arXiv:2305.03436v1 [quant-ph] 5 May 2023

非平衡量子测温的侵扰性

Francesco Albarelli, [1, 2, *] Matteo G. A. Paris, [1, 2] Bassano Vacchini, [1, 2] 和 Andrea Smirne[1, 2]“Aldo Pontremoli”物理系，米兰大学，*via Celoria 16*，*20133* 米兰，意大利[2]国家核物理研究所，米兰分部，*via Celoria 16*，*20133* 米兰，意大利

使用量子探针作为温度计所预期的主要优势之一，是其具有非侵入性，即对热样品的扰动可以忽略不计。然而，侵入性很少得到明确研究。在此，我们聚焦于玻色样品中的纯退相干自旋探针，展示量子探针获取的温度信息与由于相互作用而被样品吸收的热量之间存在非平凡关系。我们表明，对探测时间进行优化，即采用时间最优探测方案，还能够限制实验每次测量中样品吸收的热量。对于这类时间最优方案，我们证明，采用非常强的探针-样品耦合是有利的，因为在此 régimen 下，精度随耦合强度线性提高，而每次测量的热量则饱和于有限值。由于在纯退相干模型中，吸收热量对应于耦合和解耦探针与样品所需的外功，我们的结果也代表了分析量子测温的热力学和能量成本的第一步。

引言。——估计量子系统的温度是一项具有基础性和实际重要性的任务。许多量子技术需要极低温度，以利用脆弱的非经典特征，因此必须在尽可能少地扰动系统的同时，极其准确地测定温度。这正是量子测温的目标；量子测温是一个蓬勃发展的研究领域，处于量子计量学、量子热力学和开放量子系统的交叉地带 [1, 2]。人们已广泛讨论平衡量子测温的准确度 [3–7]。超越平衡态后，也可以通过与热样品相互作用的量子探针来估计温度；这通常通过将探针建模为开放量子系统 [8] ，并将样品建模为玻色 [3, 9–14] 或费米 [14–16] 环境来研究，也可以采用碰撞方法 [17–20]。类似地，开放量子系统也可用作探针，以估计其他环境参数 [21–24]并进行量子噪声谱学 [25–27]。

在本文中，我们研究探针与样品相互作用所引起的样品初始热态扰动。我们将非平衡测温协议的这一特征称为侵入性 [28]。为实现这一目标，有必要超越开放量子系统的标准范式，并同时考虑环境的动力学，尤其是在强耦合范围内。事实上，研究环境动力学正变得至关重要 [29–36], ，尤其是在强耦合量子热力学的背景下 [37–39]。此外，由于通常将系统-环境动力学建模为纯哈密顿动力学，因此尚不清楚样品在与探针相互作用后是否会再次热化。有趣的是，在连续极限下，探针和样品的热化实际上可能源自纯哈密顿动力学 [40]。

具体而言，我们提出用以下指标量化基于探针的测温方案的侵入性：

* francesco.albarelli@gmail.com

样品吸收的平均热量，这一选择以量子热力学为依据。我们考虑自旋-玻色子模型 [41], ，其中由谐振子构成的环境是一个热样品，并与自旋探针耦合（耦合可能很强）。我们特别关注一种不会改变探针内能的耦合，它会引发纯退相干动力学，可用于测温 [12, 27, 42, 43]。由于探针不会耗散能量，人们可能会认为该模型的热力学特性微不足道。然而，耦合和解耦探针与样品需要外功，因此热量会耗散到环境中 [44–46], ，使样品偏离其热平衡初始态。

探针的退相干动力学。——我们考虑一个有限维探针系统，其哈密顿量为 $H_S = \sum_j \epsilon_j |j\rangle\langle j|$, ，其中 $|j\rangle$ 为能量本征基。环境，即样品，被建模为由一组互不相互作用的谐振子构成，其自由哈密顿量为 $H_E = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$。系统与环境通过相互作用哈密顿量 $H_I = A_S \otimes \left(\sum_k f_k b_k^\dagger + f_k^* b_k\right)$耦合，其中 $A_S = \sum_j g_j |j\rangle\langle j|$。联合系统-环境态幺正演化为 $\rho_{SE}(t) = U(t)\rho_{SE}(0)U(t)^\dagger$，其中 $U(t) = \exp\left[-it(H_S + H_I + H_E)\right]$。由于 $[H_S, A_S] = 0$，系统经历纯退相干动力学。能级布居是运动常数，而能量本征基下约化密度矩阵的非对角元 $\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\left[\rho_{SE}(t)\right]$ 按如下形式演化：$\rho_S(t) = \sum_{ij} \rho_{S,ij}(0) e^{-[\Delta_{ij}(t) + i\varphi_{ij}(t)]} |i\rangle\langle j|$, ，其中 $\Delta_{ij}(t)$为适当的实退相干函数， $\varphi_{ij}(t)$为相位，详见附录A。

我们进一步假设初始状态为因子化态 $\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$，且环境初始时处于吉布斯热态 $\rho_E(0) = e^{-\frac{H_E}{T}}/Z_T$，其中 $Z_T = \mathrm{Tr}[e^{-\frac{H_E}{T}}]$是配分函数。我们选取单位，使得$\hbar = 1$ 和 $\kappa_B = 1$，从而温度和能量均以频率为单位。退相干函数

$\Delta_{ij}(t) = (g_i - g_j)^2 \Delta_T(t)$ 取决于温度：

$$\Delta_T(t) = \int_0^\infty d\omega\, J(\omega) \frac{1-\cos\omega t}{\omega^2} \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right). \quad (1)$$

我们还非正式地取了连续极限 $\sum_k |f_k|^2 \mapsto \int_0^\infty d\omega J(\omega)$，其中 $J(\omega)$ 是谱密度，包含样品的态密度以及耦合参数的非均匀分布 f_k。相位 $\varphi_{ij}(t)$ 既包括由 H_S 引起的自由演化，也包括相互作用带来的贡献。不过，它们不依赖于 T，且与能量考量无关，因此我们将忽略它们（严格来说，是在适当的旋转坐标系中进行处理）。

样品吸收的热量。—我们将样品吸收的平均热量定义为其哈密顿量期望值的变化 [38] $Q(t) = \mathrm{Tr}_E [H_E (\rho_E(t) - \rho_E(0))]$，其中 $\rho_E(t) = \mathrm{Tr}_S \rho_{SE}(t)$。在我们考虑的退相干模型中，即使系统能量守恒，环境能量也不是守恒量，因为 $[H_B, H_I] \neq 0$。吸收热量可通过求解整体动力学得到（细节见附录A，另见参考文献 [33]）；在连续极限下，其表达式为

$$Q(t) = 2\left(\sum_j \rho_{S,jj}(0) g_j^2\right) \underbrace{\int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{1-\cos\omega t}{\omega}}_{\equiv \mathbb{Q}(t)}. \quad (2)$$

请注意，对于这一纯退相干模型，热量始终为正：环境总是吸收能量。此外，热量与温度无关，其时间依赖性完全由“裸”谱密度决定。在方程（1）和（2）中，我们突出显示了概括时间依赖性的量 $\Delta_T(t)$ 和 $\mathbb{Q}(t)$。初始态 $\rho_S(0)$ 只会作为一个整体乘数影响吸收热量；当 $g_j^2 = g_k^2\ \forall j,k$ 时，热量 $Q(t)$ 与 $\rho_S(0)$ 无关。

对于纯退相干，吸收热量 $Q(t)$也恰好等于耦合系统与环境以及解除二者耦合所需的功 [45, 46]。由于我们没有对耦合和解除耦合过程进行显式建模，$Q(t)$ 表示瞬时建立和解除耦合所需的功，即参数 g_j 在时刻 0 从 0 跃变至其固定值，并在时刻 t 反向跃变。因此，对于基于退相干的探测方案，我们研究的不仅是侵入性（即对样品的加热），还包括测温的功耗（不计态制备 [47, 48] 和测量 [49, 50] 的成本）。

具有欧姆型谱密度的二能级探针。——为具体起见，从现在起我们聚焦于一个二能级探针，它通过算符 $A_S = \lambda\sigma_z$耦合，其中 λ是无量纲的相互作用强度参数，即式（1）中的 $g_0 = -g_1 = \lambda$。退相干函数为 $\Delta_{01}(t) = \Delta_{10}(t) = 4\lambda^2\Delta_T(t)$，吸收热量为 $Q(t) = 2\lambda^2\mathbb{Q}(t)$。我们还聚焦于如下形式的谱密度 $J(\omega) = \omega\,(\omega/\omega_c)^{s-1} C(\omega, \omega_c)$，其中 s 是所谓的欧姆性参数，它区分三种情形：当 $s = 1$时为欧姆型，当 $0 < s < 1$ 时为亚欧姆型，当 $s > 1$时为超欧姆型。

在正文中，我们给出了指数截断 $C(\omega, \omega_c) = e^{-\omega/\omega_c}$ 的结果。该截断可使退相干函数具有闭式表达式——这一表达式最初在参考文献 [12] 中推导，并在附录 A2中给出——同时也使吸收热量具有简单的公式（2）

$$\mathbb{Q}^{\exp}(t) = \omega_c\Gamma(s)\left(1 - \frac{\cos\left[s\arctan\left(t\omega_c\right)\right]}{\left(t^2\omega_c^2+1\right)^{\frac{s}{2}}}\right), \quad (3)$$

其中 $\Gamma(s)$是伽马函数。在附录 B 中，我们展示了高斯截断和硬截断下的其他结果；对于这两种截断，交换的热量都可以解析求得，见附录 A2，而退相干函数（1）则通过数值积分获得。虽然某些现象学特征有所不同，但采用不同截断时，主要的定性特征依然成立。

