arXiv:2305.03446v1 [math.AG] 5 May 2023

一般代数变形的构造

Dave Bowman、Dora Pulji´c、Agata Smoktunowicz

2023年5月8日

摘要

变形理论研究的问题之一是，确定给定的结合代数可以变形为哪些代数。本文探讨一个不同但相关的问题，即：对于给定的有限维结合 $\mathbb{C}$代数 A，找出可以变形为 A的代数 N。我们提出一种简单的方法，能够构造结合且平坦的变形，以研究这一问题。作为该方法的应用，我们回答了 Michael Wemyss 关于收缩代数变形的一个问题。

引言

Michael Wemyss 和 Will Donovan 运用非交换环论中的方法，建立了一种刻画代数几何中出现的交换环的方法。在 [DW16] 中，他们引入了收缩代数，为非交换奇点的解消以及翻转的不变量提供了重要洞见。收缩代数可以通过生成元与关系，以纯粹代数的方式加以描述。许多问题都涉及收缩代数，而不熟悉代数几何高级方法的非交换环论学者也能够研究这些问题。其中一些问题与幂零环有关。2022年，Gavin Brown 和 Michael Wemyss 描述了所有有限维且为局部的收缩代数 [BW22]。注意，有限维代数的 Jacobson 根基是幂零的，因此局部收缩代数与幂零代数非常接近。其他一些问题则涉及对非局部收缩代数的刻画。

收缩代数的变形有助于深入理解翻转的不变量。在此背景下，Michael Wemyss 提出了关于局部收缩代数变形的问题。借助几何方法，他得以猜想哪些环可以作为这些收缩代数的变形获得。

由于收缩代数是非交换的，因此无法应用 [CGG89] 中使用导子的常规方法。另一种方法是使用

Hochschild上同调和格斯滕哈伯括号，不过这往往会导致复杂的计算，如 [SW13]中所见。

本文提出了一种计算非交换局部代数变形的方法。特别地，我们回答了 Michael Wemyss 关于收缩代数变形的一个问题。关于收缩代数的相关信息，请读者参见 [Wem23, DW16]。

在 [HT18, Conjecture 4.3]中，Hua 和 Toda 猜想存在一种收缩代数的代数平坦变形。作为应用，我们证实了这一猜想对于 [BW22] 中构造的某个收缩代数成立。请注意，我们的方法也可应用于 [BW22] 中描述的其他收缩代数。值得注意的是，[HT18] 的定理 4.2 为通过几何方法得到的收缩代数的变形提供了重要信息。关于几何变形存在性的更多信息，见 [Tod15] 第 7 至 9 页。

在 [SW13] 中，研究者使用新颖的方法构造了分次赫克代数的变形。已知分次赫克代数的变形能够为赫克代数提供重要信息。我们的方法也可作为构造分次赫克代数变形的另一种选择。[Wit19] 中介绍了其他一些构造结合代数变形的方法。

1 预备知识

定义 1.1. 设 S 是交换含幺环 k 上的 k-代数 A 的一个子集。如果所有 A 中的元素都能写成由 S 中元素的乘积构成的 k-线性和，其中使用的运算来自 A，那么 S 就是一个生成集。

定义 1.2（[Wit19]）。k-代数 A 的一个形式变形 $(A_t, *)$ 是 $k[t]$-模 $A[t]$ 上的一个结合的 k-双线性乘法 $*$，使得在 $t = 0$ 处的规定中，该乘法对应于 A 上的乘法；此乘法要求由 A 中元素之间的乘法确定，并根据柯西乘积法则延拓到 $A[t]$。

定义 1.2 中的任意乘法 $*$ 都由 A 中元素对的乘积确定：对于 $a, b \in A$，记

$$a * b = \sum_{i \geq 0} \mu_i(a \otimes b)t^i,$$

其中 μ_0 表示 A 中的通常乘积，而 $i \geq 1$ 中的 μ_i 是从 $A \otimes A$ 到 A 的 k-线性函数。

定义 1.3（[FO19]）。设 A 是一个 k-代数，并且对于 $t \in \mathbb{C}$，令 $\{A_t\}$ 表示由 $*$ 对 A 的变形所产生的代数族。若每个 A_t 都具有相同的维数，则 $*$ 是平坦变形。

