arXiv:2305.03426v1 [math.DS] 5 May 2023

R-迭代函数系统及其吸引子

Nguyen Viet Hung、Mai The Duy 和 Vu Thi Hong Thanh

2023年5月8日

摘要

本文介绍了一类新的迭代函数系统（IFS），称为 R-迭代函数系统，其中包含旋转/反射映射和压缩映射。对 R-迭代函数系统的研究，受到近期通过加入其他类型的映射来丰富迭代函数系统这一研究方向的启发。本文考察了 R-迭代函数系统的半吸引子和紧不变集的存在性与性质，以及 R-迭代函数系统的极小不变集类。本文还给出了一个熟知的情形：它是 R-迭代函数系统的不变集，却不是任何迭代函数系统的不变集。

关键词： 等距变换。迭代函数系统。混沌游戏。吸引子

数学主题分类 主要： 28A80；次要：37B55·68R15

1 引言

分形在生物学、计算机图形学、量子物理学以及其他若干应用科学领域中有着广泛的应用 [Bar14]。尤其是，分形在应用科学的多个课题中具有重要意义。因此，研究不变集是否存在，广义而言，研究不变集的类别，或寻找构造不变集的方法，一直是世界各地许多数学家感兴趣的问题。迭代函数系统（简称 IFS）是一种生成不变集，尤其是精确自相似分形的形式化方法，其基础是 Hutchinson 的工作 [Hut81], ，并由 Barnsley 推广 [Bar14]。为了拓展分形集，迭代函数系统以不同方式得到了扩展。例如，人们不再考虑有限个压缩映射构成的系统，而是考虑无限系统或可数个压缩映射（[BM14], [Mau95]）。另一方面，人们不再只研究度量空间上的映射（[KCCH 19]），也可以研究定义在某类扩张空间上的映射，例如 b-度量、伪度量、拟度量.....；或者用其他压缩条件取代 Banach压缩，例如 φ-压缩、 ψ-压缩.....（[PS20]），从而获得许多令人振奋的结果。特别是近年来，随着 IFS 概念的拓展，出现了一个新的研究方向：通过添加其他类型的映射（而非 Banach压缩映射）来丰富 IFS。具体而言，K. Lesniak 和 N. Snigireva 在 [LS22] 中考察了这样的情形：IFS $\mathcal{F}$ 是有限个 Banach压缩映射构成的族，而 $\mathcal{G}$ 是一个单元素集合，其中的元素是周期对称变换（即某次迭代后成为恒等映射的等距变换），且具有不动点。粗略地说， [LS22] 的主要结果表明，在所考虑的情形下，

半吸引子$A^*_{\mathcal{F}\cup\mathcal{G}}$ 事实上是某些迭代函数系统的吸引子，而这些迭代函数系统以某种方式与 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$有关。此外，K. Lesniak 和 N. Snigireva 证明，半吸引子$A^*_{\mathcal{F}\cup\mathcal{G}}$ 可以通过著名的混沌游戏算法重构。此后，为了引出 K. Lesniak 和 N. Snigireva 的近期论文，F. Strobin 在 [Str21]中研究了由某些其他迭代函数系统$A^*_{\mathcal{F}\cup\mathcal{G}}$ 所丰富的迭代函数系统 $\mathcal{F}$ 的半吸引子 $\mathcal{G}$的性质。他们扩展了这一框架。在他们的主要结果中，他们不再采用单个周期等距变换，而是认为 $\mathcal{G}$ 只是由非扩张映射构成的迭代函数系统。他还放宽了迭代函数系统 $\mathcal{F}$ 中映射的压缩条件，并允许 $\mathcal{F}$ 为无限集。他们利用所提出的方法证明，Vince 提出的所谓下转移吸引子是丰富迭代函数系统的半吸引子。