温度测量性能与吸收热量的关系。— 温度是一个需要通过对探针进行测量来估计的参数。估计的准确性受测量选择的影响，形式上，该选择是一个正算符值测度（POVM）；同时也受经典˜估计量 T 的影响，后者将观测结果转化为温度估计。由于温度是一个能量尺度参数，通常 [3, 6, 51, 52], 且或许更恰当地 [53], 考虑相对估计误差。因此，我们用信噪比（SNR）来量化估计准确性，它是估计量相对均方误差 $\Delta^2\tilde{T}/T^2$ 的倒数。

对于无偏估计量，量子 Cramér-Rao 界（QCRB） [54, 55]给出

$$\frac{T^2}{\Delta^2\tilde{T}} \leq MT^2\mathcal{F}[\rho_T(t)] \equiv M\mathcal{R}_T(t), \quad (4)$$

其中，$\mathcal{F}[\rho_T]$ 是关于参数 T的态 ρ_T 的量子费 Fisher 信息（QFI），表示为 $\mathcal{F}[\rho_T] = \mathrm{Tr}\,[\partial_T\rho_T L_T]$，其中厄米对称对数导数算符 L_T 由 $2\partial_T\rho_T = L_T\rho_T + \rho_T L_T$定义。我们还引入了无量纲量子信噪比（QSNR） [56] $\mathcal{R}_T = T^2\mathcal{F}[\rho_T]$。这里，$M$ 是实验的相同重复次数；当 M 较大时，通过选择最优的测量和估计量，该界可渐近达到。对于处于初始态 $\cos(\theta/2)\,|0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle$的两能级探针，温度估计的 QFI 为 $\mathcal{F}[\rho_T(t)] = \left[\sin\theta\, 4\lambda^2\,\partial_T\Delta_T(t)\right]^2 / \left(\exp\left[8\lambda^2\Delta_T(t)\right] - 1\right)$，并可通过对 σ_x 的本征态进行投影测量来达到 [12]；平衡叠加态 $\theta = \pi/2$ 是最优的，在下文中始终采用该状态。

图 1 展示了相对误差和吸收热量随探测时间变化的情况。图中参数的选取旨在突出这些评价指标可能呈现的若干不同特征。首先，样品不可避免地会吸收一定量的热量，因为这源于将温度信息印刻到探针上的同一相互作用

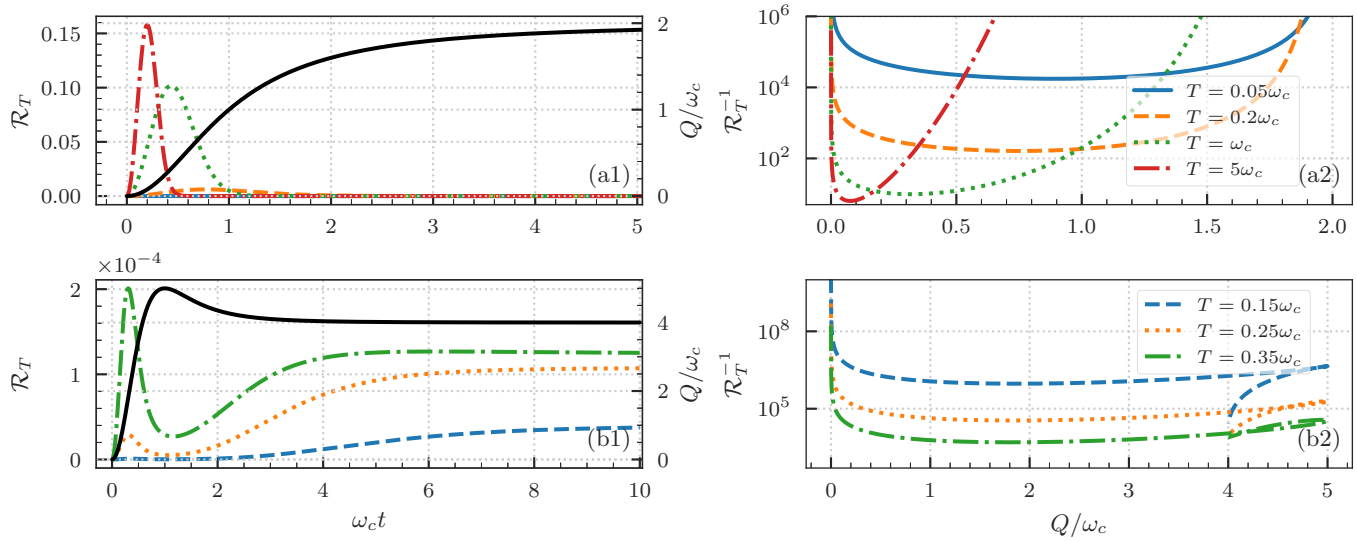


图 1。上方 [面板 (a)]：欧姆谱密度 $s = 1$；下方 [面板 (b)]：超欧姆谱密度 $s = 3$；二者均对应耦合 $\lambda = 1$。(a1) 和 (b1) 面板：吸收热量（黑色实线，单位标于右侧）和量子信噪比（不同温度对应不同颜色的线，单位标于左侧）随时间的变化。(a2) 和 (b2) 面板：温度估计的相对误差与吸收热量的参数图。每条线代表一个不同的温度，如图例所示。

。因此，在动力学演化的初始阶段，这两个量始终存在权衡：若要提高精度，就必须允许样品吸收热量。对于此模型，吸收热量始终为正 [45]，，但一般会随时间呈非单调变化，例如面板（b1）中 $s = 3$对应的曲线所示。不过， $Q(t)$ 会趋于一个有限的渐近值 $\lim_{t\to\infty} Q(t)$ $\propto \lambda^2\omega_C$。相比之下，量子信噪比可能先随时间达到最大值，随后衰减至零，如面板（a1）中 $s = 1$的情况所示，此时渐近探针态不具有相干性。在这种情况下，参数图显示，经过初始的权衡区间后，即使我们让样品吸收更多热量，量子信噪比也不会增加。除此之外，量子信噪比也可能趋于一个有限值，如面板（b1）中 $s = 3$所示。这种行为源于俘获相干 [57, 58]，，即探针态在渐近情况下不会完全退相干。在这种情况下，面板（b3）的参数图显示，初始权衡之后还可能出现吸收热量和误差同时减小的区间。这些行为源于两个量呈现显著变化所经历的时间尺度不同，如图 1左侧的面板（a1）和（b1）所示。这表明，除非处于出现俘获相干的状态，否则最优探测策略应采用较短的相互作用时间，以同时尽量减小相对误差和对样品的侵入性。事实上，在后一种情况下，延长探针与样品的相互作用时间可能会提高精度，同时不再增加吸收热量。值得注意的是，正如附录 B1所示，这项分析的关键特征并不显著依赖于截断值的选取。

时间最优方案。— 为了明确量化时间在探测方案中的作用，必须将实验总时间 τ 视为一种资源。每次实验的探测时间 t 可以进行最优选择，相应地确定实验总次数 $M = \tau/t$（假设准备初始态和执行测量所需的时间可以忽略）；这种方法在频率估计中很常见 [59–61]。虽然已有研究探讨时间最优量子测温，但其考虑的是马尔可夫半群演化 [3, 62]，，这可能无法准确描述探针的短时动力学 [8]。

根据量子 Cramér-Rao 界，在总时间 τ 内可达到的最佳精度为

$$\frac{T^2}{\Delta^2\tilde{T}} \leq \tau \max_t \frac{\mathcal{R}_T}{t} \equiv \tau\,\mathfrak{R}_T, \tag{5}$$

当实验重复多次时，可在极限 $\tau \gg t$ 下达到。对于时间最优方案，最优量子信噪比率 $\mathfrak{R}_T$ 是相关的优值指标；时间 $t_{\rm opt} = \text{argmax}_t \frac{\mathcal{F}[\rho_T(t)]}{t}$ 是实验每次测量的最优时长，发挥着重要作用。

我们通过数值求解式（ t中的优化问题5），研究时间最优方案。图2 展示了最优量子信噪比率 $\mathfrak{R}_T$ 以及实验每次测量吸收的热量 $Q(t_{\rm opt})$，二者均分别以s 为变量，展示了左侧面板中 T 的三个取值，以及右侧面板中 T 的三个欧姆性区间。我们还绘出了相应的最优探测时间 $t_{\rm opt}$。注意， $Q(t_{\rm opt})$ 通过 $t_{\rm opt}$隐式地依赖于温度。

从图 2的结果可以看出，随着s 减小，测温精度提高，而吸收的热量减少。对于

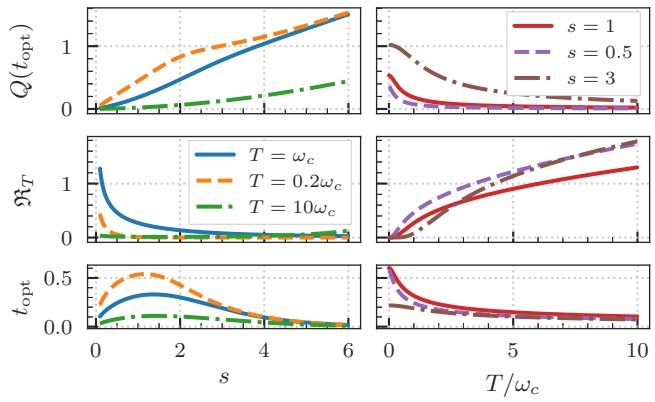


图2。每次测量吸收的热量（上排图）、最优量子信噪比率（中排图）和最优探测时间（下排图）随 s 的变化： $T/\omega_c = 0.2$、1、10 时（左列图）；以及随 T 的变化： $s = 1/2$、1、3 时（右列图）。两种情况下均有 $\lambda = 1$。

