# 以树宽为参数的弦图/区间图顶点删除的紧界

**MichałWłodarczyk** ！本古里安
大学，贝尔谢巴，以色列

**摘要**

在弦图/区间图顶点删除问题中，我们研究需要从一个图中删除多少个顶点，才能使其变为弦图（分别为区间图）。我们研究以输入图 $G$ 的树宽$\mathbf{tw}$ 为参数的参数化问题。一方面，我们提出了一个运行时间为 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw})}\cdot|V(G)|$ 的弦图顶点删除算法，改进了 Jansen、de Kroon 和 Włodarczyk（STOC'21）的运行时间 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}^2)}\cdot|V(G)|^{\mathcal{O}(1)}$。当给定一个宽度为$\mathbf{tw}$ 的树分解时，指数的底数等于 $2^{\omega-1}\cdot 3+1$。我们的算法基于弦图与图拟阵之间的新颖联系，从而能够采用代表族框架。另一方面，我们证明，在指数时间假设成立的前提下，区间图顶点删除问题已知的 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}\log\mathbf{tw})}\cdot|V(G)|$ 时间算法无法得到改进。

**2012年 ACM 学科分类**计算理论 → 图算法分析；计算理论 → 参数化复杂性与精确算法

**关键词和短语** 固定参数可处理性、树宽、弦图、区间图、拟阵、代表族

**资助**本研究获得欧洲研究理事会（ERC）名为 PARAPATH 的资助项目支持。部分工作是在作者于埃因霍温理工大学攻读博士后期间完成的。

arXiv:2305.03440v1 [cs.DS] 5 May 2023

## 1 引言

树宽 [32, §7] 可以说是图论中研究最为广泛的宽度度量。简单来说，树宽衡量一个图与树的相似程度，其中树和森林恰好是树宽为 1 的图。它在 Robertson 和 Seymour 的图小模型系列 [64]中发挥着至关重要的作用。树宽之所以具有实用价值，是因为许多问题都可以在有界树宽图上通过线性时间算法求解。著名的 Courcelle 定理 [30] 指出，任何能够用计数单子二阶逻辑（CMSO）表达的图问题，都可以在时间 $f(\mathbf{tw})\cdot|V(G)|$内求解，其中$\mathbf{tw}$ 表示图 $G$ 的树宽，而 $f$ 是某个可计算函数。换言之，当以树宽为参数时，所有此类问题都是固定参数可解（FPT）的。此外，有界树宽图广泛出现在各种不同的应用场景中，这使得基于树宽的算法成为算法设计中无处不在的工具 [36, 47, 57, 58, 63]。

Courcelle 定理中的函数 $f$ 可能增长得非常快，因此大量研究致力于针对特定问题优化其对**树宽** 的依赖。在理想情况下，我们希望函数 $f$ 是单指数的，即 $f(\textbf{树宽})=2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw})}$，同时或许允许 $|V(G)|$ 中的指数更高（但仍为常数）。这通常是我们所能期待的最佳情况，因为次指数运行时间通常会与指数时间假设[1] (ETH) [42]相矛盾。

尽管标准动态规划技术能够为具有“局部约束”的问题（如顶点覆盖、支配集或二分图划分）提供单指数算法，

[1] 指数时间假设指出，存在一个常数 $\delta>0$，使得对于含有 $n$ 个变量的公式，3-SAT 无法在 $\mathcal{O}(2^{\delta n})$ 时间内求解。

但对于具有“连通性约束”的问题（如反馈顶点集、哈密顿回路或连通顶点覆盖），它却无能为力，导致参数依赖为 $f(\mathbf{tw}) = 2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}\log \mathbf{tw})}$。一方面，Cygan 等人 [35]，在其里程碑式的工作中通过引入 Cut & Count 技术解决了这一问题，并为上述问题等获得了随机化单指数算法（另见 [61]）。在后续工作中，Bodlaender 等人 [19] 和 Fomin 等人 [38] 提出了能够避免随机化的替代技术：基于矩阵的方法和代表族。另一方面，Lokshtanov 等人 [55] 提供了一个在指数时间假设下证明“略超指数”下界的框架，为确立那些需要依赖 $f(\mathbf{tw}) = 2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}\log \mathbf{tw})}$ 的问题的紧下界铺平了道路。在同一篇工作中，他们为不相交路径和色数得到了这样的下界。对于参数依赖为单指数 $f(\mathbf{tw}) = \mathcal{O}(c^{\mathbf{tw}})$ 的问题，后续研究致力于确定指数项的最优底数 $c$ [31, 33, 35, 54, 69]。

**顶点删除问题**。许多图优化问题都可以表述为$\mathcal{H}$-顶点删除问题：从图中删除最少数量的顶点，使所得图属于图类$\mathcal{H}$。例如，顶点覆盖对应于$\mathcal{H}$ 为无边图的图类。在树宽参数化下，各类顶点删除问题的 ETH 紧确运行时间呈现出多样的复杂性图景。已确立紧界的图类$\mathcal{H}$ 包括：无边图 [54], 森林 [35]（另见 [15]）、平面图 [47, 60], 由连通禁用小图定义的图类 [9]（另见 [10, 11, 12]）、二部图 [54], 有向无环图 [22], 无偶圈图 [15, 44], ，以及一些由禁用（诱导）子图定义的图类 [34, 67]。

我们通过研究到弦图类和区间图类的顶点删除问题来扩展这一列表。如果图不含长度至少为 4 的诱导圈（即洞），则称其为弦图；如果一个图是实数轴上若干区间的交图，则称其为区间图。任何区间图都是弦图，而任何弦图都是完美图。这两类图在离散优化的各个领域中的应用早已得到研究 [8,14, 25, 50, 62, 65]。在理论方面，图的树宽（分别为路径宽度） $G$等于其弦图（分别为区间图）超图的最小团数 $G$ [32, 52]。此外，一些困难问题在弦图或区间图上（甚至在到弦性的顶点删除距离较小的图上）会变得易解 [26, 43, 49]。

**我们的结果**。弦图顶点删除（ChVD）问题当前最优的运行时间为 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}^2)}n^{\mathcal{O}(1)}$，该结果源自针对一种混合图度量$\mathcal{H}$-树宽的一般性结论，其中 $\mathcal{H} = \texttt{chordal}$ [45]。我们将对树宽的依赖改进为单指数级。

▶**定理 1.1.** 弦图顶点删除问题在给定宽度为 $k$ 的树分解时，可在 $n$ 个节点的节点加权图上以确定性时间 $O(c^k k^{\omega+1} n)$ 求解。常数 $c$ 等于 $2^{\omega-1} \cdot 3 + 1$。

此处， $\omega < 2.373$ 表示矩阵乘法指数 [7]。为证明定理 1.1，我们建立了弦图与图拟阵之间的新联系，从而能够利用代表族框架 [37, 38]。弦图顶点删除至少与反馈顶点集一样难，这意味着大幅改进常数 $c$ 存在障碍（见引理 4.1 及其中的讨论）。得益于针对树宽的单指数常数因子 FPT 近似 [20], ，即使输入中未提供树分解，定理 1.1 仍给出了运行时间 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw})}n$ 。

区间图顶点删除已知的最佳运行时间为 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}\log \mathbf{tw})}n$ [66]。（尽管该算法是针对边删除变体描述的，我们将在第 5.1 节中简要说明如何将其调整为顶点删除。）我们证明，与弦图情形不同，在指数时间假设下，该运行时间是最优的。这表明所研究的两个问题之间存在明显的分离。

▶**定理 1.2**。 在指数时间假设成立的前提下，对于树宽为$\boldsymbol{tw}$的 $n$顶点无权图，区间图顶点删除问题无法在时间 $2^{o(\boldsymbol{tw}\log \boldsymbol{tw})}n^{\mathcal{O}(1)}$ 内求解。

事实上，我们证明了一个更强的下界：它排除了相对于另一种图参数——树深度——在相同运行时间内求解该问题的可能性；树深度始终不小于树宽。我们的下界通过从 $k \times k$ 置换团 [55], 进行归约得到，该归约产生一个大小为 $2^{\mathcal{O}(k)}$ 、树深度为$\mathcal{O}(k)$的实例。

**相关工作**。 这两个所考虑的$\mathcal{H}$-顶点删除问题已在多个背景下得到研究。对于解的规模 $k$这一参数，两种问题都是固定参数可解的（FPT），目前已知的最佳运行时间分别为$\mathcal{O}(8^k(n+m))$（当$\mathcal{H} = \texttt{interval}$ [27] 时）和 $2^{\mathcal{O}(k\log k)}n^{\mathcal{O}(1)}$（当$\mathcal{H} = \texttt{chordal}$ [28] 时）（但当$\mathcal{H} = \texttt{perfect}$ [41]时，该问题变为 W[2]-困难）。对于$\mathcal{H} = \texttt{interval}$ [27]，存在近似因子为 8 的多项式时间近似算法；对于$\mathcal{H} = \texttt{chordal}$ [48]，则有近似因子为 $k^{\mathcal{O}(1)}$ 的算法。值得注意的是，在这两种情形下，将顶点删除至弦图似乎比删除至区间图更困难（尽管目前尚无下界能够正式证明这种差异）；这与我们关于树宽参数化的结果形成对比。

所研究的两个问题都存在精确的指数时间算法，其运行时间形式为 $\mathcal{O}((2-\varepsilon)^n)$ [18]，并且还存在多项式核化 [3, 4, 48]。成为弦图（分别为区间图）的障碍具有 Erdős-Pósa性质：任意图 $G$ 要么包含 $k$个彼此顶点不相交的、非弦图（分别为非区间图）的子图，要么包含一个大小为$\mathcal{O}(k^2\log k)$的顶点集 $X$，使得 $G-X$ 为弦图 [51]（分别为区间图 [2]）。将图顶点删除为完美图的其他子类也已得到研究 [1, 5, 6, 70]。对于其他修改变体，即不考虑顶点删除，而考虑边的删除、插入或收缩，请参见例如 [17, 26, 27, 28, 39, 56, 72]。

代表族这一概念在我们的 ChVD 算法中发挥着重要作用，也已在树宽以外的背景中得到应用 [68, 73]。我们的另一种工具——带边界图——为各种图类提供了富有成果的见解 [9, 21, 45]。

**论文结构**。 我们首先在第 2 节非正式地介绍本文的技术贡献。第 3 节给出形式化的预备知识。第 4 节致力于建立弦图与图拟阵之间的联系，随后证明定理 1.1。第 5 节证明区间图顶点删除问题的下界。最后，我们在第 6 节作总结。

## 2 技术

**弦图顶点删除**。 在有界宽度的树分解上设计算法的标准方法，是为分解中的每个节点 $t$ 分配一个数据结构，用于存储与 $t$的子树所对应子图的部分解信息。假设 $X \subseteq V(G)$ 是 $t$的一个袋，$A \subseteq V(G)\setminus X$表示出现在 $t$ 的后代节点的袋中（但不在 $X$中）的顶点集合，而 $B \subseteq V(G)$ 是其余顶点的集合。若子集 $S \subseteq V(G)$ 满足 $G[S]$ 是弦图，我们就称它为一个解；我们的目标是最大化

$S$的大小。接下来，若 $G[S_A \cup S_X]$ 是弦图，则称一对 $(S_A \subseteq A, S_X \subseteq X)$ 为部分解。若 $S_A \cup S_X \cup S_B$ 是一个解，则称集合 $S_B \subseteq B$ 是部分解 $(S_A, S_X)$ 的扩展。由于 $X$ 将 $S_A$ 与 $S_B$分隔开，图 $G[S_A \cup S_X \cup S_B]$ 可视为沿边界 $S_X$将 $G[S_A \cup S_X]$与 $G[S_B \cup S_X]$粘合的结果。对于节点 $t$和 $S_X \subseteq X$，我们希望存储一个部分解族 $\mathsf{G}_{t,S_X}$，使得对于每个可能的 $S_B \subseteq B$：若$S_B$是某个部分解 $(S_A, S_X)$ 的扩展，则存在一个部分解 $(S'_A, S_X) \in \mathsf{G}_{t,S_X}$，满足 (a) $S_B$ 仍是一个有效扩展，且 (b) $S'_A$ 至少与 $S_A$ 一样大。我们称这样的族满足 $(t, S_X)$ 的正确性不变量。

Jansen 等人 [45] 证明，任何边界大小为 $k$ 的弦图 $H$ 都可以压缩 为一个具有相同粘合行为的图 $H'$，其顶点数为 $\mathcal{O}(k)$。更确切地说，对于任意图 $J$， $H$ 与其的粘合积是弦图，当且仅当 $H'$ 与 $J$ 的粘合积是弦图。由于顶点数为 $\mathcal{O}(\mathbf{tw})$ 的图有 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}^2)}$ 个，而边界 $S_X$有 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw})}$种选择，因此只需存储 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}^2)}$ 个部分解。

我们将这一思路进一步推进，并证明实际上只需存储$2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw})}$ 个部分解。为此，我们研究弦图类关于粘合操作的性质，并证明一个将其与图拟阵联系起来的同态定理。图 $J$ 的图拟阵是定义在 $E(J)$ 上的集合系统 $\mathsf{I}$，其中子集 $S \subseteq E(J)$ 属于 $\mathsf{I}$（并称为独立），当且仅当 $S$ 不含环。拟阵的秩是独立集的最大大小；在这里，这等于 $J$中任意生成森林的大小。在下述陈述中，$\mathsf{G}_{X,B}$ 是满足 (a) $V(H) \supseteq X$ 和 (b) $H[X] = B$ 的图族$H$。对于图 $H_1$, $H_2 \in \mathsf{G}_{X,B}$，我们假设 $V(H_1) \cap V(H_2) = X$，并将它们的粘合积定义为 $H_3 = (H_1, X) \oplus (H_2, X)$，其中$V(H_3) = V(H_1) \cup V(H_2)$，且 $E(H_3) = E(H_1) \cup E(H_2)$。

▶ 定理 *2.1*。*考虑图族 $\mathsf{G}_{X,B}$，其中某个有序对 $(X, B)$ 满足条件。存在一个秩至多为 $|X|-1$ 的图拟阵 $M = (E, \mathsf{I})$，以及一个多项式时间可计算映射 $\sigma : \mathsf{G}_{X,B} \to 2^E$，使得 $(H_1, X) \oplus (H_2, X)$ 是弦图，当且仅当 $\sigma(H_1) \cap \sigma(H_2) = \emptyset$ 且 $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \in \mathsf{I}$。*

有了这个判据，我们便可以运用代表族的工具，截断树分解中每个节点需要存储的部分解数量。暂且不谈技术细节，对于拟阵 $M = (E, \mathsf{I})$ 中独立集构成的族 $\mathsf{S}$，如果子族 $\widehat{\mathsf{S}} \subseteq \mathsf{S}$ 对于 $\mathsf{S}$ 是代表族，则称其为 $\mathsf{S}$ 的代表族；这意味着，对于每个独立集 $Y$，如果存在 $X \in \mathsf{S}$，使得 $X \cap Y = \emptyset$ 且 $X \cup Y \in \mathsf{I}$，那么就存在 $X \in \widehat{\mathsf{S}}$，使得 $X \cap Y = \emptyset$ 且 $X \cup Y \in \mathsf{I}$。Fomin 等人 [38] 证明，对于秩为 $k$ 的图拟阵（更一般地，线性拟阵）中的任意族 $\mathsf{S}$，都存在一个大小至多为 $2^k$ 的代表族，且可以在时间 $2^{\mathcal{O}(k)}$内构造出来。我们利用定理 2.1 将这一结果转化为弦图和粘合的表述。当 $\mathsf{G}_{t,S_X}$ 是满足 $(t, S_X)$ 正确性不变量的部分解族时，相关图拟阵 $\widehat{M}$ 中 $\sigma(\mathsf{G}_{t,S_X})$ 的代表族，对应于一个子族 $\widehat{\mathsf{G}}_{t,S_X} \subseteq \mathsf{G}_{t,S_X}$；该子族满足正确性不变量的条件 (a)，并且 $|\widehat{\mathsf{G}}_{t,S_X}| \leq 2^{\mathbf{tw}}$。为了满足条件 (b)，我们需要给拟阵 $M$ 的元素赋予权重，以编码映射到每个元素的最大部分解的大小。然后，我们可以使用代表族的加权变体，它会保留最大权重元素 [38]。只存储部分解的压缩形式（其顶点数为 $\mathsf{O}(\mathsf{tw})$），还可以使对 $|V(G)|$ 的依赖为线性。

为了证明定理 2.1，我们给出一种用于检验粘合积弦性的全新判据。当 $G$ 由两个弦图 $G_1$、$G_2$ 沿边界$X$粘合而成时， $G$ 中的任何洞都必须同时经过 $V(G_1) \setminus X$ 和 $V(G_2) \setminus X$，因此必然多次经过 $X$。我们证明，如果一个洞 $H$ 与$G[X]$的至少两个连通分量相交，那么它对应于将 $G$ 中的每个连通分量收缩后得到的图中的一个环。

将 $G[X]$、 $G_1 - X$、 $G_2 - X$ 的连通分量收缩为单个顶点。否则，设$C$ 为 $G[X]$ 中与该洞相交的唯一连通分量。我们证明，存在一个顶点集 $S \subseteq V(C)$，它与 $V(H)$不相交，且 $C - S$ 有两个连通分量 $C_1$、$C_2$，满足 $N_C(C_1) = N_C(C_2) = S$（下文称这些分量为相关分量），并且与 $V(H)$有非空交集。此外， $V(H) \cap C$中的每个顶点都属于某个相关分量。考虑由 $G$ 通过以下操作得到的图 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$：(1) 删除 $G[X]$ 中除 $C$之外的连通分量；(2) 将 $C - S$ 中的相关分量收缩为单个顶点，同时删除无关分量；(3) 将 $G_1 - X$、$G_2 - X$ 的分量收缩为单个顶点。详细构造见定义 4.10；另见第 13 页的图 1。然后，洞 $H$ 对应于 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$中的一个环。第一种情形也可用这种方法分析，只需取 $S = \emptyset$。我们证明，考虑 $G[X]$中的所有极小顶点分隔集 $S$，并检查每个辅助图 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$是否无环，即可得到 $G$ 为弦图的充要条件。

这一判据使我们能够构造一个图拟阵，其中编码了关于每个图 $G_1$， $G_2$ 的所有必要信息，以便重构图 $\mathtt{Aux}(G,\ X,\ S)$，并确定 $G$ 是否为弦图。为了界定该拟阵的秩，我们研究弦图中极小顶点分隔集的结构，并界定从 $\mathtt{Aux}(G,\ X,\ S)$的并集中得到的某个图中的生成森林大小。对于边界包含哈密顿回路的平面图粘合积，已有一种类似的判据用于检验其平面性；此时，相应的辅助图（以不同方式定义）应为二部图 [13]。

我们的判据也可以与 Bonnet 等人 [23] 在其关于有界$\mathcal{P}$-块顶点删除的研究中使用的判据进行比较。这里的任务是从图中删除数量最少的顶点，使得每个剩余的双连通分量至多包含 $d$ 个顶点，且属于类 $\mathcal{P}$。他们证明，当 $\mathcal{P}$ 是弦图的子类时，有界 $\mathcal{P}$- 块顶点删除问题可以在时间 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw}\cdot d^2)}n^{\mathcal{O}(1)}$ 内求解；否则，除非指数时间假设不成立，否则对于固定的 $d$，该问题无法在时间 $2^{o(\mathbf{tw}\log \mathbf{tw})}n^{\mathcal{O}(1)}$ 内求解。他们的正面结果同样基于一种判据：通过检查两个特定集合的并集在图拟阵中是否独立，来判断两个图的粘合积是否具有所需性质。该判据适用于与上述概要中考虑的第一种情形类似的情况。不过，尽管这一判据是必要条件，却不是充分条件，因此还需要在动态规划状态中存储更多信息，从而使指数部分多出因子 $d^2$ 。在我们的设定中，双连通分量的大小可能任意大，因此这样的因子代价过高。

**区间图顶点删除**。 为了证明定理 1.2，我们给出一个从 $k \times k$ 置换团出发的参数化归约。这里，输入是一个顶点集为 $[k] \times [k]$ 的图 $G$，我们要判断是否存在一个排列 $\pi$: $[k] \to [k]$，使得 $(1,\ \pi(1)), (2,\ \pi(2)) \ldots,\ (k,\ \pi(k))$ 在 $G$ 中构成一个团。Lokshtanov 等人 [55] 证明，在指数时间假设下， $k \times k$置换团无法在时间 $2^{o(k \log k)}$ 内求解。因此，我们寻求一个从 $k \times k$ 置换团到区间图顶点删除的归约，该归约生成的图的树宽为 $\mathcal{O}(k)$。

