f-s)^{(0)}$-普遍局部无环的。于是我们只需证明 $f-s$ 是 C-横截的。但这显然成立，因为 $df = d(f-s)$。□

注 3.4.9. 命题3.4.8可视为动机类比 [KS94,8.6.4],其中讨论了复解析情形。

附录 A

双范畴中的可对偶化对象

A.1. 本节中，令 $(\mathcal{C}\ \otimes,\mathbb{1})$ 为一个对称幺半双范畴（参见 [Bó7],[SP09，第 2]章）。每当我们谈及双范畴中的交换图时，都隐含地指存在一个可逆 2-胞腔。给定 X,Y 中两个对象 $\mathcal{C}$，我们将 X 与 Y之间的映射（1-）范畴记为 $\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X,Y)$。

定义 A.2。C 中的对象 X 被称为 可对偶，如果存在一个对象 X 在 C 中以及映射

$$\eta_X : \mathbb{1} \to X \otimes \widehat{X}$$

and

$$\varepsilon_X : \widehat{X} \otimes X \to \mathbb{1}$$

在 C 中，使得复合

$$X \overset{\eta_X \otimes X}{\longrightarrow} X \otimes \widehat{X} \otimes X \overset{X \otimes \varepsilon_X}{\longrightarrow} X$$

and

$$\widehat{X} \overset{\widehat{X} \otimes \eta_X}{\longrightarrow} \widehat{X} \otimes X \otimes \widehat{X} \overset{\varepsilon_X \otimes \widehat{X}}{\longrightarrow} \widehat{X}$$

等价于恒等映射。我们称 X 为 X 的对偶，并称 η_X 和 ε_X 为 X.的对偶数据。

引理 A.3. 设 X 是$\mathcal{C}$ 中的一个可对偶化对象，其对偶为 X。那么：

(1) $\widehat{X}$ 是可对偶的，对偶为 X。*(2)* 函子 $X \otimes _$ 存在右伴随，即 $\widehat{X} \otimes _$。特别地，$\widehat{X}$ 在等价意义下唯一确定。

证明。 X 的对偶数据（其对偶为 X ）也是 X 的对偶数据（其对偶为X），这便推出 (1)。对于 (2)，注意对偶数据给出了所需伴随的单位映射和余单位映射，并且根据定义满足三角恒等式。□

A.4. 如果一个对称幺半双范畴满足：对任意 X 属于 C，函子

$$X \otimes _ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

存在右伴随，则称其为闭的 。我们将这个右伴随记为 $\underline{\mathrm{Hom}}(X,_)$。

引理 A.5. 设$\mathcal{C}$ 是一个闭对称幺半双范畴，且 X 是$\mathcal{C}$中的一个可对偶化对象。那么 $\widehat{X} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(X,\mathbb{1})$，并且以下命题等价：

(1) X 是可对偶的。*(2)* 对于<style id='3'>C

中的任意 Y，典范态射

$$\widehat{X} \otimes Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$$

转置为

$$\varepsilon_X \otimes \mathrm{id}_Y : X \otimes \widehat{X} \otimes Y \longrightarrow Y$$

是一个等价。

(3) 典范态射

$$\widehat{X} \otimes X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, X)$$

转置至

$$\varepsilon_X \times \mathrm{id}_X : X \otimes \widehat{X} \otimes X \longrightarrow X$$

是一个等价。

证明。 引理 A.3 意味着 $\widehat{X} \simeq \widehat{X} \otimes \mathbb{1} \simeq \mathsf{Hom}(X, \mathbb{1})$。蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 可由米田得到，因为对于任意 Z C 中的对象，图表

$$\begin{array}{ccc} \text{映射}\mathcal{C}(Z, \widehat{X} \otimes Y) & \longrightarrow & \text{映射}\mathcal{C}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)) \\ & \searrow^{\sim} \quad \swarrow_{\sim} & \\ & \mathrm{map}\mathcal{C}(X \otimes Z, Y) & \end{array}$$

