arXiv:2305.03430v1 [math.NA] 5 May 2023

双调和界面问题的任意阶重构不连续逼近

谨以此文献给史忠植教授

陈岩、李若、刘启成

Abstract. 本文提出一种任意阶间断伽辽金有限元方法，用于求解非拟合网格上的双调和界面问题。逼近空间通过补片重构过程构造，每个单元至多具有一个自由度。离散问题基于对称内罚方法，并采用 Nitsche 技术弱施加跳跃条件。允许 C^2光滑界面以非常一般的方式与单元相交，而补片重构自然保证界面附近的稳定性。我们证明了能量范数和 L^2 范数下的最优 $a\ priori$ 误差估计。数值结果验证了理论分析。**关键词**：双调和界面问题，补片重构，间断伽辽金方法

1. Introduction

本文研究双调和界面问题。双调和算子是一种四阶椭圆算子，常见于薄板弯曲问题以及离子输运与分布问题中 [19, 40, 33]。近年来，已有许多成功提出并应用于求解双调和问题的有限元方法，参见例如 [17, 35, 11, 7, 25]。双调和界面问题源于复合材料背景，其中物理区域被一个界面分隔开，且系数在该界面两侧不连续。已有一些研究致力于处理这类问题 [36, 31, 7, 9, 10]。

界面问题的有限元方法可分为两类：贴体方法和非贴体方法。贴体方法基于与界面对齐的网格构造。这类方法天然适合处理界面处的不连续性。然而，生成高质量的贴体网格可能是一项复杂且耗时的任务 [29, 37, 32]。在非贴体方法中，网格独立于界面，界面可以以非常一般的方式与单元相交。因此，非贴体方法在求解界面问题方面受到了更多关注。

2002年，A. Hansbo 和 P. Hansbo 提出了 Nitsche扩展有限元方法（XFEM），用于求解二阶椭圆界面问题。该方法的核心思想是在界面两侧分别构造两个有限元空间，并采用 Nitsche 型罚项以弱形式施加跳跃条件。基于这一思想的非拟合有限元方法有时也称为切割有限元方法（CutFEM）。此后，这些方法得到进一步发展，并应用于多种界面问题，包括 Stokes界面问题、H(div) 和 H(curl) 椭圆界面问题、弹性界面问题等。关于最新进展，请参阅 [6, 14, 18, 20, 15, 24, 32]及其中的参考文献。

对于双调和界面问题，Y. Cai 等人在 [9] 和 [10]中提出了两种 Nitsche-XFEM。在 [9], 中，作者采用所谓的修正 Morley 有限元来近似界面附近的解，并证明了能量范数下最优的先验误差估计。在 [10], 中，他们基于 Ciarlet–Raviart 公式，利用 $(P_2,\ P_2)$ 有限元推导了一种混合方法。由于双调和算子的阶数较高，实现高阶协调空间较为困难。因此，我们旨在采用间断 Galerkin（DG）方法，求得双调和界面问题的数值解。

本文提出一种任意阶不连续 Galerkin CutFEM，用于求解具有 a C^2-光滑界面的双调和问题。该方法基于通过邻域重构过程构造的重构逼近空间。此方法为每个单元构造一个单元邻域，并求解局部最小二乘拟合问题，以获得局部高阶多项式 [29, 26, 28, 30]。利用这一新空间，我们在对称内罚不连续 Galerkin（IP DG）框架下设计了双调和问题的离散格式。

基于非拟合网格的罚项方法中，界面附近的小切割可能会对离散系统的稳定性产生不利影响，并阻碍收敛。为消除这些影响，必须采用一些稳定化策略，例如幽灵罚项方法和扩展方法，相关示例见 [23, 5, 21, 4, 8, 38] 。借助重构，我们可以实现任意精度的逼近，且

每个内部单元只需一个自由度。此外，我们允许界面以非常一般的方式与单元相交，并通过为其选择合适的单元邻域，自然保证切割单元的稳定性，无需额外的稳定化方法。

我们分别证明了能量范数和 L^2 范数下的最优收敛率。我们进行了数值实验，以验证理论分析，并表明我们的算法易于实现且能够达到高阶精度。

本文其余部分的组织如下。在第2节中，我们介绍双调和界面问题，并给出有关 Sobolev空间 和剖分的基本记号。本节还回顾两个常用的不等式。在第 3节中，我们建立重构算子及相应的逼近空间。本节还证明了重构的一些基本性质。在第4节中，我们为界面问题定义离散变分形式，并分析能量范数和 L^2 范数下的误差。在第 5节中，我们开展了一些数值算例，以验证理论结果并展示我们的方法所具有的高阶精度。最后，在第 6节给出简要结论。

2. PRELIMINARIES

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2,3)$ 是一个具有 Lipschitz 边界的有界多边形（多面体）区域 $\partial\Omega$。设 Γ是一个 C^2-光滑界面，将区域 Ω 分为两个子区域 Ω_0 和 Ω_1, $\Gamma = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$, 见图 1 。本文考虑以下双调和界面问题

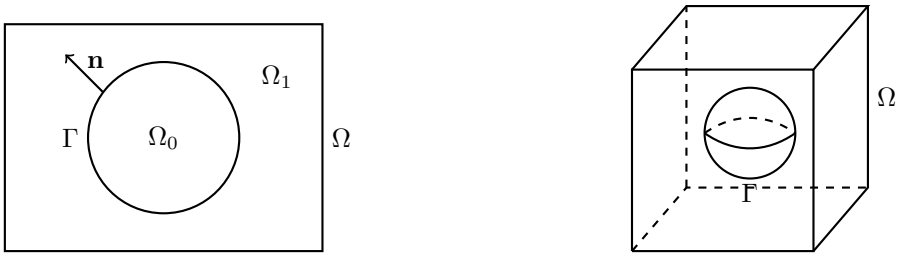


FIGURE 1. 用于 $d = 2$ （左侧）/ $d = 3$ （右侧）的示例区域。

$$
(1)\qquad \begin{cases} \Delta(\beta\Delta u) = f, & \text{in } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ u = g_1,\ \partial_{\mathbf{n}} u = g_2, & \text{on } \partial\Omega, \\ [\![u]\!] = a_1\mathbf{n}_0,\ [\![\nabla u]\!] = a_2, & \\ [\![\beta\Delta u]\!] = a_3\mathbf{n}_0, & \text{on } \Gamma, \\ [\![\nabla(\beta\Delta u)]\!] = a_4, & \end{cases}
$$

其中， β 是 Ω 上的正的常值函数，它可能在界面 Γ 上不连续。 $[\![\cdot]\!]$ 表示跳跃算子，其定义为

$$
(2)\qquad \begin{aligned} [\![v]\!] &:= v|_{\Omega_0}\mathbf{n}_0 + v|_{\Omega_1}\mathbf{n}_1, \quad \text{for scalar-valued function}, \\ [\![\boldsymbol{q}]\!] &:= \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{q}|_{\Omega_0} + \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{q}|_{\Omega_1}, \quad \text{for vector-valued function}, \end{aligned}
$$

其中， $\mathbf{n}_0$ 和$\mathbf{n}_1$ 分别表示 Γ 上从 Ω_0 指向 Ω_1 、从 Ω_1 指向 Ω_0, 的单位法向量。给定有界区域 $D \subset \Omega$, 我们按照标准定义空间 $L^2(D)$ $L^2(D)^d$, 以及具有正则指数 $q \geq 0$ 的空间$H^q(D)$ $H^q(D)^d$。对于 $D_0, D_1 \subset \mathbb{R}^d$, 我们将索伯列夫空间 $H^q(D_0 \cup D_1)$ 定义为 $D_0 \cup D_1$ 中满足 $u|_{D_i} \in H^q(D_i)$ $i = 0,1$ 的函数所构成的空间，其范数和半范数为

$$
\|\cdot\|_{H^q(D_0\cup D_1)} := \left(\sum_{i=0,1} \|\cdot\|^2_{H^q(D_i)}\right)^{1/2}, \quad |\cdot|_{H^q(D_0\cup D_1)} := \left(\sum_{i=0,1} |\cdot|^2_{H^q(D_i)}\right)^{1/2},
$$

分别地。我们假设，在数据 $f, g_1, g_2, a_1, a_2, a_3$ 和 a_4满足某些正则条件时，界面问题 (1) 在 $H^4(\Omega_0 \cup \Omega_1)$ 中存在唯一解。关于详细的正则性结果，请参见 [2] 。

我们用 $\mathcal{T}_h$ 表示将 Ω 剖分为互不相交的开三角形（四面体）的正则拟一致剖分。网格不要求与界面对齐。令 $\mathcal{E}_h$ 表示 $\mathcal{T}_h$ 的所有 $d-1$ 维面组成的集合，并将 $\mathcal{E}_h$ 分解为 $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^b$, 其中 $\mathcal{E}_h^\circ$ 和 $\mathcal{E}_h^b$ 分别为内部面集和边界面集。令

$$
h_K := \operatorname{diam}(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad h_e := \operatorname{diam}(e), \quad \forall e \in \mathcal{E}_h,
$$

并定义 $h := \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$。网格 $\mathcal{T}_h$ 的拟一致性是指存在一个常数 $\nu > 0$ 使得 $h \leq \nu \min_{K\in\mathcal{T}_h} \rho_K$, 其中 ρ_K 是内接于 K的最大球的直径。可以 ge

网格正则性所导出的逆不等式和迹不等式，这些不等式在分析中经常使用。

引理 1. 存在一个常数 C，与网格尺寸 h无关，使得

$$\|v\|^2_{L^2(\partial K)} \leq C\left(h_K^{-1}\|v\|^2_{L^2(K)} + h_K\|\nabla v\|^2_{L^2(K)}\right), \quad \forall v \in H^1(K). \tag{3}$$

引理 2. 存在一个常数 C，与网格尺寸 h无关，使得

$$\|v\|_{H^q(K)} \leq Ch_K^{-q}\|v\|_{L^2(K)}, \quad \forall v \in \mathbb{P}_l(K), \tag{4}$$

其中 $\mathbb{P}_l(K)$ 是定义在 K 上的多项式空间，次数不超过 l。

更多关于这些不等式的详细信息，请参见 [3]。

此外，我们给出与界面相关的记号。对于任意面 $e \in \mathcal{E}_h$ 和任意单元 $K \in \mathcal{T}_h$，定义

$$e^i := e \cap \Omega_i, \quad K^i := K \cap \Omega_i, \quad (\partial K)^i := \partial K \cap \Omega_i, \quad i = 0, 1,$$

并定义 $\mathcal{T}_h^i$ 和 $\mathcal{E}_h^i$ 如（见图 2）

$$\mathcal{T}_h^i := \left\{K \in \mathcal{T}_h \mid |K^i| > 0\right\}, \quad \mathcal{E}_h^i := \left\{e \in \mathcal{E}_h \mid |e^i| > 0\right\}, \quad i = 0, 1.$$

我们分别用 $\mathcal{T}_h^\Gamma$ 和 $\mathcal{E}_h^\Gamma$ 表示被界面 Γ 切割的单元集和面集，

$$\mathcal{T}_h^\Gamma := \{K \in \mathcal{T}_h \mid K \cap \Gamma \neq \varnothing\}, \quad \mathcal{E}_h^\Gamma := \{e \in \mathcal{E}_h \mid e \cap \Gamma \neq \varnothing\}.$$