设想一个完全图 $Y$ 在顶点集 $[k]$ 上的区间模型，其中所有区间的右端点重合，左端点则各不相同。选择左端点的排列顺序，即可编码一个排列 $\pi$: $[k] \to [k]$ （见第 24 页的图 2）。只有当 $N(v)$ 对应于一组交于同一点的区间时，才能将新顶点 $v$ 加入该区间模型。这只有在某个 $\ell \in [k]$ 满足 $N(v) = \pi([\ell])$ 时才有可能。此外，加入 $Y$ 个独立顶点 $v_1$， $v_2$，……， $v_k$，使得

$|N(v_i)| = i$ 和 $N(v_i) \subset N(v_{i+1})$，就能强制选定排列 $\pi$。因此，我们可以用一个递增的集合族 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k = [k]$ 编码排列 $\pi$，该集合族满足 $N_i = \pi([i])$，并对应于 $Y$ 中 $v_1$，$v_2$，……，$v_k$ 的邻域。另一方面，任何能通过上述构造得到区间图的递增集合族，都必须编码某个排列。直观来说，一个大小为 $k$ 的分隔集的部分区间模型可以编码 $k!$ 个排列之一。

我们需要一种机制来验证所选排列 $\pi$ 是否编码了一个团，也就是说，它是否满足形如 $(i, \pi(i))(j, \pi(j)) \in E(G)$ 的 $\binom{k}{2}$ 约束。为了实现单个约束，我们构造了一个选择小工具，其灵感来自于平面顶点删除的归约 [60]。这种构件 $C_{i,j}$ 被定义为一种类路径结构，分成若干块，使每个块都有一些与之相邻的特殊顶点 $Y$（见第 25 页的图3）。我们证明，$C_{i,j}$ 中任意最小规模的区间删除集都必须“选择”一个块，并保持其中的特殊顶点不变，同时可以删除其余特殊顶点。我们使用这一构件来检验由递增集合族 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k$ 编码的排列 $\pi$ 是否满足约束 $(i, \pi(i))(j, \pi(j)) \in E(G)$。由于 $\pi(i)$ 是 $N_i \setminus N_{i-1}$ 中唯一的元素，因此可以从元组 $(N_{i-1}, N_i, N_{j-1}, N_j)$ 中提取这一信息。对于每个有效元组，我们在 $C_{i,j}$ 中创建一个块。由于这类元组的数量为 $2^{\mathcal{O}(k)}$，我们需要一个长度为指数级的选择小工具，这与上述可在多项式时间内完成的归约不同。不过，构造一个规模为 $2^{\mathcal{O}(k)}$、树宽为 $\mathsf{O}(k)$ 的实例，仍足以得到所声称的下界。

## 3 预备知识

我们将 $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ 记作，并假设 $[0] = \emptyset$。我们将 $X \setminus v = X \setminus \{v\}$记作。对于函数 $w\colon X \to \mathbb{N}$ 和 $S \subseteq X$，我们使用简写 $w(S) = \sum_{x \in S} w(x)$。

图。我们考虑有限简单无向图。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 $G$ 的顶点集和边集。对于顶点集合 $S \subseteq V(G)$，我们用 $G[S]$ 表示由 $S$ 诱导的图。我们分别使用 $G - v$ 和 $G - S$ 作为 $G[V(G) \setminus v]$ 和 $G[V(G) \setminus S]$ 的简写。顶点 $v \in V(G)$ 的开邻域 $N_G(v)$ 定义为 $\{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$。$v$ 的闭邻域为 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$。对于 $S \subseteq V(G)$，我们有 $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N_G[v]$，且 $N_G(S) = N_G[S] \setminus S$。当 $C$ 是 $G$ 的子图时，我们将 $G[C] = G[V(C)]$ 和 $N_G(C) = N_G(V(C))$ 分别简写为 ] 和 $= N_G(V(C))$。

对于集合 $S_1$、$S_2 \subseteq V(G)$，我们用 $E_G(S_1$、$S_2)$ 表示一个端点在 $S_1$ 中、另一个端点在 $S_2$ 中的边集。若 $S_1$、$S_2$ 在 $G$ 中相邻，则称 $E_G(S_1$、$S_2) \neq \emptyset$。森林是不含环的图。若集合 $S \subseteq V(G)$ 满足 $G - S$ 是森林，则称其为反馈顶点集。图 $G$ 中的团是指满足以下条件的顶点集 $S$：对于任意不同的 $u$、$v \in S$，边 $uv$ 属于 $E(G)$。

对 $uv \in E(G)$ 进行收缩时，会引入一个与 $N_G(\{u$、$v\})$ 中所有顶点都相邻的新顶点，随后删除 $u$ 和 $v$。对于满足 $G[S]$ 连通的 $S \subseteq V(G)$，若我们同时收缩 $G[S]$ 中的所有边，并引入一个与 $N_G(S)$ 相邻的新顶点，则称为收缩 $S$。

**分隔集**。对于顶点 $u$，$v \in V(G)$，若顶点集 $S \subseteq V(G) \setminus \{u$，$v\}$ 使得 $u$，$v$属于 $G - S$的不同连通分量，则称其为一个 $(u$，$v)$-分隔集。若一个 $(u$，$v)$-分隔集不存在任何真子集仍为 $(u$，$v)$-分隔集，则称其为极小分隔集。若顶点集 $S$ 是某些 $u$，$v \in V(G)$ 的极小 $(u$，$v)$-分隔集，则称 $S$ 为极小顶点分隔集。

▶ **引理 3.1** ($\star$)。 设 $u, v$ 是图 $G$ 中的顶点，且 $S$ 是 $G$中的一个 $(u, v)$-分隔集。记 $C_u, C_v$ 为 $G - S$ 中分别包含 $u$ 和 $v$的连通分量。那么，当且仅当 $N_G(C_u) = N_G(C_v) = S$ 时， $S$ 是极小的。

证明。为说明第一个蕴含关系，不失一般性，假设 $N_G(C_u) \subsetneq S$。令 $w \in S \setminus N_G(C_u)$。 $u$ 在图 $G - (S \setminus w)$ 中的连通分量为 $C_u$，因为 $N_G(C_u) \subseteq S \setminus w$。因此， $S \setminus w$ 也是一个 $(u, v)$-分隔集，这与 $S$ 的极小性矛盾。

为了说明反向蕴含，假设 $S' \subsetneq S$ 也是一个 $(u, v)$-分隔集。令$w \in S \setminus S'$。但是 $w \in N_G(C_u) \cap N_G(C_v)$，因此 $u, v$ 属于 $G - S'$ 的同一个连通分量。◀

如果一个顶点（或顶点集）的开邻域是一个团，则称其为单纯的 。

▶**引理 3.2** ($\star$)。 设 $S$ 是图 $G$ 中的极小顶点分隔集。那么 $S$ 不包含任何单纯的顶点。

证明。假设 $S$ 包含一个单纯顶点 $v$。接下来，假设 $G - S$ 有两个不同的连通分量 $C_1$、$C_2$ 与 $v$相邻。令 $w_1 \in N_G(v) \cap C_1, w_2 \in N_G(v) \cap C_2$。但这样一来， $w_1 w_2 \in E(G)$，这与 $C_1, C_2$ 彼此不同的假设矛盾。因此，至多只有一个 $G - S$ 的连通分量与 $v$相邻。但这样一来， $S \setminus v$ 分隔的顶点对与 $S$ 分隔的顶点对相同。这意味着 $S$ 不是极小顶点分隔集。◀

**弦图与区间图**。 区间图是实数轴上若干区间的交图。在图 $G$的区间模型 $\mathcal{I}_G = \{I(v) \mid v \in V(G)\}$ 中，每个顶点 $v \in V(G)$对应一个闭区间 $I(v)$；当且仅当 $I(v) \cap I(u) \neq \emptyset$时，顶点 $u$ 与 $v$ 之间有一条边。

图中的洞是指长度至少为四的诱导（即无弦）环。不含任何洞的图称为弦图。另一种等价定义指出，弦图是树 [40]中某个子树族的交图。这意味着任何区间图都是弦图。有关这些图类的更多背景信息，请参阅综述 [16, 24]。

这两个类别被刻画为区间/子树的交图，由此得出以下观察。

▶**观察 3.3**。 弦图和区间图类在顶点删除和边收缩操作下保持封闭。

星状三元组（AT）是由三个顶点组成的三元组，满足对于其中任意两个顶点，都存在一条连接它们的路径，且该路径避开第三个顶点的闭邻域。区间图不可能包含交错三元组（AT），这是任意区间模型的线性序所带来的结果。事实证明，这正是区分这两个图类的唯一性质。

▶**引理 3.4** ([24])。 一个图是区间图，当且仅当它是弦图且不包含交错三元组。

我们再总结两个关于弦图的有用事实。

▶**引理 3.5** ([24])。 每个非空弦图都包含一个单纯顶点。

弦图若包含一个环，也必然包含一个三角形。由于二分图不含任何三角形，我们得到以下结论。

▶**观察 3.6**。如果一个图是弦图且为二部图，那么它就是森林。

图 $G$ 中的顶点集 $S$ 称为弦图删除集（分别称为区间删除集），如果$G-S$是弦图（分别是区间图）。弦图/区间图顶点删除问题定义如下。给定一个图 $G$、一个非负权函数 $w$: $V(G) \to \mathbb{N}$、一个整数 $p$，我们需要判断是否存在 $G$ 中的一个弦图（分别为区间图）删除集 $S$，使得 $w(S) \leq p$。

**带边界图**。对于集合 $X$ 和顶点集为 $X$的图 $B$，我们定义一个满足以下条件的图族 $\mathcal{G}_{X,B}$: (a) $V(G) \supseteq X$; (b) $G[X] = B$。对于图 $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{X,B}$，我们将其粘合积 $(G_1, X) \oplus (G_2, X)$ 定义为：取 $G_1$和 $G_2$的不交并，并将来自 $X$的顶点识别为同一顶点。注意，来自 $X$ 的两个顶点在 $G_1$ 中相邻，当且仅当它们在 $G_2$中相邻。

对于 $X \subseteq V(G)$，一对 $(G, X)$ 称为带边界图。我们称两个带边界图 $(G_1, X)$,$(G_2, X)$ 相容，如果对于某个 $B$，有 $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{X,B}$。我们指出，文献中通常将带边界图定义为三元组 $(G, X, \lambda)$，其中 $\lambda$: $X \to [|X|]$ 是一个标记（参见 [9, 21]）。由于我们不需要对抽象的带边界图进行粘合，只需对源自某个固定图的子图进行粘合，因此这个较简单的定义已经足够。

例如，考虑一个图 $G$ 和 $X \subseteq V(G)$。那么对于任意 $A \subseteq V(G) \setminus X$，图 $G[A \cup X]$ 属于 $\mathcal{G}_{X,G[X]}$。当 $A, B \subseteq V(G) \setminus X$ 互不相交且不相邻时，$G[A \cup B \cup X]$ 与 $(G[A \cup X], X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 同构。

**树分解**。

▶ **定义 3.7** (树宽)。一个树分解 图 $G$ 是一个二元组$(\mathbb{T}, \chi)$，其中 $\mathbb{T}$ 是一棵树，并且 $\chi$: $V(\mathbb{T}) \to 2^{V(G)}$ 是一个函数，满足:

**1.** 对于每个 $v \in V(G)$，节点 $\{t \mid v \in \chi(t)\}$ 构成 $\mathbb{T}$ 的一个非空连通子树，**2.** 对于每条边 $uv \in E(G)$，存在一个节点 $t \in V(\mathbb{T})$，使得 $\{u, v\} \subseteq \chi(t)$。

$(\mathbb{T}, \chi)$ 的宽度 定义为$\max_{t \in V} (\mathbb{T}) |\chi(t)| - 1$。图 $G$ （记作$\boldsymbol{tw}(G)$）的树宽 是 $G$ 的树分解的极小宽度。

▶ **定义 3.8**。如果 $\mathbb{T}$ 是一棵以 $r$ 为根的有根树，且 $\chi(r) = \emptyset$，每个节点至多有两个子节点，并且每个节点都属于以下类型之一，则称树分解 $(\mathbb{T}, \chi)$ 是规范的 。

*1.* 基节点: $\mathbb{T}$ 中的叶节点 $t \neq r$，满足 $\chi(t) = \emptyset$。*2.* 引入节点: 具有一个子节点 $t'$ 的节点 $t$，满足 $\chi(t) = \chi(t') \cup \{v\}$，其中$v \notin \chi(t')$ 。*3.* 遗忘节点: 具有一个子节点 $t'$ 的节点 $t$，满足 $\chi(t) = \chi(t') \setminus v$，其中 $v \in \chi(t')$ 。*4.* 合并节点: 具有两个子节点 $t_1$、$t_2$ 的节点 $t$，满足 $\chi(t) = \chi(t_1) = \chi(t_2)$ 。

众所周知，任意一个宽度为 $k$ 的 $G$ 树分解，都可以在线性时间内转换为宽度为 $k$ 的良好树分解，且其节点数为 $\mathcal{O}(k \cdot |V(G)|)$ [53]。当上下文已明确给出 $G$ 的根树分解 $(\mathbb{T}, \chi)$ 时，我们用 $V_t$ 表示以 $t \in V(\mathbb{T})$ 为根的子树中出现的顶点集合，并定义 $U_t = V_t \setminus \chi(t)$ 。

▶**定义 3.9** (树深度)。图 $G$ 的树深度（记作 $\boldsymbol{td}(G)$) 递归定义如下。

$$\text{树深度}(G) = \begin{cases} 0 & \text{为空时为 } 1 + \text{最小值}_{v \in V(G)}(\text{树深度}(G - v)) \ G \text{ 非空且连通时为 最大值}_{i=1}^{d}(\text{树深度}(G_i)) \ G \text{ 不连通且 } G_1\text{、} \\ \ldots G_d \text{是其连通分量时} \end{cases}$$

根据此定义的直接推论，向图中插入一个顶点最多会使其树深度增加一。众所周知，对于每个图 **树宽**($G$) $\leq$**树深度**($G$)。

**拟阵**。 我们仅介绍与应用相关的基础背景。有关拟阵的更多信息，请参阅综述 [59]。

▶ **定义 3.10** （拟阵）。 一对 $M = (E,I)$，其中 $E$ 是一个集合，$I \subseteq 2^E$ 称为拟阵，若其满足以下条件。
- 如果 $X \subseteq Y$ 和 $Y \in I$，那么 $X \in I$。如果 $X$、$Y \in I$ 且 $|X| < |Y|$，那么存在 $e \in Y \setminus X$，使得 $X \cup \{e\} \in I$。当 $X \in I$ 时，我们称集合 $X \subseteq E$ 在 $M$ 中是独立的。 $M$ 的秩是 $M$ 中最大独立集的大小。

最简单的例子是一个 $k$ 均匀拟阵，其中集合 $X \subseteq E$ 在 $|X| \leq k$ 时是独立的。另一个重要例子是线性拟阵。设 $A$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个矩阵。我们定义拟阵 $M = (E, \mathcal{I})$，其中 $E$ 是 $A$ 的列集合，且当 $X \subseteq E$ 中的对应列在 $\mathbb{F}$ 上独立时， $M$ 中的 $X \subseteq E$ 是独立的。我们称矩阵 $A$ 是 $M$ 在 $\mathbb{F}$ 上的表示。

给定一个图 $G$，我们定义其图拟阵 $M = (E(G), \mathcal{I})$，其中当 $X$ 不包含环时， $X \subseteq E(G)$ 是独立的。众所周知，每个图拟阵都是线性的，并且 $G$ 的有向关联矩阵构成了其在任意域上的表示矩阵 $M$。

▶**引理 3.11** ([59])。给定一个图 $G$，我们可以在多项式时间内求出其图拟阵在任意域上的表示矩阵。

▶ **定义 3.12** (乘积族)。给定拟阵 $M = (E, I)$ 中的两个独立集族 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$，我们定义

$$\mathcal{S}_1 \bullet \mathcal{S}_2 = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{S}_1, Y \in \mathcal{S}_2, X \cap Y = \emptyset, X \cup Y \in \mathcal{I}\}.$$

**代表族**。如果集合族 $\mathcal{S}$ 中的每个集合大小均为 $p$，则称其为 $p$-族。

▶ 定义 *3.13*（最小/最大 $q$-代表族）。设 $M = (E, I)$ 为一个拟阵，$S$ 为 $E$ 的子集族，且 $w\colon S \to \mathbb{N}$ 是一个非负权函数。若对任意大小至多为 $q$ 的集合 $Y \subseteq E$，只要存在一个与 $Y$ 不相交且满足 $X \cup Y \in I$ 的集合 $X \in S$，就存在一个与 $Y$ 不相交的集合 $X \in \widehat{S}$，满足 *(a)* $X \cup Y \in I$，且 *(b)* $w(X) \leq w(\widehat{X})$（分别为 $w(X) \geq w(\widehat{X})$），则称子族 $\widehat{S} \subseteq S$ 是 $S$ 的最小 $q$-代表族（分别为最大 $q$-代表族）。

当所有权重均为零时，我们得到一种更简单的 $q$-代表族概念。注意，当 $X$ 是拟阵中的一个 $p$-元素集合，且该拟阵的秩为 $k$，并且 $Y$ 满足 $X \cap Y = \emptyset$ 且 $X \cup Y \in \mathcal{I}$ 时， $|Y| \leq k - p$。我们记下这一事实。

▶**观察 3.14.** 如果 $S$ 是秩为 $k$ 的拟阵中的一个 $p$-族，且 $\widehat{S} \subseteq^{k-p}_{\text{maxrep}} S$，那么 $\widehat{S} \subseteq^{k}_{\text{maxrep}} S$。

以下引理已在 [38] 中针对代表族的无权版本进行了陈述，但同时附有说明，指出它们同样适用于加权版本（如下文所述）。

▶ **引理 3.15** ([38, 引理 3.1]). 设 $M = (E, I)$ 是一个拟阵，$S$ 是 $E$ 的子集族 $\widetilde{S} \subseteq \widehat{S} \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widehat{S}$。若 $S \subseteq^{q}_{\text{maxrep}} \widetilde{S}$ 且 $S \subseteq^{q}_{\text{maxrep}} \widehat{S}$，则 $S \subseteq^{q}_{\text{maxrep}} \widetilde{S}$。

## 10 弦图/区间图顶点删除的紧确界

▶ **引理 3.16** ([38, 引理 3.2]). 设 $M=(E,I)$ 是一个拟阵，$S$ 是 $E$ 的子集族。若 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_\ell$ 且 $\widehat{S}_i\subseteq^q_{\text{maxrep}}S_i$，则 $\bigcup_{i=1}^{\ell}\widehat{S}_i\subseteq^q_{\text{maxrep}}S$。

▶ **引理 3.17** ([38, 引理 3.3])。设 $M=(E,I)$ 为一个秩为 $k$ 的拟阵，且 $S_1$ 为一个由独立集组成的 $p_1$-族，$S_2$ 为一个由独立集组成的 $p_2$-族，$\widehat{S}_1\subseteq^{k-p_1}_{\text{最大代表}}S_1,\widehat{S}_2\subseteq^{k-p_2}_{\text{最大代表}}S_2$。那么 $\widehat{S}_1\bullet\widehat{S}_2\subseteq^{k-p_1-p_2}_{\text{最大代表}}S_1\bullet S_2$。

以下定理是运用代表族来设计单指数算法的关键。我们仅陈述其最大化变体。

▶ **定理 3.18** ([38, 定理 3])。设 $M=(E,I)$ 是一个秩为 $p+q=k$的线性拟阵，并给出了其在域 $\mathbb{F}$上的表示矩阵 $A_M$。设 $S$ 是 $p$中由独立集构成的一个 $M$族。那么，对于 $S$，至多包含 $\binom{k}{p}$个元素的最大 $q$-代表族 $\widehat{S}\subseteq S$ 可在 $O\left(|S|\cdot\binom{k}{p}\cdot p^\omega+|S|\cdot\binom{k}{p}^{\omega-1}\right)$ 次域 $\mathbb{F}$上的运算内找到。

我们给出一个更简洁、适用于本文应用的推论。

▶ **引理 3.19**。设 $M=(E,I)$ 是一个秩为 $k$ 的图拟阵。设 $S$ 是 $E$ 的一个子集族。那么，可以在时间 $O\left(|S|\cdot 2^{(\omega-1)k}\cdot k^\omega\right)$ 内找到 $\widehat{S}\subseteq^k_{\text{maxrep}}S$，其中至多包含 $2^k$ 个元素。

证明。借助引理 3.11，我们可以高效地表示 $M$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上。对于 $p\in[k]$，令 $\mathsf{S}^p\subseteq\mathsf{S}$ 为 $\mathsf{S}$ 中大小为 $p$ 的独立集所组成的族。我们应用定理 3.18，计算一个大小至多为 $\binom{k}{p}$ 的 max ( $k-p$)-代表族 $\widehat{\mathsf{S}}^p\subseteq^{k-p}_{\text{maxrep}}\mathsf{S}^p$，对每个 $\mathsf{S}^p$ 都如此。根据观察 3.14，我们可以写成 $\widehat{\mathsf{S}}^p\subseteq^k_{\text{maxrep}}\mathsf{S}^p$。由引理 3.16 可知，$\widehat{\mathsf{S}}=\bigcup_{p=1}^{k}\widehat{\mathsf{S}}^p$（若 $\emptyset\in\mathsf{S}$，则再加上 $\emptyset$）是 $\mathsf{S}$ 的 max $k$-代表族。$\widehat{\mathsf{S}}^p$ 的大小总和为 $2^k-1$，总运行时间可按陈述中的方式用一个平凡上界 $\binom{k}{p}\le 2^k$ 来界定。◀