由引理A.3 关于函子 Z. (2) $\Rightarrow$ (3) 显然，并且 (3) $\Rightarrow$ (1) 见 [LZ22,1.4]. □

A.6. 设 F :C $\to$ D 是对称幺半双范畴之间的严格幺半函子，并考虑 C 的两个对象 X, Y以及态射 $\eta : \mathbb{1} \to X \otimes Y$和$\varepsilon : Y \otimes X \to \mathbb{1}$。那么，由于假设 F 是严格幺半的，存在唯一（差一个等价）的箭头 η_F 和 ε_F，使图表

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{1}) & \xrightarrow{F(\eta)} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle\simeq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} \\ \mathbb{1} & \xrightarrow[\eta_F]{} & F(X) \otimes F(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(Y \otimes X) & \xrightarrow{F(\varepsilon)} & F(\mathbb{1}) \\ {\scriptstyle\simeq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} \\ F(Y) \otimes F(X) & \xrightarrow{\varepsilon_F} & \mathbb{1} \end{array}$$

可交换。这里的竖直箭头是赋予 F 严格幺半函子结构的典范等价。

命题 A.7。 在*A.6* 的情形下，态射 η_F 和 ε_F 构成图表 m

$$\begin{array}{ccccccccc} F(X) & \xrightarrow{\simeq} & F(\mathbb{1} \otimes X) & \xrightarrow{F(\eta \otimes X)} & F(X \otimes Y \otimes X) & \xrightarrow{F(X \otimes \varepsilon)} & F(X \otimes \mathbb{1}) & \xrightarrow{\simeq} & F(X) \\ {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle\simeq}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ F(X) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{1} \otimes F(X) & \xrightarrow{\eta_F \otimes F(X)} & F(X) \otimes F(Y) \otimes F(X) & \xrightarrow{F(X) \otimes \varepsilon_F} & F(X) \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\simeq} & F(X) \end{array}$$

交换。这里的竖直映射是赋予 F 严格对称幺半函子结构的典范等价。

证明。这是一个关于双范畴之间的严格对称幺半函子的公理的基本观察。□

推论 A.8. 设 F :$\mathcal{C}$ $\to$ D 是对称幺半双范畴之间的严格幺半函子。若$\mathcal{C}$ 中的一个对象 X 可对偶，其对偶数据为 (η, ε)，则$F(X)$ 可对偶，其对偶数据为(η_F, ε_F)。

A.9. 若一族 $F_i : \mathsf{C} \to \mathsf{D}_i, i \in I$ 是双范畴之间的函子，我们称其联合检测恒等映射，如果满足以下条件：C 中的一个态射 $g : X \to X$ 等价于恒等映射，当且仅当对于所有 $i \in I$， $F_i(g)$ 都等价于恒等映射。

推论 A.10. 设 $F_i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_i, i \in I$ 为对称幺半双范畴之间的一族严格幺半函子，并且它们联合检测恒等态射。那么，对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中是可对偶的，具有对偶数据 η 和 ε，当且仅当对于所有 $i \in I$ $F_i(X)$，它都是可对偶的，且具有对偶数据 η_{F_i} 和 ε_{F_i}。

引理 A.11. 设 $\mathcal{C}$ 为一个对称幺半双范畴，并假设存在等价关系 $\alpha : X \xrightarrow{\sim} Y$ 和 $\alpha' : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ 以及可交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{\eta_X} & X \otimes X' \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha \otimes \alpha'} \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \otimes Y' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X' \otimes X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{1} \\ {\scriptstyle \alpha' \otimes \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ Y' \otimes Y. & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & \mathbb{1} \end{array}$$

那么，偶对 (η_X, ε_X) 是 X 的对偶数据，当且仅当 (η_Y, ε_Y) 是 Y 的对偶数据。

证明。考虑这个可交换图表。

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X \otimes X} & X \otimes X' \otimes X & \xrightarrow{X \otimes \varepsilon_X} & X \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha \otimes \alpha' \otimes \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y \otimes Y]{} & Y \otimes Y' \otimes Y & \xrightarrow[Y \otimes \varepsilon_Y]{} & Y. \end{array}$$