我们定义 $\mathcal{T}_h^{\backslash\Gamma} := \mathcal{T}_h \backslash \mathcal{T}_h^\Gamma$和 $\mathcal{E}_h^{\backslash\Gamma} := \mathcal{E}_h \backslash \mathcal{E}_h^\Gamma$，并令 $\mathcal{T}^0{}_h{}^\circ := \mathcal{T}_h^0 \backslash \mathcal{T}_h^\Gamma$, $\mathcal{T}^1{}_h{}^\circ := \mathcal{T}_h^1 \backslash \mathcal{T}_h^\Gamma$分别为区域 Ω_0 和 Ω_1, 内所有内部单元的集合。对于任意切割单元 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$，我们定义 $\Gamma_K := K \cap \Gamma$。对于任意单元 K，我们定义

$$\partial K^i := \begin{cases} \partial K, & K \in \mathcal{T}_h^{i,\circ}, \\ (\partial K)^i \cup \Gamma_K, & K \in \mathcal{T}_h^\Gamma, \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

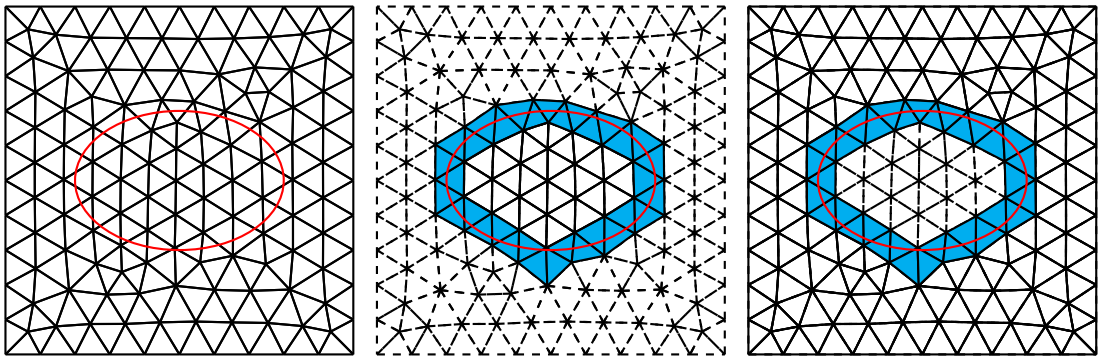


FIGURE 2. 网格 $\mathcal{T}_h$（左）/ $\mathcal{T}_h^0$（中）/ $\mathcal{T}_h^1$（右），单元以蓝色标示。

我们对网格作出一些几何假设，以确保界面能被网格充分解析，这在数值求解界面问题中很常用 [16, 10]。

假设 1. 对于任意被切割的面 $e \in \mathcal{E}_h^\Gamma$, $e \cap \Gamma$ 均为单连通，即界面不会多次与同一个面相交。

假设 2. 对于任意单元 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$，存在两个单元 $K_\circ^0 \in \mathcal{T}^0{}_h{}^\circ, K_\circ^1 \in \mathcal{T}^1{}_h{}^\circ$，使得 $K_\circ^0, K_\circ^1 \in \Delta(K)$，其中 $\Delta(K)$ 表示单元 K 的 *Moore* 邻居，即 $\Delta(K) := \{K' \in \mathcal{T}_h \mid K' \cap K \neq \varnothing\}$.

当网格足够精细时，这些假设总是成立。假设 2 使我们能够定义两个映射 $M^0(\cdot)$ 和 $M^1(\cdot)$，使得对于任意单元 $K \in \mathcal{T}_h$,

$$M^i(K) = \begin{cases} K, & K \in \mathcal{T}_h^{i,\circ}, \\ K_\circ^i, & K \in \mathcal{T}_h^\Gamma, \end{cases} \quad i = 0, 1. \tag{5}$$

其中，$K_\circ^i$ 是任意选取的、位于 K 的 Moore 邻域内且包含于 Ω_i 的单元。这些映射将用于构造重构算子。

接下来，我们介绍将在数值格式中使用的迹算子。对于 $e \in \mathcal{E}_h^i$，我们用 K^+ 和 K^- 表示共享边界 e 的两个相邻单元，分别用 $\mathbf{n}^+$,$\mathbf{n}^-$ 表示其单位外法向量。我们定义跳跃算子 $[\![\cdot]\!]$ 和平均算子 $\{\cdot\}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
&[\![v]\!] := v|_{K^+}\mathbf{n}_+ + v|_{K^-}\mathbf{n}_-, \quad \text{for scalar-valued function,}\\
&[\![\boldsymbol{q}]\!] := \mathbf{n}^+ \cdot \boldsymbol{q}|_{K^+} + \mathbf{n}^- \cdot \boldsymbol{q}|_{K^-}, \quad \text{for vector-valued function,}\\
&\{v\} := \frac{1}{2}(v|_{K^+} + v|_{K^-}), \quad \text{for scalar-valued function,}\\
&\{\boldsymbol{q}\} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}|_{K^+} + \boldsymbol{q}|_{K^-}), \quad \text{for vector-valued function.}
\end{aligned} \tag{6}
$$

F对于 $e \in \mathcal{E}_h^b$，我们令 $K \in \mathcal{T}_h$，使得 $e \in \partial K$，且 $\mathbf{n}$ 是单位外法向量。我们定义

$$
\begin{aligned}
&[\![v]\!] := v|_K\mathbf{n} \quad \text{for scalar-valued function,} \qquad [\![\boldsymbol{q}]\!] := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{q}|_K \quad \text{for vector-valued function,}\\
&\{v\} := v|_K \quad \text{for scalar-valued function,} \qquad \{\boldsymbol{q}\} := \boldsymbol{q}|_K \quad \text{for vector-valued function.}
\end{aligned} \tag{7}
$$

对于 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$，我们 我们已在（2）中定义了跳跃算子，平均算子定义如下 .

$$
\begin{aligned}
&\{v\} := \frac{1}{2}(v|_{K_0} + v|_{K_1}), \quad \text{for scalar-valued function,}\\
&\{\boldsymbol{q}\} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}|_{K_0} + \boldsymbol{q}|_{K_1}), \quad \text{for vector-valued function.}
\end{aligned} \tag{8}
$$

本文中，带下标的 C 和 C 表示一般常数，它们在不同行之间可能不同，但与网格尺寸以及界面与网格的相交方式无关。

3. Reconstructed Discontinuous Space

本节旨在通过全局重构算子构造重构不连续空间，以近似问题（1）。我们将全局算子记为 $\mathcal{R}$，它由两个部分组成$\mathcal{R}^0$ 和 $\mathcal{R}^1$，分别对应集合 $\mathcal{T}_h^0$和 $\mathcal{T}_h^1$。为得到这些算子，我们针对每个 $\mathcal{T}_h^i$，$i = 0, 1$采用包含三个步骤的重构过程。首先，将每个内部单元 $\boldsymbol{x}_K$的重心$_{K \in \mathcal{T}^{i\text{标记为配置点}}_h}{}^{\circ}$，$i = 0, 1$，见图3。

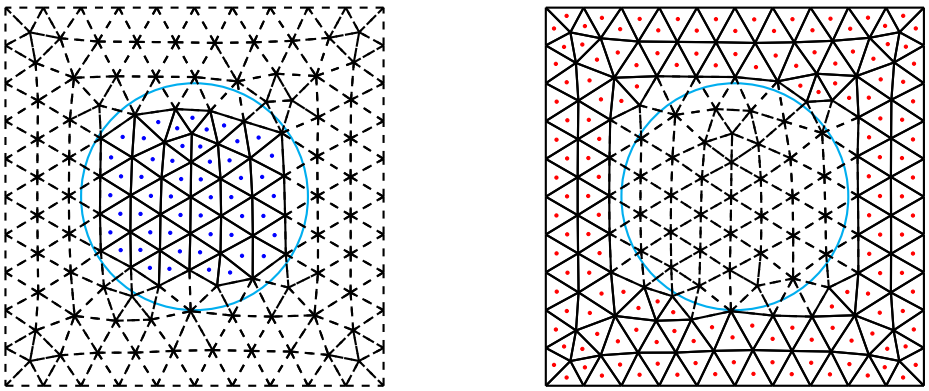


Figure 3. $\mathcal{T}_h^0$（左）/ $\mathcal{T}_h^1$（右）中的配置点。

第二步是为所有单元构造单元邻域。对于任意单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$，我们需要构造一个邻域集合 $S^i(K)$，其中包含若干同样属于 $\mathcal{T}_h^i$的单元。对于任意 $K \in \mathcal{T}^i{}_h{}^{\circ}$，通过递归算法选取$S^i(K)$。我们将阈值$\#S$ 设为单元邻域的基数，并通过设定 $S_0^i(K) = \{K\}$开始递归，然后递归定义 $S_t^i(K)$：

$$
S_t^i(K) := \bigcup_{K' \in S_{t-1}^i(K)} \ \bigcup_{K'' \in \Delta(K'),\ K'' \in \mathcal{T}_h^i} K'', \quad t = 0, 1, \ldots
$$

当 t 满足条件 $\#S_t^i(K) \geq \#S$ 时，递归终止。然后，我们根据 $S_t^i(K)$ 中各单元的重心与 K 的重心之间的距离对这些单元进行排序，并选择距离最近的 $\#S$ 个单元构成邻域 $S^i(K)$。对于单元 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$，我们需要构造两个单元邻域 $S^0(K) \subset \mathcal{T}_h^0$ 和 $S^1(K) \in \mathcal{T}_h^1$。由假设 2，我们有 $M^0(K) \in \mathcal{T}^0{}_h{}^{\circ}$ 和 $M^1(K) \in \mathcal{T}^1{}_h{}^{\circ}$，并且

我们直接令 $S^i(K) = S^i(M^i(K))$。这里我们假设 $K \in S^i(M^i(K))$，当 $\#S$ 足够大时，这一条件很容易得到满足。我们用 $I^i(K)$ 表示位于 $S^i(K)$ 中的所有配置点的集合，

$$I^i(K) := \{\boldsymbol{x}_{\widetilde{K}} | \widetilde{K} \in S^i(K) \cap \mathcal{T}_h^{\backslash\Gamma}\}.$$

最后一步是求解一个局部约束最小二乘拟合问题。该最小二乘问题解出一个多项式，其次数为 m，由 U_h^0 中的分片常函数得到，其中

$$U_h^0 := \{v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_0(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

给定一个函数 $g_h \in U_h^0$ 和一个整数 $m \geq 1$，我们对每个单元$K \in \mathcal{T}_h^i$，$i = 0$，**1** 考虑以下问题:

$$p_{S^i(K)} = \underset{q \in \mathbb{P}_m(S^i(K))}{\arg\min} \sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} |q(\boldsymbol{x}) - g_h(\boldsymbol{x})|^2, \quad \text{s.t. } q(\boldsymbol{x}_{M^i(K)}) = g_h(\boldsymbol{x}_{M^i(K)}). \tag{9}$$

式（9）中的约束对于证明引理3中的线性无关性结论至关重要。我们对配置点的位置作如下几何假设 [27, 26]:

假设3。对于任意单元邻域 $S^i(K)$ 以及任意多项式 $p \in \mathbb{P}_m(S^i(K))$，$p|_{I^i(K)} = 0$ 蕴含$p|_{S^i(K)} = 0$。