如果族$\mathcal{S}$ 具有乘积族的特殊形式，那么，与直接应用定理 3.18 相比，可以得到稍快一些的运行时间。这类族对基于树宽的算法尤为重要，因为它们会自然地出现在合并节点的计算中。在下述定理中，输入由$\mathcal{S}_1$,$\mathcal{S}_2$,$\mathcal{S}_1\bullet\mathcal{S}_2$,以及权函数 $w\colon\mathcal{S}_1\bullet\mathcal{S}_2\to\mathbb{N}$组成，因此其大小可能为$\mathcal{O}(4^k)$。

▶ 定理 *3.20*（[37, 推论 2]）。设 $M=(E,I)$ 是一个秩为 $k$ 的线性拟阵，并给出了它在域 $\mathbb{F}$ 上的表示矩阵 $A_M$。设 $S_1$,$S_2$ 是 $M$ 的两个独立集族，且 $S_1$ 和 $S_2$ 中大小为 $p$ 的集合数量至多为 $\binom{k+c}{p}$。这里，$c$ 是一个固定常数。设 $S_r^p$ 是 $S_r$ 中大小为 $p$ 的集合构成的子族，其中 $r\in\{1,2\}$,$p\in[k]$。那么，对于所有的对 $p,q\in[k]$，我们都可以找到 $\widehat{S}^{p,q}\subseteq^{k-p-q}_{\text{maxrep}}S_1^p\bullet S_2^q$，其总大小为 $\binom{k}{p+q}$，所需操作次数为 $O\left(2^{(\omega-1)k}3^k\cdot k^\omega\right)$，运算在 $\mathbb{F}$ 上进行。

我们指出，在 [37] 的原始表述中，操作次数的上界为 $\mathcal{O}\left((2^\omega+2)^k\cdot k^\omega+2^{(\omega-1)k}3^k\cdot k^\omega\right)$，但对于 $\omega\ge 2$ 的每个取值，都有$2^\omega+2\le 2^{\omega-1}\cdot 3$。

▶ **引理 3.21.** 设 $M=(E,I)$ 是一个秩为 $k$ 的图拟阵。设 $S_1,S_2$ 是 $M$ 的两个独立集族，每个族的大小至多为 $2^k$。那么，我们可以在 $O\left(2^{(\omega-1)k}3^k\cdot k^\omega\right)$ 时间内找到大小至多为 $2^k$ 的 $\widehat{S}\subseteq^k_{\text{maxrep}}S_1\bullet S_2$。

证明。正如前面所观察到的，我们可以高效地表示 $M$ over $\mathbb{F}_2$，并且可以假设$\emptyset\notin\mathsf{S}_1\bullet\mathsf{S}_2$，否则可以在最后将其加入。对于 $p\in[k]$,$r\in\{1,2\}$，令 $\mathsf{S}_r^p\subseteq\mathsf{S}_r$为 $\mathsf{S}_r$ 中大小为 $p$的独立集族。我们首先对每一对 $(r,p)$ 应用定理 3.18，以计算大小为 $\binom{k}{p}$ 的 $\widehat{\mathsf{S}}_r^p\subseteq^{k-p}_{\text{maxrep}}\mathsf{S}_r^p$。总运行时间上界为

$O(2^{\omega k}\cdot k^{\omega})$，其上界为 $O\left(2^{(\omega-1)k}3^{k}\cdot k^{\omega}\right)$。现在我们可以对$\bigcup_{p=1}^{k}\tilde{S}_1^p$和 $\bigcup_{p=1}^{k}\tilde{S}_2^p$应用定理 3.20。对于每一对 $p,q\in[k]$，我们得到一个族 $\hat{S}^{p,q}\subseteq^{k-p-q}_{\text{maxrep}}\tilde{S}_1^p\bullet\tilde{S}_2^q$。根据引理 3.15、3.17 和观察 3.14，我们得到 $\hat{S}^{p,q}\subseteq^{k}_{\text{maxrep}}S_1^p\bullet S_2^q$。引理 3.16 意味着 $\hat{S}'=\bigcup_{p,q\in[k]}\hat{S}^{p,q}\subseteq^{k}_{\text{maxrep}}S_1\bullet S_2$。族 $\hat{S}'$至多包含 $k\cdot 2^k$ 个集合；我们使用引理 3.19，在时间 $O(2^{\omega k}\cdot k^{\omega+1})$ 内找到大小至多为 $2^k$ 的 $\hat{S}\subseteq^{k}_{\text{maxrep}}\hat{S}'$，与定理 3.20 给出的运行时间相比，这可以忽略不计。由引理 3.15 即得结论。◀

## 4 弦图删除

我们首先给出一个来自反馈顶点集的简单的保持树宽的归约。

▶ **引理 4.1** (⋆)。 设 $G$ 是一个图，且 $\ell\in\mathbb{N}$。令 $G'$ 由 $G$ 细分每条边得到。那么 $\boldsymbol{tw}(G')=\boldsymbol{tw}(G)$，并且 $G$ 存在大小为 $\ell$ 的反馈顶点集（*FVS*），当且仅当 $G'$ 存在大小为 $\ell$的弦图删除集。

证明。当 $S\subseteq V(G)$ 是 $G$ 中的 FVS 时，它也是 $G'$中的 FVS。由于 $G'-S$ 是无环的，因此它也是弦图。在第二个方向中，考虑 $G'$中的一个弦图删除集 $S'\subseteq V(G')$。由于 $G'$ 是二部的，因此 $G'-S'$ 也是二部的，所以根据观察 3.6，它必定是无环的。因此， $S'$ 是 $G'$中的 FVS。如果 $S'$ 包含通过细分边 $uv\in E(G)$ 引入的顶点 $w$，那么 $G'$ 中经过 $w$ 的每个环也会经过 $u$ 和 $v$。因此，$(S'\setminus w)\cup\{u\}$ 也是 $G'$中的一个 FVS。于是我们可以假设 $S'\subseteq V(G)$，并且它在 $G$ 中构成一个 FVS。

接下来只需给 $\mathbf{tw}(G')$ 一个上界，因为显然 $\mathbf{tw}(G')\geq\mathbf{tw}(G)$。如果 $\mathbf{tw}(G)=1$，那么 $G$ 是一片森林，因此 $G'$ 也是。假设 $\mathbf{tw}(G)\geq 2$，并考虑 $G$ 的一个最优宽度树分解。我们可以按如下方式将其转化为 $G'$ 的树分解：对于每个$uv\in E(G)$，选取一个袋同时包含 $u$, $v$ 的节点 $t$，并创建一个仅与 $t$ 相邻的节点 $t_{uv}$，其袋为 $\{u,v,w\}$，其中 $w$ 是在边 $uv$ 上引入的顶点。由于所有新建的袋大小均为三，分解的宽度不变。◀

因此，在强指数时间假设 [35] 下，定理 1.1 中指数的底数 $c$ 必须至少为 3；如果当前最优的确定性算法——以树宽为参数的反馈顶点集算法——确实是最优的， $c$ 必须至少为 $2^{\omega}+1$。虽然我们没有证据表明所提到的算法在确定性时间方面应当是最优的，但我们仍提供这一比较，以说明若要在 ChVD 上缩小这一差距，就意味着在一个研究得更深入的问题上也能做到这一点。

**极小顶点分隔集。** 我们为定理 2.1 的证明做准备。首先，需要建立一些关于弦图中极小顶点分隔集的理论。

▶**定义 4.2.** 令 $\mathit{MinSep}(G)$ 表示图 $G$中的极小顶点分隔集的集合。对于图 $G$ 和一个（可能为空的）集合 $S\subseteq V(G)$，我们将 $\mathit{Comp}(G,S)$ 定义为 $G-S$ 的连通分量 $C_i$ 的集合，其中满足 $N_G(C_i)=S$。

注意，只要 $G$ 断开，$\emptyset\in\mathtt{MinSep}(G)$ 和 $\mathtt{Comp}(G,\emptyset)$ 就是 $G$ 的连通分量集合。根据引理 3.1，集合 $S$ 是一个极小的（$u$, $v$）-分隔集，当且仅当 $u$, $v$ 属于 $\mathtt{Comp}(G,S)$ 中某些（不同的）连通分量。为后续使用，我们建立 $G$ 中集合 $\mathtt{MinSep}(G)$、$\mathtt{Comp}(G,S)$ 与删除一个单纯顶点后得到的图之间的关系。

▶ **引理 4.3** (⋆)。 设 $v$ 是 $G$ 和 $S\in\mathit{MinSep}(G)$中的一个单纯顶点。若 $S\neq N_G(v)$ 则 $S\in\mathit{MinSep}(G-v)$ 且 $|\mathit{Comp}(G,S)|=|\mathit{Comp}(G-v,S)|$。

**证明。** 假设 $S \neq N_G(v)$。根据引理 3.2，我们知道 $v \notin S$。

首先，考虑 $N_G(v) \subsetneq S$ 的情形。此时 $\{v\}$ 构成 $G - S$ 的一个连通分量，但 $\{v\} \notin \texttt{Comp}(G, S)$。接下来，引理 3.1 表明，对于任意 $u \in V(G)$， $S$ 不是一个极小的（$v, u$）-分隔集。因此，$S \in \texttt{MinSep}(G - v)$ 和 $|\texttt{Comp}(G, S)| = |\texttt{Comp}(G - v, S)|$。

在第二种情形下， $N_G(v) \not\subseteq S$。令 $u \in N_G(v) \setminus S$ 和 $C$ 为 $G - S$ 中包含 $v$ 的连通分量。于是， $u \in V(C)$。由于 $v$ 是单纯的，我们有 $N_G(v) \subseteq N_G[u]$。因此， $C - v$ 是连通的， $N_{G-v}(C \setminus v) = N_G(C)$，所以将 $v$ 插入到 $(G - v) - S$ 中既不会影响连通分量的数量，也不会影响它们的邻域。这意味着$S \in \texttt{MinSep}(G - v)$ 和 $|\texttt{Comp}(G, S)| = |\texttt{Comp}(G - v, S)|$。◀

我们需要一个关于极小顶点分隔集的简单技术引理。

▶ 引理 *4.4*（⋆）。设 $G$ 是一个连通图，且 $V_1, \ldots, V_k \subseteq V(G)$， $k \geq 2$是互不相交的集合，使得对于 $i \in [k]$， $G[V_i]$ 是连通的；对于 $i \neq j$， $E_G(V_i, V_j) = \emptyset$。那么，存在一个极小顶点分隔集 $S \subseteq V(G) \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_k)$，它属于 $G$，并且对于某个 $i \neq j$，是一个（$V_i, V_j$）-分隔集，且每个集合 $V_i$ 都包含在某个连通分量 $C \in \mathit{Comp}(G, S)$ 中。

**证明。** 令 $S \subseteq V(G) \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_k)$为满足以下性质的极小包含集：$S$ 分隔集合 $V_i$， $V_j$ 对于某个 $i \neq j$。这样的集合 $S$ 必定存在，因为 $N_G(V_1)$ 具有这一性质。

我们证明 $S$ 满足引理的条件。显然，对于每个 $v_i \in V_i, v_j \in V_j$， $S$ 都是极小的（$v_i$, $v_j$）-分隔集。假设对于某个 $h \in [k]$，集合 $V_h$ 不包含在 $\texttt{Comp}(G, S)$ 中的任何连通分量内。令 $C$ 为 $G - S$ 中包含 $V_h$的连通分量。由于 $C \notin \texttt{Comp}(G, S)$，我们有 $N_G(C) \subsetneq S$。集合 $V_i$， $V_j$ 中至少有一个不包含在 $C$中；不失一般性，假设它是 $V_i$。那么 $N_G(C)$ 是一个（$V_h$， $V_i$）-分隔集，且是 $S$的真子集，这与 $S$的选取矛盾。结论得证。◀

我们将使用以下概念，该概念出现在 Jansen 等人的弦图顶点删除算法中。

▶ **定义 4.5**（[46, 定义 5。55]）。对于图 $G$ 和顶点集 $X \subseteq V(G)$，令图$\mathit{Condense}(G, X)$由 $G$ 收缩 $G - X$ 的各个连通分量为单个顶点后，再删除其中那些单纯顶点而得到。

我们称 $G$ 关于 $X$ 是已压缩的，如果对于某个图$\frown G$，有 $G = \texttt{Condense}(G, X)$；等价地，$G = \texttt{Condense}(G, X)$。基于以下事实，压缩是高效存储弦图顶点删除的部分解的实用工具。

▶ 引理 *4.6*（[46, 引理 5.57]）。考虑兼容的带边界图 $(G, X)$、$(H, X)$，使得$\frown G, H$ 是弦图。令 $G = \mathit{Condense}(G, X)$。那么 $(G, X) \oplus (H, X)$ 是弦图，当且仅当 $(G, X) \oplus (H, X)$ 是弦图。

▶**引理 4.7** ([46, 引理 5.53])。考虑一个弦图 $G$，其具有非空顶点子集$X \subseteq V(G)$。如果 $G$ 关于 $X$是已压缩的，那么 $|V(G)| \leq 2|X| - 1$。

$\frown$▶ 观察 *4.8*。考虑兼容的带边界图 $(G, X)$、$(H, X)$。令 $G = \frown\mathit{Condense}(G, X)$ 和 $H = \mathit{Condense}(H, X)$。则 $\mathit{Condense}((G, X) \oplus (H, X)\ X) = (G, X) \oplus \frown(H, X)$。

本节将利用压缩的以下性质。

▶**引理 4.9** (⋆)。考虑一个图 $G$ 其顶点集为 $X$ 且满足 $G[X]$ 是弦图。则$G$ 是弦图，当且仅当满足以下条件：**1.** 对于每个连通分量 $C$， $G - X$ 图 $G[X \cup C]$ 都是弦图，

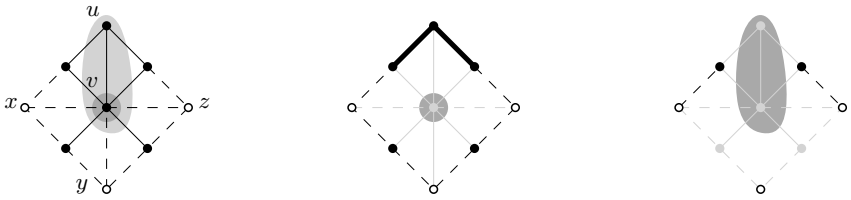


图 1 左侧：图 $G$ 和集合 $X \subseteq V(G)$ 以黑色圆盘表示。图 $G[X]$ 以实线边绘制。$G[X]$ 中有两个极小顶点分隔集：$S_1 = \{v\}$ 和 $S_2 = \{u, v\}$，以灰色示意。中间：图 $\mathtt{Aux}(G, X, S_1)$，粗边表示一个将被收缩为单个顶点的连通分量；灰色顶点和边被移除。右侧：图 $\mathtt{Aux}(G, X, S_2)$；注意，$|\mathtt{Comp}(G[X], S_2)| = 2$，因为 $X$ 中较低的顶点并非都与 $S_2$ 中的每个顶点相邻。图 $\mathtt{Aux}(G, X, S_1)$ 含有一个环，这表明 $G$ 不是弦图。然而，从 $G$ 中移除 $x$、$y$、$z$ 中的任意一个顶点，都会得到一个弦图。

**2.** 图 $\mathit{Condense}(G, X)$ 是弦图。

证明。正向结论显然，因为弦图类在顶点删除和边收缩下封闭。我们通过对 $G - X$ 中连通分量的数量 $k$ 进行归纳，证明反向结论。当 $k = 1$ 时，条件（1）足以推出 $G$ 的弦性。现在假设 $k > 1$，并考虑划分 $V(G) \setminus X = A \cup B$，其中 $A$ 诱导出 $G - X$ 的一个连通分量，而 $B$ 诱导出其余连通分量。令 $\widehat{G}_A = \mathtt{Condense}(G[A \cup X], X)$ 和 $\widehat{G}_B = \mathtt{Condense}(G[B \cup X], X)$。由观察 4.8 可知 $(\widehat{G}_A, X) \oplus (\widehat{G}_B, X) = \mathtt{Condense}(G, X)$；特别地，这意味着 $\widehat{G}_A, \widehat{G}_B$ 是弦图。由归纳假设可得 $G[A \cup X], G[B \cup X]$ 是弦图。我们应用引理 4.6（两次），得到 $G = (G[A \cup X], X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 也是弦图。◀

为了将引理 4.9 转化为一个更加方便的判据，我们将关于图 $G$ 及其顶点子集 $X$ 的信息压缩为多个辅助图；对于 $G[X]$ 中的每个极小顶点分隔集，分别构造一个辅助图。

▶**定义 4.10**。考虑一个图 $G$ 及其顶点集 $X$，使得 $G[X]$ 是弦图。对于集合 $S \in \mathit{MinSep}(G[X])$，我们按如下方式构造图 $\mathit{Aux}(G, X, S)$：
**1.** 将每个 $C \in \mathit{Comp}(G[X], S)$ 收缩为一个顶点，并删除 $X$ 中剩余的顶点（包括所有 $S$），
**2.** 将 $G - X$ 的每个连通分量收缩为一个顶点。

注意，$\mathtt{Aux}(G, X, \emptyset)$ 可通过仅将 $G[X]$ 的每个连通分量以及 $G - X$ 的每个连通分量收缩而得到。此外，注意到 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 始终是一个二分图，因为 $\mathtt{Comp}(G[X], S)$ 中的两个连通分量之间不可能存在边，$G - X$ 的两个连通分量之间也不可能存在边。构造示例见图 1。

为了建立 $G$ 中的洞与 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 中的环之间的联系，我们需要一个判据，以便根据具有某些性质的闭游走推导出环的存在性。在下面的引理中，我们考虑一个长度为 $k$ 的序列上的循环顺序。我们将后继算子定义为 $s(i) = i + 1$（对于 $i \in [k-1]$），以及 $s(k) = 1$。

▶ **引理 4.11** ($\star$)。设 $G$ 为一个二分图，其顶点划分为 $V(G) = A \cup B$。假设在 $G$ 中存在一个顶点序列 $(v_1, \ldots, v_k)$，满足：
**1.** 对于 $i \in [k]$，有 $v_i = v_{s(i)}$ 或 $v_i v_{s(i)} \in E(G)$；**2.** 多重集 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 至多包含来自 $A$ 的每个顶点的一次出现；**3.** 集合 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 至少包含来自 $B$ 的两个顶点。

那么 $G$ 包含一个环。

**证明**。 我们对序列 $(v_1, \ldots, v_k)$ 进行修改，同时保持条件 (1-3)。首先，如果 $v_i = v_{s(i)}$ ，则移除 $v_{s(i)}$。显然，这条规则是安全的。其次，如果 $v_i = v_{s(s(i))} \neq v_{s(i)}$，则移除 $v_{s(i)}$ 和 $v_{s(s(i))}$。根据条件 (2)，必有 $v_i \in B$ 且 $v_{s(i)} \in A$ ，因此集合 $\{v_1, \ldots, v_k\} \cap B$ 保持不变，从而保留了条件 (3)。

每次修改都会缩短该序列，因此，在穷尽地应用这些修改后，我们得到一个无法进一步缩短的序列。由于条件 (3)，该序列的长度不能小于 4。我们声称，现在每条来自 $E(G)$ 的边在该序列中至多被遍历一次。反设不然，$v_i v_{s(i)}$，$v_j v_{s(j)}$ 表示对于 $i \neq j$ 而言是同一条边。由于第二条修改规则，索引 $i$，$j$ 不可能是连续的。但这样一来， $A$ 中的某个顶点必定在该序列中出现两次，这与条件 (2) 矛盾。因此，我们得到 $G$ 中一个不含重复边的非平凡闭游走，这意味着环的存在。◀

我们已准备好证明一个命题，以建立弦性与无环性之间的联系。

▶ **命题4.12**。 考虑一个图 $G$ 及其顶点子集 $X \subseteq V(G)$ ，使得 $G - X$ 图 $G[X \cup C]$ 的每个连通分量 $C$ 都是弦图。那么， $G$ 是弦图，当且仅当对于每个 $S \in \mathit{MinSep}(G[X])$ ，图 $\mathit{Aux}(G, X, S)$ 都是无环的。

**证明**。 首先，我们说明，如果 $G$ 是弦图，那么所有图 $\texttt{Aux}(G, X, S)$ 都是无环的。由于弦图类在顶点删除和边收缩下封闭，图 $\texttt{Aux}(G, X, S)$ 也都是弦图。由于每个图 $\texttt{Aux}(G, X, S)$ 也是二部图，由观察 3.6 可知， $\texttt{Aux}(G, X, S)$ 是无环的。