记号 1.4。我们将 $\mathbb{C}[x,y]$ 记作在 $\mathbb{C}$ 上由两个不可交换变量 x 和 y 生成的多项式环。

记号 1.5。考虑环 $\mathbb{C}[x,y]$ 的单项式。我们可以按照规定 $1<x<y$，使用短字典序对单项式进行排序。我们将 $\mathbb{C}[x,y]$ 的单项式记为 p_1、p_1、$p_2\ldots$，其中对于 $i<j$，有 $p_i<p_j$。

记号 1.6。我们将 $\mathbb{C}[x,y][t]$ 记为以 t 为变量、系数来自由两个不可交换变量 x 和 y 构成的多项式环，且其系数来自 $\mathbb{C}$ 的多项式环。

记号 1.7。对于 a_i、$b_i\in A$，我们定义 $f\colon\ \mathbb{C}[x,y][t]\to A[t]$ 为一个 $\mathbb{C}$-代数同态，使得

$$f: x\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i t^i,\quad f: y\mapsto \sum_{i=1}^{n} b_i t^i,\quad f: t\mapsto t.$$

我们将 $\ker f$ 记为 I。

记号 1.8。对于 $\mathbb{C}[x,y]$ 中的元素 p_i，我们将同一元素 p_i 记为 $\overline{p_i}$，但将其中所有的 x 替换为 $\sum_{i=1}^{n} a_i t^i$，并将所有的 y 替换为 $\sum_{i=1}^{n} b_i t^i$。我们将与 p_i 相同的元素记为 $\overline{p_i}$，但将其中所有的 x 替换为 $\sum_{i=1}^{n} a_i$，并将所有的 y 替换为 $\sum_{i=1}^{n} b_i$。

记号 1.9. 设 R 是一个环，I 是 R 的一个理想，则商环 R/I 的元素记作 $r+I$，其中 $r\in R$。注意，对于 r，$r+I=s+I$ 当且仅当 $r-s\in I$。

2 算法

本节将描述我们所提出方法中最简单的情形。这需要给定一个 $\mathbb{C}$-代数 A 及一个含两个元素的生成集 $\{a,b\}$。我们将陈述该算法的步骤，并对其中的重要组成部分加以说明。随后将展示一些例子。

方法 1. 设有限维 $\mathbb{C}$-代数 A 有两个生成元 a、b。那么：

1. 我们考虑 $A[t]$，即 A上的多项式代数。我们将使用 t 作为变形的参数。我们定义：

$$x := ta,$$
$$y := tb.$$

2. 我们进行计算:

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2a^2, \\ xy &= t^2ab, \\ yx &= t^2ba, \\ y^2 &= t^2b^2, \end{aligned}$$

并继续计算 x、 y的更大乘积。接着，我们将对 a、 b 的大乘积进行类似菱形引理[1] 的分解，将其表示为 a、 b的较小乘积。这将使所有长度足够大的元素都含有 t 的某个幂作为因子。在此过程中，我们将得到关于 x、 y 及其乘积的关系。当我们获得足够多的关系，使得任意大乘积都能分解为 x、 y 的倍数与 t的幂的和时，就终止这一过程。我们的关系将由多项式p_1、.....、 $p_m \in \mathbb{C}[x, y][t]$ 给出，其中某个 $m \in \mathbb{N}.$。该过程会在有限步内终止，因为 A是有限维的。

3. 我们给出该代数:

$$\mathcal{N} := \mathbb{C}[x, y][t]/\langle p_1, \ldots, p_m\rangle.$$

注意到， x、 y 的足够大的乘积会含有因子 t。现在，我们计算 t 在 $T = [0, \infty$中的各个取值。我们将通过令 t 取值为 s ，由 $\mathcal{N}$ 得到的代数记为 N_s ，特别地，我们记$N = N_0$。根据步骤（2）， N 是局部的；在第 5 节中，我们将考虑一种更一般的方法，其中 N 不一定是局部的。代数 $\mathcal{N}$ 以及代数族 $\{N_t\}$ 是该方法的输出。