在初始阶段，迭代函数系统被定义为完备度量空间上的有限个压缩映 X，而迭代则被定义为这些压缩映射的顺序复合，其中每个映射在每次迭代中都有非零的概率被选用。基于这一概念以及著名的巴拿赫不动点定理 [Ban22], ，Hutchinson 证明，对于完备度量空间 X，这样一个函数系统 $\{f_1, ..., f_n\}$ 存在唯一的闭有界集 F，满足

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(F).$$

集合 F 称为该迭代函数系统的不变集或吸引集（有时也称为分形集）。迭代函数系统作为一种统一的方法被引入，用于生成一大类分形。

为了丰富初始的迭代函数系统，沿着通过添加其他类型的映射来扩展迭代函数系统初始概念的方向，正如本文中的 [LS22] 和 [Str21], 所做的那样，我们引入一类同时包含旋转/反射映射和压缩映射的迭代函数系统，记为 R-迭代函数系统。因此，我们不再像 [LS22], 中那样仅向迭代函数系统添加一个等距映射，而是向迭代函数系统添加一个由有限个等距映射组成的族。我们研究以下问题：关于迭代函数系统的半吸引子和不变集，我们能够得出哪些结论？我们还给出了一个熟知的例子，它是 R-迭代函数系统的不变集，但不是任何迭代函数系统的不变集。

本文其余部分结构如下。首先介绍 R-迭代函数系统的概念及其例子。随后，我们证明 R-迭代函数系统的半吸引子和不变集的存在性及其性质。在这方面，我们证明，迭代函数系统的不变集类是 R-迭代函数系统极小不变集类的子集。新迭代函数系统的极小不变集是一个半吸引子。最后，我们展示 R-迭代函数系统存在一些极小不变集，它们并非任何迭代函数系统的不变集。我们还通过若干与经典分形相关的例子阐释主要结果，例如由两个映射构成的谢尔宾斯基三角形和康托尔靶集。

2 主要定理

本文中，标准字母 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}^d$、$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^*$ 分别表示实数集、所有 d元实数元组的集合（d 为正整数）、所有非负整数的集合以及所有正整数的集合。

给定一个度量空间 X，记 2^X、$\mathcal{K}(X)$ 和 $C_b(X)$ 分别为 X，的所有子集、 X，的所有非空紧子集以及 X，的所有非空闭有界子集所构成的超空间。空间 $\mathcal{K}(X)$ $C_b(X)$ 将被视为赋予豪斯多夫–庞培尤度量的度量空间。众所周知，当 X 完备时，$\mathcal{K}(X)$ 和 $C_b(X)$ 也是完备的。对于 $A \subset X$，记 clA 为集合 $A.$ 的闭包。

定义 1 设 (X, d) 为一个度量空间，且映射 $f: X \to X$。

i) 如果存在一个数 $\alpha \in [0, 1)$，使得对于任意 x、$y \in X$，下式均成立，则称映射 f 是 X 上的 *Banach*压缩:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

α 被称为 f 的压缩比。

ii) 保持点之间距离不变的映射 f 称为等距映射。这意味着如果 $x, y \in X$，那么

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

定义 2 我们将度量空间 $X.$ 上的任意有限个压缩自映射组成的族 $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ 称为迭代函数系统（简称 *IFS*）。如果 $\mathcal{F}$ 是一个迭代函数系统，那么

i）我们用 $F_{\mathcal{F}}$ 表示作用于 $\mathcal{F}$ 的 *Hutchinson*算子，即映射 $F_{\mathcal{F}}$： $\mathcal{K}$（X）$\to\mathcal{K}$（X）定义如下:

$$\forall A \subset X : F_{\mathcal{F}}(A) = \bigcup_{f_i \in \mathcal{F}} f_i(A).$$

~ ~*ii)* 用 $F_{\mathcal{F}}$ 表示到 $\mathcal{F}$ 的弱*Hutchinson*算子，即由下式定义的映射 $F_{\mathcal{F}}$: $2^X \to 2^X$:

$$\forall A \subset X : \widetilde{F}_{\mathcal{F}}(A) = cl(\bigcup_{f_i \in \mathcal{F}} f_i(A)).$$