现在假设 $G$ 不是弦图。令 $G' = \texttt{Condense}(G, X)$（回顾定义 4.5）。根据引理 4.9，图 $G'$ 也不是弦图，但对于每个顶点 $v \in V(G') \setminus X$，图 $G'[X \cup \{v\}]$ 是弦图（因为收缩保持弦性）。注意，对于每个 $S \in \texttt{MinSep}(G[X])$，$\texttt{Aux}(G', X, S)$ 是 $\texttt{Aux}(G, X, S)$ 的诱导子图（它们可能仅因单纯顶点的删除而不同），因此只需证明图 $\texttt{Aux}(G', X, S)$ 中至少有一个含有环。

由于 $G'$ 不是弦图，它包含一个洞 $H = (u_1, \ldots, u_k)$。我们考虑两种情况：$V(H)$ 与 $G'[X]$ 的至少两个连通分量相交，或者只与一个相交。在第一种情况下，令 $\phi_0 \colon V(G') \to V(\texttt{Aux}(G', X, \emptyset))$ 为由定义 4.10 中的收缩给出的映射。回顾一下， $V(G') \setminus X$ 是 $G'$ 中的一个独立集，因此 $\phi_0$ 在该集合上是恒等映射。序列 $(\phi_0(u_1) \ldots, \phi_0(u_k))$ 满足引理 4.11 对于 $A = V(G') \setminus X$和 $B = \phi_0(X)$ 的前提，因此 $\texttt{Aux}(G', X, \emptyset)$ 含有一个环。由于 $G'[X] = G[X]$ 是不连通的，我们有$\emptyset \in \texttt{MinSep}(G[X])$。

在第二种情况下，令 $Y \subseteq X$ 诱导出 $G'[X]$ 中唯一一个与 $V(H)$ 相交的连通分量。令 $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq Y$ 为 $H$ 在 $Y$ 中的极大子路径的顶点集。根据洞的定义，对于不同的 $i, j \in [\ell]$，有 $E_{G'}(V_i, V_j) = \emptyset$。必有$\ell \geq 2$，因为对于每个 $v \in V(G') \setminus X$，图 $G'[X \cup \{v\}]$ 是弦图，而洞 $H$必须经过独立集 $V(G') \setminus X$中的至少两个顶点。根据引理 4.4，在 $G'[Y]$ 中存在一个极小顶点分隔集 $S \subseteq Y \setminus V(H)$，使得每个集合 $V_i$ 都包含于 $\texttt{Comp}(G'[Y], S)$ 的某个连通分量中，并且 $\texttt{Comp}(G'[Y], S)$ 至少有两个连通分量与 $V(H)$ 相交。注意 $S \in \texttt{MinSep}(G[X])$。令 $C_S$ 为$\texttt{Comp}(G'[Y], S)$ 中各连通分量的并集；注意 $V(H) \subseteq V(C_S) \cup (V(G') \setminus X)$。

令 $\phi_S \colon V(C_S) \cup (V(G') \setminus X) \to V(\texttt{Aux}(G', X, S))$ 为由定义 4.10 中的收缩所给出的映射，该收缩将 $\texttt{Comp}(G'[Y], S)$ 中的每个连通分量变为一个顶点。同样，序列 $(\phi_S(u_1) \ldots, \phi_S(u_k))$ 满足引理 4.11 关于 $A = V(G') \setminus X$和 $B = \phi_S(V(C_S))$ 的前提，因此 $\texttt{Aux}(G', X, S)$ 含有一个环。图 1 展示了一个示例。

◀

注意，只要 $G-X$ 的某个连通分量是单纯的，那么在每个图 $\texttt{Aux}(G, X, S)$ 中，对应的顶点度数为一，因此它不可能属于任何环。因此， $G-X$ 的单纯连通分量不会影响命题 4.12中的判据。这与 $\texttt{Condense}(G, X)$ 的定义一致，其中单纯连通分量会被移除，因为它们没有意义。

**带边界图的签名。** 下一步是为弦图 $B$ 构造一个图拟阵 $M_B$，使得对于任意两个图 $G_1$，$G_2 \in \mathcal{G}_{X,\ B}$，关于（$G_1$， $X$）$\oplus$（$G_2$， $X$）的弦性信息都可以从 $M_B$中读取。命题 4.12已经将弦性与无环性联系起来，但对应于 $G_1$， $G_2$ 的图拟阵彼此迥异。为规避这一问题，我们将进一步压缩关于环的信息。

▶ **定义4.13。** 考虑一个图 $B$。对于 $S \in \mathit{MinSep}(B)$，令 $\mathit{Base}(B, S)$ 为顶点集 $\mathit{Comp}(B, S)$ 上的完全图。图 $\mathit{Base}(B)$ 是所有图 $\mathit{Base}(B, S)$ （对于 $S \in \mathit{MinSep}(B)$）的不交并。

也就是说，我们将 $\texttt{Comp}(B,\ S)$ 中的连通分量视为一个新图的抽象顶点，而该新图是团的并集。

以下变换类似于基于代表族 [38] 的斯坦纳树算法中所使用的变换。为避免歧义，在下面的定义中，我们假设 $B$ 的顶点带有一个隐含的线性序；该顺序可以是任意的。由于 $\texttt{Base}(B)$ 的顶点分别对应于 $V(B)$ 的不同子集，而这些子集可以按字典序排列，因此固定 $V(B)$ 上的顺序，就会在 $V(\texttt{Base}(B))$ 上诱导出一个顺序。于是，我们也可以假设 $V(\texttt{Base}(B))$ 的顶点按线性序排列。

▶ 定义*4.14.* 考虑一个弦图 $B$ 和 $Y \subseteq V(B)$。我们定义生成签名 $\mathit{Span}(B, Y) \subseteq E(\mathit{Base}(B))$ 如下。对于每个 $S \in \mathit{MinSep}(B)$，令$C_{S,Y} \subseteq V(\mathit{Base}(B, S))$由 $\mathit{Comp}(B, S)$中与 $Y$有非空交集的连通分量给出。令$P_{S,Y} \subseteq E(\mathit{Base}(B, S))$为按递增顺序连接$C_{S,Y}$ 的顶点的路径。然后 $\mathit{Span}(B, Y) = \bigcup_{S \in \mathit{MinSep}(B)} P_{S,Y}$。

换言之， $\texttt{Span}(B, Y)$ 是图 $\texttt{Base}(B)$ 中若干路径的不交并，其中每条路径都编码了 $Y$ 与 $B$ 中一个相应的极小顶点分隔集之间的关系。

下一个引理指出，在某些条件下，用一棵关于$N(v)$的树替换顶点 $v$ （特别是：一条路径）不会影响图的无环性。注意，由于前置条件 $|N(u) \cap N(v)| \leq 1$，我们永远不会尝试插入一条已经存在的边。

▶ **引理4.15** ($\star$). 设 $G$ 是一个二部图，其顶点划分为 $V(G) = A \cup B$，满足对于每一对不同的 $u$、$v \in A$，均有 $|N_G(u) \cap N_G(v)| \leq 1$。考虑一个图 $G'$，它由 $G$ 通过将每个顶点 $v \in A$ 替换为顶点集为 $N_G(v)$上的任意一棵树而得到。那么， $G$ 是无环的，当且仅当 $G'$ 是无环的。

证明。对于图 $G$，令 $\mu(G)$ 表示整数的多重集 $(|V(C)| - |E(C)|)_{C \in \mathcal{C}}$，其中 $\mathcal{C}$ 是 $G$ 的连通分量族。图 $G$ 无环，当且仅当 $\mu(G)$ 只包含 1。我们证明，按任意顺序执行所述修改，不会影响 $\mu(G)$，除非可能移除若干个 1。令 $v \in V(G)$、 $d = |N_G(v)|$，并令 $C$ 表示 $v$ 的连通分量。若 $v$ 是孤立的，那么移除 $v$ 相当于从 $\mu(G)$ 中移除一个 1。否则，用一棵包含 $N_G(v)$ 个顶点的树替换 $v$，会将 $C$ 转换为另一个连通图 $C'$。我们移除一个顶点和 $d$ 条边，因此 $|V(C)| - |E(C)|$ 减少 $d-1$。另一方面，任何包含 $N_G(C)$ 个顶点的树恰有 $d-1$ 条边。根据假设$|N_G(u) \cap N_G(v)| \leq 1$ 对于 $u \neq v$，每棵插入的树都与先前插入的边不相交

在 $B$ 中。因此，我们恰好插入 $d-1$ 条新边，并且 $|V(C)|-|E(C)| = |V(C')|-|E(C')|$。我们也只从 $A$ 中移除顶点，因此绝不会移除已插入边的端点。观察到 $\mu(G)$ 包含一个不等于 1 的元素，当且仅当$\mu(G')$ 也包含这样的元素，即可得出结论。◀

这使我们能够将命题4.12中的判据转化为一个更方便的判据，其中辅助图的顶点集仅取决于 $G[X]$ ，而非 $G$。

▶ **引理 4.16.** 考虑一个图 $G$ 及其顶点子集 $X \subseteq V(G)$。令 $\mathcal{C}$ 表示 $G-X$ 的连通分量族。假设对于每个 $C \in \mathcal{C}$，图 $G[X \cup C]$ 都是弦图。那么， $G$ 是弦图当且仅当：

**1.** 集合 $\mathit{Span}(G[X], N_G(C))$对于不同的 $C \in \mathcal{C}$两两不相交，**2.** 集合 $\mathit{Span}(G[X], N_G(C))$在 $C \in \mathcal{C}$ 上的并集构成 $E(\mathit{Base}(G[X]))$ 中的无环边集。

**证明**。 根据命题4.12，我们知道 $G$ 是弦图当且仅当对于每个 $S \in \mathtt{MinSep}(G[X])$，图 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 是无环的。我们分两种情况讨论。

首先，假设对于某个 $S \in \mathtt{MinSep}(G[X])$，有两个分别代表不同连通分量 $C_1, C_2 \in \mathsf{C}$ 的顶点，它们在 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 中有两个公共邻点 $x, y$。换句话说， $\mathtt{Comp}(G[X], S)$ 中有两个连通分量，它们分别与 $N_G(C_1)$ 和 $N_G(C_2)$ 相交。那么 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 包含一个长度为 4 的环，因此 $G$ 不是弦图。若 $\mathtt{Span}(G[X], N_G(C_1))$ 和 $\mathtt{Span}(G[X], N_G(C_2))$ 共享一条边，则条件 (1) 不成立，因此假设情况并非如此。但此时，路径 $P_{S,N(C_1)}$ 和$P_{S,N(C_2)}$（回顾定义4.14）边不相交，且二者都经过 $x$ 和 $y$。因此， $x, y$ 位于包含在边集 $\mathtt{Span}(G[X], N_G(C_1)) \cup \mathtt{Span}(G[X], N_G(C_2))$ 中的一个环上，所以条件 (2) 不成立。总之， $G$ 不是弦图，且条件 (1, 2) 中至少一个不成立。

接下来，假设对于每个 $S \in \mathtt{MinSep}(G[X])$，以及代表不同连通分量 $C_1, C_2 \in \mathsf{C}$ 的任意两个顶点，它们在 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 中的邻域交集至多包含一个元素。这意味着条件 (1) 成立。考虑由所有图 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 在 $S \in \mathtt{MinSep}(G[X])$ 上的不交并构成的图 $H$ 。该图满足引理4.15的前提。将 $\mathtt{Aux}(G, X, S)$ 中每个 $\mathsf{C}$-连通分量顶点替换为路径 $P_{S,N(C)}$，会将 $H$ 转化为 $\mathtt{Base}(G[X])$ 的一个子图，其边集为 $\bigcup_{C \in \mathsf{C}} \mathtt{Span}(G[X], N_G(C))$。根据引理4.15，该图无环当且仅当图 $H$ 无环。根据命题4.12，这个条件等价于 $G$ 是弦图。引理得证。◀

现在可以定义图拟阵了，它编码了粘合两个弦图后洞可能出现位置的所有必要信息。回想一下，图 $G$ 的图拟阵是定义在 $E(G)$ 上的集合系统，其中当子集 $S \subseteq E(G)$ 不含环时，称其为独立。

▶**定义 4.17**。 对于顶点集为 $X$ 的图 $B$ ，我们将拟阵 $M_B$ 定义为图 $\mathit{Base}$ 的图拟阵$(B)$。对于图 $G \in \mathcal{G}_{X,\,B}$ 签名 $\mathit{Sign}(G, X) \subseteq E(\mathit{Base}(B))$定义为 $G-X$ 的所有连通分量 $C$ 上的 $\mathit{Span}(B, N_G(C))$ 的并集。

根据引理 4.16，只要 $G$ 是弦图，那么 $\mathtt{Sign}(G, X)$ 就是无环的，因此它构成拟阵 $M_{G[X]}$ 中的一个独立集。现在，我们可以给出定理 2.1 的存在性部分。其中的映射 $\sigma\colon \mathcal{G}_{X,B} \to 2^{E(M_B)}$ 在此定义为 $\sigma(G) = \mathtt{Sign}(G, X)$。

▶ 引理 *4.18*（$\star$）。设（$G_1, X$）和（$G_2, X$）是相容的带边界弦图。那么，如果且仅当集合 $\mathit{Sign}(G_1, X)$、$\mathit{Sign}(G_2, X)$ 与 $\subseteq E(\mathit{Base}(G[X]))$ 不相交，且 $\mathit{Sign}(G_1, X) \cup \mathit{Sign}(G_2, X)$ 无环时， $G = (G_1, X) \oplus (G_2, X)$ 是弦图。

此外， $\mathit{Sign}(G, X) = \mathit{Sign}(G_1, X) \cup \mathit{Sign}(G_2, X)$。

证明。令 $C_1, C_2, \ldots, C_\ell$ 表示 $G_1 - X$ 的连通分量，令 $D_1, D_2, \ldots, D_r$ 表示 $G_2 - X$ 的连通分量。显然，所有图 $G_1[X \cup C_i]$ 和 $G_2[X \cup D_i]$ 都是弦图。令 $\mathsf{S}_1$ 为集合族 $\{\mathtt{Span}(G[X], N_{G_1}(C_i))\}_{i=1}^{\ell}$，令 $\mathsf{S}_2$ 为 $\{\mathtt{Span}(G[X], N_{G_2}(D_i))\}_{i=1}^{r}$。由引理 4.16 可知，$\mathsf{S}_1$ 中的集合两两不相交，且它们的并集（即 $\mathtt{Sign}(G_1, X)$）是 $E(\mathtt{Base}(G[X]))$ 中的无环边集。$\mathsf{S}_2$ 和 $\mathtt{Sign}(G_2, X)$ 也同样成立。再由引理 4.16，图 $G = (G_1, X) \oplus (G_2, X)$ 是弦图，当且仅当集合族 $\mathsf{S}_1 \cup \mathsf{S}_2$ 中的集合两两不相交且其总和无环。这等价于条件：$\mathtt{Sign}(G_1, X)$ $\mathtt{Sign}(G_2, X)$ 不相交，且 $\mathtt{Sign}(G_1, X) \cup \mathtt{Sign}(G_2, X)$ 无环，正如所需。根据定义，$\mathtt{Sign}(G, X)$ 是对 $G - X$ 的所有连通分量 $C$，将 $\mathtt{Span}(G[X], N_G(C))$ 取并集所得。此并集等于 $\mathtt{Sign}(G_1, X) \cup \mathtt{Sign}(G_2, X)$。◀

以下引理是运行时间分析中的主要组成部分。由于代表族的大小上界关于拟阵的秩呈指数增长[2]，因此有必要对 $M_B$ 的秩进行界定。已知弦图中的极小顶点分隔集数量不超过顶点数量，但我们需要对这一事实进行加强。

▶ **引理 4.19**。对于非空弦图 $B$，$M_B$ 的秩至多为 $|V(B)| - 1$。

**证明**。令 $k = |V(B)|$。$M_B$ 的秩等于 $\mathtt{Base}(B)$中生成森林的大小。$\mathtt{Base}(B)$ 的连通分量的顶点集为集合 $\mathtt{Comp}(B, S)$，其中 $S \in \mathtt{MinSep}(B)$。因此，只需估计

$$\sum_{S \in \mathtt{MinSep}(B)} (|\mathtt{Comp}(B, S)| - 1) \leq k - 1.$$

我们首先通过对 $k$ 进行归纳法，证明连通弦图的不等式。当 $k = 1$ 时，该和为零。考虑 $k > 1$。根据引理 3.5，$B$ 包含一个单纯顶点。令 $v$ 为 $B$ 中的一个单纯顶点，并假设该结论对图 $B - v$（它是连通的）成立。令 $S$ 为 $B$ 中的一个极小顶点分隔集。根据引理 4.3，当 $S \neq N_B(v)$ 时，$S \in \mathtt{MinSep}(B - v)$ 且 $|\mathtt{Comp}(B, S)| = |\mathtt{Comp}(B - v, S)|$。在这种情况下，来自 $S$ 的求和项对于 $B$ 和 $B - v$ 是相同的。

剩下需要处理 $S = N_B(v)$ 的情况。显然，$\{v\} \in \mathtt{Comp}(B, S)$。如果 $|\mathtt{Comp}(B, S)| = 1$，那么 $S \notin \mathtt{MinSep}(B)$（引理 3.1）。如果 $|\mathtt{Comp}(B, S)| = 2$，那么 $S \in \mathtt{MinSep}(B) \setminus \mathtt{MinSep}(B - v)$，并且总和增加 1。如果 $|\mathtt{Comp}(B, S)| \geq 3$，那么 $S \in \mathtt{MinSep}(B) \cap \mathtt{MinSep}(B - v)$，并且 $|\mathtt{Comp}(B, S)| = |\mathtt{Comp}(B - v, S)| + 1$，因此总和再次增加 1。至此，连通弦图的该不等式得证。

当 $B$ 不连通时，令 $B_1$、$B_2$、……、$B_t$ 表示其连通分量，并令 $k_i = |V(B_i)|$。我们有 $|\mathtt{Comp}(B, \emptyset)| - 1 = t - 1$。将其与 $B_1$、$B_2$、……、$B_t$ 的总和相加后，总和至多为 $\sum_{i=1}^{t} k_i - t + t - 1 = k - 1$。◀

最后需要检查的是，我们能否高效地计算签名。为
t此，我们使用引理 4.3 枚举极小顶点分隔集。

▶**引理 4.20** ($\star$)。存在一个多项式时间算法，给定一个图 $G$ 及其顶点子集 $X \subseteq V(G)$，使得 $G[X]$ 是弦图，该算法可计算 $\mathit{Sign}(G, X)$。

**证明**。令 $B = G[X]$。我们证明可以在 $\mathtt{MinSep}(B)$ 多项式时间内枚举。根据引理 3.5，图 $B$ 包含一个单纯顶点 $v$。该顶点可以在

[2] 我们指出，Fomin 等人 [38] 也考虑了秩可能较大、且指数项由另一参数控制的情形，但该情形不适用于我们的情况。

多项式时间内递归枚举 $\texttt{MinSep}(B-v)$。根据引理 4.3，若 $S \in \texttt{MinSep}(B)$，则 $S \in \texttt{MinSep}(B-v)$ 或 $S = N_B(v)$，因此输出规模最多增加一。我们可以利用引理 3.1，验证 $\texttt{MinSep}(B-v) \cup \{N_B(v)\}$ 中的哪些元素是 $G$ 的极小顶点分隔集；由此还可得到集合 $\texttt{Comp}(B, S)$。剩下的步骤是直接依据 $\texttt{Sign}(G, X)$ 的定义进行。◀

引理 4.18、4.19 和 4.20 蕴含定理 2.1，但我们在描述最终算法时，没有使用这个抽象 t 表述，而是直接使用这三个引理。

**带边界图的代表族**。我们将拟阵语言中的代表族框架转化为弦图和粘合的语言。

▶ 定义 *4.21*。考虑一个弦图族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_{X,B}$，其中给定某个对 $(X, B)$，以及一个非负权函数 $w : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$。如果子族 $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ 满足以下条件，我们称它是 $\mathcal{G}$ 的最大代表族（记作 $\mathcal{G}' \subseteq_{\text{maxrep}} \mathcal{G}$）。对于每个图 $H \in \mathcal{G}_{X,B}$，若存在 $G \in \mathcal{G}$，使得 $(H, X) \oplus (G, X)$ 是弦图，则存在 $G' \in \mathcal{G}'$，使得 $(H, X) \oplus (G', X)$ 是弦图，且 $w(G') \geq w(G)$。