该假设排除了 $I^i(K)$ 中的点位于次数为 m 的代数曲线上的情形，并要求 $\#I^i(K) \geq \dim(\mathbb{P}_m(\cdot))$。在该假设下，拟合问题（9）存在唯一解。注意，$p_{S^i(K)}$ 关于给定函数 g_h 呈线性关系，因为它是通过最小二乘问题得到的。这一性质启发我们定义线性局部重构算子 $\mathcal{R}_K^i$：对于 $\mathcal{T}_h^i$ 中的所有单元，将$p_{S^i(K)}$ 限制到 K，

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_K^i : U_h^0 &\to \mathbb{P}_m(K), \\ g_h &\to (p_{S^i(K)})|_K, \end{aligned} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^i, \quad i = 0, 1.$$

基于这些局部算子，我们可以进一步按分片方式定义两个重构算子，如下所示

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i : U_h^0 &\to U_h^{m,i}, \\ g_h &\to \mathcal{R}^i g_h, \end{aligned} \quad (\mathcal{R}^i g_h)|_K := \mathcal{R}_K^i g_h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^i, \quad i = 0, 1,$$

其中 $U^{m,i}_h$ 表示算子 $\mathcal{R}^i$ 的像空间。显然，$U^{m,i}_h$ 是剖分 $\mathcal{T}_h^i$ 上次数为 m 的分片多项式空间的子空间。接下来，我们研究 $U^{m,i}_h$ 的基函数。对于任意单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$，我们选取一个函数 $e_K \in U_h^0$，使得

$$e_K(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in K, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

令 $\lambda_K^i := \mathcal{R}^i e_K, \quad K \in \mathcal{T}^{i,\circ}_h$，并说明空间 $U^{m,i}_h$ 由 $\{\lambda_K^i\}$ 张成。

引理 3. 对于 $i = 0$，1，函数 $\{\lambda_K^i\}(K \in \mathcal{T}^{i,\circ}_h)$ 线性无关，且空间 $U^{m,i}_h$ =张成$(\{\lambda_K^i\})$。

证明。 对于任意 $K \in \mathcal{T}^{i,\circ}_h$，假设存在一组系数 $\{a_K^i\}$，使得

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h^{i,\circ}} a_K^i \lambda_K^i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{10}$$

对所有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_K$，取 $K \in \mathcal{T}^{i,\circ}_h$ 属于 (10)，根据问题中的约束条件 (9)，可得

$$\lambda_K^i(\boldsymbol{x}_{K'}) = \begin{cases} 1, & K' = K, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

由此可推得，对于所有 $K \in \mathcal{T}^{i,\circ}_h$，均有 $a_K^i = 0$。因此，函数 $\{\lambda_K^i\}(K \in \mathcal{T}^{i,\circ}_h)$ 线性无关。对于任意函数 $g_h \in U_h^0$，它可分解为

$$g_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^i} g_h(\boldsymbol{x}_K) e_K.$$

因此，可以将 $\mathcal{R}^i g_h$ 明确写为

$$\mathcal{R}^i g_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^i} g_h(\boldsymbol{x}_K) \mathcal{R}^i e_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{i,\circ}} g_h(\boldsymbol{x}_K) \lambda_K^i, \tag{11}$$

因为 $\mathcal{R}^i e_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$。于是可以得出， $U^m{}_{,h}{}^i$ 由 $\{\lambda_K^i\}$ 张成，从而完成证明。□

根据问题（9），基函数 λ_K^i 在单元 K' 上消失，其中 $K \notin S^i(K')$。这一事实表明， λ_K^i 具有有限支撑集 $\mathrm{supp}(\lambda_K^i)$，且 $= \{K' \in \mathcal{T}_h^i \mid K \in S^i(K')\}$。图 4 给出了基函数的两个示例。我们可以将算子 $\mathcal{R}^i(i = 0,1)$ 扩展到光滑函数上。对于任意$g \in H^{m+1}(\Omega)$，我们定义一个分片常函数 $g_h \in U_h^0$ 如下：

$$g_h(\boldsymbol{x}_K) := g(\boldsymbol{x}_K),$$

并直接定义 $\mathcal{R}^i g : = \mathcal{R}^i g_h$。这样， $H^{m+1}(\Omega)$ 中的任意光滑函数都通过算子 $\mathcal{T}_h^i$ 映射为关于 $\mathcal{R}^i$ 的分片多项式函数；对于任意 $g \in H^{m+1}(\Omega)$， $\mathcal{R}^i g$ 也可以写成（11）。

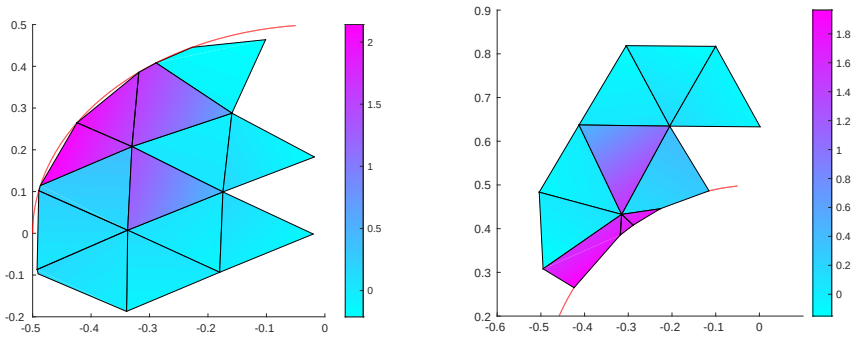


FIGURE 4. 界面内侧（左）和界面外侧（右）的两个基函数。

接下来，我们将证明算子 $\mathcal{R}^i(i = 0,1)$ 的一些逼近性质。我们首先为每个单元邻域 [26], 定义一个常数$\Lambda(m, S^i(K))$

$$\Lambda(m, S^i(K)) := \max_{p \in \mathbb{P}_m(S^i(K))} \frac{\max_{\boldsymbol{x} \in S^i(K)} |p(\boldsymbol{x})|}{\max_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} |p(\boldsymbol{x})|}.$$

假设 3 实际上保证了 $\Lambda(m, S^i(K)) < \infty$，并且我们设

$$\Lambda_m := \max_{i=0,1} \max_{K \in \mathcal{T}_h^i} \left(1 + \Lambda(m, S^i(K)) \sqrt{\#I^i(K)}\right). \tag{12}$$

引理4。 对于任意单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$，有

$$\|g - \mathcal{R}_K^i g\|_{L^\infty(K)} \leq 2\Lambda_m \inf_{q \in \mathbb{P}_m(S^i(K))} \|g - q\|_{L^\infty(S^i(K))}, \quad \forall g \in H^{m+1}(\Omega). \tag{13}$$

证明。 我们定义一个多项式空间

$$\widetilde{\mathbb{P}}_m(S^i(K)) := \left\{v \in \mathbb{P}_m(S^i(K)) \mid v(\boldsymbol{x}_{M^i(K)}) = g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})\right\}.$$

显然， $\mathbb{P}_m(S^i(K))$ 中的任意多项式都满足式（9）中的约束。我们令 $p := \mathcal{R}_K^i g$，对于任意 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}_m(S^i(K))$ 中的任意 $q \in \mathbb{P}_m(S^i(K))$，有 $p + \varepsilon(q - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})) \in \mathbb{P}_m(S^i(K))$，并且

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} |p(\boldsymbol{x}) + \varepsilon(q(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})) - g(\boldsymbol{x})|^2 \geq \sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} |p(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^2.$$

由于 ε 是任意的，上述不等式意味着

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} (p(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})) \cdot (q(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})) = 0,$$

对于任意 $q \in \widetilde{\mathbb{P}}_m(S^i(K))^d$。令 $q = p$，并应用柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} (g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)}) + g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)}) - p(\boldsymbol{x})) \cdot (p(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})) \\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} \left(-|p(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|^2 + (p(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})) \cdot (g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)}))\right) \\
&\leq -\frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} |p(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{x} \in I^i(K)} |g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|^2,
\end{aligned}$$

可得

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in I^i(K)} |\mathcal{R}_K^i g - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|^2 \le \sum_{\boldsymbol{x}\in I^i(K)} |g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|^2. \tag{14}$$

此外，对于任意 $w \in \mathbb{P}_m(S^i(K))$，显然有 $\mathcal{R}_K^i w = w$，由此可得

$$\|g - \mathcal{R}_K^i g\|_{L^\infty(K)} = \|g - w + w - \mathcal{R}_K^i g\|_{L^\infty(K)} \le \|g - w\|_{L^\infty(K)} + \|w - \mathcal{R}_K^i g\|_{L^\infty(K)},$$

and

$$\begin{aligned}\|w - \mathcal{R}_K^i g\|_{L^\infty(K)} &= \|\mathcal{R}_K^i(w - g)\|_{L^\infty(K)} \\ &\le \|\mathcal{R}_K^i(w-g) - (w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})\|_{L^\infty(K)} + |(w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|.\end{aligned}$$

由（14）及常数 $\Lambda(m,\ S^i(K))$，可知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_K^i(w-g) - (w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})\|_{L^\infty(K)} &\le \Lambda(m, S^i(K)) \max_{\boldsymbol{x}\in I^i(K)} |\mathcal{R}_K^i(w-g)(\boldsymbol{x}) - (w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})| \\ &\le \Lambda(m, S^i(K)) \left(\sum_{\boldsymbol{x}\in I^i(K)} |\mathcal{R}_K^i(w-g)(\boldsymbol{x}) - (w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})|^2 \right)^{1/2} \\ &\le \Lambda(m, S^i(K)) \sqrt{\#I^i(K)} \max_{\boldsymbol{x}\in I^i(K)} \|(w-g)(\boldsymbol{x}) - (w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})| \\ &\le 2\Lambda(m, S^i(K)) \sqrt{\#I^i(K)} \|w-g\|_{L^\infty(S^i(K))}.\end{aligned}$$

综合以上所有不等式，我们得出

$$\begin{aligned}\|g - \mathcal{R}_K^i g\|_{L^\infty(K)} &\le 2\Lambda(m, S^i(K)) \sqrt{\#I^i(K)} \|w-g\|_{L^\infty(S^i(K))} \\ &\quad + \|w-g\|_{L^\infty(K)} + |(w-g)(\boldsymbol{x}_{M^i(K)})| \\ &\le 2(1 + \Lambda(m, S^i(K)) \sqrt{\#I^i(K)}) \|w-g\|_{L^\infty(S^i(K))},\end{aligned}$$

对于任意 $w \in \mathbb{P}_m$（S^i（K））， 这意味着（13），并完成了证明。 □

根据稳定性结果（13），我们可以证明以下逼近性质。

引理 5. 对于任意 $K \in \mathcal{T}_h^i (i = 0, 1)$ 和 $g \in H^{m+1}(\Omega)$，存在一个常数 C 使得 t

$$\|g - \mathcal{R}^i g\|_{H^q(K)} \le C\Lambda_m h_K^{m+1-q} \|g\|_{H^{m+1}(S^i(K))}, \quad 0 \le q \le m. \tag{15}$$