由定理 3.8，族 $\{N_t\}$ 是 N 的一个变形；由命题 3.9，可得 $A \in \{N_t\}$。

改变所选的生成元 a、 b ，可能会得到不同的代数 N_0 ，它们以 A 为结合变形。

2.1 关于方法的说明

在给出示例之前，我们先说明几点:

- 在步骤 (1) 中，我们试图捕捉 A 中元素的行为，同时使其受 t 控制。这样一来，我们既能利用一个表示，又能继续使用变形参数 t。

- 我们注意到，由于 a、 b 生成了 A ， a、 b 的乘积的某个线性组合将成为单位元。在步骤（2）中，重要的是我们要找出关于x、 y、 t和 $1 \in A$的关系。

[1]参见 [Ber78]第 1 节

• 在步骤（3）中，我们完全舍弃了 A 。然而，由于关系 p_i、 x和 y “记得”它们来自 A ，并且它们构成一个生成集。这一步产生了某种微妙的结果：单项式 x、 $y \in N$ 不再依赖于 t （因此当我们令 $t = 0$时也不会消失），但它们的乘积仍保持对 t的依赖。我们对 x、 y 的控制有所放松，而放松的程度恰好足以使变形发生。

• 我们注意到，我们的变形将是结合的，因为 N_t 的乘法将继承自代数 $\mathcal{N}$的结合乘法 $*$ 。

• 这个算法很容易推广到需要更大生成集的代数。设一个有限维 $\mathbb{C}$代数 A 有 n 个生成元$\{a_1, \ldots, a_n\}$。那么在步骤 (1) 中，我们将定义 $x_i := ta_i$ ，其中 $1 \leq i \leq n$ ，并按照方法 1 中所述继续进行。得到的代数族也将是 A的平坦结合变形。

2.2 示例

这里我们将通过一些示例来进行说明。首先，我们从一个简单的例子开始，其中 $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ，然后给出一个更复杂的例子，其中 $A = M_2(\mathbb{C})$，即 $\mathbb{C}$ 上的 2×2 矩阵代数。实际上，固定代数 A 的一组基可能会很有用，因为这有助于找到步骤 (2) 中的分解。

例 2.1。我们考虑 $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ，并固定 $a = (i, 0)$ $b = (0, 1)$。显然，$\mathbb{C}$ 的线性组合张成了 a 和 b ，因此我们的基仅为 $\{a, b\}$。我们记$\mathbb{I} := (1, 1)$。现在我们考虑 $A[t]$ 并定义：

$$\begin{aligned} x &:= ta = (ti, 0), \\ y &:= tb = (0, t). \end{aligned}$$

我们计算得：

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2a^2 = (-t^2, 0) = tix, \\ xy &= t^2ab = (0, 0) = 0, \\ yx &= t^2ab = (0, 0) = 0, \\ y^2 &= t^2b^2 = (0, t^2) = ty, \\ t_{\mathbb{I}} &= -ix + y. \end{aligned}$$

因此，我们得到以下关系：

$$\begin{aligned} p_1 &= x^2 - tix = 0, \\ p_2 &= xy = 0, \\ p_3 &= yx = 0, \\ p_4 &= y^2 - ty = 0, \\ p_5 &= t_{\mathbb{I}} - (-ix + y). \end{aligned}$$

由于 $xy = yx = 0$ 以及 x、y 的平方都可以化简，因此我们有足够的关系将任意较大的乘积分解为仅由 x、y 的倍数和 t的幂组成的形式。

因此我们给出：

$$N := \mathbb{C}[x,y][t]/\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\rangle.$$

我们注意到：

$$N_0 = \mathbb{C}[x,y]/\left\langle x^2, xy, yx, y^2, -ix+y\right\rangle,$$

and

$$N_1 = \mathbb{C}[x,y]/\left\langle x^2 - ix, xy, yx, y^2 - y, 1 + ix - y\right\rangle.$$