▶ 引理 *4.22*。考虑由弦图 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_X$ 组成的一个族 $\mathcal{B}$，其中针对某个二元组 $(X, B)$，并给定一个非负权函数 $w : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$。设拟阵 $M_B$ 的秩为 $r$。给定 $\mathcal{S} = \{\textit{Sign}(G, X) \mid G \in \mathcal{G}\}$ 以及 $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$，其定义为 $\tau(Y) = \textit{argmax}\{w(G) \mid G \in \mathcal{G}, \textit{Sign}(G, X) = Y\}$。假设 $\mathcal{S}' \subseteq^r_{\text{maxrep}} \mathcal{S}$ 关于拟阵 $M_B$ 和权函数 $w_{\mathcal{S}}(Y) = w(\tau(Y))$ 是一个代表族。那么 $\tau(\mathcal{S}') \subseteq_{\text{maxrep}} \mathcal{G}$。

证明。设 $H \in \mathcal{G}_{X,B}$ 和 $G \in \mathcal{G}$ 使得 $(H, X) \oplus (G, X)$ 是弦图。显然，$H$ 也必须是弦图。集合 $S = \texttt{Sign}(G, X)$ 属于 $\mathcal{S}$，且 $w_{\mathcal{S}}(S) \geq w(G)$。根据引理 4.18，我们有 $\texttt{Sign}(H, X) \cap S = \emptyset$ 以及 $\texttt{Sign}(H, X) \cup S$ 是无环的。根据图拟阵的最大代表族定义，存在一个集合 $S' \in \mathcal{S}'$，使得 $\texttt{Sign}(H, X) \cap S' = \emptyset$、$\texttt{Sign}(H, X) \cup S'$ 是无环的，且 $w_{\mathcal{S}}(S') \geq w_{\mathcal{S}}(S)$。令 $G' = \tau(S')$。再次根据引理 4.18，我们推得 $(H, X) \oplus (G', X)$ 是弦图。最后，$w(G') = w_{\mathcal{S}}(S') \geq w_{\mathcal{S}}(S) \geq w(G)$。◀

▶ **引理 4.23**。考虑一个弦图族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_{X,\mathcal{B}}$ 其中某一对 $(X, B)$ $w$ 配备非负权函数：$\mathcal{G} \to \mathbb{N}$。假设 $|X| = k > 0$，$|\mathcal{G}| \leq 2^{k+c}$，且每个 $G \in \mathcal{G}$ 至多有 $ck$ 个顶点。这里，$c$ 是一个固定常数。于是，可以在 $O(2^{\omega k} \cdot k^{\omega})$ 时间内计算出 $\mathcal{G}$ 的一个大小至多为 $2^{k-1}$ 的最大代表族 $\widehat{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$。

**证明**。令 $\mathcal{S} = \{\texttt{Sign}(G, X) \mid G \in \mathcal{G}\}$。根据引理 4.20，可以在 $2^k \cdot k^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内计算出该族。根据引理 4.19，$r$ 的秩 $M_B$ 至多为 $k-1$。根据引理 4.22，只需为 $r\mathcal{S}$ 找到一个所需大小的最大代表族。这可以利用引理 3.19 在 $\mathcal{O}(2^{\omega k} \cdot k^{\omega})$ 时间内完成。由于 $2 < 2^{\omega}$ 后一个项在运行时间中占主导地位。◀

我们还为处理合并节点时产生的大型图族提供了一种高效算法。对于图族 $\mathcal{G}$，我们用 $\mathcal{G} \cap \texttt{chordal}$ 表示其中弦图构成的子族。

▶ 引理 *4.24*. 考虑两个弦图族 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_{X,B}$，其中某个数对为 $(X, B)$。假设 $|X| = k > 0$，$|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \leq 2^k$，且每个 $G \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ 均有 $O(k)$ 个顶点。令 $\mathcal{G} = \{(G_1, X) \oplus (G_2, X) \mid G_1 \in \mathcal{G}_1, G_2 \in \mathcal{G}_2\} \cap \textit{chordal}$，并设 $w : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$ 为非负权函数。那么，给定 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}$ $w$，可以在 $O(2^{(\omega-1)k} 3^k \cdot k^{\omega})$ 时间内计算出大小至多为 $2^{k-1}$ 的 $\mathcal{G}' \subseteq_{\text{maxrep}} \mathcal{G}$。

证明。令 $\mathsf{S} = \{\mathtt{Sign}(G, X) \mid G \in \mathsf{G}\}$，$\mathsf{S}_1 = \{\mathtt{Sign}(G, X) \mid G \in \mathsf{G}_1\}$，以及 $\mathsf{S}_2 = \{\mathtt{Sign}(G, X) \mid G \in \mathsf{G}_2\}$。我们断言 $\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 \bullet \mathsf{S}_2$。对于 $\ell \in \{1, 2\}$，考虑 $S_\ell \in \mathsf{S}_\ell$ 和 $G_\ell \in \mathsf{G}_\ell$，使得 $\mathtt{Sign}(G_\ell, X) = S_\ell$。那么，如果且仅当 $(G_1, X) \oplus (G_2, X)$ 属于 $\mathsf{G}$ 时，它是弦图；根据引理 4.18，这等价于满足以下条件：$S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 和 $S_1 \cup S_2$ 在 $M_B$ 中是独立的。这证明了该断言。

根据引理 4.19，$r$ 的秩 $M_B$ 至多为 $k-1$。我们按照引理 4.23 中的方法继续，但使用引理 3.21，在时间 $\mathcal{O}(2^{(\omega-1)k} 3^k \cdot k^\omega)$ 内计算 $\mathcal{S}_1 \bullet \mathcal{S}_2$ 的大小为 $2^{k-1}$ 的 $r$-代表族。计算签名以及映射 $\tau \colon \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ 需要时间 $|\mathcal{G}| \cdot k^{\mathcal{O}(1)} = 4^k \cdot k^{\mathcal{O}(1)}$，因此运行时间由前一项主导。

◀

## 4.1 动态规划

我们提出一种处理树分解的动态规划算法。首先，我们描述动态规划程序的状态及其不变式。尽管我们存储的并非以部分解为索引的表，而是带有权重的部分解族（如 [38] 中所示），但我们仍保留“状态”这一概念，用以指代存储在分解的某个节点处的信息。

**DP 的状态。** 节点 $t \in V(\mathbb{T})$ 的一个状态是分配给每个 $X \subseteq \chi(t)$ 的一族二元组 $(\mathcal{H}_{t,X}, h_{t,X})$，其中 $\mathcal{H}_{t,X} \subseteq \mathcal{G}_{X, G[X]}$ 是一族弦图，且 $h_{t,X} \colon \mathcal{H}_{t,X} \to \mathbb{N}$ 是一个非负权函数。

回想一下，$V_t$ 表示以 $t \in V(\mathbb{T})$ 为根的子树中出现的顶点集合，$U_t = V_t \setminus \chi(t)$ 亦然。$H \subseteq \mathcal{H}_{t,X}$ 和 $h_{t,X}(H) = s$ 的预期含义是：应存在一个集合 $A \subseteq U_t$，其总权重为 $s$，使得 $(A, X)$ 是等价于 $H$ 的部分解。对于每个 $H$，我们都希望记录这样一个权重最大的集合 $A$。

对于集合 $X$，$Y$，我们简洁地写作 $(A, B) \subseteq (X, Y)$，表示 $A \subseteq X$、$B \subseteq Y$。

**正确性不变量。** 对于 $t \in V(\mathbb{T})$ 和 $X \subseteq \chi(t)$，如果一对 $(\mathcal{H}, h)$ 满足以下条件，则称其满足 $(t, X)$ 的正确性不变量。

1. 对于每个 $H \in \mathsf{H}$，都存在一个集合 $A \subseteq U_t$，使得 $\mathtt{Condense}(G[A \cup X], X) = H$，$G[A \cup X]$ 是弦图，并且 $h(H) = w(A)$。2. 对于每个 $(A, B) \subseteq (U_t, V(G) \setminus V_t)$，若其是弦图，则存在 $H \in \mathsf{H}$，使得 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 是弦图，并且 $h(H) \geq w(A)$。

作为该不变量的推论，对于第二个条件中的每一对 $(A, B)$，都存在 $A \subseteq U_t$（替代 $A$），使得 $w(A) \geq w(A)$，$\mathtt{Condense}(G[A \cup X], X) \in \mathcal{H}$，并且 $(\mathtt{Condense}(G[A \cup X], X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 是弦图，这意味着 $G[A \cup X \cup B]$ 是弦图（引理 4.6）。

由于 $\mathcal{H}_{t,X}$ 中的每个图相对于 $X$ 都已压缩，引理 4.7 给出了其大小的上界（为涵盖 $X = \emptyset$ 的情况，我们不从 $2|X|$ 中减去 1）。

▶ **观察 4.25。** 如果 $t \in V(\mathbb{T})$、$X \subseteq \chi(t)$，且 $(H, h)$ 满足关于 $(t, X)$ 的正确性不变量，那么 $H$ 中的每个图至多有 $2|X|$ 个顶点。

我们利用迄今发展出的理论来控制 $\mathcal{H}_{t,X}$ 的大小。

▶ **引理 4.26。** 考虑 $t \in V(\mathbb{T})$ 和 $X \subseteq \chi(t)$。若一对 $(H, h)$ 满足**正确性**不变量，适用于 $(t, X)$，且 $H \subseteq_{\mathrm{maxrep}} H$，那么 $(H, h)$ 也满足正确性不变量，适用于 $(t, X)$。

证明。第一个条件显然成立，因为量化范围缩小为 H 的一个子集。考虑条件 (2) 中的 $(A, B) \subseteq (U_t, V(G) \setminus V_t)$。根据假设，存在 $H \in \mathbf{H}$，使得 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 是弦图，且 $h(H) \geq w(A)$。根据最大代表族的定义，存在 $H \subseteq \mathbf{H}$，使得 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 是弦图，并且 $h(H) \geq h(H) \geq w(A)$。结论得证。◀

**大小不变量**。对于 $t \in V(\mathbb{T})$ 和 $X \subseteq \chi(t)$，我们称 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}_{X,G[X]}$ 满足大小不变量，如果 $|\mathcal{H}| \leq 2^{|X|}$。

对于节点 $t \in \mathbb{T}$，我们称其状态满足正确性不变量或大小不变量，如果所有的对 $(\mathcal{H}_{t,X}, h_{t,X})_{X \subseteq \chi(t)}$ 都满足该不变量。

接下来我们将描述良好树分解中三种非平凡节点类型的动态规划程序。每种情况下，我们先给出算法，然后证明正确性不变量，最后结合大小不变量分析运行时间。

▶ **引理 4.27** (引入节点)。设 $(\mathbb{T}, \chi)$ 是宽度为 $k$ 的 $G$ 良好树分解，且 $t \in V(\mathbb{T})$ 是一个引入节点，其子节点为 $t'$。假设已知 $t'$ 满足正确性不变量和大小不变量的状态。那么我们可以在时间 $3^k k^{\mathcal{O}(1)}$ 内计算出 $t$ 的状态，使其满足正确性不变量和大小不变量。

**证明**。我们有 $\chi(t) = \chi(t') \cup \{v\}$ 对于某个顶点 $v$。接下来，$U_t = U_{t'}$ 并且 $V_t = V_{t'} \cup \{v\}$。注意，$N_G(v) \cap U_t = \emptyset$。

我们定义操作 $\texttt{Introduce}(H, N)$，该操作以一个图 $H$ 和一个集合 $N \subseteq V(H)$ 为输入，并向 $H$ 中插入一个新顶点 $v$，其邻域为 $N$。

如果 $X \subseteq \chi(t)$ 不包含 $v$，我们令 $\mathbf{H}_{t,X} = \mathbf{H}_{t',X}$，并令 $h_{t,X} = h_{t',X}$。考虑包含 $v$ 的 $X \subseteq \chi(t)$；令 $X^- = X \setminus v$。如果 $G[X]$ 不是弦图，则令 $\mathbf{H}_{t,X} = \emptyset$。否则，对每个 $H' \in \mathbf{H}_{t',X^-}$，我们计算 $(H, X) = \texttt{Introduce}(H', N_G(v) \cap X^-)$。如果 $H$ 是弦图，则将其插入 $\mathbf{H}_{t,X}$，并令 $h_{t,X}(H) = h_{t',X^-}(H')$。

**正确性**。首先，假设 $v \notin X$。我们检查条件 (1)。设 $H \in \mathcal{H}_{t,X}$。根据构造，$H \in \mathcal{H}_{t',X}$ 并且根据归纳假设，存在一个集合 $A \subseteq U_{t'} = U_t$，使得 $\texttt{Condense}(G[A \cup X], X) = H$, $G[A \cup X]$ 是弦图，且 $h_{t,X}(H) = h_{t',X}(H) = w(A)$。为了验证条件 (2)，考虑任意的 $A \subseteq U_t$ 和 $B \subseteq V(G) \setminus V_t$。那么 $A \subseteq U_{t'}$ 且 $B \subseteq V(G) \setminus V_{t'}$，因此，该结论同样可直接由 $t'$ 的不变式得出。

现在假设 $v \in X$。我们检查条件 (1)。每个 $H \in \mathbf{H}_{t,X}$ 都具有如下形式：$H = \texttt{Introduce}(H', N_G(v) \cap X^-)$，其中 $H' \in \mathbf{H}_{t',X^-}$。此外，根据构造，$H$ 必须是弦图。由归纳假设，存在一个集合 $A \subseteq U_{t'} = U_t$，使得$\texttt{Condense}(G[A \cup X^-], X^-) = H'$，$G[A \cup X^-]$是弦图，$h_{t,X}(H) = h_{t',X}(H') = w(A)$。由于 $N_G(v) \cap A = \emptyset$，顶点 $v$ 不会影响 $G[A]$ 的哪些连通分量在 $G[A \cup X]$中是单纯的。因此，图 $\texttt{Condense}(G[A \cup X], X)$ 可以通过简单地插入顶点 $v$ 从$\texttt{Condense}(G[A \cup X^-], X^-)$ 得到，所以它等于 $H$。

最后，我们需要检查 $G[A \cup X]$ 是弦图。我们应用引理 4.9 中关于集合 $X^-$ 的判据。对于 $G[A \cup X] - X^-$ 的每个连通分量 $C$，图 $G[C \cup X^-]$ 要么是 $G[A \cup X^-]$ 的子图，要么等于 $G[X]$——这两种情况下它都是弦图。图 $\texttt{Condense}(G[A \cup X], X^-)$ 要么与 $H$ 同构，要么可以通过删除 $v$ 从 $H$ 得到（当 $v$ 在 $H$ 中是单纯的时）。因此，该图也是弦图，这意味着 $G[A \cup X]$ 是弦图。

接下来，我们讨论 $v \in X$ 情况下的条件 (2)。设 $(A, B) \subseteq (U_t, V(G) \setminus V_t)$ 满足 $G[A \cup X \cup B]$ 是弦图。注意，当 $G[X]$ 不是弦图时，不存在这样的数对，因此我们只关心.....

关于 $G[X]$ 是弦图的情况。设 $B^+ = B \cup \{v\}$；则 $(A, B^+) \subseteq (U_{t'}, V(G) \setminus V_t)$。因此，存在 $H' \in \mathrm{H}_{t',X^-}$，使得 $(H', X^-) \oplus (G[B^+ \cup X^-], X^-)$ 是弦图，并且 $h_{t',X^-}(H') \geq w(A)$。令 $H = \texttt{Introduce}(H', N_G(v) \cap X^-)$。根据构造，我们有 $h_{t,X}(H) = h_{t',X^-}(H')$。接下来，$B \cup X = B^+ \cup X^-$。由于且 $N_H(v) \subseteq X$，粘合积 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 与 $(H', X^-) \oplus (G[B \cup X], X^-)$ 相同，后者如上所述是弦图。这也意味着 $H$ 是弦图，因此它会被插入 $\mathrm{H}_{t,X}$。至此，正确性不变量的证明完成。

**运行时间。** 如果 $v \notin X$ 那么 $\mathcal{H}_{t,\ X} = \mathcal{H}_{t',\ X}$ 并且如果 $v \in X$ 那么来自 $\mathcal{H}_{t',\ X^-}$ 的每个图都会映射到 $\mathcal{H}_{t,\ X}$中的一个图。在这两种情况下，大小不变量都得以保持。对于每个$X \subseteq \chi(t)$，我们至多处理 $2^{|X|}$ 个图，总计得到 $\sum_{X \subseteq \chi(t)} 2^{|X|} \leq 3^{k+1}$ 个图。根据观察 4.25，每个图至多有 $2(k+1)$ 个顶点，并且在 $k^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内完成处理。◀

在描述遗忘节点的例程之前，我们证明：相对于 $X$ 应用凝缩操作，然后相对于 $X \setminus v$ 应用该操作，所得的图与直接对 $X \setminus v$应用该操作所得的图相同。

▶ **引理 4.28。** 设 $X \subseteq V(H)$ 以及 $v \in X$。接下来，设 $H_2 = \texttt{Condense}(H, X)$ 以及 $H_3 = \texttt{Condense}(H_2, X \setminus v)$。则 $H_3 = \texttt{Condense}(H, X \setminus v)$。

证明。设 $C$ 是 $H - X$ 的一个连通分量，它与 $v$ 不相邻。于是，只要它是非单纯的，它就会被收缩为一个顶点，并同时存在于 $H_2$、$H_3$ 中。现在考虑 $H - X$ 中与 $v$ 相邻的连通分量。设 $S_1$、$S_2$、...、$S_\ell$ 是其中在 $H$ 中为单纯的那些连通分量，而 $C_1$、$C_2$、...、$C_r$ 是其中非单纯的那些连通分量。令 $V_{S,\ C,\ v} = \bigcup S_i \cup \bigcup D_i \cup \{v\}$ 以及 $V_{C,\ v} = \bigcup C_i \cup \{v\}$。若$u \in N_H(S_i)$，那么由于 $v \in N_H(S_i)$ 且 $S_i$ 是单纯的，我们有 $u \in N_H(v)$。这意味着 $N_H(V_{S\ ,\ C\ ,\ v}) = N_H(V_{C\ ,\ v})$。在 $H_2$ 中，所有连通分量 $S_i$ 都被移除，而 $C_i$ 被收缩为顶点。在 $H_3$ 中，后面的顶点被替换为一个新顶点 $v'$，其邻域为$N_H(V_{C,\ v})$。在 $\texttt{Condense}(H,\ X \setminus v)$ 中，我们直接将所有连通分量 $S_i$、$C_i$ 替换为一个新顶点$v''$，其邻域为 $N_H(V_{S,\ C,\ v})$。如上所述，这些邻域是一致的，因此$H_3 = \texttt{Condense}(H,\ X \setminus v)$。◀

▶ **引理 4.29** (遗忘节点)。 设 $(\mathbb{T}, \chi)$ 是 $G$ 的宽度为 $k$的良好树分解，且 $t \in V(\mathbb{T})$ 是一个遗忘节点，其子节点为 $t'$。假设已给出满足正确性和大小不变量的 $t'$ 的状态。那么，我们可以在$(2^\omega + 1)^k k^{\mathcal{O}(1)}$时间内计算出满足正确性和大小不变量的 $t$ 的状态。

**证明。** 我们有 $\chi(t') = \chi(t) \cup \{v\}$ 对某个顶点 $v \in V_t$。接下来，$V_t = V_{t'}$ 以及 $U_t = U_{t'} \cup \{v\}$。注意，$N_G(v) \subseteq V_t$。

设 $X \subseteq \chi(t)$、$X^+ = X \cup \{v\}$，且 $\mathrm{H}' = \{\texttt{Condense}(H', X) \mid H' \in \mathrm{H}_{t',X^+}\}$。对于每个 $H \in \mathrm{H}_{t',X} \cup \mathrm{H}'$，我们将其权重 $h_{t,X}(H)$ 定义为 $h_{t',X}(H)$ 的最大值（仅当$H \in \mathrm{H}_{t',X}$时考虑），以及 $\max\{h_{t',X^+}(H') + w(v)) \mid H' \in \mathrm{H}_{t',X^+} \wedge \texttt{Condense}(H', X) = H\}$。根据构造可知，取最大值时所考虑的集合非空。最后，我们利用引理 4.23 计算 $\mathrm{H}_{t,X}$，将其作为 $\mathrm{H}_{t',X} \cup \mathrm{H}'$ 关于权函数 $h_{t,X}$的最大代表族。

**正确性。** 我们证明，二元组 $(\mathcal{H}_{t',\ X} \cup \mathcal{H}',\ h_{t,\ X})$ 满足正确性不变量。随后，根据引理 4.26，即可得到关于 $(\mathcal{H}_{t,\ X},\ h_{t,\ X})$ 的结论。

我们检验条件 (1)。首先考虑满足 $h_{t,X}(H) = h_{t',X}(H)$ 的 $H \in \mathcal{H}_{t',X}$。根据归纳假设，存在一个集合 $A \subseteq U_{t'} \subset U_t$，使得 $\texttt{Condense}(G[A \cup X], X) = H$,$G[A \cup X]$ 是弦图，并且 $h_{t,X}(H) = w(A)$，正如所需。