我们还将 F^n 记作 $F.$ 的 n 次复合。

我们回顾一下Kuratowski极限的定义（例如，参见 [Bee93], [LM00]中的详细讨论）。

定义 3 设 (S_n) 是度量空间 $X.$ 的子集序列。(S_n)的上 *Kuratowski* 极限定义为。

$$Ls(S_n) := \{y \in X : y = \lim_{n\to\infty} x_n \ for \ some \ sequence \ (x_n)$$

$$so \ that \ x_n \in S_n \ for \ infinitely \ many \ n \in \mathbb{N}\}$$

以及 (S_n) 的下*Kuratowski*极限定义为

$$Li(S_n) := \{y \in X : y = \lim_{n\to\infty} x_n \ for \ x_n \in S_n \ for \ all \ n \in \mathbb{N}\}.$$

如果 $Ls(S_n) = Li(S_n)$，那么它们的共同值记作 $Lt(S_n)$，称为(S_n)的*Kuratowski*极限。

现在我们回顾 IFS 半吸引子的概念。详情请参阅 [LM00]或 [LS22] 。

定义 4 设迭代函数系统 $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ 由一组连续映射组成， $F_{\mathcal{F}}$为其关联的 *Hutchinson*算子。非空闭集 $A^* \subset X$ 是

i) 若 $\mathcal{F}$ 是 不变集，且 $F_{\mathcal{F}}(A^*) = A^*$;

ii) 若对于所有非空有界闭集 $S \subset X$， $F^n_{\mathcal{F}}(S) \to A^*$，且该收敛在 *Hausdorff* 度量下成立，则它是 $\mathcal{F}$的 *Hutchinson*吸引子；

iii) 若它是 半吸引子，且 $\bigcap_{x\in X} Li(F^n_{\mathcal{F}}(\{x\})) = A^*$;

iv) 一个 极小不变集 若对于 $\mathcal{F}$ 的任意不变集 S， $A^* \subset S$ 且 $\mathcal{F}$.

关系 不变集、吸引子与半吸引子之间的关系总结如下 .

定理 1 *([MS03])* 设 $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ 为一个迭代函数系统，且 $A^* \subset X$ 为一个非空闭集。

$\mathcal{F}$ 的 *Hutchinson* 吸引子是唯一的非空、有界闭不变集。

$\mathcal{F}$ 的半吸引子 A^* 是最小的不变集，即对于每个非空闭不变集 $C.$，都有 $A^* \subset C$

$\mathcal{F}$ 的 *Hutchinson* 吸引子是一个紧半吸引子。

iv) 如果 A^* 是 $\mathcal{F}$ 的半吸引子，那么对于每个非空 $S \subset A^*.$，都有 $LtF^n(S) = A^*$

将 C 记作 $\mathbb{R}^d$ 上满足 $T(0) = 0.$的一组等距映射 T

定义 5 *R*-迭代函数系统是由属于 C 的 m 个等距映射 R_1，...， R_m 和 n 个压缩映射 f_1，...， f_n （m， $n > 0$）在 $\mathbb{R}^d$ 上组成的函数系统，并将此 *R*-迭代函数系统记为 $\mathcal{F}_{\mathcal{R}} = \{R_1, ..., R_m, f_1, ...f_n\}.$

对于完备度量空间上的有限压缩映射的迭代函数系统，该迭代函数系统存在唯一的不变集。但是，对于每个 R-迭代函数系统，我们得到以下结果。

定理 2 *R*-迭代函数系统 $\mathcal{F}_{\mathcal{R}} = \{R_1, ..., R_m, f_1, ..., f_n\}$ 存在无穷多个紧不变集。

证明。 令 r_j为 f_j的压缩比，其中 $j = 1, ..., n$。 对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$， 有

$$||f_j(x)|| \leq ||f_i(0)|| + ||f_j(x) - f_j(0)|| \leq ||f_j(0)|| + r_j||x - 0|| = ||f_j(0)|| + r_j||x||.$$