我们看到，x、y的行为恰好如同 a、$b \in A$，根据命题 3.9，容易验证同构由下式给出：

$$\begin{aligned}\phi : N_1 &\to A\\ 1 &\mapsto \mathbb{I}\\ x &\mapsto (i,0)\\ y &\mapsto (0,1).\end{aligned}$$

因此，我们构造出了一个代数 N_0，它以 $A = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ 作为变形。

例 2.2。我们考虑 $A = M_2(\mathbb{C})$ 并固定：

$$a = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

我们用 $\mathbb{I}$ 表示 A 中的乘法单位元。接下来我们计算：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(a + b^2) = e_1,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(ab + b) = e_2,\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(b - ab) = e_3,\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(b^2 - a) = e_4\end{aligned}$$

因此，a、b 生成了作为代数的 A。现在我们考虑 $A[t]$ 并定义：

$$\begin{aligned}x &:= ta,\\ y &:= tb.\end{aligned}$$

我们计算：

$$
\begin{aligned}
x^2 &= t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = t^2{}_{\mathbb{I}}, \\
xy &= t^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = t^2(e_2 - e_3), \\
yx &= t^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t^2(e_3 - e_2), \\
y^2 &= t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = t^2{}_{\mathbb{I}}.
\end{aligned}
$$

我们得到了以下关系：

$$
\begin{aligned}
p_1 &= x^2 - t^2{}_{\mathbb{I}}, \\
p_2 &= x^2 - y^2 = 0, \\
p_3 &= xy + yx = 0, \\
p_4 &= y^2 - t^2{}_{\mathbb{I}}.
\end{aligned}
$$

现在我们考虑更大的乘积，以得到更多关系：

$$
\begin{aligned}
x^3 &= t^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = t^2 x, \\
y^3 &= t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t^2 y.
\end{aligned}
$$

因此我们还得到了：

$$
\begin{aligned}
p_5 &= x^3 - t^2 x = 0, \\
p_6 &= y^3 - t^2 y = 0.
\end{aligned}
$$

由此可推出：

$$
\begin{aligned}
x^2 y = y^3 = yx^2 = y^3 = t^2 y, \\
y^2 x = x^3 = xy^2 = x^3 = t^2 x,
\end{aligned}
$$

这些足以将 x、y 的任意乘积化简。因此我们给出：

$$N := \mathbb{C}[x, y][t]/\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle.$$

我们观察到：

$$N_0 = \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2, y^2, xy + yx \rangle,$$

and

$$N_1 = \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2 - 1, y^2 - 1, xy + yx, x^3 - x, y^3 - y \rangle.$$

由命题 3.9 可得 $N_1 \cong A$。容易验证，该同构由以下映射给出：

$$\begin{aligned} \phi : N_1 &\to A \\ 1 &\mapsto \mathbb{I} \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ y &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此，我们构造出了一个代数 N_0，它以 $A = M_2(\mathbb{C})$ 为变形。

3 对 A的变形

现在我们考虑一般情形： A 是一个由某些元素 $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i$ 生成的结合有限维$\mathbb{C}$-代数，其中 $a_i, b_i \in A$为某些元素。

3.1 在 $t = 0$处的特化

本节定义 $\mathbb{C}[x, y][t]$ 上的一种乘法，使其在特化 $t = 0$处得到代数N。

命题 3.1. 设 $\mathbb{C}[t]$表示变量 t上的多项式环。此外，假设对于每个 $r \in A$，都存在 $i = i(r)$，使得 $rt^i \in \mathrm{im} f$。存在元素 $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{C}[x, y][t]$，使得对于每个 k，我们有

$$f(p_k) \in \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}[t] f(q_i). \tag{1}$$

此外 $n =$ 维数 A.