现在考虑这样的 $H \in \mathrm{H}'$：存在 $H' \in \mathrm{H}_{t',X^+}$，使得 $H = \texttt{Condense}(H', X)$ 且 $h_{t,X}(H) = h_{t',X^+}(H') + w(v)$。我们知道存在一个集合 $A \subseteq U_{t'} = U_t \setminus v$，使得 $\texttt{Condense}(G[A \cup X^+], X^+) = H'$, $G[A \cup X^+]$ 是弦图，并且 $h_{t',X^+}(H') = w(A)$。集合 $A^+ = A \cup \{v\} \subseteq U_t$ 满足 $h_{t,X}(H) = w(A^+)$，且 $G[A^+ \cup X] = G[A \cup X^+]$ 是弦图。由引理 4.28 可得 $\texttt{Condense}(G[A^+ \cup X], X) = \texttt{Condense}(H', X) = H$。

接下来讨论条件 (2)。令 $(A, B) \subseteq (U_t, V(G) \setminus V_t)$ 为弦图。首先考虑 $v \notin A$ 的情形。于是 $(A, B) \subseteq (U_{t'}, V(G) \setminus V_{t'})$，因此存在 $H \in \mathrm{H}_{t',X}$，使得 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 是弦图，并且 $h_{t',X}(H) \geq w(A)$。根据构造，$h_{t,X}(H) \geq h_{t',X}(H)$。

现在假设 $v \in A$，并令 $A^- = A \setminus v$。我们有 $(A^-, B) \subseteq (U_{t'}, V(G) \setminus V_{t'})$，因此存在 $H' \in \mathrm{H}_{t',X^+}$，使得 $(H', X^+) \oplus (G[B \cup X^+], X^+)$ 是弦图，并且 $h_{t',X^+}(H') \geq w(A^-) = w(A) - w(v)$。令 $H = \texttt{Condense}(H', X) \in \mathrm{H}'$。由于 $N_G(v) \cap B = \emptyset$，我们推得 $(H', X^+) \oplus (G[B \cup X^+], X^+) = (H', X) \oplus (G[B \cup X], X)$。图 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 可以通过一系列边收缩以及可能的一次顶点删除从上面的图得到，因此它也是弦图。最后，$h_{t,X}(H) \geq h_{t',X^+}(H') + w(v) \geq w(A)$。

**运行时间**。考虑一个非空的 $X \subseteq \chi(t)$。根据观察 4.25，每个图 $H \in \mathcal{H}_{t',\ X} \cup \mathcal{H}'$ 至多有 $2|X|$ 个顶点，处理时间为 $k^{\mathcal{O}(1)}$。根据假设 $|\mathcal{H}_{t',\ X}| \leq 2^{|X|}$ 以及 $|\mathcal{H}_{t',\ X^+}| \leq 2^{|X|+1}$，因此引理 4.23 的输入大小小于 $2^{|X|+2}$。计算最大代表族 $\mathcal{H}_{t,\ X}$ 需要时间 $\mathcal{O}(2^{\omega \cdot |X|} \cdot |X|^{\omega})$。该族的大小至多为 $2^{|X|-1}$，因此满足大小不变量。总运行时间中指数项的和为 $\sum_{X \subseteq \chi(t)} 2^{\omega \cdot |X|} = (2^{\omega} + 1)^{|X|}$。◀

▶ **引理 4.30** (合并节点)。设 $(\mathbb{T}, \chi)$ 是 $G$ 的一个宽度为 $k$ 的良好树分解，并且 $t \in V(\mathbb{T})$ 是一个合并节点，其子节点为 $t_1$、$t_2$。假设已给出满足正确性和大小不变量的 $t_1$、$t_2$ 的状态。那么，我们可以在时间 $O\left((2^{\omega-1} \cdot 3 + 1)^k \cdot k^{\omega}\right)$ 内计算出 $t$ 的状态，且该状态满足正确性和大小不变量。

**证明**。我们有 $\chi(t) = \chi(t_1) = \chi(t_2)$ 且 $U_t = U_{t_1} \cup U_{t_2}$ 其中并集是不相交的。

考虑 $X \subseteq \chi(t)$。令 $\mathrm{H}' = \{(H_1, X) \oplus (H_2, X) \mid H_1 \in \mathrm{H}_{t_1,X}, H_1 \in \mathrm{H}_{t_1,X}\} \cap \texttt{chordal}$。对于每个 $H \in \mathrm{H}'$，我们将其权重 $h_{t,X}(H)$ 定义为对 $\{(H_1, X) \oplus (H_2, X) = H \mid H_1 \in \mathrm{H}_{t_1,X}, H_1 \in \mathrm{H}_{t_1,X}\}$ 取 $\max(w_{t_1,X}(H_1) + w_{t_2,X}(H_2))$。我们使用引理 4.24 计算 $\mathrm{H}_{t,X}$，将其作为关于权函数 $h_{t,X}$ 的 $\mathrm{H}'$ 的最大代表族。

**正确性**。我们证明该对 $(\mathcal{H}',\ h_{t,\ X})$ 满足正确性不变量。由引理 4.26 可得结论。令 $X \subseteq \chi(t)$。

我们检查条件 (1)。设 $H \in \mathrm{H}'$ 和 $H_1 \in \mathrm{H}_{t_1,X}, H_2 \in \mathrm{H}_{t_2,X}$ 满足 $H = (H_1, X) \oplus (H_2, X)$，且 $h_{t,X}(H) = w_{t_1,X}(H_1) + w_{t_2,X}(H_2)$。根据假设，存在集合 $A_1 \subseteq U_{t_1}, A_2 \subseteq U_{t_2}$，使得对于 $i \in \{1, 2\}$，有 $\texttt{Condense}(G[A_i \cup X], X) = H_i, G[A_i \cup X]$ 是弦图，并且 $w_{t_i,X}(H_i) = w(A_i)$。注意，$A_1, A_2$ 之间不存在边，因此 $G[A_1 \cup A_2 \cup X] = (G[A_1 \cup X], X) \oplus (G[A_2 \cup X], X)$。由观察 4.8 可得 $\texttt{Condense}(G[A_1 \cup A_2 \cup X], X) = \texttt{Condense}(G[A_1 \cup X], X) \oplus \texttt{Condense}(G[A_2 \cup X], X) = (H_1, X) \oplus (H_2, X) = H$。由于根据构造，$H$ 是弦图，因此由引理 4.9 可知，$G[A_1 \cup A_2 \cup X]$ 是弦图。剩下需要验证的是 $w(A_1 \cup A_2) = w(A_1) + w(A_2) = h_{t,X}(H)$。

条件 (2)。令 $(A, B) \subseteq (U_t, V(G) \setminus V_t)$ 为使 $G[A \cup X \cup B]$ 是弦图的情形，且 $A_1 = A \cap U_{t_1}$，$A_2 = A \cap U_{t_2}$。注意，$B \cup A_2 \subseteq V(G) \setminus V_{t_1}$，并且 $U_{t_1}$ 与 $U_{t_2}$ 之间没有边。根据假设，存在 $H_1 \in \mathrm{H}_{t_1,X}$，使得 $(H_1, X) \oplus (G[B \cup A_2 \cup X)^{\widehat{}}$ 是弦图，且 $h_{t_1,X}(H_1) \geq w\ A_1 \qquad 1 \qquad A_1 \subseteq U_{t_1}$ ( )。由条件 ( ) 可得，存在使 $\widehat{\texttt{Condense}}(G[A_1 \cup X], \widehat{X}) = H_1, G[A_1 \cup X]$ 为弦图的情形，且 $\widehat{h}_{t_1,X}(H_1) = w(A_1)$。它

$\widehat{\phantom{x}}$ $\widehat{\phantom{x}}$由引理 4.6 可知，$G[A_1 \cup A_2 \cup X \cup B]$ 是弦图。接下来，我们考虑 $(A_2, B \cup A_1) \subseteq \widehat{\ }(U_{t_2}, V(G) \setminus V_{t_2})$。存在 $H_2 \in \mathrm{H}_{t_2,X}$，使得 $(H_2, X) \oplus (G[B \cup A_1 \cup X), X)$ 是弦图，且 $h_{t_2,X}(H_2) \geq w(A_2)$。同样，由条件 (1) 可得 $A_2 \subseteq U_{t_2}$，使得 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Condense$(G[A_2 \cup X], X) = H_2, G[A_2 \cup X]$ 为弦图，且 $h_{t_2,X}(H_2) = w(A_2)$。与之前一样，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$图 $G[A_1 \cup A_2 \cup X \cup B]$ 是弦图。由观察 4.8 可知，$H = (H_1, X) \oplus (H_2, X)\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$等于 Condense$(G[A_1 \cup A_2 \cup X], X)$。于是 $(H, X) \oplus (G[B \cup X], X)$ 是弦图，这尤其意味着 $H$ 是弦图且属于 $\mathrm{H}'$。最后，我们验证 $h_{t,X}(H) \geq h_{t_1,X}(H_1) + h_{t_2,X}(H_2) \geq w(A_1) + w(A_2) = w(A)$。

运行时间。考虑一个非空的 $X \subseteq \chi(t)$。根据观察 4.25，每个图 $H \in \mathrm{H}'$ 至多有 $2|X|$ 个顶点。根据假设 $|\mathrm{H}_{t_1,X}|, |\mathrm{H}_{t_2,X}| \leq 2^{|X|}$，因此我们可以使用引理 4.24，在 $O\left((2^{\omega-1} \cdot 3)^{|X|} \cdot |X|^{\omega}\right)$ 时间内计算最大代表族 $\mathrm{H}_{t,X}$。该族的大小至多为 $2^{|X|-1}$，因此满足大小不变量。总运行时间中指数项之和等于 $\sum_{X \subseteq \chi(t)} (2^{\omega-1} \cdot 3)^{|X|} = (2^{\omega-1} \cdot 3 + 1)^{|X|}$。◀

▶**定理 1.1**。在给定宽度为 $k$ 的树分解时，对于 $n$ 个顶点的节点加权图，弦图顶点删除问题可在确定性时间 $O(c^k k^{\omega+1} n)$ 内求解。常数 $c$ 等于 $2^{\omega-1} \cdot 3 + 1$。

**证明**。令 $(\mathbb{T}, \chi)$ 为 $G$ 的宽度为 $k$ 的树分解。我们可以假设这是一个良好树分解，并且 $|V(\mathbb{T})| = \mathcal{O}(nk)$。我们以标准的自底向上方式填充 $t \in V(\mathbb{T})$ 的状态，同时维护正确性和大小不变量。当 $t$ 是一个基节点时，我们有 $\chi(t) = V_t = \emptyset$，只需考虑 $X = \emptyset$。此时，族 $\mathcal{H}_{t,\emptyset}$ 只包含一个权重为零的空图。这显然满足两个不变量。对于其余类型的节点，我们使用引理 4.27、4.29 和 4.30。运行时间的瓶颈来自处理合并节点。

填充根节点 $r$ 的状态后，我们读取 $h_{r,\emptyset}(\perp)$ 的值，其中 $\perp$ 表示空图。我们断言，该值等于 $G$ 中诱导出弦图的顶点集的最高权重。我们有 $\chi(r) = \emptyset$, $V_t = U_t = V(G)$。族 $\mathrm{H}_{r,\emptyset}$ 只能包含空图。令 $A \subseteq V(G)$ 为诱导出弦图的最大权重集。由正确性条件 (2) 可得，存在 $H \in \mathrm{H}_{r,\emptyset}$（显然 $H = \perp$），使得 $h_{r,\emptyset}(H) \geq w(A)$。由 $H = \perp$ 的正确性条件 (1)，可得存在 $\widehat{A} \subseteq V(G)$，使得 $G[\widehat{A} \cup \emptyset]$ 是弦图且 $h_{r,\emptyset}(\perp) = w(\widehat{A})$。这意味着 $h_{r,\emptyset}(\perp) = w(A)$。◀

## 5 区间删除

我们将注意力转向区间图顶点删除，并证明在这种情况下，不太可能比现有的 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw} \log \mathbf{tw})} \cdot n$-时间算法实现任何加速。我们通过从 $k \times k$ 置换团进行参数化归约来证明定理 1.2，其定义如下。

> $k \times k$ 置换团**输入：**图 $G$，顶点集为 $[k] \times [k]$。**问题：**是否存在一个排列 $\pi\colon [k] \to [k]$，使得 $(1, \pi(1)), (2, \pi(2)) \ldots, (k, \pi(k))$ 在 $G$中构成一个团?

**排列构件**。我们将把一个排列 $\pi\colon [k] \to [k]$ 编码为一个集合族$N_1$，$N_2$，……，$N_k$ 使得 $N_i = \pi([i])$（即 $N_i$ 是 $\pi$中最先出现的 $i$ 个数字组成的集合）。首先，我们需要一个构件来验证这样的集合族是否表示某个排列。

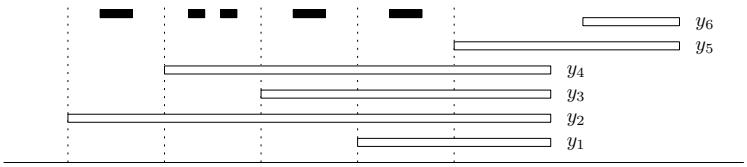


**图 2** 引理 5.3 的示意图。顶点 $Y_4$ 对应的区间为空白，并按从下到上的顺序排列。它们编码了排列 (2、4、3、1)。黑色区间表示顶点 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$、$x_5$，其邻域编码的集合分别为 {2}、{2、4}（两次）、{2、4、3} 和 {2、4、3、1}。

▶ **定义 5.1**。对于一个整数 $k$，设 $Y_k$ 为一个图，其顶点集为 $\{y_1, y_2, \ldots, y_{k+2}$，使得 $\{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$ 诱导出一个团，并且 $y_{k+2}$ 仅与 $y_{k+1}$ 相邻。

我们需要一个简单的观察：每个线性有序的集合族都可以由某个排列表示。

▶ **引理 5.2**。设 $N_1, \ldots, N_\ell \subseteq [k]$。假设对于每个 $i$、$j \in [\ell]$，都有 $N_i \subseteq N_j$ 或 $N_j \subseteq N_i$。那么存在一个排列 $\pi\colon [k] \to [k]$，使得对于每个 $i \in [\ell]$，都有 $N_i = \pi([n_i])$，其中 $n_i = |N_i|$。

证明。对 $k$ 进行归纳证明。对于 $k = 1$，结论显然成立，因此考虑 $k > 1$。如果集合 $N_i$ 为空，那么对于任意排列都有 $N_i = \pi(\emptyset)$，所以我们可以假设所有集合都非空。族 $(N_i)_{i\in[\ell]}$ 按线性顺序排列，因此重新排列下标后，可以假设 $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_\ell$。令 $e$ 为 $N_1$ 中的任意元素，并令 $\tau\colon [k]\setminus\{e\} \to [k-1]$ 为任意双射。我们定义 $N'_i = \tau(N_i \setminus \{e\})$。于是 $N'_1 \subseteq N'_2 \subseteq \cdots \subseteq N'_\ell$。根据归纳假设，存在一个排列 $\pi'\colon [k-1] \to [k-1]$，使得 $N'_i = \pi'([n_i - 1])$。我们定义 $\pi(1) = e$，并对 $i > 1$ 作如下定义：$\pi(i) = \tau^{-1}(\pi'(i-1))$。于是 $N_i = \{e\} \cup \tau^{-1}(N'_i) = \{\pi(1)\} \cup \tau^{-1}(\pi'([n_i - 1])) = \{\pi(1)\} \cup \pi([2, n_i]) = \pi([n_i])$。◀

我们将通过要求 $Y_k$ 的一个特定超图为区间图，来强制规定 $N_1, \ldots, N_k$ 上的线性序。相应的区间模型如图 2 所示。

▶ **引理 5.3** (⋆). 设 $N_1, \ldots, N_\ell \subseteq [k]$。考虑从 $Y_k$ 通过插入独立集 $x_1, \ldots, x_\ell$ 得到的图 $G$，使得 $N_G(x_i) = \{y_j \mid j \in N_i\}$。那么，$G$ 是区间图，当且仅当存在一个排列 $\pi\colon [k] \to [k]$，使得对每个 $i \in \ell$，都有 $N_i = \pi([n_i])$，其中 $n_i = |N_i|$。

证明。假设不存在这样的排列。由引理 5.2，存在 $i, j \in [\ell]$，使得既不满足 $N_i \subseteq N_j$，也不满足 $N_j \subseteq N_i$。固定 $p_i \in N_G(x_i) \setminus N_G(x_j)$，以及 $p_j \in N_G(x_j) \setminus N_G(x_i)$。我们声称 $(x_i, x_j, y_{k+2})$ 在 $G$ 中构成一个交错三元组。事实上，$(x_i, p_i, y_{k+1}, y_{k+2})$ 避开 $N_G[x_j]$，$(x_j, p_j, y_{k+1}, y_{k+2})$ 避开 $N_G[x_i]$，而 $(x_i, p_i, p_j, x_j)$ 避开 $N_G[y_{k+2}] = \{y_{k+1}, y_{k+2}\}$。由于 $G$ 含有一个交错三元组，它不是区间图。

现在假设存在一个满足引理条件的排列 $\pi$。我们构造 $G$ 的一个区间模型（见图 2）。令 $\varepsilon = \frac{1}{3\ell}$。将顶点 $y_i \in V(Y_k)$ 分配到区间 $[\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(i) + k + 2]$。将顶点 $y_{k+1}$ 分配到区间 $[k+1, k+4]$，并将顶点 $y_{k+2}$ 分配到 $[k+3, k+4]$。对于 $i \in [\ell]$，我们考虑邻域由 $N_i = \pi([n_i])$ 指定的顶点 $x_i$。其区间定义为 $[n_i + \frac{i-1}{\ell} + \varepsilon, n_i + \frac{i-1}{\ell} + 2\varepsilon]$。注意，不同的 $x_i, x_j$ 的区间互不相交，正如预期。$x_i$ 的区间包含在 $(n_i, n_i + 1)$ 中，因此它恰好在 $\pi^{-1}(j) \le n_i$ 时与形如 $[\pi^{-1}(j), \pi^{-1}(j) + k + 2]$ 的区间相交。后一不等式等价于 $j \in \pi([n_i]) = N_i$。引理得证。◀

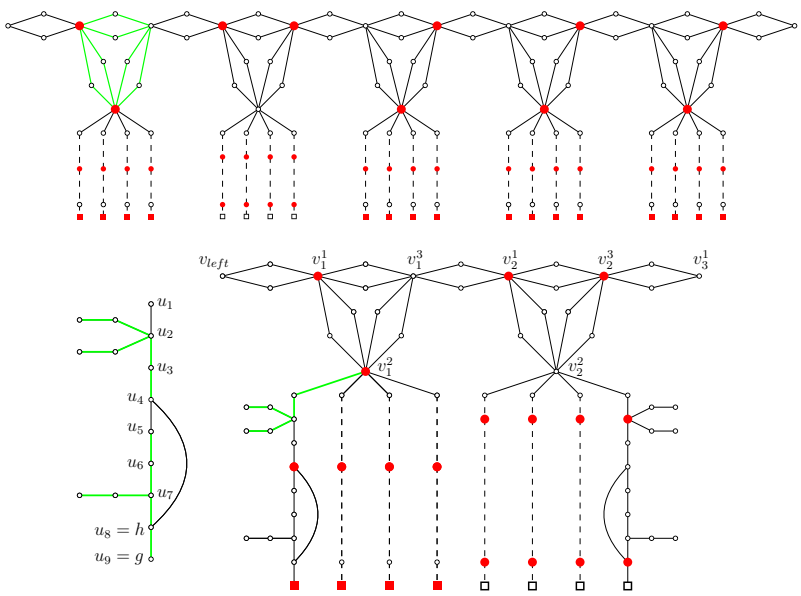


**图3** 顶部：选择小工具 $H_5$，其中子图 $Q_1$ 以绿色突出显示。 $P$的副本用虚线作示意性绘制，方块表示顶点 $g_i^\alpha$。红色圆盘和方块表示引理 5.6(2)中构造的一个解。该解"选择" $i = 2$，保留四个顶点 $g_2^\alpha$不变，并且移除 $h_2^\alpha$ 以及 $i \neq 2$对应的 $g_i^\alpha$。左下：图 $P$及标记为 $h$、$g$的顶点。 $P$ 中两个顶点不相交的非区间图子图包含绿色边。右下：更详细地展示了 $H_5$ 的前两个块，其中绘制了 $P$ 的两个副本。绿色突出显示的子图表明，如果一个最小规模的解针对至少一个 $\alpha \in [4]$ 移除 $g_i^\alpha$，那么它也必须移除 $v_i^2$；这一性质在引理 5.6(3)中得到了利用。

**选择构件**。 我们需要验证，对于每个 $1 \leq i < j \leq k$，都有 $(i, \pi(i))(j, \pi(j)) \in E(G)$。由于 $\pi(i)$ 是 $N_i \setminus N_{i-1}$ 中唯一的元素，因此可以从元组 $(N_{i-1}, N_i, N_{j-1}, N_j)$ 中提取是否满足 $(i, \pi(i)), (j, \pi(j)) \in E(G)$ 的信息。我们构造一个构件，强制解选取一个这样的有效元组。