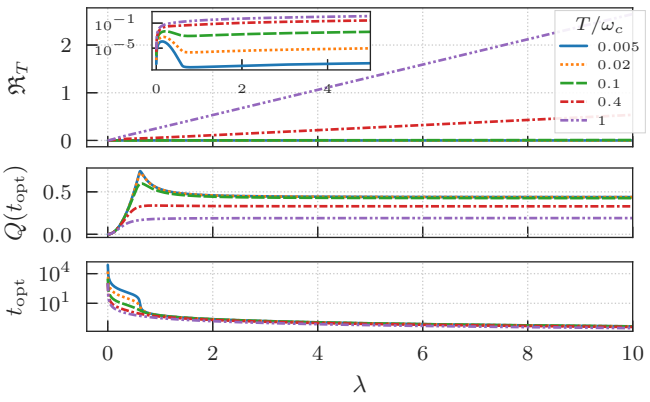


图 3. 时间最优量子信噪比率（上图，插图采用对数刻度）、每次测量吸收的热量（中图）和最优时间（下图）随 λ 的变化关系，其中 $s = 1$，不同温度值如图例所示。

温度升高时，也会出现类似的行为。因此，我们得出结论：时间最优测温不仅有助于充分利用实验可用的总时间，也能有效控制侵入性。我们还注意到，较小的 s 在低温区域尤其有利，因为在 T的最低阶近似下，有 $\mathcal{R}_T \propto T^{2(s+1)}$（见附录 A 2）。

耦合强度的作用。—使用量子系统作为探针这一想法，乍看之下似乎意味着较小但确实不可忽略的耦合强度 λ 更为可取，以尽可能减小探针对样品的影响。然而，考虑探针的侵入性后，我们表明情况未必如此。

一方面，在其他条件不变时，较强的耦合会增加环境吸收的热量，因为它在式（2）中表现为一个整体乘法因子。另一方面，它也会使系统更快地失去相干性，这意味着能更快地获取温度信息，从而缩短最优探测时间，在此期间吸收的热量也更少。如图3所示，整体而言，较大的 λ有利。虽然图 3 显示各个量并非随 λ单调变化，如 $0 < \lambda < 1$区域内的低温曲线所示，但我们可以看到，随着 λ 增大，吸收热量趋于一个常数，而最优量子信噪比率则随 λ线性增加。这是因为最优时间随 λ减小得足够快。图 3展示了 $s = 1$的结果，而在附录 B2 中，我们表明，对于次欧姆和超欧姆谱密度，大λ 行为通常也成立。

假设最优时间较短（当 λ 足够大时确实如此），我们可以围绕 $t = 0$ 展开吸收热量 $Q(t)$ 和量子 Fisher 信息。一般来说，最低阶的前两项分别为二次项和四次项，这种行为与所谓的开放系统齐诺区间有关。量子系统 [60, 63, 64]。可能存在例外情况 [65]，但对于我们所考虑的谱密度，这一结论成立。保留四阶贡献至关重要，因为只有这样才能呈现非单调的时间依赖性，并研究最优探测时间的行为 [66]。通过这一优化，我们得到 $t_{\rm opt} \propto 1/\lambda$ 对于较大的 λ，因此 $Q(t)$ 随着 λ 的增大趋于一个常数，而$\mathfrak{R}_T$ 则呈线性增长，详见附录D 。尽管已有研究针对若干模型考察了耦合强度对量子测温精度的影响 [15, 67]并揭示了不同的行为，但此前尚未对时间最优性进行研究。

此外，我们可以将这些结果应用于自旋-j探针，它通过算符 $A_S = 2\lambda J_z$与样品耦合，并初始化为自旋猫态 $(|j, j\rangle + |j, -j\rangle)/\sqrt{2}$。此时，其动力学等价于在缩放 $\frac{1}{2}$下的自旋- $\lambda \mapsto 2j\lambda$探针，但在这一物理情境中， j 可以增大，而非 λ。然而，对于更高自旋，如何选择这样的初始探针态并不明显。在附录C 中，我们证明，在某些参数区间内，自旋猫态是最优的，并达到量子信道的最终计量学界限 [68, 69]。特别是，当 λ较大时，自旋猫探针是最优的，因此我们推测，当 j 较大时（固定 λ），它们也可能是最优的，这超出了我们数值计算所能达到的范围。

讨论。——在本篇快报中，我们分析了一种退相干测温方案，同时考虑探针中编码的信息，以及样品因与探针相互作用而发生的变化，即探测方案的侵入性。在光学量子计量学中，研究侵入性时会对样品吸收的光量加以限制 [70]，，例如脆弱的生物样品 [71]。类似地，我们用样品吸收的热量来量化量子测温中的侵入性。

我们已经证明，在时间最优方案中，温度估计的相对误差与侵入性

由探针与样品相互作用造成的侵入性，会随模型参数呈现与相对误差相同的变化趋势，这表明，最小化前者的策略也能限制后者。另一方面，在强耦合区域，相对误差与耦合强度成反比，而每次测量吸收的热量则趋于一个常数。这意味着，量子探针与样品之间的强相互作用能够带来最高效的探测策略。

超越纯退相干，研究探针能量可能发生变化的测温方案的侵入性将很有意义，例如使用量子热机作为温度计 [72, 73]。此外，还可以通过考虑能量涨落或考察后测量态 [74] 并扩展到使用探针 [75, 76]进行顺序测量的测温。

最后，我们强调，能量效率将日益成为所有量子技术都必须面对的重要问题 [77]。相位和频率估计的能量成本已有研究探讨 [47, 48], ，但可以说，这一领域仍处于起步阶段。我们的方法也是量子测温朝这一方向迈出的第一步，因为对于我们所考虑的纯退相干模型，环境吸收的热量恰好等于探针耦合与解耦所需的外功。

致谢。——我们感谢 C. Benedetti、A. Cande- loro 和 A. Saltini 进行了富有成效的讨论。作者感谢 MUR 通过“PON Ricerca e Innovazione 2014-2020”项目 EEQU 提供的财政支持。

[1] A. De Pasquale and T. M. Stace，载于《量子热力学：基本方面与新方向》，《物理学基础理论》，F. Binder、L. A. Correa、C. Gogolin、J. Anders 和 G. Adesso 编（Springer International Publishing，Cham，2018），第 503–527 页，arXiv:1807.05762。[2] M. Mehboudi、A. Sanpera 和 L. A. Correa，J. Phys. A 52，303001（2019），arXiv:1811.03988。[3] L. A. Correa、M. Mehboudi、G. Adesso 和 A. Sanpera，Phys. Rev. Lett. 114，1（2015），arXiv:1411.2437。[4] M. G. A. Paris，J. Phys. A 49，03LT02（2016），arXiv:1510.08111。[5] S. Campbell、M. G. Genoni 和 S. Deffner，Quantum Sci. Technol. 3，025002（2018）。[6] P. P. Potts、J. B. Brask 和 N. Brunner，Quantum 3，161 2019 1711 09827 ( )，arXiv: . .[7] M. Mehboudi、M. R. Jørgensen、S. Seah、J. B. Brask、J. Kołodyński 和 M. Perarnau-Llobet，Phys. Rev. Lett. 128，130502（2022），arXiv:2108.05932。[8] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，《开放量子系统理论》（Oxford University Press，2002）。[9] M. Brunelli、S. Olivares、M. Paternostro 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 86，012125（2012），arXiv:1205.3465。[10] A. H. Kiilerich、A. De Pasquale 和 V. Giovannetti，Phys. Rev. A 98，042124（2018），arXiv:1807.11268。[11] V. Cavina、L. Mancino、A. De Pasquale、I. Gianani、M. Sbroscia、R. I. Booth、E. Roccia、R. Raimondi、V. Gio- vannetti 和 M. Barbieri，Phys. Rev. A 98，050101（2018），arXiv:1806.05098。[12] S. Razavian、C. Benedetti、M. Bina、Y. Akbari- Kourbolagh 和 M. G. A. Paris，Eur. Phys. J. Plus 134，284（2019），arXiv:1807.11810。[13] M. M. Khan、M. Mehboudi、H. Terças、M. Lewenstein 和 M. A. Garcia-March，《物理评论研究》4，023191（2022），arXiv:2108.01754。[14] L. Oghittu 和 A. Negretti，《物理评论研究》4，023069（2022），arXiv:2202.09092。[15] M. T. Mitchison、T. Fogarty、G. Guarnieri、S. Campbell、T. Busch 和 J. Goold，Phys. Rev. Lett. 125，080402（2020），arXiv:2004.02911。[16] G. Mihailescu、S. Campbell 和 A. K. Mitchell，Phys. Rev. A 107，042614（2023），arXiv:2212.09618。[17] S. Campbell 和 B. Vacchini，EPL 133，60001（2021），arXiv:2102.05735.[18] S. Seah, S. Nimmrichter, D. Grimmer, J. P. Santos, V. Scarani 和 G. T. Landi，Phys. Rev. Lett. 123, 180602 (2019)，arXiv:1904.12551. [19] A. Shu, S. Seah 和 V. Scarani，Phys. Rev. A 102, 042417 (2020)，arXiv:2008.09319. [20] E. O’Connor、B. Vacchini 和 S. Campbell，Entropy 23, 1634 2021 2111 11345 ( )，arXiv: . . [21] C. Benedetti、F. Buscemi、P. Bordone 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 89, 032114 (2014)，arXiv:1311.4135. [22] M. A. C. Rossi 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 92, 010302 2015 1503 03402 ( )，arXiv: . . [23] M. Bina、F. Grasselli 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 97, 012125 (2018)，arXiv:1710.06474. [24] D. Tamascelli、C. Benedetti、H.-P. Breuer 和 M. G. A. Paris，New J. Phys. 22, 083027 (2020)，arXiv:2003.04014. [25] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro，Rev. Mod. Phys. 89, 035002 (2017)，arXiv:1611.02427. [26] P. Szańkowski、G. Ramon、J. Krzywda、D. Kwiatkowski 和 Ł. Cywiński，J. Phys. Condens. Matter 29, 333001 (2017)，arXiv:1705.02262. [27] Y.-X. Wang 和 A. A. Clerk，Nat Commun 12, 6528 (2021)，arXiv:2104.02047.[28] 为避免混淆，我们强调，这并非 Legget-Garg 不等式语境中所说的侵入性（该概念也与量子计量学相关联 [78]）。[29] K. Ptaszyński 和 M. Esposito，Phys. Rev. Lett. 123, 200603 2019 1905 03804 ( )，arXiv: . . [30] D. Gribben、A. Strathearn、J. Iles-Smith、D. Kilda、A. Nazir、B. W. Lovett 和 P. Kirton，Phys. Rev. Re- search 2, 013265 (2020)，arXiv:1907.02932. [31] M. Brenes、J. J. Mendoza-Arenas、A. Purkayastha、M. T. Mitchison、S. R. Clark 和 J. Goold，Phys. Rev. X 10, 031040 2020 1912 02053 ( )，arXiv: . . [32] D. Tamascelli，Entropy 22, 1320 (2020)，arXiv:2011.11295. [33] M. Popovic、M. T. Mitchison、A. Strathearn、B. W. Lovett、J. Goold 和 P. R. Eastham，《PRX 量子》2, 020338 (2021)，arXiv:2008.06491. [34] T. Chen 和 D. Poletti，Phys. Rev. E 104, 054118 (2021)，arXiv:2106.15118. [35] K. Ptaszyński 和 M. Esposito，Phys. Rev. E 106, 014122 (2022)，arXiv:2011.00885.