证明。设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$是 A的一组基。设 k_1是满足下述条件的最小整数：存在整数 j_1 使得

$$e_{j_1} t^{k_1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1}}^{n} \alpha_i(t) e_i \in \mathrm{im} f$$

对某个 $\alpha_i(t) \in \mathbb{C}[t]$。设 k_2 是满足下述条件的最小整数：存在整数 $j_2 \neq j_1$ 使得

$$e_{j_2} t^{k_2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, j_2}}^{n} \alpha_i'(t) e_i \in \mathrm{im} f$$

对于某个 $\alpha_i'(t) \in \mathbb{C}[t]$。以此方式继续，我们定义一个基底

$\{q_1, \ldots, q_n\}$ 使得

$$f(q_i) = e_{j_m} t^{k_m} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \ldots, j_m}}^{n} \alpha_i(t) e_i.$$

现在注意到，由于 e_1、e_2、.....、e_n 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关，因此 $f(q_1)$ $f(q_2)$.....、$f(q_n)$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关。

现在证明 $f(q_1) + t\mathrm{im}f$、.....、$f(q_n) + t\mathrm{im}f$ 在 $\mathbb{C}$ 上张成 $\mathbb{C}$-代数 $\overline{\mathrm{im}t^{f}}$ $\mathrm{im}f$，因此它们构成 $\overline{\mathrm{im}t^{f}}\mathrm{im}f$ 的一组基。设 $z_1 \in \mathrm{im}f$，并写作

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i(t) e_{j_i} t^{s_i}$$

其中 $r_i \in \mathbb{C}[t] - t\mathbb{C}[t]$ 为某个元素，j_i、$s_i \in \mathbb{N}$ 为某些元素。

注意，对满足 $r_i(t) \neq 0$ 的最小 i，如上所述，$s_i \geq k_i$ 对 k_i 成立。令

$$z_2 = z_1 - f(q_1) t^{s_1 - k_1} r_1(t).$$

注意，我们有

$$z_2 \in \sum_{i=2}^{n} \mathbb{C}[t] e_{j_i}$$

因此我们可以写成

$$z_2 = \sum_{i=2}^{n} r_i^2(t) e_{j_i} t^{s_i^2}$$

对于某些 $r_i^2(t) \in \mathbb{C}[t] - t\mathbb{C}[t]$ 和 $s_i^2 \in \mathbb{N}$。注意到 $q_2 \in \mathrm{im}f$。现在令

$$z_3 = z_2 - f(q_2) t^{s_2^2 - k_2} r_2^2(t).$$

继续以这种方式进行，我们最终得到 $q_{n+1} = 0$. 因此，通过对以下方程求和，得到

$$0 = z_n - f(q_n) t^{s_n^n - k_n} r_n^n(t),$$

$$\vdots$$

$$z_3 = z_2 - f(q_2) t^{s_2^2 - k_2} r_2^2(t)$$

and

$$z_2 = z_1 - f(q_1) t^{s_1 - k_1} r_1(t)$$

我们得出 海南天
天中彩票

$$z_1 = \sum_{l=1}^{n} f(q_l) t^{s_l' - k_l} r_l^l(t) \in \sum_{l=1}^{n} \mathbb{C}[t] f(q_l)$$

对于某个 $s_l' \in \mathbb{N}$，如所需。 □

备注。注意，对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha_j \in \mathbb{C}[t]$

$$f(p_k) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(q_j) = 0$$

当且仅当

$$p_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j \in I.$$

命题 3.2. 对于任意 $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$，存在 $\zeta_{i,k} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,k}(t) \in \mathbb{C}[t]$ 使得

$$p_k - \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k} q_i + t\xi_{i,k}(t) q_i) \in I.$$

特别地，存在 $\zeta_{i,k,m} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,k,m}(t) \in \mathbb{C}[t]$ 使得

$$q_k q_m - \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k,m} q_i + t\xi_{i,k,m}(t) q_i) \in I.$$