显然，当且仅当底部的水平复合等价于恒等映射时，顶部的水平复合才等价于恒等映射。同样，复合 $(\varepsilon_X \otimes X') \bigcirc (X' \otimes \eta_X)$ 等价于恒等映射，当且仅当 $(\varepsilon_Y \otimes Y\prime) \bigcirc (Y\prime \otimes \eta_Y)$ 等价于恒等映射。□

引理 A.12。 设 $\mathcal{C}$ 是一个闭对称幺半双范畴，且 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个可对偶化对象。那么

$$\varepsilon_X : \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}) \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}^t} \mathbb{1}$$

and

$$\eta_X : \mathbb{1} \xrightarrow{(\varepsilon_X)^t} \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}) \otimes X, \mathbb{1}) \simeq X \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})$$

是 X 的一个对偶数据。在这两种情况下，下标 $(_)^t$ 均表示相对于 $_ \otimes X \dashv \mathrm{Hom}(X, _)$ 伴随的转置。

证明。 令 $\tilde{\eta}_X : \mathbb{1} \to X \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})$ 和 $\tilde{\varepsilon}_X : \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}) \otimes X \to \mathbb{1}$ 为对偶数据。于是我们断言 $\tilde{\eta}_X \simeq \eta_X$ 以及 $\tilde{\varepsilon}_X \simeq \varepsilon_X$ 由此，结论可由引理 A.11得出。事实上，显然 $\tilde{\varepsilon}_X$ 和 ε_X 均为 $\mathrm{id} : \mathrm{Hom}(X, \mathbb{1}) \to \mathrm{Hom}(X, \mathbb{1})$ 的转置，因此等价。由构造， η_X 通过 ε_X 对应于 $\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, X \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}) \otimes X, \mathbb{1})) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}) \otimes X, \mathbb{1})$。此外 ε_X 通过……对应于恒等映射

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}) \otimes X, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1}), \mathbb{1})) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, X).$$

这意味着， η_X 通过……对应于恒等映射

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, X \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

因此 $\tilde{\eta}_X \simeq \eta_X$。 □

参考文献

[Ayo07a] Joseph Ayoub. 《动机世界中的格罗滕迪克六种运算与消失循环形式体系》I. Astérisque, (314):x+466 页. (2008), 2007.[Ayo07b] Joseph Ayoub. 《动机世界中的格罗滕迪克六种运算与消失循环形式体系》II. Astérisque, (315):vi+364 页. (2008), 2007.[Ayo14] Joseph Ayoub. 《étale实现与格罗滕迪克运算》. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 47(1):1–145, 2014.[Bé67] Jean Bénabou. 《双范畴导论》. 载于《中西部范畴研讨班报告》，第1–77页. Springer，柏林，1967.[Bac21] Tom Bachmann. 《étale动机稳定同伦论中的刚性》. Algebr. Geom. Topol., 21(1):173–209, 2021.[BBD82] A. A. Be˘ılinson、J. Bernstein 和 P. Deligne. 《反常层》. 载于《奇异空间上的分析与拓扑》I（Luminy，1981），《Astérisque》第100卷，第5–171页. 法国数学会，巴黎，1982.[Bei16] A. Beilinson. 《可构造层是全纯的》. Selecta Math. (N.S.), 22(4):1797–1819, 2016.[BKV22] Federico Binda、Hiroki Kato 和 Alberto Vezzani. 《关于环面簇中完全交的 p 进权-单值猜想》，2022.[CD16] Denis-Charles Cisinski 和 Frédéric Déglise. 《étale 动机》. Compos. Math., 152(3):556–666, 2016.[CD19] Denis-Charles Cisinski 和 Frédéric Déglise. 《混合动机的三角范畴》. Springer 数学专著. Springer，Cham，2019.[Cis21] Denis-Charles Cisinski. 《交理论中的上同调方法》. 《数学讲义》，2021.[Del77] P. Deligne. 《étale上同调》，《数学讲义》第569卷. 施普林格出版社，柏林，1977. 布瓦-马里代数几何研讨班 SGA 4 1 2.[Del80] Pierre Deligne. 《韦伊猜想》II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (52):137–252, 1980.[HK18] Annette Huber 和 Guido Kings. 《交换群概形族的多对数》. J. Algebraic Geom., 27(3):449–495, 2018.[HS21] David Hansen 和 Peter Scholze. 《相对反常性》，2021.[Ill94] Luc Illusie. 《局部单值定理札记》. 第223号，第9–57页. 1994. pp-进周期（Bures-sur-Yvette，1988）.[JY21a] Fangzhou Jin 和 Enlin Yang. 《动机的 Künneth 公式与迹的可加性》. Adv. Math., 376:Paper No. 107446, 83, 2021.[JY21b] Fangzhou Jin 和 Enlin Yang. 《正特征中的动机邻近循环》，2021.[Kha21] Adeel A Khan. 《Voevodsky 关于系数可构造范畴的判据》¯. 预印本，见 https: // www. preschema. com/ papers/ six. pdf , 2021.[KS94] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira. 《流形上的层》，《数学科学基础丛书》第292卷. Springer-Verlag，柏林，1994. 附有 Christian Houzel 撰写的法语章节；为1990年原版的修订重印本.[Lur17a] Jacob Lurie. 《高阶代数》. 预印本，见 https: // www. math. ias. edu/ ~lurie/ papers/ HA. pdf , 2017.[Lur17b] Jacob Lurie. 《高阶拓扑斯理论》. 普林斯顿大学出版社，更新版，见 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf, 2017.