[36] D. Gribben、A. Strathearn、G. E. Fux、P. Kirton 和 B. W. Lovett，Quantum 6, 847 (2022)，arXiv:2106.04212. [37] M. Wiedmann、J. T. Stockburger 和 J. Ankerhold，New J. Phys. 22, 033007 (2020)，arXiv:1903.11368. [38] G. T. Landi 和 M. Paternostro，Rev. Mod. Phys. 93, 035008 2021 2009 07668 ( )，arXiv: . . [39] P. Talkner 和 P. Hänggi，Rev. Mod. Phys. 92, 041002 (2020)，arXiv:1911.11660. [40] A. S. Trushechkin、M. Merkli、J. D. Cresser 和 J. Anders，AVS Quantum Sci. 4, 012301 (2022)，arXiv:2110.01671. [41] A. J. Leggett、S. Chakravarty、A. T. Dorsey、M. P. A. Fisher、A. Garg 和 W. Zwerger，Rev. Mod. Phys. 59, 1 (1987). [42] F. Gebbia、C. Benedetti、F. Benatti、R. Floreanini、M. Bina 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 101, 032112 (2020)，arXiv:1912.02442. [43] A. Candeloro 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 103, 012217 2021 2008 02526 ( )，arXiv: . . [44] S. Marcantoni，J. Phys.: Conf. Ser. 841, 012019 (2017). [45] M. Popovic、M. T. Mitchison 和 J. Goold，Proc. R. Soc. A. 479, 20230040 (2023)，arXiv:2107.14216. [46] G. Francica，退相干过程中的功 (2021)，arXiv:2109.09135.[47] P. Liuzzo-Scorpo、L. A. Correa、F. A. Pollock、A. Górecka、K. Modi 和 G. Adesso，New J. Phys. 20, 063009 (2018)，arXiv:1712.08143. [48] P. Lipka-Bartosik 和 R. Demkowicz-Dobrzański，J. Phys. A 51, 474001 (2018)，arXiv:1805.01477. [49] S. Deffner、J. P. Paz 和 W. H. Zurek，Phys. Rev. E 94, 010103 2016 1603 06509 ( )，arXiv: . . [50] Y. Guryanova、N. Friis 和 M. Huber，Quantum 4, 222 (2020)，arXiv:1805.11899. [51] I. Henao 和 R. Uzdin，Quantum 5, 547 (2021)，arXiv:2010.09070.[52] J. Rubio、J. Anders 和 L. A. Correa，Phys. Rev. Lett. 127, 190402 (2021)，arXiv:2011.13018. [53] J. Rubio，Quantum Sci. Technol. 8, 015009 (2022)，arXiv:2111.11921.[54] C. W. Helstrom，《量子检测与估计理论》（Academic Press，纽约，1976）。[55] S. L. Braunstein 和 C. M. Caves，Phys. Rev. Lett. 72, 3439 1994( ). [56] M. G. A. Paris，Int. J. Quantum Inf. 07, 125 (2009)，arXiv:0804.2981.[57] C. Addis、G. Brebner、P. Haikka 和 S. Maniscalco，Phys. Rev. A 89, 024101 (2014)，arXiv:1311.0699. [58] A. Smirne、A. Lemmer、M. B. Plenio 和 S. F. Huelga，Quantum Sci. Technol. 4, 025004 (2019)，arXiv:1808.03664.[59] R. Demkowicz-Dobrzański、M. J arzyna 和 J. Kołodyński，载于《光学进展》第60卷，E. Wolf 编（Elsevier，阿姆斯特丹，2015），第345–435页，arXiv:1405.7703. [60] A. Smirne、J. Kołodyński、S. F. Huelga 和 R. Demkowicz-Dobrzański，Phys. Rev. Lett. 116, 120801 (2016)，arXiv:1511.02708. [61] J. F. Haase、A. Smirne、J. Kołodyński、R. Demkowicz-Dobrzański 和 S. F. Huelga，New J. Phys. 20, 053009 (2018)，arXiv:1710.04673. [62] P. Sekatski 和 M. Perarnau-Llobet，Quantum 6, 869 (2022)，arXiv:2107.04425. [63] A. W. Chin、S. F. Huelga 和 M. B. Plenio，Phys. Rev. Lett. 109, 233601 (2012)，arXiv:1103.1219. [64] K. Macieszczak，Phys. Rev. A 92, 010102 (2015)，arXiv:1403.1333v1.[65] I. Antoniou、E. Karpov、G. Pronko 和 E. Yarevsky，Phys. Rev. A 63, 062110 (2001)，arXiv:quant-ph/0012130。[66] 这与文献 [65], 中“芝诺时间”的定义类似，即四次项与二次项的大小相等时所对应的时间。[67] L. A. Correa、M. Perarnau-Llobet、K. V. Hovhannisyan、S. Hernández-Santana、M. Mehboudi 和 A. Sanpera，Phys. Rev. A 96, 062103 (2017)，arXiv:1611.10123。[68] A. Fujiwara 和 H. Imai，J. Phys. A 41, 255304 (2008)。[69] R. Demkowicz-Dobrzański、J. Kołodyński 和 M. Guţă，《自然·通讯》3, 1063 (2012)，arXiv:1201.3940。[70] M. Perarnau-Llobet、D. Malz 和 J. I. Cirac，Quantum 5, 446 (2021)，arXiv:2006.12114。[71] M. A. Taylor 和 W. P. Bowen，《物理报告》615, 1 (2016)，arXiv:1409.0950。[72]P. P. Hofer、J. B. Brask、M. Perarnau-Llobet 和 N. Brunner，Phys. Rev. Lett. 119, 090603 (2017)，arXiv:1703.03719。[73] I. Henao、K. V. Hovhannisyan 和 R. Uzdin，《用于低温超高精度温度测量的测温机器》(2021)，arXiv:2108。10469 [quant-ph]。[74] L. Seveso 和 M. G. A. Paris，Phys. Rev. A 97, 032129 (2018)，arXiv:1803.00972。[75] D. Burgarth、V. Giovannetti、A. N. Kato 和 K. Yuasa，New J. Phys. 17, 113055 (2015)，arXiv:1507.07634。[76] A. De Pasquale、K. Yuasa 和 V. Giovannetti，Phys. Rev. A 96, 012316 (2017)，arXiv:1701.08531。[77] A. Auffèves，《PRX量子》3, 020101 (2022)，arXiv:2111.09241。[78] S. V. Moreira、G. Adesso、L. A. Correa、T. Coudreau、A. Keller 和 P. Milman，Phys. Rev. A 96, 012110 (2017)，arXiv:1704.04787。[79] V. G. Morozov、S. Mathey 和 G. Röpke，Phys. Rev. A 85, 022101 (2012)，arXiv:1106.5654。[80] M. R. Jørgensen、P. P. Potts、M. G. A. Paris 和 J. B. Brask，《物理评论研究》2, 033394 (2020)，arXiv:2001.04096。[81]更准确地说，研究的是多量子比特系统的 Greenberger–Horne–Zeilinger态，而非自旋-j 系统的猫态，但分析是等价的。[82] S. I. Knysh 和 G. A. Durkin，arXiv:1307.0470 (2013)，arXiv:1307.0470。

A：与谐振子浴相互作用的量子多能级系统的纯退相干

1. 一般解

a. 全局系统-环境幺正演化算符

我们假设以下系统哈密顿量，它以能量本征基表示：

$$H_S = \sum_j \epsilon_j |j\rangle\langle j|. \tag{S1}$$

我们假设一个具有自由哈密顿量的标准谐振子热浴。

$$H_E = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k. \tag{S2}$$

我们考虑系统的纯退相干演化，其中相互作用项与 H_S 对易，并且在能量本征基中为对角形式：

$$H_I^{\mathrm{Sch}} = \left(\sum_j g_j |j\rangle\langle j|\right) \otimes \left(\sum_k f_k b_k^\dagger + f_k^* b_k\right). \tag{S3}$$

转到相互作用绘景后，我们得到（相互作用哈密顿量中的系统项保持不变，这是因为作了对易性假设）

$$H_I(t) = \sum_j g_j |j\rangle\langle j| \otimes \left(\sum_k f_k e^{\mathrm{i}\omega_k t} b_k^\dagger + f_k^* e^{-\mathrm{i}\omega_k t} b_k\right). \tag{S4}$$

不同时刻的对易子与振子上的恒等算符成正比：

$$[H_I(t), H_I(t')] = -2\mathrm{i} \sum_j g_j^2 \left[\sum_k |f_k|^2 \sin\omega_k(t-t')\right] |j\rangle\langle j| \otimes \mathbb{1}, \tag{S5}$$