证明. 由引理 4，可得

$$\begin{aligned}\|g - \mathcal{R}^i g\|_{L^2(K)} &\le |K|^{1/2} \|g - \mathcal{R}^i g\|_{L^\infty(K)} \le C h_K^{d/2} \Lambda_m \inf_{p\in\mathbb{P}_m(S^i(K))} \|g - p\|_{L^\infty(S^i(K))} \\ &\le C\Lambda_m h^{m+1} \|g\|_{H^{m+1}(S^i(K))}.\end{aligned}$$

情形 $q > 0$ 将通过使用逆不等式（4）来证明。取一个多项式 $\widetilde{p} \in \mathbb{P}_m(S^i(K))$，可得

$$\begin{aligned}\|g - \mathcal{R}^i g\|_{H^q(K)} &\le \|g - \widetilde{p}\|_{H^q(K)} + \|\widetilde{p} - \mathcal{R}^i g\|_{H^q(K)} \\ &\le C \inf_{p\in\mathbb{P}_m(S^i(K))} \|g - p\|_{H^q(S^i(K))} + C h_K^{-q} \|\widetilde{p} - \mathcal{R}^i g\|_{L^2(K)} \\ &\le C h_K^{m+1-q} \|g\|_{H^{m+1}(S^i(K))} + C h_K^{-q} \|g - \mathcal{R}^m g\|_{L^2(K)} \\ &\le C h_K^{m+1-q} \|g\|_{H^{m+1}(S^i(K))},\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

注 1. 在引理 5的证明中，我们用到了这样一个事实：对于任意 $g \in H^{m+1}(S^i(K))$，存在一个多项式 $p \in \mathbb{P}_m(S^i(K))$ 使得

$$\begin{aligned}\|g - p\|_{H^q(S^i(K))} &\le C h_K^{m+1-q} \|g\|_{H^{m+1}(S^i(K))}, \quad 1 \le q \le m+1, \\ \|g - p\|_{L^\infty(S^i(K))} &\le C h_K^{m+1-2/d} \|g\|_{H^{m+1}(S^i(K))}.\end{aligned}$$

这些结论成立的条件是 $S^i(K)$ 是星形的。详情请参见 [12] 。

由（15）可知，算子 $\mathcal{R}^i$ 的逼近误差阶为 O（h^{m+1-q}），前提是 Λ_m 具有一个与网格尺寸无关的上界 h。在关于单元邻域的一些温和假设下，我们可以证明常数 Λ（m，S^i（K）具有一致的上界。

假设 4。 对于每个单元邻域 $S^i(K)$（$K \in \mathcal{T}_h$、$i = 0$ 或 1），存在与 K 无关的常数 R 和 r，使得 $B_r \subset S^i(K) \subset B_R$，且 $S^i(K)$ 关于 B_r是星形的，其中 B_ρ 是半径为 ρ的圆盘。

在几何假设 4下，我们有以下结果。

引理 6。 对于任意 $\varepsilon > 0$，若

$$r > m\sqrt{2C_{S^i(K)}Rh(1+1/\varepsilon)}, \qquad C_{S^i(K)} = \begin{cases} 3, & S^i(K) \text{ is cut by } \Gamma, \\ 1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

then

$$\Lambda(m, S^i(K)) \leq 1 + \varepsilon, \tag{16}$$

对于任意单元邻域 $S^i(K)$。特别地，如果 $r > 2m\sqrt{C_{S^i(K)}Rh}$，$\Lambda(m, S^i(K)) \leq 2$。

证明。 关于该引理的证明，请参阅 [24]。 □

根据引理6，为确保重构算子的稳定性，我们需要构造一个较大的单元邻域，使半径 r 尽可能大。当阈值 $\#S$ 大于某个仅取决于网格和 m的常数时，几何条件即可满足。有关该陈述的详细内容，请参阅 [26,引理 6] 和 [27, 引理 3。4] 我们在第5节的数值实验中列出了 $\#S$ 的取值。

最后，我们通过结合两个算子 $\mathcal{R}$ 来定义一个全局重构算子 $\mathcal{R}^0$ 和 $\mathcal{R}^1$。我们选择两个延拓算子，将 $H^q(\Omega_i)$ 中的函数延拓到 $H^q(\Omega)$ $q \geq 1$。根据 [1, 第 5], 章可知，对于任意 $w \in H^q(\Omega_0 \cup \Omega_1)$，存在两个算子 $E^i: H^q(\Omega_i) \to H^q(\Omega)$，使得

$$(E^i w)|_{\Omega_i} = w, \quad \|E^i w\|_{H^s(\Omega)} \leq C\|w\|_{H^s(\Omega_i)}, \quad 0 \leq s \leq q, \quad i = 0, 1.$$

对于任意 $w \in H^q(\Omega_0 \cup \Omega_1)$，我们定义 $\mathcal{R}w$ 为

$$(\mathcal{R}w)|_K := \begin{cases} (\mathcal{R}^0(E^0 w))|_K, & \forall K \in \mathcal{T}_h^0 \backslash \mathcal{T}_h^\Gamma, \\ (\mathcal{R}^1(E^1 w))|_K, & \forall K \in \mathcal{T}_h^1 \backslash \mathcal{T}_h^\Gamma, \\ (\mathcal{R}^i(E^i w))|_{K^i}, & \forall K \in \mathcal{T}_h^\Gamma, \quad i = 0, 1. \end{cases}$$

我们将 U_h^m记作算子 $\mathcal{R}$的像空间，实际上，它是用于求解界面问题（1）的重构逼近空间。实际上，空间 U_h^m是$U^m{}_h{}^0$和 $U^m{}_h{}^1$的组合，可表示为 $U_h^m = U^m{}_h{}^0 \cdot \chi_0 + U^m{}_h{}^1 \cdot \chi_1$，其中 χ_i是关于区域 Ω_i的特征函数。对于算子 $\mathcal{R}$，我们有以下局部逼近误差估计：

定理 1. 对于任意 $K \in \mathcal{T}_h^i (i = 0, 1)$，存在一个常数 C，使得

$$\|E^i g - \mathcal{R}(E^i g)\|_{H^q(K)} \leq C\Lambda_m h_K^{m+1-q} \|E^i g\|_{H^{m+1}(S^i(K))}, \quad 0 \leq q \leq m, \tag{17}$$

对于任意 $g \in H^{m+1}(\Omega_0 \cup \Omega_1)$。

证明。 该结果可直接由引理 5 以及延拓算子 E^i得出。 □

注 2. 在本节中，我们构造了一个不连续多项式空间 U_h^m，它基于全局重构算子 $\mathcal{R}$。由于每个单元至多只有一个未知量，我们可以构造任意阶空间，而无需增加自由度。这与常规 *DG* 空间形成对比：为了达到高阶精度，常规 *DG* 空间要求单个单元上具有大量自由度 [22]。根据定理*1*，只要常数 U_h^m一致有界，空间 Λ_m 就具有与同阶常规 *DG* 空间几乎相同的逼近性质。因此，我们能够以更少的自由度获得高阶逼近。

4. Approximation to Biharmonic Interface Problem

我们基于上一节构造的空间U_h^m定义求解双调和界面问题（1）的逼近问题：求 $u_h \in U_h^m (m \geq 2)$，使得

$$B_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in U_h^m, \tag{18}$$

其中，双线性型 $B_h(\cdot,\ \cdot)$ 对任意 $u,\ v \in U_h := U_h^m + H^4(\Omega_0 \cup \Omega_1)$ 定义，

$$\begin{aligned}
B_h(u,v) :=& \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{K^0\cup K^1}\beta\Delta u\Delta v\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}(\llbracket u\rrbracket\cdot\{\nabla(\beta\Delta v)\} + \llbracket v\rrbracket\cdot\{\nabla(\beta\Delta u)\})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&- \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}(\llbracket\nabla u\rrbracket\{\beta\Delta v\} + \llbracket\nabla v\rrbracket\{\beta\Delta u\})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}(\mu_1\llbracket u\rrbracket\cdot\llbracket v\rrbracket + \mu_2\llbracket\nabla u\rrbracket\llbracket\nabla v\rrbracket)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}(\llbracket u\rrbracket\cdot\{\nabla(\beta\Delta v)\} + \llbracket v\rrbracket\cdot\{\nabla(\beta\Delta u)\})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}(\llbracket\nabla u\rrbracket\{\beta\Delta v\} + \llbracket\nabla v\rrbracket\{\beta\Delta u\})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}(\mu_1\llbracket u\rrbracket\cdot\llbracket v\rrbracket + \mu_2\llbracket\nabla u\rrbracket\llbracket\nabla v\rrbracket)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}.
\end{aligned}$$

参数 μ_1 和 μ_2 是正的惩罚项，其取值为

$$\mu_1|_e = \frac{\eta}{h_e^3},\quad \mu_2|_e = \frac{\eta}{h_e}.\quad \text{for } e\in\mathcal{E}_h,$$
$$\mu_1|_{\Gamma_K} = \frac{\eta}{h_K^3},\quad \mu_2|_{\Gamma_K} = \frac{\eta}{h_K}.\quad \text{for } K\in\mathcal{T}_h^\Gamma.$$

线性型 $l_h(\cdot)$ 定义于 $v\in U_h$,

$$\begin{aligned}
l_h(\cdot) :=& \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K fv\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}a_1\{\mathbf{n}_0\cdot\nabla(\beta\Delta v)\}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}a_2\{\beta\Delta v\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}a_3\cdot\{\mathbf{n}_0\cdot\nabla v\}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}a_4\{v\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}(\mu_1a_1\mathbf{n}_0\cdot\llbracket v\rrbracket + \mu_2a_2\llbracket\nabla v\rrbracket)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h^b}\int_{e^0\cup e^1}(g_1(\llbracket\nabla(\beta\Delta v_h)\rrbracket + \mu_1\mathbf{n}\cdot\llbracket v_h\rrbracket) + g_2(\mathbf{n}\cdot\llbracket-\beta\Delta v_h\rrbracket + \mu_2\llbracket\nabla v_h\rrbracket))\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}.
\end{aligned}$$

我们为空间 U_h 引入两个能量范数,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathrm{DG}}^2 :=& \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{K^0\cup K^1}|\Delta u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}h_e^{-3}|\llbracket u\rrbracket|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}h_e^{-1}|\llbracket\nabla u\rrbracket|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}h_K^{-3}|\llbracket u\rrbracket|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}h_K^{-1}|\llbracket\nabla u\rrbracket|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
|\!|\!|u|\!|\!|^2 :=& \|u\|_{\mathrm{DG}}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}h_e^3|\{\nabla\Delta u\}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1}h_e|\{\Delta u\}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}h_K|\{\Delta u\}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K}h_K^3|\{\nabla\Delta u\}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{s}.
\end{aligned}$$

在开始误差分析之前，我们先证明一些迹不等式，这些不等式在后续分析中起着至关重要的作用。

引理 7。 对于任意单元 $K\in\mathcal{T}_h^\Gamma$，存在常数 C 使得

$$\|\nabla^\alpha(\Delta v_h)\|_{L^2(\partial K^i)} \le Ch_K^{-1/2}\|\nabla^\alpha(\Delta v_h)\|_{L^2(K_\diamond^i)},\quad \forall v_h\in U_h^m,\quad i=0,1,\quad \alpha=0,1. \tag{19}$$

证明。 该结果的证明与 [29, 引理 2] 中的证明非常相似，因此省略。 □

引理 8. 对于任意单元 $K\in\mathcal{T}_h^\Gamma$，存在一个正常数 h_0，它与 h 及界面的位置无关，使得 $\forall h\le h_0$,