[Lur18] Jacob Lurie. 《谱代数几何》. 预印本，见 https: // www. math. ias. edu/ ~lurie/ papers/ SAG-rootfile. pdf , 2018. [LZ12] Yifeng Liu 和 Weizhe Zheng. 《高阶阿廷叠的增强六种运算与基变换定理》, 2012. [LZ19] Qing Lu 和 Weizhe Zheng. 《一般基底上的对偶性与邻近循环》. 《杜克数学杂志》, 168(16):3135–3213, 2019. [LZ22] Qing Lu 和 Weizhe Zheng. 《范畴迹与相对勒夫谢茨-韦尔迪耶公式》. 《论坛数学：西格玛》, 10:Paper No. e10, 24, 2022. [Rob14] Marco Robalo. 《非交换空间的动机同伦理论》. 博士论文，蒙彼利埃大学，2014. [Rob15] Marco Robalo. 《 K 理论与从动机到非交换动机的桥梁》 . Adv. Math., 269:399–550, 2015.[SGA72] 《代数几何中的单值群》I. 《数学讲义》第288卷. Springer-Verlag，柏林-纽约，1972. 布瓦-马里代数几何研讨班1967–1969（SGA 7 I），由 A. Grothendieck 主编，与 M. Raynaud 和 D. S. Rim 合作编写.[SGA73a] 《代数几何中的单值群》II. 《数学讲义》第340卷. Springer-Verlag，柏林-纽约，1973. 布瓦-马里代数几何研讨班1967–1969（SGA 7 II），由 P. Deligne 和 N. Katz 主编. [SGA73b] 《拓扑斯理论与概形的étale上同调》第3卷. 《数学讲义》第305卷. Springer-Verlag，柏林-纽约，1973. 布瓦-马里代数几何研讨班1963–1964（SGA 4），由 M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 主编，与 P. Deligne 和 B. Saint-Donat 合作编写. [SP09] Christopher John Schommer-Pries. 《二维扩张拓扑场论的分类》. ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2009. 论文（博士）——加州大学伯克利分校. [Sta22] Stacks项目作者. Stacks项目. https://stacks.math.columbia.edu, 2022. [Suz82] 铃木通夫. 《群论》I, 《数学科学基础丛书》第247卷. Springer-Verlag，柏林-纽约，1982. 作者由日文译出. [Tem11] Michael Temkin. 《相对黎曼-扎里斯基空间》. Israel J. Math., 185:1–42, 2011.[Voe96] V. Voevodsky. 《概形的同调》. Selecta Math. (N.S.), 2(1):111–153, 1996.[Voe98] Vladimir Voevodsky. 《$\mathbb{A}^1$-同伦论》. 载于《国际数学家大会论文集》第I卷（柏林，1998）, Extra Vol. I，第579–604页，1998.