设 $\lambda_0 = \max\{\frac{||f_j(0)||}{1-r} : j = 1, 2, ..., n\}$, 其中 $r = \max\{r_1, ..., r_n\}.$。那么，对每个 $j \in \{1, ..., n\}$, $f_j(S(\lambda)) \subseteq S(\lambda)$，其中 $S(\lambda)$是以 0 为中心、半径为$\lambda > \lambda_0$的闭球。同时，对于每个 $i \in \{1, 2, ..., m\}$, 都有 $R_i(S(\lambda)) = S(\lambda)$。因此，对每个 $\lambda > \lambda_0$ ，以 0 为中心、半径为 λ 的闭球都是 R-迭代函数系统 $\{R_1, ..., R_m, f_1, ..., f_n\}.$ 的不变集。由此可知，该 $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}.$ □存在无穷多个紧不变集

对于 $k \in \mathbb{N}$， 令 $R_u = R_{u_0} \circ R_{u_1} \circ ... \circ R_{u_k}$， 其中 $u = u_0...u_k$ 且 $u_i = u_i^0 u_i^1 ...u_i^l$, $u_i^j \in \{1, ..., m\}$。

定理 3 存在 *R*-迭代函数系统 $\{R_1, ..., R_m, f_1, ..., f_n\}.$ 的极小不变集 X_0

证明。首先，我们证明对于任意有限指标 $u_0, ..., u_k$，其中 $u_i = u_i^0 u_i^1 ... u_i^l$, $u_i^j \in \{1, ..., m\}$ 且 $j_0, ..., j_k \in \{1, ..., n\}$.，极限 $\lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0)$ 存在

事实上，我们有

$$||R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(x) - R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0)|| \leq r^k \lambda_0$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$，其中 λ_0 是定理2的证明中定义的一个正常数，并且 $r =$ 最大值$\{r_i : i \in \{j_0, j_1, ..., j_k\}\}$。因此，对于任意 $p \in \mathbb{N}$，令 $x = R_{u_{k+1}} f_{j_{k+1}} ... R_{u_{k+p}} f_{j_{k+p}}(0)$，则

$$\begin{aligned} &||R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_{k+p}} f_{j_{k+p}}(0) - R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0)| = \\ &= ||R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(x) - R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0)|| \leq r^k \lambda_0. \end{aligned}$$

根据柯西收敛准则，极限 $\lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0)$ 存在。

现在令 X_0 为集合的闭包

$$X^* = \{\lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0) : u_k = i_k^0 ... i_k^{n_k} \in \bigcup_{t=0}^{\infty} \{1, ..., m\}^t\}.$$

于是，对于所有 $i \in \{1, ..., m\}$, $R_i(X^*) \subseteq X^*$, $f_j(X^*) \subseteq X^*$ 对于所有 $j \in \{1, ..., n\}$，并且 $X^* \subset [\bigcup_{i=1}^{m} R_i(X^*)] \bigcup [\bigcup_{j=1}^{n} f_j(X^*)]$。因此有

$$X_0 = [\bigcup_{i=1}^{m} R_i(X_0)] \bigcup [\bigcup_{j=1}^{n} f_j(X_0)].$$

这意味着 X_0 是 R-迭代函数系统 $\{R_1, ..., R_m, f_1, ..., f_n\}$.的一个不变集

现在，我们将证明，对于任意闭有界集，$X_0 \subseteq X$

$$X = [\bigcup_{i=1}^{n} R_i(X)] \bigcup [\bigcup_{j=1}^{m} f_j(X)].$$

事实上，令 $y = \lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0) \in X_0$，则 $y \in X$ 当

$$\lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0) = \lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(x)$$

对于任意 $x \in X$。

□

注 1 根据定理 *1* 和定理 *3*，*R*-迭代函数系统 $\mathcal{F}_{\mathcal{R}} = \{R_1, ..., R_m, f_1, ..., f_n\}$ 有一个紧半吸引子。