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_K)}^2 \le C\left(h_K^{-1}\|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K\|\nabla v\|_{L^2(K)}^2\right),\quad \forall v\in H^1(K). \tag{20}$$

参见 [16, 37] 中关于该引理的证明。

我们声称，在空间 U_h^m 上，这两个能量范数是等价的。

引理 9. 对于任意 $u_h \in U_h^m$，都存在一个常数 C，使得

$$\|u_h\|_{\mathrm{DG}} \le |\!|\!| u_h |\!|\!| \le C\|u_h\|_{\mathrm{DG}}. \tag{21}$$

证明。 我们只需证明 $|\!|\!| u_h |\!|\!| \le C\|u_h\|_{\mathrm{DG}}$。对于 $e \in \mathcal{E}_h^\circ$，我们将 e 的两个相邻单元记为 K^+ 和 K^-。我们有

$$\|h_e^{3/2}\{\nabla\Delta u_h\}\|_{L^2(e^0\cup e^1)} \le C\sum_{i=0,1}\left(\|h_e^{3/2}\nabla\Delta u_h\|_{L^2(e^i\cap\partial K^+)} + \|h_e^{3/2}\nabla\Delta u_h\|_{L^2(e^i\cap\partial K^-)}\right)$$

由迹不等式 (3) 和 (19)，以及逆不等式 (4)，可得

$$\|h_e^{3/2}\nabla\Delta u_h\|_{L^2(e^i\cap\partial K^\pm)} \le \begin{cases} C\|\Delta u_h\|_{L^2(K^\pm)}, & \text{if } K^\pm \in \mathcal{T}_h^{\backslash\Gamma}, \\ C\|\Delta u_h\|_{L^2((K^\pm)_\circ^i)}, & \text{if } K^\pm \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}. \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

对于 $e \in \mathcal{E}_h^b$，令 $e \subset K$。类似地，我们有

$$\|h_e^{3/2}\nabla\Delta u_h\|_{L^2(e^i\cap\partial K)} \le \begin{cases} C\|\Delta u_h\|_{L^2(K)}, & \text{if } K \in \mathcal{T}_h^{\backslash\Gamma}, \\ C\|\Delta u_h\|_{L^2(K_\circ^i)}, & \text{if } K \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}. \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

对于 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$，利用不等式 (20)，我们有

$$\begin{aligned} \|h_K^{3/2}\{\nabla\Delta u_h\}\|_{L^2(\Gamma_K)} &\le C\left(\|h_K^{3/2}\nabla\Delta u_h\|_{L^2(\partial K^0)} + \|h_K^{3/2}\nabla\Delta u_h\|_{L^2(\partial K^1)}\right) \\ &\le C\left(\|\Delta u_h\|_{L^2(K_\circ^0)} + \|\Delta u_h\|_{L^2(K_\circ^1)}\right). \end{aligned}$$

项 $\|h_e^{1/2}\{\Delta u_h\}\|_{L^2(e^0\cup e^1)}$ 和 $\|h_K^{1/2}\{\Delta u_h\}\|_{L^2(\Gamma_K)}$ 可以用同样的方法进行界定。因此，对所有 $e \in \mathcal{E}_h$ 和 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ 求和，可得

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\|h_e^{1/2}\{\Delta u_h\}\|_{L^2(e^0\cup e^1)}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\|h_e^{3/2}\{\nabla\Delta u_h\}\|_{L^2(e^0\cup e^1)}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\|h_K^{1/2}\{\Delta u_h\}\|_{L^2(\Gamma_K)}^2 \\ + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\|h_K^{3/2}\{\nabla\Delta u_h\}\|_{L^2(\Gamma_K)}^2 \\ \le C\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|_{L^2(K)}^2, \end{aligned}$$

这立即导出（21），并完成证明。 □

现在我们可以证明双线性型 $B_h(\cdot,\cdot)$ 的强制性和连续性。

定理 2. 设 $B_h(\cdot,\cdot)$ 为双线性型，且罚项 η 足够大。则存在一个正的常数 C，使得

$$B_h(u_h, u_h) \ge C|\!|\!| u_h |\!|\!|^2, \quad \forall u_h \in U_h^m. \tag{22}$$

证明。 根据引理 9，我们只需证明范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{DG}}$ 下的强制性。对于面 $e \in \mathcal{E}_h^\circ$，设 e 由相邻单元 K^- 和 K^+共享。应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} -\int_{e^0\cup e^1} 2[\![u_h]\!]\cdot\{\nabla(\beta\Delta u_h)\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} &\ge -\frac{1}{\epsilon}\|h_e^{-3/2}[\![u_h]\!]\|_{L^2(e^0\cup e^1)}^2 - \epsilon\|h_e^{3/2}\{\nabla(\beta\Delta u_h)\}\|_{L^2(e^0\cup e^1)}^2 \\ &\ge \sum_{i=0,1} C\left(-\frac{1}{\epsilon}\|h_e^{-3/2}[\![u_h]\!]\|_{L^2(e^i)}^2 - \epsilon\|h_e^{3/2}\nabla(\beta\Delta u_h)\|_{L^2(e^i\cap\partial K^-)}^2 - \epsilon\|h_e^{3/2}\nabla(\beta\Delta u_h)\|_{L^2(e^i\cap\partial K^+)}^2\right), \end{aligned}$$

对于任意 $\epsilon > 0$。由迹不等式（3）、（19）以及逆不等式（4），可推得

$$\|h_e^{3/2}\nabla(\beta\Delta u_h)\|_{L^2(e^i\cap\partial K^\pm)} \le \begin{cases} C\|\Delta u_h\|_{L^2(K^\pm)}, & \text{if } K^\pm \in \mathcal{T}_h^{\backslash\Gamma}, \\ C\|\Delta u_h\|_{L^2((K^\pm)_\circ^i)}, & \text{if } K^\pm \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}. \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

因此，我们有

$$-\sum_{e\in\mathcal{E}_h^\circ}\int_{e^0\cup e^1} 2[\![u_h]\!]\cdot\{\nabla(\beta\Delta u_h)\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \ge -\sum_{e\in\mathcal{E}_h^\circ}\frac{1}{\epsilon}\|h_e^{-3/2}[\![u_h]\!]\|_{L^2(e^0\cup e^1)}^2 - C\epsilon\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|_{L^2(K^0\cup K^1)}^2. \tag{23}$$

对于面 $e \in \mathcal{E}_h^b$，我们可以类似地推导出

$$-\sum_{e\in\mathcal{E}_h^b}\int_{e^0\cup e^1} 2[\![u_h]\!]\cdot\{\nabla(\beta\Delta u_h)\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \geq -\sum_{e\in\mathcal{E}_h^b}\frac{1}{\epsilon}\|h_e^{-3/2}[\![u_h]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} - C\epsilon\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)}. \tag{24}$$

对于单元 $K \in \mathcal{T}_h^\Gamma$，应用柯西-施瓦茨不等式、迹估计（19）和逆不等式（4）可得

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma_K} 2[\![u_h]\!]\cdot\{\nabla(\beta\Delta u_h)\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} &\geq -\frac{1}{\epsilon}\|h_K^{-3/2}[\![u_h]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)} - C\epsilon\sum_{i=0,1}\|h_K^{3/2}\nabla(\beta\Delta u_h)\|^2_{L^2(\Gamma_K\cap K^i)}\\ &\geq -\frac{1}{\epsilon}\|h_K^{-3/2}[\![u_h]\!]\|^2_{L^2(\Gamma)} - C\epsilon\sum_{i=0,1}\|\Delta u_h\|^2_{L^2(K^i_\circ)},\end{aligned}$$

这意味着

$$-\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K} 2[\![u_h]\!]\cdot\{\nabla(\beta\Delta u_h)\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \geq -\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\frac{1}{\epsilon}\|h_K^{-3/2}[\![u_h]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)} - C\epsilon\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)}. \tag{25}$$

对项 $\int_{e^0\cup e^1} 2[\![\nabla u_h]\!]\{\beta\Delta u_h\}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 和 $\int_{\Gamma_K} 2[\![\nabla u_h]\!]\{\beta\Delta u_h\}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$采用相同的方法，我们可以得到

$$-\sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e^0\cup e^1} 2[\![\nabla u_h]\!]\{\beta\Delta u_h\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \geq -\frac{1}{\epsilon}\sum_{e\in\mathcal{E}_h}\|h_e^{-1/2}[\![\nabla u_h]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} - C\epsilon\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)}, \tag{26}$$

and

$$-\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\int_{\Gamma_K} 2[\![\nabla u_h]\!]\{\beta\Delta u_h\}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \geq -\frac{1}{\epsilon}\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\|h_K^{-1/2}[\![\nabla u_h]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)} - C\epsilon\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)}. \tag{27}$$

结合不等式（23）、（24）、（26）、（25）和（27），我们得出存在一个常数 C 使得

$$\begin{aligned}B_h(u_h,u_h) \geq\ & (\beta_{\min} - C\epsilon)\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Delta u_h\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)}\\ &+ (\eta - \frac{1}{\epsilon})\sum_{e\in\mathcal{E}_h}(\|h_e^{-1/2}[\![\nabla u_h]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} + \|h_e^{-3/2}[\![u_h]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)})\\ &+ (\eta - \frac{1}{\epsilon})\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}(\|h_K^{-1/2}[\![\nabla u_h]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)} + \|h_K^{-3/2}[\![u_h]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)}),\end{aligned}$$

对于任意 $\epsilon > 0$，其中 $\beta_{\min} > 0$ 是 β的最小值。令 $\epsilon = \beta_{\min}/(2C)$，并选取充分大的 η 以确保 $B_h(u_h, u_h) \geq C\|u_h\|^2_{\mathrm{DG}}$，证明完毕。□

定理3. 存在一个正的常数 C 使得

$$|B_h(u,v)| \leq C|\!|\!|u|\!|\!|\!|v|\!|\!|, \quad \forall u, v \in U_h. \tag{28}$$

证明. 连续性可通过直接使用柯西-施瓦茨不等式来证明，

$$\begin{aligned}B_h(u,v) \leq C\Bigg(&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\beta\Delta u\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}(\|h_e^{-3/2}[\![u]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} + \|h_e^{-1/2}[\![\nabla u]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)}\\ &+ \|h_e^{3/2}\{\nabla(\beta\Delta u)\}\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} + \|h_e^{1/2}\{\beta\Delta u\}\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)}) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}(\|h_K^{-3/2}[\![u]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)}\\ &+\|h_K^{-1/2}[\![\nabla u]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)} + \|h_K^{3/2}\{\nabla(\beta\Delta u)\}\|^2_{L^2(\Gamma_K)} + \|h_K^{1/2}\{\beta\Delta u\}\|^2_{L^2(\Gamma_K)})\Bigg)^{1/2}\cdot\\ &\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\beta\Delta v\|^2_{L^2(K^0\cup K^1)} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}(\|h_e^{-3/2}[\![v]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} + \|h_e^{-1/2}[\![\nabla v]\!]\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)}\\ &+ \|h_e^{3/2}\{\nabla(\beta\Delta v)\}\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)} + \|h_e^{1/2}\{\beta\Delta v\}\|^2_{L^2(e^0\cup e^1)}) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}(\|h_K^{-3/2}[\![v]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)}\\ &+\|h_K^{-1/2}[\![\nabla v]\!]\|^2_{L^2(\Gamma_K)} + \|h_K^{3/2}\{\nabla(\beta\Delta v)\}\|^2_{L^2(\Gamma_K)} + \|h_K^{1/2}\{\beta\Delta v\}\|^2_{L^2(\Gamma_K)})\Bigg)^{1/2},\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