由于它在任意时刻都与相互作用哈密顿量对易，因此可以精确求得相互作用绘景中的演化算符，因为 Magnus 展开在二阶后终止，得到：

$$\begin{aligned} U_I(t) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^s ds' [H_I(s), H_I(s')]\right] \exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t ds H_I(s)\right] \\ &= \sum_j \exp\left[\mathrm{i} \underbrace{\sum_k |f_k|^2 g_j^2 \frac{\omega_k t - \sin(\omega_k t)}{\omega_k^2}}_{\equiv \phi_j^{\mathrm{int}}(t)}\right] |j\rangle\langle j| \otimes \exp\left[\sum_k \alpha_k^j(t) b_k^\dagger - \alpha_k^{j*}(t) b_k\right], \end{aligned} \tag{S6}$$

其中，对振子的作用是多个单模位移算符的乘积

$$\exp\left[\sum_k \alpha_k^j(t) b_k^\dagger - \alpha_k^{j*}(t) b_k\right] = \prod_k D(\alpha_k^j(t)) \quad \text{with} \quad \alpha_k^j(t) = -\mathrm{i} f_k g_j \int_0^t ds\, e^{\mathrm{i}\omega_k s} = f_k g_j \frac{1 - e^{\mathrm{i}\omega_k t}}{\omega_k}, \tag{S7}$$

其中 $D(\alpha) = \exp\left[\alpha b^\dagger - \alpha^* b\right]$。因此，总体演化是由系统状态决定的振子位移。

b. 系统的约化态

我们将一般的初始态写作 $\rho_{SE}(0) = \sum_{ij} \rho_{S,\,ij}(0) |i\rangle\langle j| \otimes \rho_E^{ij}$，其中 $\mathrm{Tr}_E\, \rho_E^{ij} = 1$ 是归一化算符，但当 $i \neq j$ 时不一定是态。当 $i = j$ 时，这些是以概率得到的条件态。

$\rho_{S,\,ii}(0)$，方法是以基 $|j\rangle$ 测量系统。这意味着系统的初始约化态为$\rho_S(0) = \mathrm{Tr}_E\,\rho_{SE}(0) = \sum_{ij}\rho_{S,\,ij}(0)|i\rangle\langle j|$。因此，我们可以将演化后的态写作

$$\rho_S(t) = \sum_i \rho_{S,ii}(0)|i\rangle\langle i| + \sum_{i\neq j}\rho_{S,ij}(0)\,\mathrm{Tr}_E\left[\prod_k D(\alpha_k^i(t))\rho_E^{ij}\prod_{k'} D(-\alpha_{k'}^j(t))\right]|i\rangle\langle j|, \tag{S8}$$

这明确表明布居是运动常数，因为 $\mathrm{Tr}_E\left[\prod_k D(\alpha_k^i(t))\rho_E^{ii}\prod_{k'} D(-\alpha_{k'}^i(t))\right] = 1$ 是归一化态的迹。相反，非对角元会乘上因子$\mathrm{Tr}_E\left[\prod_k D(\alpha_k^i(t))\rho_E^{ij}\prod_{k'} D(-\alpha_{k'}^j(t))\right]$。注意，(S8)也涵盖了存在初始系统-环境关联的情况——关于相关初始态下纯退相干的研究，另请参见 [79] 。

从现在起，我们假设系统和环境的初始态为乘积态 $\rho(0)\otimes\nu_T$，其中环境的状态 $\nu_T = \bigotimes_k \nu_k$ 为热态。由于各振子之间不存在相互作用，该热态可分解为各模式热态的乘积。演化后的全局态为

$$\rho_{SE}(t) = U_I(t)\left(\rho_S(0)\otimes\nu_T\right)U_I(t)^\dagger = \sum_{ij}\rho_{S,ij}(0)e^{\mathrm{i}(\phi_i^{\mathrm{int}}(t)-\phi_j^{\mathrm{int}}(t))}|i\rangle\langle j|\otimes\prod_k D(\alpha_k^i(t))\nu_T D(-\alpha_k^j(t)). \tag{S9}$$

为了计算 环境上的迹，我们使用 Baker-Campbell-Haussdorff 公式，得到

$$\mathrm{Tr}_k\left[D(\alpha_k^i(t))\nu_k D(-\alpha_k^j(t))\right] = \mathrm{Tr}_k\left[D(\alpha_k^i(t)-\alpha_k^j(t))\nu_k\right]\exp\left[\frac{1}{2}\left(-\alpha_k^j(t)\alpha_k^{*i}(t)+\alpha_k^{*j}(t)\alpha_k^i(t)\right)\right], \tag{S10}$$

其中，$\mathrm{Tr}_k\left[D(\alpha)\nu_k\right] = \frac{1}{2}|\alpha|^2\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)$ 是热态的特征函数

综合考虑所有相位因子，薛定谔绘景中的约化系统态因此为

$$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\left[\rho_{SE}(t)\right] = \sum_{ij}\rho_{S,ij}(0)e^{-(\Delta_{ij}(t)+\mathrm{i}\varphi_{ij}(t))}|i\rangle\langle j|, \tag{S11}$$

其中，影响非对角元的实值退相干函数为

$$\Delta_{ij}(t) = -\sum_k \ln\mathrm{Tr}_k\left[D\left(\alpha_k^i(t)-\alpha_k^j(t)\right)\nu_T\right] = \sum_k\frac{1}{2}\left|\alpha_k^i(t)-\alpha_k^j(t)\right|^2\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right), \tag{S12}$$

而相位因子包含通常的幺正相位之差 $\phi_j^{\mathrm{Sch}}(t) = \phi_j^{\mathrm{int}}(t) - t\epsilon_j$，其中既包含系统哈密顿量的影响，也包含相互作用绘景幺正算符（S6）中出现的相位，因此正文中提到的相位因子写作 $\varphi_{ij}(t) = \phi_j^{\mathrm{Sch}}(t) - \phi_i^{\mathrm{Sch}}(t)$。除了显然与系统的能量考量无关之外，相位因子不依赖环境初始态，因而也不依赖温度，所以它们对量子 Fisher 信息也无影响。不过，它们可能有助于了解环境谱密度的性质，参见例如 [27]。取连续极限 $\sum_k|f_k|^2\mapsto\int_0^\infty d\omega J(\omega)$ 并使用定义（S7），我们得到正文中的式（1）。

c. 环境吸收的热量

环境的约化态是混合态

$$\rho_B(t) = \mathrm{Tr}_S\left[\rho_{SB}(t)\right] = \sum_j\rho_{S,jj}(0)\prod_k D(\alpha_k^j(t))\nu_T D(-\alpha_k^j(t)). \tag{S13}$$

我们可以计算热浴的能量（可以使用相互作用绘景算符，因为变换回薛定谔绘景的变换与自由哈密顿量对易）

$$\begin{aligned}\langle H_B(t)\rangle &= \mathrm{Tr}_B\left[H_B\rho_B(t)\right] = \sum_j\rho_{S,jj}(0)\sum_k\omega_k\,\mathrm{Tr}_k\left[b_k^\dagger b_k D(\alpha_k^j(t))\nu_k D(-\alpha_k^j(t))\right]\\ &= \sum_j\rho_{S,jj}(0)\sum_k\omega_k\left(\frac{1}{e^{\omega_k/T}-1}+\left|\alpha_k^j(t)\right|^2\right).\end{aligned} \tag{S14}$$

因此，吸收热量为

$$Q(t) = \langle H_B(t)\rangle - \langle H_B(0)\rangle = \sum_j \rho_{S,jj}(0) \sum_k \omega_k \left|\alpha_k^j(t)\right|^2, \tag{S15}$$

由此可见，热贡献保持不变，而吸收的能量仅取决于与量子多能级系统相互作用所产生的位移算符。取连续极限并使用定义（S7），我们得到正文中的公式（2）。

2. 欧姆型谱密度

a. 退相干函数

对于具有指数截断的谱密度，我们得到退相干函数（由于其中存在一些笔误，此表达式与文献 [12]，中的式（17）略有不同）

$$\Delta_0(t) = \Gamma(s-1)\left\{1 - \left(\tilde{t}^2+1\right)^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \cos\left[(s-1)\arctan(\tilde{t})\right]\right\} \tag{S16}$$

$$\Delta_T(t) = \Delta_0(t) + \frac{(s-1)s\tilde{T}^{s-1}\Gamma(s-1)^2}{\Gamma(s+1)}\left[2\zeta(s-1,\tilde{T}+1) - \zeta(s-1,\mathrm{i}\tilde{t}\tilde{T}+\tilde{T}+1) - \zeta(s-1,-\mathrm{i}\tilde{t}\tilde{T}+\tilde{T}+1)\right], \tag{S17}$$

其中，$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ 是广义（Hurwitz）ζ 函数，为简洁起见，我们还引入了无量纲的$\tilde{t} = t\omega_c$ 和 $\tilde{T} = T/\omega_c$ 。另请注意，在参考文献 [12] 中，谱密度 $J(\omega)$ 的定义额外包含一个因子 4，且其中展示的结果是在本工作中固定 $\lambda = 1/2$ 后得到的。对于其他截断函数，我们仅能在 $T = 0$时解析地求出退相干函数，这对应于下一节中吸收热量的计算。

由退相干函数可将量子 Fisher 信息计算为

$$\mathcal{F}[\rho_T(t)] = \frac{16\lambda^4\left[\partial_T\Delta_T(t)\right]^2}{\exp\left[8\lambda^2\Delta_T(t)\right]-1}. \tag{S18}$$

完整表达式见 其形式较为复杂，且并无特别启发性；然而，对于 $T \to 0$ read，其最低阶项为 s

$$\mathcal{F}[\rho_T(t)] = \frac{16\lambda^4 s^2(s+1)^2 t^4\omega_c^2\zeta(s+1)^2\Gamma(s)^2\left(\frac{T}{\omega_c}\right)^{2s}}{\exp\left(8\lambda^2\Gamma(s-1)\left(1-(t^2\omega_c^2+1)^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\cos\left((s-1)\tan^{-1}(t\omega_c)\right)\right)\right)-1}, \tag{S19}$$