上述证明还提供了一种构造极小不变集的方法。该方法也用于证明以下结果，以及绘制 R-迭代函数系统的示例。

以下结果给出了一个必要条件：任意 R-迭代函数系统的每个极小不变集都是某个迭代函数系统的吸引子。现在，令

$$G =< R_1, ..., R_n >= \{R_u : u \in \bigcup_{t=0}^{\infty} \{1, ..., m\}^t\}.$$

定理 4 如果 G 是由等距映射构成的有限群，那么 *R*-迭代函数系统 $\{R_1, ..., R_m,\ f_1, ..., f_m\}$ 的极小不变集 X_0 是某个迭代函数系统的吸引子。

证明。 设有限群 G 由元素组成 $\{g_1, ..., g_l\}$. 显然，恒等映射 $id \in G$. 考虑一组 $l \times n$ 映射定义如下$\{g_i \circ f_j : (i, j) \in \{1, ..., l\} \times \{1, ..., n\}\}$, 则该函数系统是一个迭代函数系统。令 X_1 为该迭代函数系统的一个不变集。根据 John E. Hutchinson 的结果[Hut81], X_1 是集合的闭包

$$X^* = \{\lim_{k\to\infty} g_{i_0} f_{j_0} g_{i_1} f_{j_1} ... g_{i_k} f_{j_k}(0) : i_0, i_1, ..., i_k \in \{1, ..., l\}, j_0, j_1, ..., j_k \in \{1, ..., n\}\}$$

$$= \{\lim_{k\to\infty} R_{u_0} f_{j_0} R_{u_1} f_{j_1} ... R_{u_k} f_{j_k}(0), u_k = i_k^0 ... i_k^{n_k} \in \bigcup_{t=0}^{\infty} \{1, ..., m\}^t, j_0, j_1, ..., j_n \in \{1, ..., n\}\}$$

在定理 2 中定义。因此 $X_1 = X_0$, 其中 X_0 是 R-迭代函数系统 $\{R_1, ..., R_m, f_1, ..., f_n\}$. □的极小不变集

注 2 因此，关于迭代函数系统 $\{f_1, ..., f_n\}$ 的不变集是 *R*-迭代函数系统 $\{id, f_1, ..., f_n\}$的极小不变集，其中 id 是恒等映射。因此，我们可以认为 *R*-迭代函数系统类比迭代函数系统类更广。

例 1 在 $\mathbb{R}^2$中，由两个映射组成的 *R*-迭代函数系统的极小不变集

$$\{f_1(z) = e^{i2\pi/3} z, f_2(z) = \frac{z}{2} + 1\}$$

是迭代函数系统的不变集

$$\{f_2(z), f_1 \circ f_2(z), f_1(z) \circ f_1(z) \circ f_2(z)\},$$

也就是说，这种情况下的不变集是谢尔宾斯基三角形，见图 *1*。

例 2 一个分形 n边形是迭代函数系统的不变集 $\{f_k(z) = \lambda z + c_k,\ k = 1, ..., n\}$ 其中存在一个平面旋转，它对各个部分传递作用，并将它们置换成一个 n循环。*Bandt* 和 *Hung* *[BH08]* 证明，任意分形 n边形都与一个自相似集相似

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} f_k(A)$$

其中 $f_k(z) = \lambda z + b^k$ 对于 $k = 1, ..., n$，其中 $b = \cancel{cos}(\frac{2\pi}{n}) + i * \cancel{sin}(\frac{2\pi}{n})$ 且 $|\lambda| < 1$. 现在我们将证明， A 是该 *R*-迭代函数系统的极小不变集

$$\{g(z) = b * z, f_1(z) = \lambda z + 1\}.$$

*In*如定理 *3* 的证明所示，*R*-迭代函数系统的极小不变集

$$\{g(z) = b * z, f_1(z) = \lambda z + 1\}$$

是迭代函数系统 $\{f_k(z) = b^k \lambda z + b^k :\quad k = 1, .., n\}$ 的不变集。最后一个迭代函数系统的不变集与 A. 相同