现在我们验证关于双线性型 $B_h(\cdot,\ \cdot)$ 的 Galerkin 正交性。

引理10. 设 $u \in H^4(\Omega_0 \cup \Omega_1)$ 是问题 (1)的精确解，且 $u_h \in U_h^m$是离散问题 (18)的数值解，则

$$B_h(u-u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in U_h^m. \tag{29}$$

证明. 由于 $u \in H^4(\Omega_0 \cup \Omega_1)$，我们有

$$[\![u]\!]|_{e^i} = \mathbf{0}, \quad [\![\nabla u]\!]|_{e^i} = 0, \quad [\![\beta\Delta u]\!]|_{e^i} = \mathbf{0}, \quad [\![\nabla(\beta\Delta u)]\!]|_{e^i} = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^\circ,\ i = 0, 1.$$

将精确解代入 $B_h(\cdot,\cdot)$，我们得到

$$\begin{aligned}
B_h(u, v_h) = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{K^0\cup K^1} \beta\Delta u \Delta v_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_{e^0\cup e^1} [\![v_h]\!] \cdot \{\nabla(\beta\Delta u)\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&- \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_{e^0\cup e^1} [\![\nabla v_h]\!] \{\beta\Delta u\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} [\![v_h]\!] \cdot \{\nabla(\beta\Delta u)\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} [\![\nabla v_h]\!] \{\beta\Delta u\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} \left(a_1\{\mathbf{n}_0 \cdot \nabla(\beta\Delta v_h)\} - a_2\{\beta\Delta v_h\}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h^b} \int_{e^0\cup e^1} \left(g_1([\![\nabla(\beta\Delta v_h)]\!] + \mu_1 \mathbf{n} \cdot [\![v_h]\!]) + g_2(\mathbf{n} \cdot [\![-\beta\Delta v_h]\!] + \mu_2 [\![\nabla v_h]\!])\right) \mathrm{d}\boldsymbol{s}
\end{aligned}$$

我们将 测试函数 v_h 乘到方程（1）两边，并应用分部积分，得到 at

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{K^0\cup K^1} f v_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{K^0\cup K^1} \Delta(\beta\Delta u) v_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{K^0\cup K^1} \beta\Delta u \Delta v_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{i=0,1} \left(\int_{\partial K^i} \mathbf{n} \cdot \nabla(\beta\Delta u) v_h \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_{\partial K^i} \beta\Delta u \mathbf{n} \cdot \nabla v_h \mathrm{d}\boldsymbol{s} \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{K^0\cup K^1} \beta\Delta u \Delta v_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_{e^0\cup e^1} [\![v_h]\!] \cdot \{\nabla(\beta\Delta u)\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&- \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_{e^0\cup e^1} [\![\nabla v_h]\!] \{\beta\Delta u\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} [\![v_h]\!] \cdot \{\nabla(\beta\Delta u)\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} [\![\nabla v_h]\!] \{\beta\Delta u\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} a_4\{v_h\} \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_K} a_3\{\mathbf{n}_0 \cdot \nabla v_h\} \mathrm{d}\boldsymbol{s}.
\end{aligned}$$

因此，经过简单计算可得

$$B_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) = B_h(u, v_h),$$

证明至此完成。 □

接下来，我们在范数 $\|\!|\cdot|\!\|$ 下建立 $\mathcal{R}$ 的插值误差估计。

引理11. 对于 $0 \le h \le h_0$ 和 $m \ge 2$，存在一个常数 C，使得

$$\|\!|v - \mathcal{R}v|\!\| \le C\Lambda_m h^{m-1} \|v\|_{H^{m+1}(\Omega_0\cup\Omega_1)}, \quad \forall v \in H^s(\Omega_0 \cup \Omega_1), \quad s = \max(4, m+1). \tag{30}$$

证明。 根据延拓算子的定义 E^i 和定理 1，我们可以证明 t

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h^i} \|\Delta v - \Delta(\mathcal{R}v)\|_{L^2(K^i)}^2 &\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h^i} \|\Delta(E^i v) - \Delta(\mathcal{R}(E^i v)\|_{L^2(K)}^2 \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h^i} C\Lambda_m^2 h_K^{2m-2} \|E^i v\|_{H^{m+1}(S^i(K))}^2 \\
&\le C\Lambda_m^2 h^{2m-2} \|E^i v\|_{H^{m+1}(\Omega)}^2 \le C\Lambda_m^2 h^{2m-2} \|v\|_{H^{m+1}(\Omega_i)}^2,
\end{aligned}$$

对于 $i=0$，1. 根据迹估计（20），

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma} h_K^{-1}\|[\![\nabla(v-\mathcal{R}v)]\!]\|_{L^2(\Gamma_K)}^2 \le C\sum_{K\in\mathcal{T}_h^\Gamma}\sum_{i=0,1}\left(h_K^{-2}\|\nabla(E^iv-\mathcal{R}(E^iv))\|_{L^2(K)}^2+\|\nabla(E^iv-\mathcal{R}(E^iv))\|_{H^1(K)}^2\right)$$
$$\le C\Lambda_m^2h^{2m-2}\sum_{i=0,1}\|E^iv\|_{H^{m+1}(\Omega)}^2 \le C\Lambda_m^2h^{2m-2}\|v\|_{H^{m+1}(\Omega_0\cup\Omega_1)}^2.$$

中的其他迹项 $\|v-\mathcal{R}v\|$ 同样可以通过迹估计（20）和（3）进行界定，从而完成证明。□

现在，我们准备在标准 Lax-Milgram 框架下给出 $\|\cdot\|$ 中的先验误差估计。

定理 *4.* 假设双调和界面问题（*1*）具有解 $u\in H^s(\Omega_0\cup\Omega_1)$，其中 $s=\max(4,m+1)$，$m\ge 2$，且 Λ_m 具有一个与 h无关的统一上界。令双线性型 $B_h(\cdot,\cdot)$ 采用充分大的 η 定义，并令 $u_h in U_h^m$ 为问题（*18*）的数值解。则对于$h\le h_0$，存在一个常数 C，使得

$$\|u-u_h\| \le Ch^{m-1}\|u\|_{H^{m+1}(\Omega_0\cup\Omega_1)}. \tag{31}$$

证明。由（22）、（28）和（29），对于任意 $v_h\in U_h^m$，

$$\|u_h-v_h\|^2 \le CB_h(u_h-v_h,u_h-v_h)=CB_h(u-u_h,u_h-v_h)$$
$$\le C\|u-v_h\|\|u_h-v_h\|.$$

根据三角不等式，有

$$\|u-u_h\|\le\|u-v_h\|+\|v_h-u_h\|\le C\inf_{v_h\in U_h^m}\|u-v_h\|.$$

令 $v_h=\mathcal{R}u$，由不等式（30），可得

$$\|u-u_h\|\le C\|u-\mathcal{R}u\|\le Ch^{m-1}\|u\|_{H^{m+1}(\Omega_0\cup\Omega_1)},$$

从而证明完成。 □

最终，我们通过对偶论证证明 L^2 误差估计。令 $\phi\in H^4(\Omega_0\cup\Omega_1)$ 为问题的解

$$\begin{cases}\Delta(\beta(x)\Delta\phi)=u-u_h, & \text{in } \Omega_0\cup\Omega_1,\\ \phi=\partial_{\mathbf{n}}\phi=0, & \text{on } \partial\Omega,\\ [\![\phi]\!]=[\![\beta\Delta\phi]\!]=\mathbf{0}, & \text{on } \Gamma,\\ [\![\nabla\phi]\!]=[\![\nabla(\beta\Delta\phi)]\!]=0, & \text{on } \Gamma,\end{cases} \tag{32}$$

并满足

$$\|\phi\|_{H^4(\Omega_0\cup\Omega_1)}\le C\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{33}$$

详见 [34] 正则性假设的相关细节。

由 Galerkin 正交性（29）和定理 4，我们推得

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}^2=B_h(\phi,u-u_h)=B_h(\phi-\mathcal{R}\phi,u-u_h)$$
$$\le C\|\phi-\mathcal{R}\phi\|\|u-u_h\|$$
$$\le\begin{cases}Ch^2\|u\|_{H^3(\Omega_0\cup\Omega_1)}, & m=2,\\ Ch^{m+1}\|u\|_{H^{m+1}(\Omega_0\cup\Omega_1)}, & m\ge 3.\end{cases}$$

我们将已证明的结果总结为以下定理

定理5。 假设定理*4* 中的条件以及假设 (33) 成立，则有

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}&\le Ch^2\|u\|_{H^3(\Omega_0\cup\Omega_1)}, \quad m=2,\\ \|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}&\le Ch^{m+1}\|u\|_{H^{m+1}(\Omega_0\cup\Omega_1)}, \quad m\ge 3,\end{aligned} \tag{34}$$

5. Numerical Results

本节中，我们进行了一系列数值实验，以测试所提方法的性能。对于精度 $2 \le m \le 6$，例1、2、4和5中使用的罚参数和阈值 $\#S$ 列于表 1。对于所有例子，方程（ a_1、 a_2、 a_3、 a_4，边界 g_1， g_2 以及右端项 f（1）中的跳跃条件均根据精确解选取。界面上的积分以及曲域上的积分，例如

$$\int_{K^0} h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \int_{K^1} h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \int_{\Gamma_K} h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{s}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^\Gamma,$$

数值格式中的计算由 PHG软件包实现 [39]。

例1. 我们首先考虑定义在正方形区域 $\Omega = (-1,1)^2$ 上的一个问题，其中包含一个圆形界面。该界面由水平集函数描述

$$\phi(x,y) = x^2 + y^2 - r^2, \quad r = 0.5, \tag{35}$$

见图5。精确解选为

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{x^2+y^2}, & \text{in } \Omega_0, \\ 0.1(x^2+y^2)^2 - 0.005\, ln(x^2+y^2), & \text{in } \Omega_1, \end{cases}$$

系数为

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{in } \Omega_0, \\ 10, & \text{in } \Omega_1. \end{cases}$$