我们采用以下约定来描述构件。当 $P$ 是一个具有指定顶点（命名为 $v$）的图，并且通过显式构造图 $P$ 的顶点不相交副本来构造图 $H$，这些副本分别记为 $P_1$、$P_2$、……、$P_\ell$，我们将子图 $P_i$ 中 $v$ 的副本称为 $P_i[v]$。我们将选择小工具构造为一种类路径结构，由多个块组成，每个块都配备四个特殊顶点。这些是之后唯一会与排列构件相连的顶点。从直观上来说，一个解应当选择一个块，保留其特殊顶点不变，并删除其余块中的特殊顶点。图3展示了一个示例。

▶ **定义 5.4.** 图 $P$由一条路径 $(u_1, u_2, \ldots, u_9)$ 通过向 $u_2$添加两条细分边、向 $u_7$添加一条细分边，并插入边 $u_4u_8$而得到。

阶数为 $s$ 的选择小工具是按如下方式构造的一个图。我们首先从顶点集 $\bigcup_{i=1}^{s}\{v_i^1, v_i^2, v_i^3\} \cup \{v_{left}, v_{right}\}$ 开始。对于形如 $(v_i^1, v_i^2)$、$(v_i^2, v_i^3)$、$(v_i^3, v_i^1)$、$(v_i^3, v_{i+1}^1)$ 的每一对 $(x, y)$，以及 $(v_{left}, v_1^1)$、$(v_s^3, v_{right})$，我们在 $x$ 和 $y$ 之间创建两条细分边。我们将 $x$、$y$ 之间由这两条细分边构成的子图记为 $hx, yi$。我们将 $hv_i^1, v_i^2i$、$hv_i^2, v_i^3i$、$hv_i^3, v_i^1i$ 的并集记为 $Q_i$。

接下来，对于每个 $i \in [s]$，我们创建图 $P$ 的四个副本，分别记为 $P_i^1$、$P_i^2$、$P_i^3$、$P_i^4$。我们在 $v_i^2$ 与 $P_i^1[u_1]$、$P_i^2[u_1]$、$P_i^3[u_1]$、$P_i^4[u_1]$ 之间添加边。我们将顶点 $P_i^\alpha[u_8]$、$P_i^\alpha[u_9]$、$\alpha \in [4]$ 分别称为 $h_i^\alpha$、$g_i^\alpha$。

## 26 弦图/区间图顶点删除的紧确界

选择小工具旨在强制最小规模的区间删除集具有一种特殊结构。

►**引理5.5**。 设 $H_s$ 是阶为 $s$ 的选择小工具，且 $X$ 是$H_s$中的一个区间删除集。那么对于每个 $i \in [s]$ 和 $\alpha \in [4]$，都有 $|V(P_i^\alpha) \cap X| \geq 2$ 以及 $|V(Q_i) \cap X| \geq 2$。

**证明**。 图 $P$ 包含两个顶点不相交的非区间图子图，这可由交错三元组见证：一个由 $u_2$、$u_3$、$u_4$ 以及附加到 $u_2$上的两条细分边诱导；另一个由 $u_5$、$u_6$、$u_7$、$u_8$、$u_9$ 以及附加到 $u_7$ 上的细分边诱导（见图3）。因此， $P$ 在 $H_s$ 中的任何一个副本都必须至少包含 $X$中的两个顶点。接下来注意，在 $Q_i$中，没有单个顶点能与三个洞都相交。因此，任何区间删除集都必须至少包含 $V(Q_i)$中的两个顶点。◄

我们证明了选择小工具的若干性质，这些性质类似于 Pilipczuk 在平面顶点删除下界中所用构件的性质 [60]。不过，在该构造中，每个块只有一个特殊顶点，其边延伸到构件之外；而在我们的情形中，有四个特殊顶点。我们还需要确保：当某个块中的特殊顶点未被删除时，解可以删除它们在构件中的邻居。（将一个平面图连接到 $G$ 的单个顶点上，不会影响 $G$ 的平面性，但对于区间图类，这一类似性质并不成立。）图 $P$ 的特殊结构使我们得以解决这两个问题。

►**引理 5.6** ($\star$)。 设 $H_s$ 为阶数为 $s$的选择小工具。
*1.* $H_s$ 中的区间删除集的极小大小为 $10s$。*2.* 对于每个 $i \in [s]$，存在 $H_s$ 中的一个最小大小区间删除集 $X$，使得对每个 $j \neq i$, $\{h_i^1, h_i^2, h_i^3, h_i^4\} \subseteq X$ 且$\{g_j^1, g_j^2, g_j^3, g_j^4\} \subseteq X$。*3.* 对于 $H_s$ 中的每个最小大小区间删除集 $X$，都存在 $i \in [s]$，使得$\{g_i^1, g_i^2, g_i^3, g_i^4\} \cap X = \emptyset$。*4.* 若 $s \leq 2^k$，则 $td(H_s) \leq td(H_1) + k$，其中 $td(G)$ 表示 $G$的树深度。

**证明**。 （1）所有的 $4s$副本 $P$，以及子图 $Q_1$，……，$Q_s$，在 $H_s$中两两顶点不相交。由引理5.5可得下界，而上界则由引理的下一部分得出。

（2）构造如图3所示。集合 $X$ 由以下元素组成：

- $v_j^1$，$v_j^2$对于 $j < i$,$v_i^1$，$v_i^3$,$v_j^2$,
- $v_j^3$对于 $j > i$,$P_j^\alpha[u_4]$，$P_j^\alpha[u_9]$
- 对于 $\alpha \in [4]$, $j \neq i$,$P_i^\alpha[u_2]$,
- $P_i^\alpha[u_8]$对于 $\alpha \in [4]$。

容易验证，$|X| = 10s$ 以及 $H_s - X$ 的每个连通分量要么是路径，要么是至多含有两条细分边的星形图。这些图都是区间图。

部分（3）。假设存在一个大小为 $10s$ 的区间删除集 $X$，使得对于每个 $i \in [s]$，都存在 $\alpha \in [4]$，满足 $g_i^\alpha \in X$。根据引理5.5，我们知道 $|X \cap V(P_i^\alpha)| \geq 2$。通过计数论证，我们推断实际上必定有 $|X \cap V(P_i^\alpha)| = 2$。顶点$P_i^\alpha[u_4]$，$P_i^\alpha[u_5]$，$P_i^\alpha[u_6]$，$P_i^\alpha[u_7]$，$P_i^\alpha[u_8]$ 诱导出 $C_5$，因此其中一个必须属于 $X$。结合 $g_i^\alpha = P_i^\alpha[u_9]$，这两个顶点就是 $X \cap V(P_i^\alpha)$。

顶点 $v_i^2$，$P_i^\alpha[u_1]$，$P_i^\alpha[u_2]$ 以及附加到 $P_i^\alpha[u_2]$ 的两条细分边，诱导出一个包含交错三元组的图（见图3）。由于除上述两个顶点外，$V$（$P_i^\alpha$）中没有其他顶点属于 $X$，因此它必定是 $v_i^2 \in X$。

此论证适用于每个 $i \in [s]$。我们来统计已分配的顶点：

$$\left| \bigcup_{i \in [s], \alpha \in [4]} (X \cap V(P_i^\alpha)) \right| + |\{v_i^2 \mid i \in [s]\}| = 8s + s = 9s.$$

由于 $|X| = 10s$，$X$ 中恰好还剩下 $s$ 个顶点。但是，还有 $s+1$ 个顶点互不相交的洞尚未被命中：$\langle v_{\text{left}}, v_1^1 \rangle, \langle v_1^3, v_2^1 \rangle, \langle v_2^3, v_3^1 \rangle \ldots, \langle v_s^3, v_{\text{right}} \rangle$。这意味着 $X$ 不可能是 $H_s$ 中的区间删除集。

第（4）部分。显然，**树深度**$(H_s) \leq$ **树深度**$(H_{s+1})$，因此只需通过对 $k$ 使用归纳法证明关于 $s = 2^k$ 的结论。对于 $k = 0$，等式成立。对于 $k > 0$，存在一个顶点 $v \in V$（$H_{2^k}$），使得 $H_{2^k} - v$ 有两个连通分量，且每个连通分量都是 $H_{2^{k-1}}$ 的子图。根据树深度的定义，我们得到 **树深度**$(H_{2^k}) \leq$ **树深度**$(H_{2^{k-1}}) + 1$。◀

Lokshtanov 等人 [55] 证明了，$k \times k$ 在假设指数时间假设成立的前提下，无法在$2^{o(k \log k)}$时间内求解置换团。根据下文的归约，这也排除了区间图顶点删除具有 $2^{o(\mathbf{td} \log \mathbf{td})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$形式运行时间的可能性，其中 $\mathbf{td}$ 是输入图的树深度。由于 $\mathbf{tw}(G) \leq \mathbf{td}(G)$，这意味着树宽参数下也有相同的困难性，从而证明了定理 1.2。

▶ **命题 5.7**。存在一种算法，给定置换团的一个实例 $(G, k)$，可在 $2^{\mathcal{O}(k)}$ 时间内运行，并返回区间图顶点删除的一个等价无权实例 $(H, p)$，使得 $|V(H)| = 2^{\mathcal{O}(k)}$ 且 $\mathbf{td}(H) = O(k)$。

**证明**。对于 $1 \leq i < j \leq k$ 和 $x \neq y \in [k]$，令 $\mathcal{S}_{i,x,j,y}$ 为满足以下条件的子集元组 $(S_1, S_2, S_3, S_4)$ 族：

- $S_1 \subset S_2 \subseteq S_3 \subset S_4$，
- $|S_1| = i - 1$，$S_2 \setminus S_1 =$
- $\{x\}$，$|S_3| = j - 1$，$S_4$
- $\setminus S_3 = \{y\}$。
-

此外，对于 $1 \leq i < j \leq k$，令 $\mathcal{S}_{i,\,j}$ 为满足 $(i,\ x)(j,\ y) \in E(G)$ 的所有配对 $x \neq y \in [k]$对应的 $\mathcal{S}_{i,\,x,\,j,\,y}$ 的并集。令 $s_{i,\,j} = |\mathcal{S}_{i,\,j}|$ 和 $\rho_{i,\,j}$：$[s_{i,j}] \to \mathcal{S}_{i,\,j}$ 为任意一个双射。显然，$s_{i,\,j} \leq 4^k k^2$。

图 $H$ 由一个排列构件 $Y_k$ 以及对于每个 $1 \leq i < j \leq k$ 的一个选择小工具 $C_{i,j}$ 构成，其阶为 $s_{i,j}$。对于 $S \subseteq [k]$，我们使用简写 $Y_k[S] = \{y_i \mid i \in S\}$。对于 $\ell \in [s_{i,j}]$ 和 $(S_1, S_2, S_3, S_4) = \rho_{i,j}(\ell)$，顶点 $C_{i,j}[g_\ell^1], C_{i,j}[g_\ell^2], C_{i,j}[g_\ell^3], C_{i,j}[g_\ell^4]$ 分别与顶点集 $Y_k[S_1], Y_k[S_2], Y_k[S_3], Y_k[S_4]$连通。至此，$H$的构造完成。$H$ 中的顶点数显然为 $2^{\mathcal{O}(k)}$，且该构造可在关于 $H$ 规模的多项式时间内完成。我们设 $p = 10 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq k} s_{i,j}$。

▷ 断言 5.8。如果 $(G, k)$ 存在一个解，那么 $H$ 存在一个大小为 $p$ 的区间删除集。

证明。设 $\pi\colon [k] \to [k]$ 是对 $G$中一个团进行编码的排列。根据构造，对于每个 $1 \leq i < j \leq k$，我们都有 $(\pi([i-1])\ \pi([i])\ \pi([j-1])\ \pi([j]) \in S_{i,j}$。设 $\ell \in [s_{i,j}]$ 是由 $\rho_{i,j}$映射到该元组的索引。根据引理 5.6(2)，选择小工具 $C_{i,j}$ 有一个大小为 $10s_{i,j}$的区间删除集 $X_{i,j} \subseteq V(C_{i,j})$，满足 $\{C_{i,j}[h_\ell^1], C_{i,j}[h_\ell^2], C_{i,j}[h_\ell^3], C_{i,j}[h_\ell^4]\} \subseteq X_{i,j}$，并且对于每个 $r \neq \ell$，$\{C_{i,j}[g_r^1], C_{i,j}[g_r^2], C_{i,j}[g_r^3], C_{i,j}[g_r^4]\} \subseteq X_{i,j}$。换言之，$X_{i,j}$包含 $C_{i,j}$ 中所有与 $Y_k$ 相邻的顶点，但不包括 $g_\ell^1, g_\ell^2, g_\ell^3, g_\ell^4$的 $C_{i,j}$副本；而且 $X_{i,j}$ 还包含 $C_{i,j}$中 $C_{i,j}[g_\ell^1], C_{i,j}[g_\ell^2], C_{i,j}[g_\ell^3], C_{i,j}[g_\ell^4]$ 的邻居。

我们设定 $X = \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} X_{i,\,j}$。那么，$H - X$ 中唯一一个不是任何 $C_{i,\,j} - X_{i,\,j}$ 的连通分量的连通分量，由 $Y_k$ 以及一个独立集组成

该独立集由上述顶点构成。 $Y_k$ 中每个这样的顶点的邻域都具有$Y_k[\pi([k'])]$ 的形式，其中某个 $0 \le k' \le k$满足此条件。根据引理 5.3，该连通分量是一个区间图。这说明 $X$ 确实是一个区间删除集。□

▷ 断言 5.9. 如果 $H$ 有一个大小至多为 $p$的区间删除集，那么（$G$， $k$）存在一个解 .

**证明**。 设 $H$中的 $X$ 为一个区间删除集。根据引理 5.6(1)， $C_{i,\ j}$ 中的最小大小区间删除集的大小为$10s_{i,\ j}$。由于这些选择小工具是 $H$的顶点不相交子图，集合 $X$ 必须恰好包含来自 $V$（$C_{i,\ j}$）的$10s_{i,\ j}$ 个顶点。这也意味着$V$（$Y_k$）$\cap X = \emptyset$。

令 $X_{i,\ j} = V$（$C_{i,\ j}$）$\cap X$。根据引理 5.6(3)，存在 $\ell \in [s_{i,j}]$ 使得 $\{C_{i,j}[g_\ell^1], C_{i,j}[g_\ell^2], C_{i,\ j}[g_\ell^3], C_{i,\ j}[g_\ell^4]\} \cap X_{i,\ j} = \emptyset$。因此，对于每一对（$i$、$j$），存在一个元组（$S_{i,\ j}^1$、$S_{i,\ j}^2$、$S_{i,\ j}^3$、$S_{i,\ j}^4$）$\in S_{i,\ j}$，使得来自 $C_{i,\ j}$ 且邻域为 $Y_k[S_{i,j}^1]$、$Y_k[S_{i,j}^2]$、$Y_k[S_{i,j}^3]$、$Y_k[S_{i,j}^4]$ 的顶点存在于 $H - X$中。根据引理 5.3，存在一个单一排列 $\pi$: $[k] \to [k]$，使得每个集合 $S_{i,\ j}^\alpha$ 均具有 $\pi$（$[|S_{i,j}^\alpha|]$）的形式。根据族 $S_{i,\ j}$ 的定义，这意味着对于每一对（$i$、$j$），（$i$、$\pi$（$i$））（$j$、$\pi$（$j$））$\in E$（$G$）。因此，$G$中存在一个 $k$-团。□

▷ 命题5.10。 $H$ 的树深度为 $\mathcal{O}(k)$。

**证明**。 $H$ 的树深度至多为 $|Y_k| = k + 2$ 加上$\mathbf{td}(H - Y_k)$，后者等于所有已使用的选择小工具 $C_{i,j}$中$\mathbf{td}(C_{i,j})$的最大值。由于$s_{i,j} \le 4^k k^2$，引理 5.6(4) 蕴含$\mathbf{td}(C_{i,j}) \le 2k + 2\log_2 k + \mathcal{O}(1)$。□

这就完成了该命题的证明。 ◀

## 5.1 上界

Saitoh 等人 [66]提出了一种用于区间图边删除（以及若干相关图类）的算法，运行时间为 $2^{\mathcal{O}(\mathbf{tw} \log \mathbf{tw})} \cdot n$，并表示他们预计该算法也适用于顶点删除变体 [66, §6]。我们简要介绍他们的方法，并说明确实可以将顶点删除纳入其中。

我们不必使用实数轴上的区间模型，也可以用抽象方式表示区间模型。对于集合 $X$，其区间表示是在集合$LR_X = L_X \cup R_X \cup \{\bot, \top\}$ 上的一个线性序 $\pi$，其中 $L_X = \{\ell_x \mid x \in X\}$， $R_X = \{r_x \mid x \in X\}$，并且$\bot <_\pi \ell_x <_\pi r_x <_\pi \top$ 对每个 $x \in X$都成立。区间是 $LR_X$中的一对元素。区间表示 $\pi$ 在 $V$ 上的区间图 $G_\pi$ 定义为：每当 $(\ell_u, r_u)$ 与 $(\ell_v, r_v)$ 在 $\pi$中相交时，就添加一条边 $uv$。显然，图 $G$ 是区间图，当且仅当存在 $V$ 上的区间表示 $\pi$ 使得 $G = G_\pi$。

设 $(\mathbb{T}, \chi)$ 是 $G$的一个有根树分解。 $t \in V(\mathbb{T})$的状态是由三元组 $(\pi, I, c)$ 构成的集合，其中 $\pi$ 是 $\chi(t)$上的一个区间表示，满足 $G_\pi$ 是 $G[\chi(t)]$的子图；$I$ 是来自 $LR_{\chi(t)}$的区间集合，并且 $c \in \mathbb{N}$。对于每个 $V_t$上的区间表示 $\tau$，若 $G_\tau$ 是 $G[V_t]$ 的子图，则将其抽象定义为三元组 $(\pi, I, c)$，其中 $\pi$是将 $\tau$ 限制到 $\chi(t)$所得的结果；对于 $G[U_t]$ 的每个连通分量 $C$，都存在一个区间 $(\ell_C, r_C) \in I$，使得 $(\ell_C, r_C)$ 是 $LR_\chi(t)$中包含来自 $C$的所有区间的包含意义下极小区间；并且 $c = |E(G[V_t]) - E(G_\tau) - E(G[\chi(t)])|$ 统计 $G[V_t]$ 中至多有一个端点位于 $\chi(t)$ 内、且未出现在 $G_\tau$ 中的边数。若 $I$ 中的每个区间都包含于 $I'$ 中的某个区间，我们记作 $I \, \mathbf{v}_\pi \, I'$。若 $I \, \mathbf{v}_\pi \, I'$ 且 $c \le c'$，则称 $(\pi, I, c)$ 支配 $(\pi, I', c')$。

Saitoh 等人证明，当 $(\pi,\ I,\ c)$ 支配 $(\pi,\ I',\ c')$ 时，无需在 $t$ 的状态中存储 $(\pi,\ I',\ c')$。为此，考虑一个区间表示 $\tau'$，其定义在 $V(G)$ 上，并对应某个有效解，使得 $(\pi,\ I',\ c')$ 是 $\tau'$ 在 $\pi$ 上的限制的一个抽象

。由于 $U_t$ 与 $V(G) \setminus V_t$ 之间没有边，因此对每个 $v \in V(G) \setminus V_t$ 以及 $G[U_t]$ 的每个连通分量 $C$，相对于 $\tau'$，$v$ 的区间必须与由 $C$ 跨越的区间不相交。由于 $I \sqsubseteq_\pi I'$，我们可以修改 $\tau'$，得到一个定义在 $V(G)$ 上的新区间表示 $\tau$；它在 $U_t$ 上与某个部分解一致，该部分解的抽象为 $(\pi, I, c)$。与 $\tau'$ 相比，相对于 $\tau$ 删除的边数不会增加。最后要观察的是，当 $|\chi(t)| = k$ 且存储在 $t$ 中的任意两个三元组都不互相支配时，它们的数量为 $2^{\mathcal{O}(k \log k)}$。

为了将该算法调整为顶点删除问题，我们可以存储元组 $(X, \pi, I, c)$，其中$X \subseteq \chi(t)$ 是未被删除的顶点集合，$\pi$ 是 $X$上的一个区间表示，使得 $G_\pi = G[X]$, $I$ 是来自 $LR_X$的一个区间集合，并且 $c \in \mathbb{N}$。现在，部分解是一个三元组 $(A, X, \tau)$，其中 $A \subseteq U_t, X \subseteq \chi(t)$，并且 $\tau$是 $A \cup X$上的一个区间表示，使得 $G_\tau = G[A \cup X]$。$(A, X, \tau)$ 的抽象是 $(X, \pi, I, c)$，其中 $\pi$是 $\tau$ 在 $X$上的限制；对于 $G[A]$ 的每个连通分量 $C$，都存在一个区间$(\ell_c, r_c) \in I$，使得$(\ell_c, r_c)$是 $LR_X$ 中的一个包含意义下极小区间图，并且该区间包含来自$C$的所有区间，而 $c = |U_t| - |A|$ 统计迄今为止已删除的顶点数量。与之前一样，如果 $I \mathrm{v}_\pi I'$ 且 $c \leq c'$，我们就称$(X, \pi, I, c)$ 支配 $(X, \pi, I', c')$。根据之前相同的论证，我们可以忽略被支配的元组，并将每对$(t, X)$所存储的元组数量限制为 $2^{\mathcal{O}(k \log k)}$。由于 $2^k$有 $X$种选择，因此可以得到一般的上界。很容易看出，这两种算法也都可以扩展以纳入权重。

## 6 结论与开放问题

我们在树宽参数化下，获得了针对弦图与区间图类的顶点删除问题的指数时间假设紧确界。相应的边删除问题的状态仍不明确（见 [66]）。相关问题反馈顶点集可以使用代表族，在与我们针对弦图顶点删除的算法相同的运行时间内求解 [37]。然而，该问题可以通过基于行列式方法的更快确定性算法 [71]，以及基于 Cut & Count 技术的更快随机化算法 [35] 求解。弦图顶点删除是否也适用于其中一种技术?