这表明，当 $T/\omega_c \ll 1$ as $s \to 0$时，它趋于零的速度更慢。然而，量子 Fisher 信息总是会在 $T \to 0$ 时对 $s > 0$ 趋于零，因此绝对误差发散。我们注意到，对于其他探针-样品相互作用，在 $T \to 0$ 的极限下，绝对误差实际上可以趋于零，而相对误差必须发散 [80]。

b. 吸收热量

对于所考虑的模型，吸收热量仅以非平凡方式依赖于演化时间和欧姆性参数，因为 λ^2 只是一个乘法因子，且不依赖于温度，如式（2）所示。这个关于两个参数的函数针对不同截断函数的情况如图 S1 所示。对于指数截断，其显式表达式见正文中的式（3），我们看到，对于较大的 s，它在所有时间均呈增加趋势，而仅在超欧姆区域的短时间内出现峰值。我们还看到，其渐近值并非关于 s单调变化，因为

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}^{\exp}(t) = 2\lambda^2\omega_c\Gamma(s), \tag{S20}$$

且在伽马函数 $s_0 \approx 1.4616$ 的最小值处达到最小。

对于其他截断函数，吸收热量也可以通过解析方法求得。对于高斯截断$C(\omega,\omega_c) = e^{-\omega^2/\omega_c^2}$，我们得到

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{Gauss}}(t) = \lambda^2\omega_c\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(1 - {}_1F_1\left(\left[\frac{s}{2}\right];\left[\frac{1}{2}\right];-\frac{1}{4}t^2\omega_c^2\right)\right), \tag{S21}$$

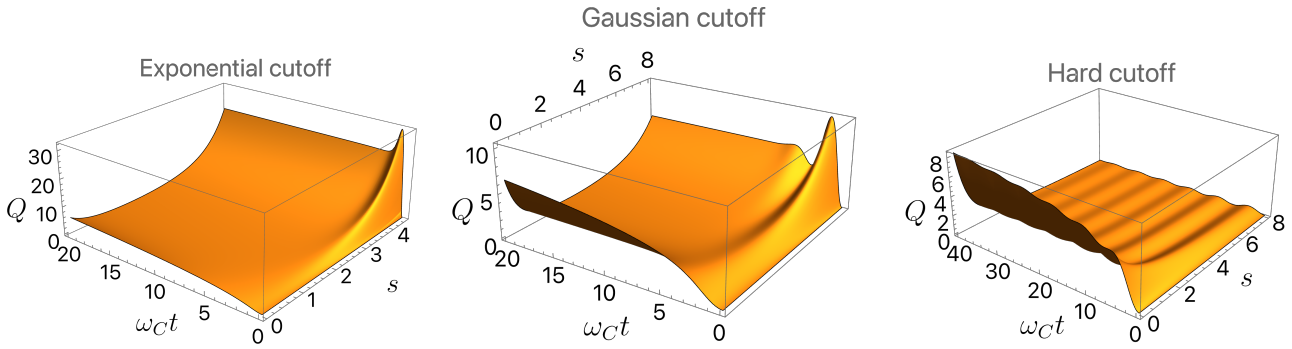


图 S1. 欧姆型谱密度的吸收热量随演化时间和欧姆性参数 s 的变化，比较了三种截断函数。

其渐近值为

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}^{\mathrm{Gauss}}(t) = \lambda^2\omega_c\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \tag{S22}$$

F对于硬截断 $C = \Theta(\omega_c - \omega)$，其中 $\Theta(s)$ 是 Heaviside 阶跃函数，我们得到

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{hard}}(t) = \frac{2\lambda^2\omega_c\left[1 - {}_1F_2\left(\left[\frac{s}{2}\right];\left[\frac{1}{2},\frac{s}{2}+1\right];-\frac{1}{4}t^2\omega_c^2\right)\right]}{s}, \tag{S23}$$

其中 ${}_pF_q(\vec{a};\vec{b};z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}$ 是广义超几何函数，$(a)_k = \prod_{j=1}^{k}(a+j-1)$ 是 Pochhammer 符号。相应的渐近值为

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}^{\mathrm{hard}}(t) = \frac{2\lambda^2\omega_c}{s}. \tag{S24}$$

另外两种截断函数对参数 s 和 t 的非平凡依赖关系见图 S1。这些截断函数在定性上存在若干差异，其中最重要的是，对于硬截断，我们观察到振荡，并且当 s 较大时，吸收热量趋于零。

B：其他谱密度的补充结果

在本附录中，我们展示了与正文中所考察的谱密度不同的其他谱密度对应的图。我们探讨了高斯截断函数、硬截断函数以及不同的欧姆性参数。总体而言，我们发现，正文中提出的关键定性观察依然成立，不过一些更细微的细节取决于谱密度的这些特征。

1. 温度测量性能与热量随时间的关系

在图S2 和 S3中，我们分别针对高斯截断和硬截断，重新绘制了正文中图1 所示的曲线。主要的定性特征保持不变。在短时间内，吸收热量与量子信噪比之间存在初始权衡，因为这两个量均从零开始。热量在渐近过程中不会回落至零，而对于 $s = 1$，量子信噪比则会回落至零；但对于 $s = 3$，当探针中存在俘获相干时，量子信噪比不会回落至零。主要的定性差异在于，对于硬截断，在足够长的时间内可以观察到振荡行为，而高斯截断和指数截断下则不存在这种现象。

2. 时间最优温度测量

在图 S4 中，我们重现了正文中图 3 的曲线，但采用亚欧姆谱密度 $s = 1/2$ 以及超欧姆谱密度 $s = 3$。我们看到，正文中强调的大 λ 行为，即 $Q(t_{\mathrm{opt}})$

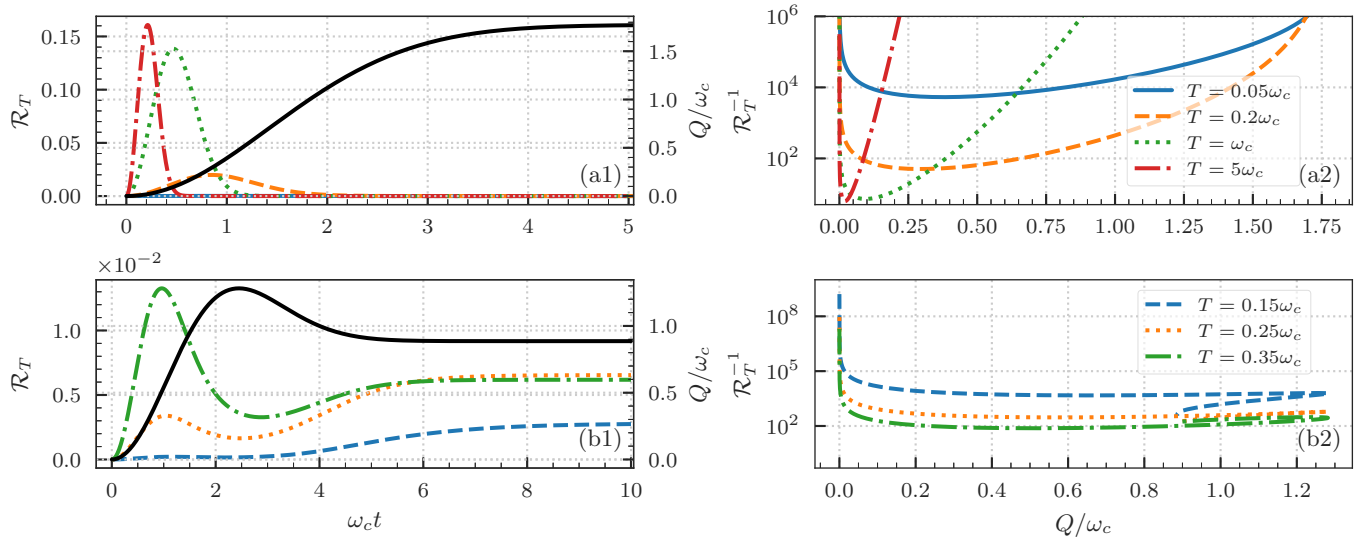


图 S2. 与正文中的图 1 类似的图，但针对具有高斯截断的欧姆型谱密度。上方 [面板 (a)]：欧姆谱密度 $s = 1$；下方 [面板 (b)]：超欧姆谱密度 $s = 3$；两者均对应耦合 $\lambda = 1$。面板 (a1) 和 (b1)：吸收热量（黑色实线，单位标示在右侧）和量子信噪比（不同温度对应不同颜色的线，单位标示在左侧）随时间的变化。面板 (a2) 和 (b2)：温度估计的相对误差与吸收热量之间的参数图。每条线代表一个不同的温度，如图例所示。