我们在一系列网格上求解界面问题，网格尺寸为 $h = 1/10,\ 1/20,\ 1/40,\ 1/80$。在 $|||\cdot|||$ 和 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 下的收敛历史如图6所示。能量范数下的误差以 $O(h^{m-1})$的速度递减，其中 m固定。对于 L^2 误差，当 $O(h^2)$时，收敛速度为 $m = 2$；当 $O(h^{m+1})$时，收敛速度为 $m \ge 3$。这些结果与定理4 和定理5中的理论分析一致。

m	2	3	4	5	6
η	20	20	20	35	35
$\#S$	12	18	25	32	55

m	2	3
η	35	50
$\#S$	25	45

Table 1. 用于二维和三维示例的 η 和 $\#S$ 。

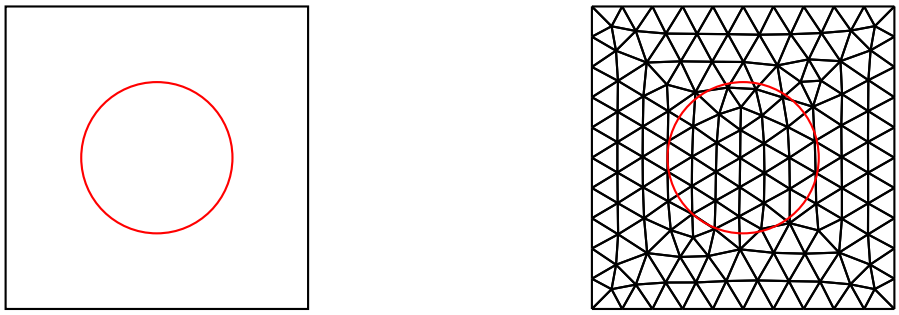


Figure 5. 例1中的界面和网格。

例2。 在本例中，我们通过求解正方形区域 $\Omega = (-1,\ 1)^2$上的双调和界面问题，检验高阶逼近性质。界面仍由式（35）给出。精确解取为

$$u(x,y) = \begin{cases} \sin^2(2x)\sin^2(2y), & \text{in } \Omega_0, \\ \sin(2x)\sin(2y), & \text{in } \Omega_1, \end{cases}$$

重构阶数 m 范围为 2 到 6。将 Ω 剖分为尺寸为$h = 0.15$、0.075、0.0375、0.01875 的三角形网格。数值结果见图7。可以看出，所有收敛率均与理论结果一致，并且通过采用高阶重构，我们的方法能够达到高阶精度。

例3. 在本例中，我们求解具有强间断系数的 β问题。该问题定义在区域 $\Omega = (-1,\ 1)^2$ 上，且具有一个椭圆界面（见图8），

$$\phi(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

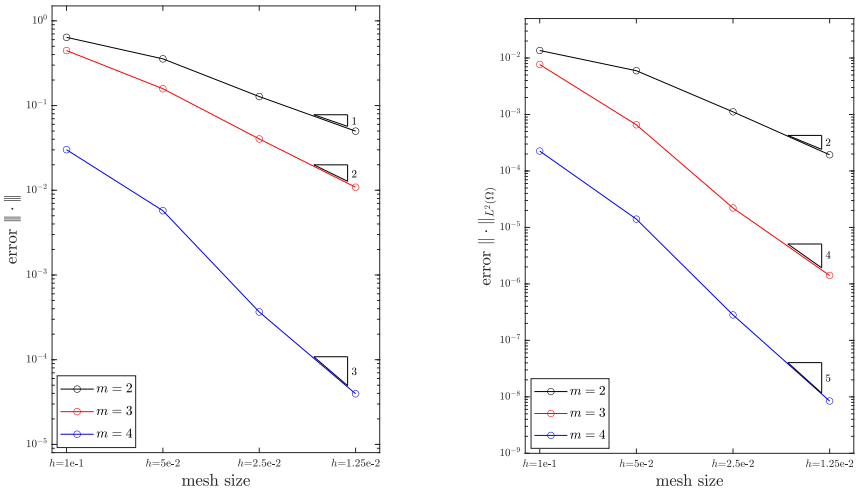


FIGURE 6. 例1中，$|||\cdot|||$（左）和$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$（右）下的收敛历史。

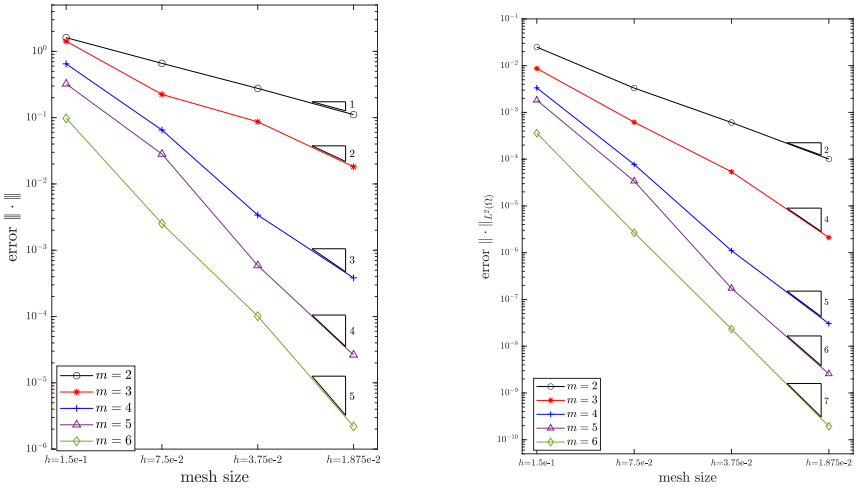


FIGURE 7. 在例2中，$|||\cdot|||$（左）和$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$（右）条件下的收敛历史。

精确解 $u(x,\ y)$ 和系数 β 选取为

$$u(x,y)=\begin{cases}\sin(2x^2+y^2+2)+x, & (x,y)\in\Omega_0,\\ 0.1\cos(1-x^2-y^2), & (x,y)\in\Omega_1,\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}1, & (x,y)\in\Omega_0,\\ 100, & (x,y)\in\Omega_1.\end{cases}$$

我们必须使用较大的罚项 η 来处理 β中的大跳跃，见表 2。图 9 所示的数值结果表明，误差 $|||u-u_h|||$ 和 $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$ 仍然趋于零，且收敛速率与我们在定理（4）和（5）中预测的一致。此例展示了所提出方法的鲁棒性。

m	2	3	4
η	50	100	300
$\#S$	12	18	25

TABLE 2. 在例3中使用的 η 和$\#S$ 。

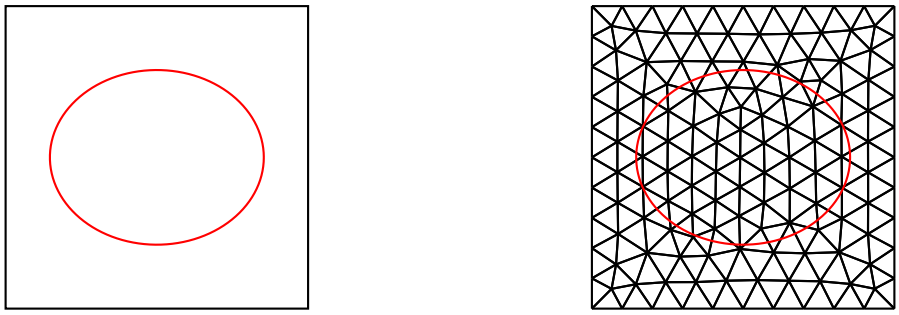


FIGURE 8. 例3中的界面和网格。

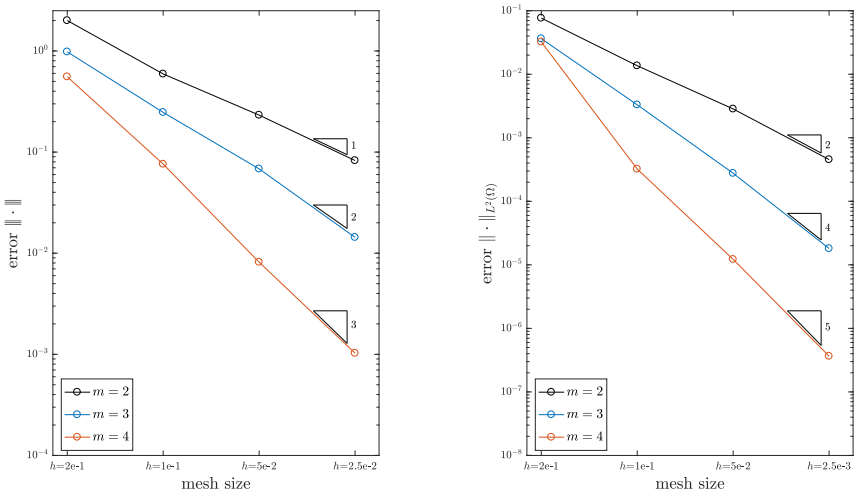


FIGURE 9. 例3中在 $|||\cdot|||$ （左）和$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ （右）下的收敛历史。

例4。 在本例中，我们求解区域 Ω 上的问题 $=(-1,1)^2$ 其界面呈五角星形。界面由极坐标给出（见图 10），

$$r=\frac{1}{2}+\frac{\sin(5\theta)}{7}.$$

我们选择与例3相同的解析解，并将系数取为

$$\beta=\begin{cases}1, & (x,y)\in\Omega_0,\\ 10, & (x,y)\in\Omega_1.\end{cases}$$

我们采用初始网格尺寸 $h=1/10$ ，并对网格依次进行三次加密以开展数值测试。能量范数和 L^2 范数下的收敛率绘于图9。由图11 可见， $|||\cdot|||$ 和$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 下的收敛率分别为 $m-1$ 和 $m+1$ （$m=2$情况除外），这仍与理论结果一致。

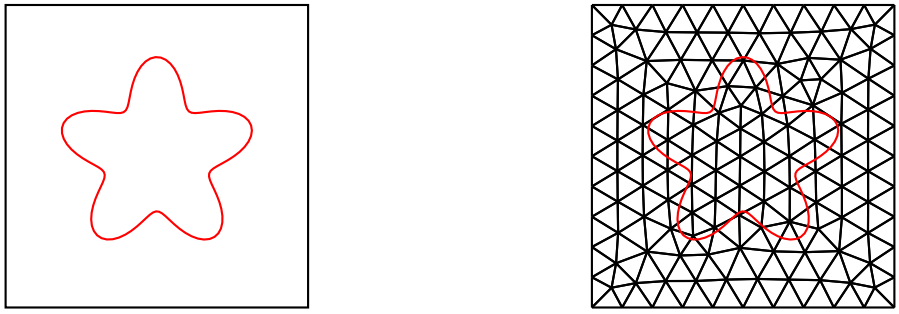


FIGURE 10. 例4中的界面和网格。

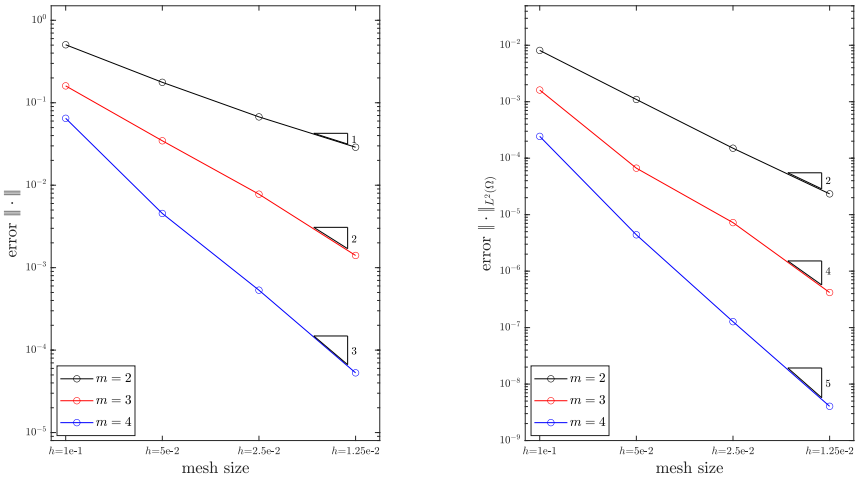


FIGURE 11. 例4中，$\|\cdot\|$（左）和$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$（右）的收敛历史。