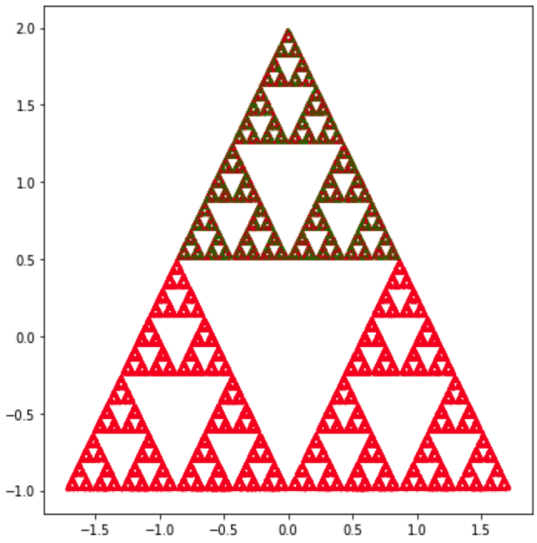

图 1：由两个映射构成的谢尔宾斯基三角形

为了证明所有迭代函数系统不变集构成的类是所有 R-迭代函数系统极小不变集构成的类的真子集，我们首先回顾“康托尔靶集”，见图 2，它是一个满足该条件的例子

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F.$$

“康托尔靶集”是将中三分康托尔集绕一个端点旋转所扫过的集合。因此，该集合是在极坐标下由下式给出的平面集合：

$$C = \{(r, \theta) : r = ||x|| \ x \in F, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

其中， F 是中三分康托尔集。

现在，我们将证明，康托尔靶集是由 R-迭代函数系统诱导的不变集，但不是任何迭代函数系统的不变集。

命题 1 *存在一些 R-迭代函数系统，其极小不变集不是任何由 Banach压缩映射组成的迭代函数系统的不变集。*

证明。在 $\mathbb{R}^2$ 中，令 g 为 $\alpha.2\pi$ 的旋转，其中 α 是一个无理数。考虑 R-迭代函数系统 $\left\{g; \quad f_1(x,y) = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}, 0\right); \quad f_2(x,y) = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}, 0\right) + \left(\frac{2}{3}, 0\right)\right\}$。则该 R-迭代函数系统的极小不变集 X_0 是一族不可数的离散圆的并集 C_{x_c}，这些圆的圆心为 $O(0,0)$，半径为 x_c，其中 x_c 属于康托尔集 X，即 $X_0 = \bigcup_{x_c \in X} C_{x_c}$。根据 Kronecker 的稠密性定理，[Haw13]，$\{g^n(C_{x_c})\}$ 的闭包是一个圆 C_{x_c}，其中 $n = 1$ 为 1，2，.....。由于 X_0 是闭的，我们得到 $C_{x_c} \subset X_0$.

假设存在一个迭代函数系统 $\{f_1, ..., f_n\}$，使得 $X_0 = \bigcup_{i=1} f_i(X_0)$。现在，取 $||x_0|| =$ 最大值 $arg\{||x|| : \ x \in X_0\}$. 于是 $C_{x_c} \subset X_0 \subset D_{x_0}$，其中 D_{x_0} 是以$O(0, 0)$为圆心、半径为 $||x_0||$. 的圆盘。因此，对于所有 $i = 1, ... n.$， $f_i(C_{x_0}) \subset f_i(X_0) \subset f_i(D_{x_0})$

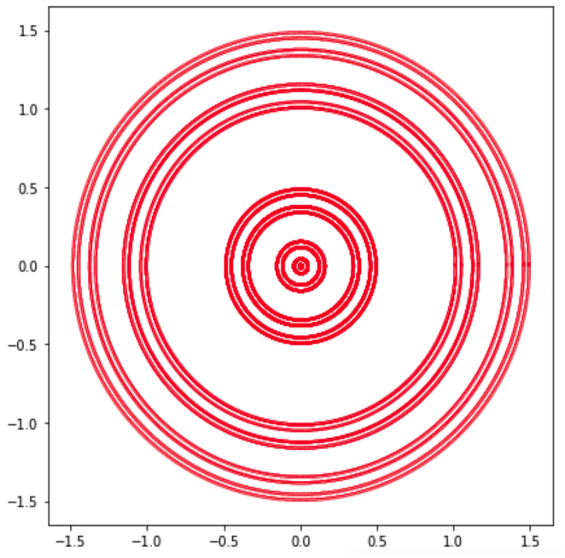

图 2：康托尔靶集 p。104 [Fal04]