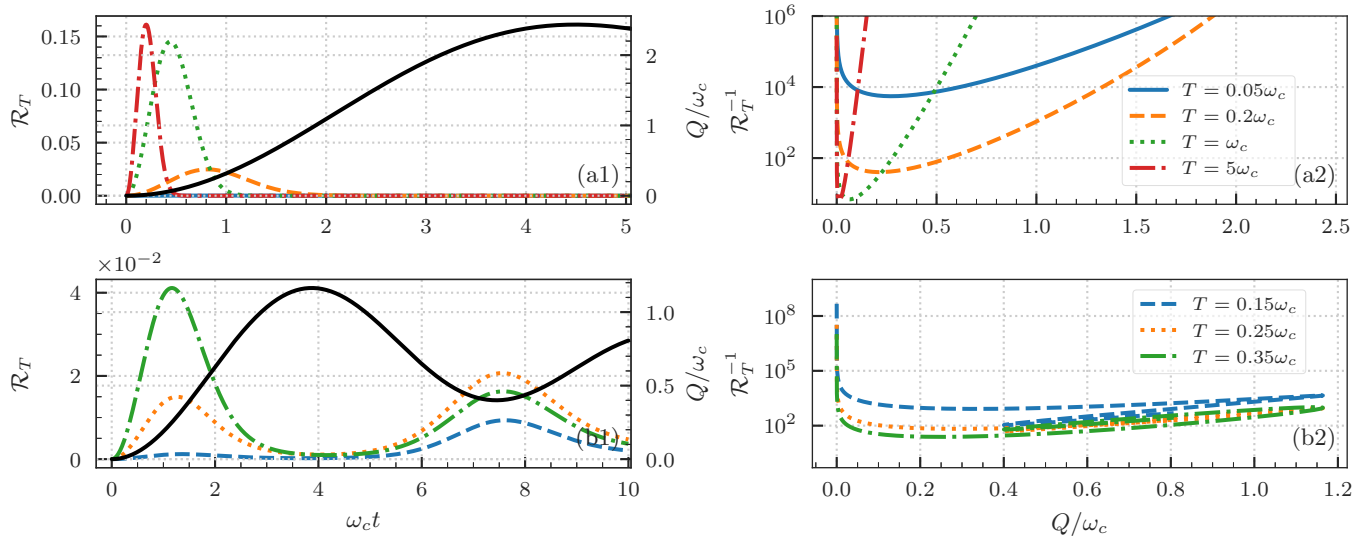


图 S3. 与正文中的图 1 类似的图，但针对具有硬（阶跃函数）截断的欧姆型谱密度。上方 [面板 (a)]：欧姆谱密度 $s = 1$；下方 [面板 (b)]：超欧姆谱密度 $s = 3$；两者均对应耦合 $\lambda = 1$。面板 (a1) 和 (b1)：吸收热量（黑色实线，单位标示在右侧）和量子信噪比（不同温度对应不同颜色的线，单位标示在左侧）随时间的变化。面板 (a2) 和 (b2)：温度估计的相对误差与吸收热量之间的参数图。每条线代表一个不同的温度，如图例所示。

趋于有限值，而 $\mathfrak{R}_T$ 呈线性增长，这一结论仍然成立。不过，我们看到，对于较小的 λ 值，行为则大不相同，其中超欧姆情形呈现出更为特殊的特征。

图 S5 中，我们再次重现正文图 3 中的绘图，并保留欧姆性参数 $s = 1$，但采用高斯截断和硬截断

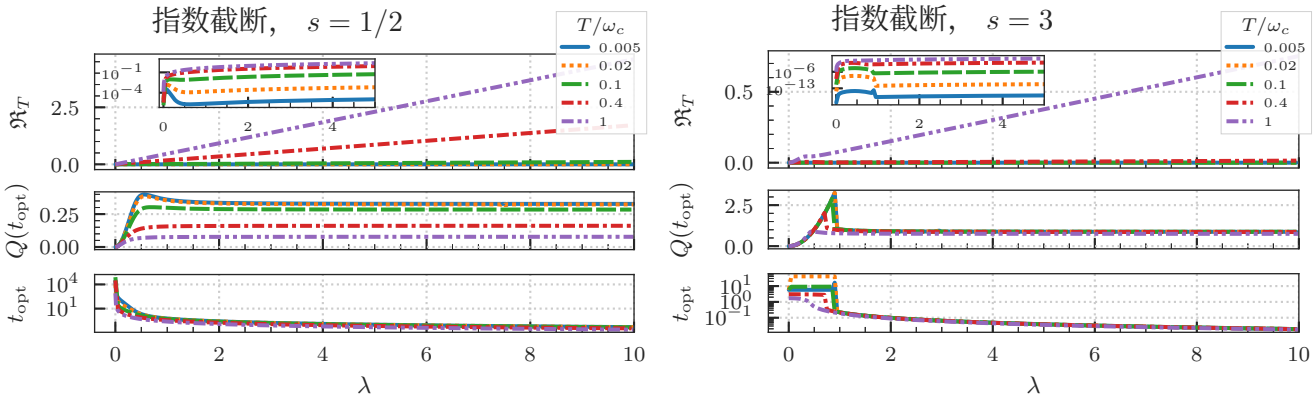


图 S4. 与正文中的图 3 类似的图，但对应于 $s = 1/2$ （左）和 $s = 3$。最优量子信噪比率（上方面板，插图采用对数刻度）、每次测量吸收的热量（中间面板）和最优时间（下方面板）均绘制为 λ 的函数，图例中显示了若干温度值。

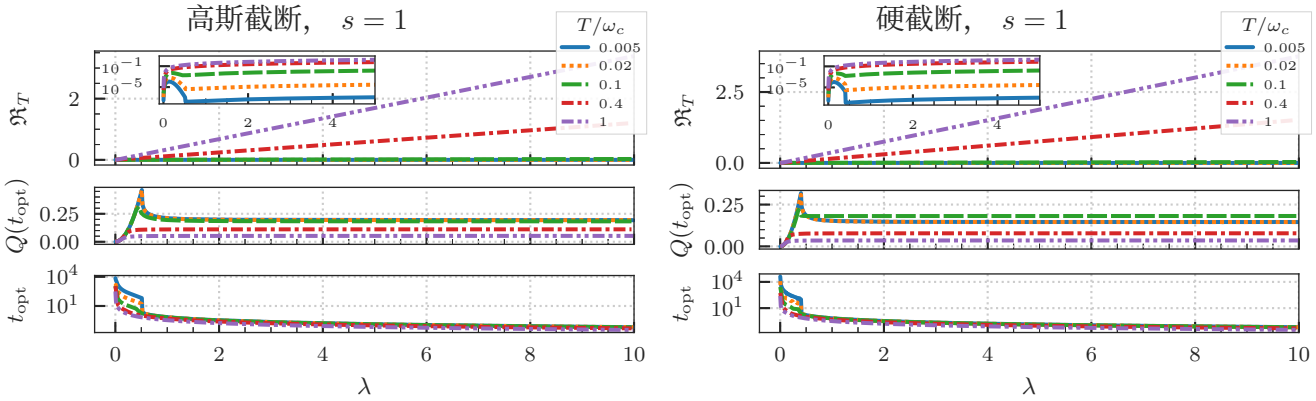


图 S5. 与正文中的图 3 类似的图，但对应于高斯（左）和硬截断（右），且两者均为 $s = 1$，如图 3所示。最优量子信噪比率（上方面板，插图采用对数刻度）、每次测量吸收的热量（中间面板）和最优时间（下方面板）均绘制为 λ 的函数，图例中显示了若干温度值。

C：自旋猫态最优性的数值证据

在考虑正文中温度估计问题的所有细节之前，我们需要先考虑估计一个恒定退相干因子的基础问题。

1. 退相干估计的最优量子 Fisher 信息评估

我们着重估计常数 退相干因子 Δ，该因子表征一个退相干信道 $\mathcal{E}_\Delta$，其在有限维系统上的作用如下

$$\mathcal{E}_\Delta[\rho] = \sum_{i,j} \rho_{ij} e^{-\Delta(i-j)^2} |i\rangle\langle j| \equiv \mathbf{E}_\Delta \circ \rho \qquad \mathbf{E}_\Delta = \sum_{i,j} e^{-\Delta(i-j)^2} |i\rangle\langle j| \tag{S1}$$

其中， $\circ$ 表示两个矩阵的逐元素（Hadamard）乘积。该信道编码了正文所讨论的测温问题中“算符”部分。 Δ 实际上是温度的时间依赖函数这一事实，在量子 Fisher 信息中仅表现为一个乘法因子，主要影响探测时间的优化。退相干矩阵$\mathbf{E}_\Delta$ 本质上是该信道的 Choi 矩阵，去除了冗余的全零行和列。

为了评估最优量子 Fisher 信息，我们采用参考文献 [68] 中提出的方法，该方法基于对动力学映射 $\mathcal{E}_\Delta[\cdot] = \sum_{k=1}^{r} K_k \cdot K_k^\dagger$ 的等价克劳斯表示 $\{K_j\}_{j=1,\ldots,r}$ 进行优化，而该动力学映射编码了待估参数。具体而言，

它可以通过对一个大小为 $r \times r$ 的厄米矩阵进行最小化来求得，该矩阵对应于一个涉及克劳斯算符及其导数的 h 二次函数：

$$\mathfrak{F}(\Delta) = \max_{|\psi\rangle_{SA}} \mathcal{F}\left[\mathcal{E}_\Delta \otimes \mathbb{1}_A[|\psi\rangle_{SA}]\right] = 4 \min_{h=h^\dagger} \left\| \sum_k \left(\dot{K}_k - \mathrm{i} \sum_j h_{kj} K_j \right)^\dagger \left(\dot{K}_k - \mathrm{i} \sum_{j'} h_{kj'} K_{j'} \right) \right\|. \tag{S2}$$

在这里可以看到，通过该方法求得的量不仅是对系统初始态的优化，还包括使用任意维数的无噪声辅助系统和初始纠缠态的可能性。如果无法使用无噪声辅助系统，式（S2）中的量通常只是一个上界。关键在于，可以通过求解半定规划 [69]来数值计算这一最小化问题。

给定退相干矩阵 $\mathbf{E}_\Delta = \sum_{j=1}^{d} \kappa_j \mathbf{k} j \mathbf{k}_j^T$ 的谱分解，可以写出由对角算符构成的克劳斯表示

$$K_j = \sqrt{\kappa_j}\mathrm{diag}(\mathbf{k}_j). \tag{S3}$$

由于退相干矩阵 $\mathbf{E} \equiv \partial_\Delta \mathbf{E}_\Delta$ 的导数已知：

$$\partial_\Delta \mathcal{E}_\Delta[\rho] = \sum_{i \neq j} \rho_{ij} (i-j)^2 e^{-\Delta(i-j)^2} |i\rangle\langle j| \equiv \dot{\mathbf{E}}_\Delta \circ \rho \qquad \dot{\mathbf{E}} = -\sum_{i \neq j} (i-j)^2 e^{-\Delta(i-j)^2} |i\rangle\langle j|, \tag{S4}$$