我们针对弦图顶点删除的算法基于弦图与图拟阵之间一种新颖的联系，这一联系或许在其他场景中也会派上用场。特别地，我们想知道能否利用这一洞见，改进以解大小为参数的弦图顶点删除的运行时间 $k$；目前最优的算法运行时间为 $2^{\mathcal{O}(k \log k)} n^{\mathcal{O}(1)}$ [29]。一种可能的直接改进途径，是在时间 $2^{\mathcal{O}(k)} n^{\mathcal{O}(1)}$ 内将该问题归约到树宽为 $\mathcal{O}(k)$ 的情形，然后应用定理 1.1。针对以解大小为参数的平面顶点删除，目前最先进的算法便采用了这种策略 [47]。

## 参考文献

1 Akanksha Agrawal、Sudeshna Kolay、Daniel Lokshtanov 和 Saket Saurabh。更快的 FPT 算法和更小的块图顶点删除核。在 Evangelos Kranakis、Gonzalo Navarro 和 Edgar Chávez 编，*LATIN 2016*：理论信息学——第十二届拉丁美洲研讨会，墨西哥恩塞纳达，*2016*年*4*月*11*日至*15*日，论文集，《计算机科学讲义》第 9644 卷，《计算机科学讲义》，第 1–13 页。施普林格，2016年。doi:10.1007/978-3-662-49529-2_1。2 Akanksha Agrawal、Daniel Lokshtanov、Pranabendu Misra、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。区间图障碍的 Erdős–Pósa 性质。在 Rolf Niedermeier 和 Brigitte Vallée 编，第*35*届计算机科学理论方面研讨会，*STACS 2018*，

## 30 弦图/区间图顶点删除的紧确界

2018年2月28日至3月3日，法国卡昂，LIPIcs第96卷，第7:1–7:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018年。 doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2018.7。3 Akanksha Agrawal、Daniel Lokshtanov、Pranabendu Misra、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。受反馈顶点集启发的弦图顶点删除核。ACM Trans. Algorithms，15(1):11:1–11:28，2019年。 doi:10.1145/3284356。4 Akanksha Agrawal、Pranabendu Misra、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。区间图顶点删除问题存在多项式核。载于《第三十届年度ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA '19，第1711–1730页，美国，2019年。工业与应用数学学会。 doi:10.1137/1.9781611975482.103。5 Jungho Ahn、Eduard Eiben、O joung Kwon 和 Sang il Oum。3叶幂图删除的多项式核。载于 Javier Esparza 和 Daniel Kráľ 编，《第45届国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS 2020）》，Leibniz信息学国际会议录（LIPIcs）第170卷，第5:1–5:14页，德国达格施图尔，2020年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。 doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2020.5。6 Jungho Ahn、Eun Jung Kim 和 Euiwoong Lee。迈向弦图/距离遗传图顶点删除的常数因子近似。Algorithmica，84(7):2106–2133，2022年。 doi:10.1007/s00453-022-00963-7。7 Josh Alman 和 Virginia Vassilevska Williams。改进的激光法与更快的矩阵乘法。载于《第三十二届年度ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA '21，第522–539页，美国，2021年。工业与应用数学学会。 doi:10.5555/3458064.3458096。8 Amotz Bar-Noy、Reuven Bar-Yehuda、Ari Freund、Joseph (Seffi) Naor 和 Baruch Schieber。资源分配与调度近似的一种统一方法。ACM 杂志，48(5):1069–1090，2001年9月。 doi:10.1145/502102.502107。9 Julien Baste、Ignasi Sau 和 Dimitrios M. Thilikos。有界树宽图上命中连通子式的复杂性二分：椅图与横幅图划定了边界。载于 Shuchi Chawla 编，《2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2020，美国犹他州盐湖城，2020年1月5日至8日，第951–970页。SIAM，2020年。doi:10.1137/1.9781611975994.57。10 Julien Baste、Ignasi Sau 和 Dimitrios M. Thilikos。有界树宽图上的命中子式。I. 一般上界。SIAM J. Discret. Math.，34(3):1623–1648，2020年。 doi:10.1137/19M1287146。11 Julien Baste、Ignasi Sau 和 Dimitrios M. Thilikos。有界树宽图上的命中子式。II. 单指数算法。理论计算机科学，814:135–152，2020年。 doi:10.1016/j.tcs.2020.01.026。12 Julien Baste、Ignasi Sau 和 Dimitrios M. Thilikos。有界树宽图上的命中子式。III. 下界。J. Comput. Syst. Sci.，109:56–77，2020年。 doi:10.1016/j.jcss.2019.11.002。13 Giuseppe Di Battista、Peter Eades、Roberto Tamassia 和 Ioannis G. Tollis。《图绘制：图可视化算法》。Prentice Hall PTR，美国，第一版，1998年。网址：https://dl.acm.org/doi/10.5555/551884。14 Seymour Benzer。论遗传精细结构的拓扑。美国国家科学院院刊，45(11):1607–1620，1959年。网址： http://www.jstor.org/stable/90127。15 Benjamin Bergougnoux、Édouard Bonnet、Nick Brettell 和 O joung Kwon。反馈顶点集的近亲问题：不存在以树宽为参数的单指数算法。载于 Yixin Cao 和 Marcin Pilipczuk 编，《第15届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2020）》，Leibniz信息学国际会议录（LIPIcs）第180卷，第3:1–3:17页，2020年。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2020.3。16 Jean R. S. Blair 和 Barry Peyton。弦图与团树导论。载于 Alan George 、 John R. Gilbert 和 Joseph W. H. Liu 编，《图论与稀疏矩阵计算》，第 1–29 页，纽约州纽约市，1993年。Springer纽约。

17 Ivan Bliznets、Marek Cygan、Pawel Komosa、Michal Pilipczuk 和 Lukás Mach。最小填充及其他补全问题的参数化复杂性下界。ACM Trans. Algorithms，16(2):25:1–25:31，2020。 doi:10.1145/3381426。18 Ivan Bliznets、Fedor V Fomin、Michał Pilipczuk 和 Yngve Villanger。比 $2^n$ 更快地寻找最大弦图子图和区间图子图。Algorithmica，76(2):569–594，2016。19 Hans L. Bodlaender、Marek Cygan、Stefan Kratsch 和 Jesper Nederlof。以树宽为参数的连通性问题的确定性单指数时间算法。信息与计算，243:86–111，2015。 doi:10.1016/j.ic.2014.12.008。20 Hans L. Bodlaender、Pål Gronås Drange、Markus S. Dregi、Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov 和 Michał Pilipczuk。一种用于树宽的 $c^k n$ 5-近似算法。SIAM Journal on Computing，45(2):317–378，2016。 doi:10.1137/130947374。21 Hans L. Bodlaender、Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Eelko Penninkx、Saket Saurabh 和 Dimitrios M. Thilikos。（元）核化。ACM 杂志，63(5):44:1–44:69，2016。 doi:10.1145/2973749。22 Marthe Bonamy、Lukasz Kowalik、Jesper Nederlof、Michal Pilipczuk、Arkadiusz Socala 和 Marcin Wrochna。以树宽为参数的有向反馈顶点集问题。载于 Andreas Brandstädt、Ekkehard Köhler 和 Klaus Meer 编，《计算机科学中的图论概念——第44届国际研讨会 WG 2018》，德国科特布斯，2018年6月27日至29日，论文集，《计算机科学讲义》第11159卷，第65–78页。施普林格，2018。 doi:10.1007/978-3-030-00256-5_6。23 Édouard Bonnet、Nick Brettell、O joung Kwon 和 Dániel Marx。有界树宽图上的广义反馈顶点集问题：弦性是实现单指数参数化算法的关键。载于 Daniel Lokshtanov 和 Naomi Nishimura 编，《第12届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2017）》，《Leibniz信息学国际会议录》（LIPIcs）第89卷，第7:1–7:13页，德国达格施图尔，2018。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2017.7。24 Andreas Brandstädt、Van Bang Le 和 Jeremy P. Spinrad。《图类：综述》。工业与应用数学学会，美国宾夕法尼亚州费城，1999。 doi:10.1137/1.9780898719796。25 Peter Buneman。刚性电路图的一种刻画。离散数学，9(3):205–212，1974年9月。 doi:10.1016/0012-365X(74)90002-8。26 Leizhen Cai。顶点着色的参数化复杂性。离散应用数学，127(3):415–429，2003。 doi:https://doi.org/10.1016/S0166-218X(02)00242-1。27 Yixin Cao。几乎为区间图的线性识别。载于 Robert Krauthgamer 编，《第27届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集》，SODA 2016，美国弗吉尼亚州阿灵顿，2016年1月10日至12日，第1096–1115页。SIAM，2016。doi:10.1137/1.9781611974331.ch77。28 Yixin Cao 和 Dániel Marx。区间删除是固定参数可解的。ACM Trans. Algorithms，11(3)，2015年1月。 doi:10.1145/2629595。29 Yixin Cao 和 Dániel Marx。弦图编辑是固定参数可解的。Algorithmica，75(1):118–137，2016年5月。 doi:10.1007/s00453-015-0014-x。30 Bruno Courcelle 和 Joost Engelfriet。《图结构与单子二阶逻辑——一种语言理论方法》，《数学及其应用百科全书》第138卷。剑桥大学出版社，2012。 doi:10.1017/CBO9780511977619。31 Radu Curticapea、Nathan Lindzey 和 Jesper Nederlof。通过矩阵秩计数哈密顿回路的紧下界。载于《2018年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集》，第1080–1099页，2018。 doi:10.1137/1.9781611975031.70。32 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。施普林格，2015。 doi:10.1007/978-3-319-21275-3。33 Marek Cygan、Stefan Kratsch 和 Jesper Nederlof。通过完美匹配基快速判定哈密顿回路。ACM 杂志，65(3):12:1–12:46，2018。 doi:10.1145/3148227。

34 Marek Cygan、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk 和 Michał Pilipczuk。在有界树宽图中命中禁用子图。Information and Computation，256:62–82，2017。doi:https://doi.org/10.1016/j.ic.2017.04.009。35 Marek Cygan、Jesper Nederlof、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk、Johan M. M. Van Rooij 和 Jakub Onufry Wojtaszczyk。以单指数时间求解以树宽为参数的连通性问题。ACM Trans. Algorithms，18(2)，2022年3月。doi:10.1145/3506707。36 Erik D. Demaine 和 MohammadTaghi Hajiaghayi。双维理论及其算法应用。《The Computer Journal》，51(3):292–302，2008。 doi:10.1093/comjnl/bxm033。37 Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Fahad Panolan 和 Saket Saurabh。乘积族的代表集。载于 Andreas S. Schulz 和 Dorothea Wagner 编，《Algorithms - ESA 2014》，第443–454页，柏林、海德堡，2014。Springer Berlin Heidelberg。 doi:10.1007/978-3-662-44777-2_37。38 Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Fahad Panolan 和 Saket Saurabh。代表族的高效计算及其在参数化与精确算法中的应用。ACM 杂志，63(4):29:1–29:60，2016。 doi:10.1145/2886094。39 Fedor V. Fomin 和 Yngve Villanger。最小填充的亚指数参数化算法。SIAM Journal on Computing，42(6):2197–2216，2013。 doi:10.1137/11085390X。40 F̌anic̆a Gavril。树中子树的交图恰好是弦图。《Journal of Combinatorial Theory, Series B》，16(1):47–56，1974。doi:10.1016/0095-8956(74)90094-X。41 Pinar Heggernes、Pim van 't Hof、Bart M.P. Jansen、Stefan Kratsch 和 Yngve Villanger。顶点删除至完美图类的参数化复杂性。Theoretical Computer Science，511:172–180，2013。Exact and Parameterized Computation。doi:https://doi.org/10.1016/j.tcs.2012.03.013。42 Russell Impagliazzo、Ramamohan Paturi 和 Francis Zane。哪些问题具有强指数复杂度？J. Comput. Syst. Sci.，63(4):512–530，2001。 doi:10.1006/jcss.2001.1774。43 Ashwin Jacob、Fahad Panolan、Venkatesh Raman 和 Vibha Sahlot。具有调节器遗忘的结构参数化。载于 Yixin Cao 和 Marcin Pilipczuk 编，《第15届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2020）》，2020年12月14日至18日，中国香港（线上会议），LIPIcs 第180卷，第19:1–19:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2020。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2020.19。44 Hugo Jacob、Thomas Bellitto、Oscar Defrain 和 Marcin Pilipczuk。近亲（反馈顶点集的近亲），再探。载于 Petr A. Golovach 和 Meirav Zehavi 编，《第16届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2021）》，Leibniz信息学国际会议录（LIPIcs）第214卷，第21:1–21:15页，德国达格施图尔，2021。doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2021.21。45 Bart M. P. Jansen、Jari J. H. de Kroon 和 Michał Włodarczyk。以消除距离及更小参数化的顶点删除。载于《第53届ACM SIGACT计算理论年度研讨会论文集》，STOC 2021，美国纽约，2021，第1757–1769页。计算机协会。doi:10.1145/3406325.3451068。46 Bart M. P. Jansen、Jari J. H. de Kroon 和 Michal Wlodarczyk。以消除距离及更小参数化的顶点删除。CoRR，abs/2103.09715，2021。arXiv:2103.09715v4。47 Bart M. P. Jansen、Daniel Lokshtanov 和 Saket Saurabh。一种近乎最优的平面化算法。载于 Chandra Chekuri 编，《第25届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集》，SODA 2014，美国俄勒冈州波特兰，2014年1月5日至7日，第1802–1811页。SIAM，2014。doi:10.1137/1.9781611973402.130。48 Bart M. P. Jansen 和 Marcin Pilipczuk。弦图顶点删除的近似与核化。SIAM J. Discret. Math.，32(3):2258–2301，2018。 doi:10.1137/17M112035X。49 J.Mark Keil。在区间图中寻找哈密顿回路。Information Processing Letters，20(4):201–206，1985。 doi:https://doi.org/10.1016/0020-0190(85)90050-X。

50 David Kendall。《考古学中的关联矩阵、区间图与序列化》。《太平洋数学杂志》，28(3):565–570，1969年。51 Eun Jung Kim 和 O-joung Kwon。《无弦环的 Erdős-Pósa性质及其应用》。《组合理论杂志》，B辑，145:65–112，2020年。 doi:10.1016/j.jctb.2020.05.002。52 Lefteris M. Kirousis 和 Christos H. Papadimitriou。《区间图与搜索》。《离散数学》，55(2):181–184，1985年。 doi:https://doi.org/10.1016/0012-365X(85)90046-9。53 Ton Kloks。《树宽、计算与近似》，《计算机科学讲义》第842卷。施普林格，1994年。 doi:10.1007/BFb0045375。54 Daniel Lokshtanov、Dániel Marx 和 Saket Saurabh。《有界树宽图上的已知算法可能是最优的》。《ACM算法汇刊》，14(2)，2018年4月。 doi:10.1145/3170442。55 Daniel Lokshtanov、Dániel Marx 和 Saket Saurabh。《略超指数的参数化问题》。《SIAM计算杂志》，47(3):675–702，2018年。 doi:10.1137/16M1104834。56 Daniel Lokshtanov、Neeldhara Misra 和 Saket Saurabh。《通过收缩边消除小型诱导子图的困难性》。载于 Gregory Z. Gutin 和 Stefan Szeider（编辑），《参数化与精确计算——第8届国际研讨会，IPEC 2013，法国索菲亚·安蒂波利斯，2013年9月4日至6日，修订精选论文》，《计算机科学讲义》第8246卷，第243–254页。施普林格，2013年。 doi:10.1007/978-3-319-03898-8_21。57 Dániel Marx。《关于树宽的令人惊讶的算法用途的四个简短故事》。载于 Fedor V. Fomin、Stefan Kratsch 和 Erik Jan van Leeuwen（编辑），《树宽、核与算法——献给 Hans L. Bodlaender 60岁生日的论文集》，《计算机科学讲义》第12160卷，第129–144页。施普林格，2020年。 doi:10.1007/978-3-030-42071-0_10。58 Dániel Marx、Barry O'Sullivan 和 Igor Razgon。《通过树宽约简在线性时间内寻找小型分隔集》。《ACM算法汇刊》，9(4):30:1–30:35，2013年。 doi:10.1145/2500119。59 James G Oxley。《拟阵理论》，第3卷。牛津大学出版社，美国，2006年。60 Marcin Pilipczuk。《有界树宽图上顶点平面化的紧下界》。《离散应用数学》，231:211–216，2017年。 doi:10.1016/j.dam.2016.05.019。61 Michał Pilipczuk。《以树宽为参数且可在单指数时间内处理的问题：一种逻辑方法》。载于 Filip Murlak 和 Piotr Sankowski（编辑），《2011年计算机科学数学基础国际研讨会》，第520–531页，柏林、海德堡，2011年。Springer Berlin Heidelberg。doi:10.1007/978-3-642-22993-0_47。62 R. C. Prim。《最短连接网络及其一些推广》。《贝尔系统技术期刊》，36(6):1389–1401，1957年。 doi:10.1002/j.1538-7305.1957.tb01515.x。63 N. Robertson 和 P.D. Seymour。《图小面 XIII。不相交路径问题》。《组合理论杂志，B辑》，63(1):65–110，1995年。 doi:https://doi.org/10.1006/jctb.1995.1006。64 Neil Robertson 和 P.D Seymour。《图小面 II。树宽的算法方面》。《算法杂志》，7(3):309–322，1986年。 doi:https://doi.org/10.1016/0196-6774(86)90023-4。65 Donald J Rose。《稀疏正定线性方程组数值求解的图论研究》。载于《图论与计算》，第183–217页。爱思唯尔，1972年。66 Toshiki Saitoh、Ryo Yoshinaka 和 Hans L. Bodlaender。《针对区间图类的边删除的固定树宽高效算法》。载于 Ryuhei Uehara、Seok-Hee Hong 和 Subhas C. Nandy（编辑），《WALCOM：算法与计算——第15届国际会议及研讨会，2021年，缅甸仰光》，《计算机科学讲义》第12635卷，第142–153页。施普林格，2021年。 doi:10.1007/978-3-030-68211-8_12。67 Ignasi Sau 和 Uéverton dos Santos Souza。《有界树宽图上的禁用诱导子图命中问题》。载于 Javier Esparza 和 Daniel Kráľ（编辑），《第 45 届国际计算机科学数学基础研讨会（ MFCS 2020 ）》，《 Leibniz信息学国际会议录》（LIPIcs）第170卷，第82:1–82:15页，德国达格施图尔，2020年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。 doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2020.82。

68 Hadas Shachnai 和 Meirav Zehavi。代表族：一种统一的基于权衡的方法。*Journal of Computer and System Sciences*，82(3):488–502，2016年。 doi:https://doi.org/10.1016/j.jcss.2015.11.008。69 Johan MM Van Rooij、Hans L Bodlaender 和 Peter Rossmanith。使用广义快速子集卷积在树分解上进行动态规划。载于 *European Symposium onAlgorithms*，第 566–577 页。施普林格，2009 年。 doi:10.1007/978-3-642-04128-0_51。70 Pim van 't Hof 和 Yngve Villanger。真区间图顶点删除。 *Algorithmica*，65(4):845–867，2013。 doi:10.1007/s00453-012-9661-3。71 Michał Włodarczyk。克利福德代数与树分解的结合。*Algorithmica*，81(2):497–518，2019年。 doi:10.1007/s00453-018-0489-3。72 Mihalis Yannakakis。计算最小填充是 NP 完全问题。 *SIAM Journal onAlgebraic Discrete Methods*，2(1):77–79，1981年。 doi:10.1137/0602010。73 Meirav Zehavi。融合颜色编码相关技术。载于 *Algorithms-ESA 2015*，第 1037–1049 页。施普林格，2015年。 doi:10.1007/978-3-662-48350-3_86。