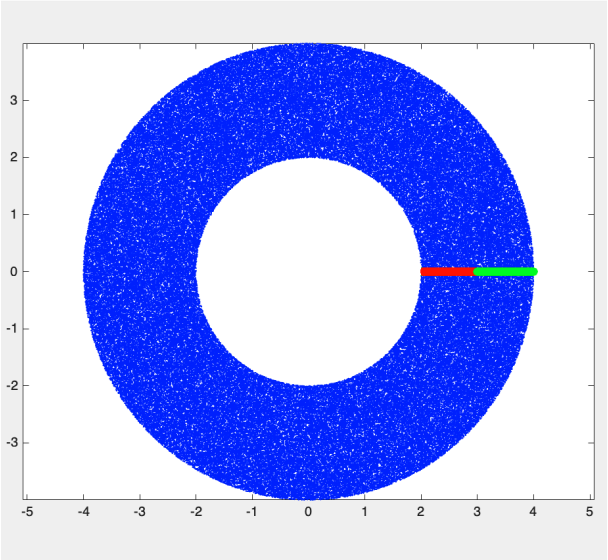

图 3：这个“环”是 R-迭代函数系统$\left\{g\text{的最小不变集};\quad f_1(x,\quad y)=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3},\quad 0\right)+(1,\quad 0);\quad f_2(x,\quad y)=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3},\quad 0\right)+(2,\quad 0)\right\}$

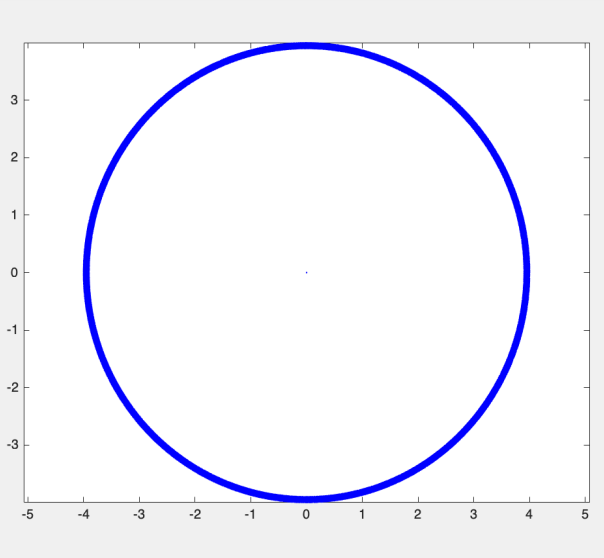

图 4：圆是 R-迭代函数系统$\left\{g\text{的最小不变集；}\quad f_1(x,\ y)=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3},\ 0\right)+(2/3,\ 0)\right\}$

注意，对于任意 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n$，$f_i(D_{x_0})$ 的边界是 D_{x_0} 的边界在 f_i. (1) 下的像的子集

对于任意 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n$，由于 $f_i(C_{x_0})$ 是连通的，$f_i(C_{x_0})$ 只能属于康托尔集中的某个固定 x_i^* 所对应的一个圆 $C_{x_i^*}$。根据 (1)，$f_i(D_{x_0})\subset C_{x_i^*}$. 因此 $f_i(X_0)\subset C_{x_i^*}$.