为了计算克劳斯算符的导数，我们需要通过一阶微扰理论计算特征值 $\{\kappa_j\}$ 和特征向量 $\{\mathbf{k}_j\}$ 的导数：

$$\dot{\kappa_j} = \mathbf{k}_j^T \, \dot{\mathbf{E}} \, \mathbf{k}_j, \quad \dot{\mathbf{k}}_j = \sum_{i \neq j} \frac{\mathbf{k}_j^T \, \dot{\mathbf{E}} \, \mathbf{k}_i}{\kappa_i - \kappa_j}, \qquad \dot{K}_j = \frac{\dot{\kappa_j}}{2\sqrt{\kappa_j}} \mathrm{diag}(\mathbf{k}_j) + \sqrt{\kappa_j} \mathrm{diag}(\dot{\mathbf{k}}_j). \tag{S5}$$

总而言之，我们可以先对式（S1）中的退相干矩阵进行对角化，从而通过式（S3）和（S5）计算出克劳斯算符及其导数；随后，将这两组算符输入半定规划，以求解式（S2）中的最小化问题。

虽然我们将这一方法用于量子测温，但它也可以应用于其他估计问题。例如，文献 [22] 通过对随机探测态进行数值采样，研究了估计多量子比特态的退相干函数中某一参数的类似问题，并表明在某些情况下，GHZ 态（与自旋猫态完全类似，但考虑的是多量子比特系统，而非单自旋-j 系统）是最优的，这与我们接下来展示的结果类似。

2. 自旋猫态与最优探测态时间最优方案的比较

通过采用上一节中给出的最优量子 Fisher 信息进行时间优化，我们得到了自旋-j 探针态所能实现的极限性能。我们通过数值计算评估以下物理量：

$$\max_t \frac{1}{t} \left[4\lambda^2 \partial_T \Delta_T(t)\right]^2 \mathfrak{F}(4\lambda^2 \Delta_T(t)), \tag{S6}$$

其中，对 t 的最大化是通过 Nelder–Mead算法 实现的，而函数 $\mathfrak{F}(4\lambda^2\Delta_T(t))$ 则针对每个 t 使用半定规划进行求值。

该比较的部分结果如图所示 S6。我们可以看到，对于 $s = 1$ 和 $s = 0.5$，在极强耦合条件下（例如图 $\lambda = 20$ S6的右侧两个面板中的 $\lambda = 20$ ），自旋猫态的性能与最优结果一致。然而，在弱耦合区间（例如左侧两个面板中的 $\lambda = 0.05$ ），自旋猫态起初是最优的，随后变为次优状态，此时最优量子 Fisher 信息率随着自旋数 j 的增加而降低，但在经历这一下降后，最优量子 Fisher 信息率又开始随着 j的增加而上升。不幸的是，对于较大的 j，计算公式（S6）中的量在计算上过于复杂，难以求解。然而，我们推测，当 j 足够大时，自旋猫探针最终可能再次成为最优探针，因为对于这类状态，增大 j 等价于增大 λ，而我们已经证明，当λ 较大时，它们是最优的。对于 s 和 T的其他取值，也可以得出类似的结论。

此前已有研究表明，对于估计出现在退相干因子中的环境参数，使用自旋猫探针具有最优性 [22][81]。具体而言，研究表明，对于固定的 j，存在一个阈值；当退相干足够弱时，使用自旋猫态是最优的。不过需要注意的是，在 [22] 中优化的优值指标是量子 Fisher 信息，而不是量子 Fisher 信息率。此外，对于固定的退相干 Δ，即量子信道（S1），当 j 渐近趋于无穷大时，最优态并不是自旋猫态 [82]。然而，对于时变问题，情况大不相同，因为最优时间也会随 j 而变化，并且该问题不同于估计固定的退相干因子 Δ。

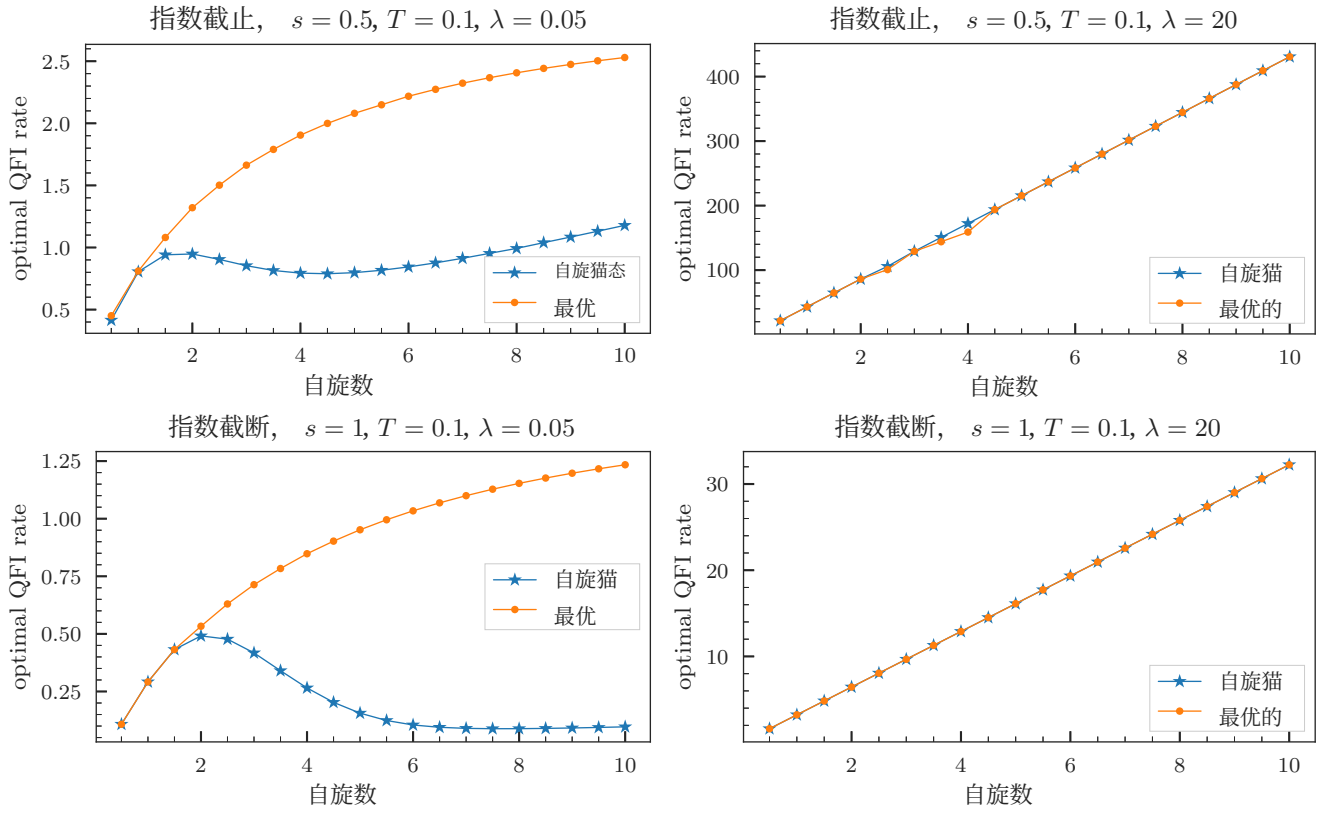


图 S6 。使用最优自旋探针与 GHZ 态的退相干测温对比 s.

D：短时间展开

这里给出具有指数截止的谱密度下，吸收热量、退相干函数和量子 Fisher 信息的短时间展开式。为简洁起见，我们将 t 和 T 表示为以 ω_c为单位的量。热量为:

$$\mathcal{Q}(t) = \lambda^2 \left[q^{(2)} t^2 + q^{(4)} t^4 + O(t^6) \right] \tag{S1}$$

$$q^{(2)} = s(s+1)\Gamma(s) \tag{S2}$$

$$q^{(4)} = -\frac{1}{12} \left(s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s \right) \Gamma(s), \tag{S3}$$

退相干函数:

$$\Delta_T(t) = \Delta_T^{(2)} t^2 + \Delta_T^{(4)} t^4 + O(t^6) \tag{S4}$$

$$\Delta_T^{(2)} = \frac{2(s-1)s\Gamma(s-1)\left[2(s-1)sT^{s+1}\Gamma(s-1)\zeta(s+1, T+1) + \Gamma(s+1)\right]}{\Gamma(s+1)} \tag{S5}$$

$$\Delta_T^{(4)} = -\frac{\left[s\left(s^3 + 2s^2 - s - 2\right)\Gamma(s-1)\left(2(s-1)sT^{s+3}\Gamma(s-1)\zeta(s+3, T+1) + \Gamma(s+1)\right)\right]}{6\Gamma(s+1)} \tag{S6}$$

由此可得量子 Fisher 信息：

$$\mathcal{F}[\rho_T(t)] = \frac{16\lambda^4\ [\partial_T \Delta_T(t)]^2}{\exp\left[8\lambda^2 \Delta_T(t)\right] - 1} = f^{(2)} t^2 + f^{(4)} t^4 + O(t^6) \tag{S7}$$

$$f^{(2)} = \frac{\lambda^2 \left(\partial_T \Delta_T^{(2)}\right)^2}{2\Delta_T^{(2)}} \tag{S8}$$

$$f^{(4)} = -\frac{\lambda^4 (\Delta_T^{(2)})^2 (\partial_T \Delta_T^{(2)})^2 + \lambda^2 \left[\Delta_T^{(4)} (\partial_T \Delta_T^{(2)})^2 - 2\Delta_T^{(2)} \partial_T \Delta_T^{(2)} \partial_T \Delta_T^{(4)}\right]}{2(\Delta_T^{(2)})^2}. \tag{S9}$$

只要系数 $f^{(4)}$ 为负（这取决于具体的参数值，但我们总能找到足够大的 λ使这一条件成立），最优时间为

$$t_{\text{opt}} = \text{argmax}_t \frac{\mathcal{F}[\rho_T(t)]}{t} = \sqrt{-\frac{f^{(2)}}{3f^{(4)}}}, \tag{S10}$$

当 $\lambda \to \infty$时，它趋近于零。