例5。W　　本例中，我们求解一个三维双调和界面问题。计算区域是一个立方体 $\Omega = (0,1)^3$，其内部包含一个球形界面（见图 12），

$$\phi(x,y,z) = (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 - r^2, \quad r = 0.35.$$

我们选择系数和精确解如下：

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{inside } \Gamma, \\ 2, & \text{outside } \Gamma, \end{cases}$$

$$u(x,y,z) = \begin{cases} \cos(x^2+y^2+z^2), & \text{inside } \Gamma, \\ \sin(x)\sin(y)\sin(z), & \text{outside } \Gamma. \end{cases}$$

我们使用 Gmsh 软件生成的四面体网格 [13]。我们在五种不同的网格上求解该问题，重构阶数为 $m = 2, 3$。自由度的立方根与误差之间的关系如图 13所示，这也与我们的理论预测完全一致。

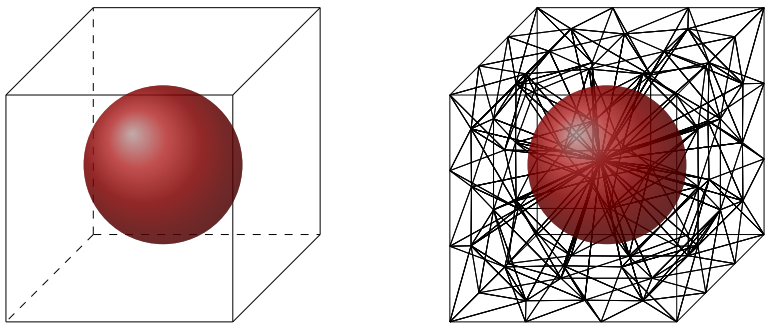


FIGURE 12. 例5中的界面和网格。

6. CONCLUSION

本文提出了一种任意阶不连续 Galerkin 扩展有限元方法，用于求解双调和界面问题。离散公式通过对称内罚方法获得，跳跃条件则通过 Nitsche 技巧以弱形式施加。逼近空间由补片重构算子构造，其自由度数量与逼近阶数无关。该方法易于实现，且可达到高阶精度。结果表明，在能量范数和 L^2 范数下，数值误差具有最优收敛率。我们通过一系列数值实验验证了理论结果以及所提方法的效率。

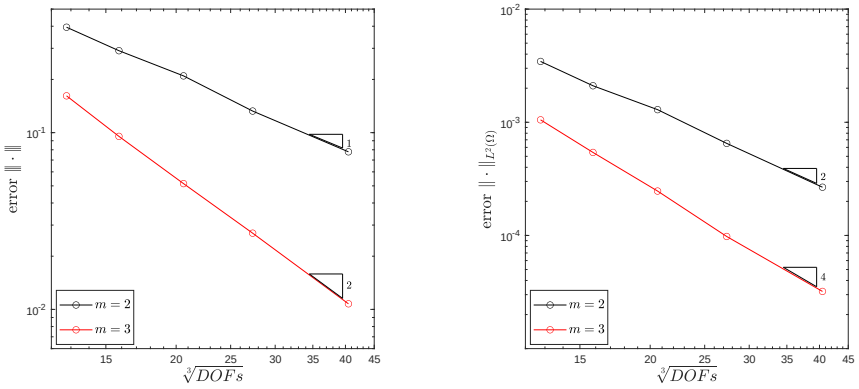


FIGURE 13. 在 $|||\cdot|||$（左）和 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$（右）条件下的收敛历史 in 例5。

REFERENCES

1. R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 第二版, 《纯粹与应用数学》（阿姆斯特丹）丛书, 第 140 卷, Elsevier/Academic Press, 阿姆斯特丹, 2003 年。2. H. Blum 和 R. Rannacher, *On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners*, Math. Methods Appl. Sci. 2 (1980), 第 4 期, 556–581。3. S. C. Brenner 和 L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 第三版, 《应用数学丛书》, 第 15 卷, Springer, 纽约, 2008 年。4. E. Burman, *Ghost penalty*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), 第 21-22 期, 1217–1220。5. E. Burman、M. Cicuttin、G. Delay 和 A. Ern, *An unfitted hybrid high-order method with cell agglomeration for elliptic interface problems* **43** 2021 2, 859 882 , SIAM J. Sci. Comput. ( ), 第 A–A 期。6. E. Burman、S. Claus、P. Hansbo、M. G. Larson 和 A. Massing, *CutFEM: discretizing geometry and partial differential equations* **104** 2015 7, 472 501 , Internat. J. Numer. Methods Engrg. ( ), 第 – 期。7. E. Burman、P. Hansbo 和 M. Larson, *Cut bogner-fox-schmit elements for plates*, Adv. Model. a nd Simul. in Eng. Sci. 7 (2020), 第 1 期, 27。8. E. Burman、P. Hansbo 和 Larson. M., *Cutfem based on extended finite element spaces*, (2021), Arxiv:2101.10052。9. Y. Cai、J. Chen 和 N. Wang, *A Nitsche extended finite element method for the biharmonic interface problem*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 382 4251529 10 2021 113880, 24 ( ), 论文编号。MR . 10. *A Nitsche mixed extended finite element method for the biharmonic interface problem*, Math. Comput. Simulation 203 (2023), 112–130。11. B. Cockburn、B. Dong 和 J. Guzmán, *A hybridizable and superconvergent discontinuous Galerkin method for biharmonicproblems*, J. Sci. Comput. 40 (2009), 第 1-3 期, 141–187。12. T. Dupont 和 L. R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces* **34** 1980 150, , Math. Comp. ( ), 441 463 第 – 期。13. C. Geuzaine 和 J. F. Remacle, *Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 79 (2009), 第 11 期, 1309–1331。14. C. G¨urkan 和 A. Massing, *A stabilized cut discontinuous Galerkin framework for elliptic boundary value and interfaceproblems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 348 (2019), 466–499。15. Y. Han、X. Wang 和 X. Xie, *An interface/boundary-unfitted eXtended HDG method for linear elasticity problems*, J. Sci. Comput. 94 4543179 16 2023 3, 61, 29 ( ), 第 期, 论文编号。MR . A. Hansbo 和 P. Hansbo, *An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002), 第 47-48 期, 5537–5552。16. P. Hansbo 和 M. G. Larson, *A discontinuous Galerkin method for the plate equation*, Calcolo 39 (2002), 第 1 期, 41–59。17. P. Hansbo、M. G. Larson 和 S. Zahedi, *A cut finite element method for a Stokes interface problem*, Appl. Numer. Math. 85 (2014), 90–114。18. I. Harari 和 E. Shavelzon, *Embedded kinematic boundary conditions for thin plate bending by Nitsche's approach*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 92 2979251 20 2012 1, 99 114 ( ), 第 – 期。MR . X. He、F. Song 和 W. Deng, *A stabilized nonconforming Nitsche's extended finite element method for Stokes interface problems* **27** 2022 5, 2849 2871 , Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B ( ), 第 – 期。MR 4405301 19. P. Huang、H. Wu 和 Y. Xiao, *An unfitted interface penalty finite element method for elliptic interface problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 323 (2017), 439–460。20. T. J. R. Hughes、G. Engel、L. Mazzei 和 M. G. Larson, *A comparison of discontinuous and continuous Galerkin methods based on error estimates, conservation, robustness and efficiency*, 不连续Galerkin方法（罗德岛州纽波特, 1999）, 《计算机科学与工程讲义》, 第 11 卷, Springer, 柏林, 2000 年, 第135–146页。21. A. Johansson 和 M. G. Larson, *A high order discontinuous Galerkin Nitsche method for elliptic problems with fictitious boundary* **123** 2013 4, 607 628 , Numer. Math. ( ), 第 – 期。22. R. Li、Q. Liu 和 F. Yang, *A reconstructed discontinuous approximation on unfitted meshes to H and H interface* (curl) (div), *problems* **403** 2023 115723, 27 Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ( ), 第 A 部分, 论文编号。23. R. Li、P. Ming、Z. Sun、F. Yang 和 Z. Yang, *A discontinuous Galerkin method by patch reconstruction for biharmonic problem* **37** 2019 4, 524 540, [563 580] , J. Comput. Math. ( ), 第 – 期。此前给出的页码为 – 。

26. R. Li, P. Ming, Z. Sun, and Z. Yang, *An arbitrary-order discontinuous Galerkin method with one unknown per element*, J. Sci. Comput. **80** (2019), no. 1, 268–288. 27. R. Li, P. Ming, and F. Tang, *An efficient high order heterogeneous multiscale method for elliptic problems*, Multiscale Model. Simul. **10** (2012), no. 1, 259–283. 28. R. Li and F. Yang,
A reconstructed discontinuous approximation to Monge-Ampere equation in least squares formation, arXiv:1912.05822 (2019). 29. ,
A discontinuous Galerkin method by patch reconstruction for elliptic interface problem on unfitted mesh, SIAM J. Sci. Comput. **42** (2020), no. 2, A1428–A1457. 30. , *A sequential least squares method for Poisson equation using a patch reconstructed space*, SIAM J. Numer. Anal. **58** (2020), no. 1, 353–374. 31. T. Lin, Y. Lin, W.-W. Sun, and Z. Wang, *Immersed finite element methods for 4th order differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **235** 2794188 32 2011 13, 3953 3964 ( ), no. – . MR . H. Liu, L. Zhang, X. Zhang, and W. Zheng,
Interface-penalty finite element methods for interface problems in H^1, $\mathbf{H}$(curl) and $\mathbf{H}$(div), Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ( ), **367** 2020 113137, 16 ( ), no. – . MR . J. Liu, Y. Tang, and Y. Zhao,
On the equilibrium of the Poisson-Nernst-Planck-Bikermann model equipping with the steric and correlation effects, Commun. Math. Sci. ( ), **21** 2023 2, 485 515 ( ), no. – . MR 4545836 34 ¨ . I. Mozolevski and E. Suli,
A priori error analysis for the hp-version of the discontinuous Galerkin finite element methodfor the biharmonic equation, Comput. Methods Appl. Math. **3** (2003), no. 4, 596–607. 35. I. Mozolevski, E. S¨uli, and P. R. B¨osing,
hp-version a priori error analysis of interior penalty discontinuous Galerkin finiteelement approximations to the biharmonic equation, J. Sci. Comput.**30** (2007), no. 3, 465–491. 36. S. Nicaise, *Polygonal interface problems for the biharmonic operator*, Math. Methods Appl. Sci. **17** (1994), no. 1, 21–39. MR 1257586 37. H. Wu and Y. Xiao,
An unfitted hp-interface penalty finite element method for elliptic interface problems, J. Comput. Math. **37** (2019), no. 3, 316–339. 38. F. Yang and X. Xie, *An unfitted finite element method by direct extension for elliptic problems on domains with curvedboundaries and interfaces*, J. Sci. Comput.**93** (2022), no. 3, Paper No. 75, 26. 39. L. Zhang,
A parallel algorithm for adaptive local refinement of tetrahedral meshes using bisection, Numer. Math. Theory Methods Appl. **2** (2009), no. 1, 65–89. 40. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and D. D. Fox, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, seventh ed., Elsevier/Butterworth Heinemann, 阿姆斯特丹, 2014.

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, P.R. China
Email address: yanc@stu.pku.edu.cn

CAPT, LMAM and School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, P.R. China
Email address: rli@math.pku.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, P.R. China
Email address: qcliu@pku.edu.cn