Therefore, $X_0=\bigcup\limits_{i=1}^{n} f_i(X_0)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{x_i^*}$. This contradict to $X_0=\bigcup\limits_{x_c\in X} C_{x_c}$. □

例 3 与上述证明类似，给定 g 一个带有无理数 α 的 $\alpha.2\pi$ 的旋转，*R*-迭代函数系统的最小不变集

$$\left\{g;\ f_1(x,y)=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3},0\right)+(1,0);\ f_2(x,y)=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3},0\right)+(2,0)\right\}$$

是一个环（图 *3*），且 *R*-迭代函数系统的最小不变集

$$\left\{g;\ f_1(x,y)=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3},0\right)+(2/3,0)\right\}$$

是一个圆（图变态另类*4*）。

3 结论

本文介绍了一类新的迭代函数系统——R-迭代函数系统，它由旋转/反射映射与压缩映射组合而成。在这一类系统中，

存在无穷多个不变集，但每个 R-迭代函数系统都有一个唯一的极小不变集。给定迭代函数系统的任一不变集，也可以成为相应 R-迭代函数系统的极小不变集。值得注意的是，一些对称自相似集可以作为 R-迭代函数系统的不变集，且所需映射数量少于原迭代函数系统。此外，本文还给出了属于这一新类别、但不可能成为任何迭代函数系统不变集的示例。

参考文献

[Ban22] S. Banach. 关于抽象集合中的运算及其在积分方程中的应用。Fundamenta Mathematicae, 3(3):133–181, 1922.[Bar14] Michael F Barnsley. 无处不在的分形。Academic press, 2014.[Bee93] Gerald Beer. 闭集与闭凸集上的拓扑，第 268 卷。Springer Science & Business Media, 1993.[BH08] Christoph Bandt 和 Nguyen Viet Hung. 分形 n-边形及其曼德博集合。Nonlinearity, 21(11), 2008.[BM14] Mar´ıa Fernanda Barrozo 和 Ursula Molter. 度量空间中的可数压缩映射：不变集与测度。Central European Journal of Mathematics, 12:593–602, 2014.[Fal04] Kenneth Falconer. 分形几何：数学基础与应用。John Wiley & Sons, 2004.[Haw13] Thomas Hawkins. Frobenius 数学的背景。Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, 2013.[Hut81] John E. Hutchinson. 分形与自相似性。Indiana University Mathematics Journal, 30(3):713–747, 1981.[KCCH19] Sudesh Kumari, Renu Chugh, Jinde Cao, 和 Chuangxia Huang. b-度量空间中广义多值迭代函数系统的多重分形及其应用。Mathematics, 7(10):967, 2019.[LM00] Andrzej Lasota 和 Jozef Myjak. 多值函数的吸引子。Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 48(3):319–334, 2000.[LS22] Krzysztof Le´sniak 和 Nina Snigireva. 融入对称性的迭代函数系统。Constructive Approximation, 56(3):555–575, 2022.[Mau95] R Daniel Mauldin. 无限迭代函数系统：理论与应用。载于《分形几何与随机性》，第 91–110 页。Springer, 1995.[MS03] J´ozef Myjak 和 Tomasz Szarek. 迭代函数系统与马尔可夫算子的吸引子。载于《Abstract and Applied Analysis》，第 2003 卷，第 479–502 页。Hindawi, 2003.

[PS20] SC Priyanka 和 R Shrivastava. 由 Kannan 压缩映射构成的不完备度量空间中的迭代函数系统。土耳其计算机与数学教育期刊 *(TURCOMAT)*, 11(3):2204–2214, 2020.

[Str21] Filip Strobin。用非扩张映射丰富的压缩型迭代函数系统。数学研究成果, 76(3):153，2021。

Nguyen Viet Hung，**具体地址**
电子邮箱地址：nvh0@yahoo.com

Mai The Duy， FPT Education，**具体地址**电子邮箱地址：
duymt2@fe.edu.vn 或 vnwfpb@fgmail.com电话号码</style：
(+84)902516790

Vu Thi HongThanh， Department of Mathematics， Vinh University， 182 Le Duan, Vinhcity， Nghe An province电子邮箱地址：thanhvth@vinhuni.edu.vn