证明。对于每个元素 $p_k \in \mathbb{C}[x, y][t]$，我们有

$$p_k \in \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}[t] q_i + I.$$

这是由对方程 (1) 取 f^{-1} 得出的。因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $\sigma_{i,k} \in \mathbb{C}[t]$，使得

$$p_k - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i,k} q_i \in I,$$

其中 $I = \ker f$。注意，我们可以将 $\sigma_{i,k}(t) = \zeta_{i,k} + t\xi_{i,k}(t)$ 写成某些 $\zeta_{i,k} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,k}(t) \in \mathbb{C}[t]$，以便分离出依赖于 t 的项。于是，上式变为

$$p_k - \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k} q_i + t\xi_{i,k}(t) q_i) \in I.$$

□

仿照命题 3.1 的证明进行推理，可得以下推论。

推论 3.3. 假设对于某个 $\alpha_i \in \mathbb{C}[t]$，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \in I$。那么 $f(\sum_i^n \alpha_i q_i) = 0$，因此对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$\alpha_i = 0$。

此外，I 的所有元素都是其元素的 $\mathbb{C}[t]$-线性组合

$$p_k - \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k} q_i + t\xi_{i,k}(t) q_i)$$

对于某些 $k \in \mathbb{N}, \zeta_{i,\,k} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,\,k}(t) \in \mathbb{C}[t]$。

记号 3.4。我们用 J 表示由元素的 $\mathbb{C}$-线性组合构成的集合

$$p_k - \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k} q_i \in \mathbb{C}[x, y], \tag{2}$$

其中 $\zeta_{i,\ k}$ 如命题 3.2 所述。令 $\langle J \rangle$ 为由来自 J 的元素生成的 $\mathbb{C}[x, y]$ 的理想。此外，令 N 为商代数 $\mathbb{C}[x, y]/\langle J \rangle$。

推论 3.5。当且仅当存在某个 $e' \in t\mathbb{C}[x, y][t]$ 时，$e \in J$ $e + e' \in I$。特别地，$J \subseteq I + t\mathbb{C}[x, y][t]$，因此 $\langle J \rangle \subseteq I + t\mathbb{C}[x, y][t]$。

命题 3.6。N 的维数等于 n。此外，元素 $q_k + J \in N$构成 N 作为 $\mathbb{C}$-向量空间的一组基。

证明。注意，表达式 (2) 表明，

$$\mathbb{C}[x, y] \subseteq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{C} q_k + \langle J \rangle,$$

因此，$\{q_k + \langle J \rangle \mid k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ span N 是一个 $\mathbb{C}$-向量空间。因此，N 的维数不超过 n。

现在证明，对于 $\mathbb{C}$，元素 $q_k + \langle J \rangle \in N$for $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 线性无关。反设并非如此，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i q_i \in \langle J \rangle$$

对某个 $\xi_i \in \mathbb{C}$ 成立。由推论 3.5 和命题 3.1 可得

$$\langle J \rangle \subseteq I + t\mathbb{C}[x, y][t] \subseteq I + t \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}[t] q_i.$$

因此存在 $e' \in t \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}[t] q_i$，使得 $\sum_{i=1}^{n} \xi_i q_i - e' \in I$，这与推论 3.3 矛盾。 □

现在注意到下述结论成立：

命题 3.7. 我们可以将 N 表示为一个由生成元 $d_1, \ldots, d_n$ 生成的 $\mathbb{C}$-代数；这些生成元张成 N 这一 $\mathbb{C}$-向量空间，并满足以下关系

$$d_k d_m = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i$$

其中 $\zeta_{i,k,m}$ 与命题 3.2 中的相同。

证明。令 $\mathbb{C}[q_1, \ldots, q_n]$ 为 $\mathbb{C}[x, y]$ 由元素 q_1、……、$q_n \in \mathbb{C}[x, y]$ 生成的子代数。类似地，令 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]$ 为由元素 d_1、……、d_n 生成的自由 $\mathbb{C}$-代数。令 ζ: $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n] \to \mathbb{C}[x, y]/\langle J \rangle$ 定义为 $\zeta(d_i) = q_i + \langle J \rangle$。

我们现在证明 $x + \langle J\rangle, y + \langle J\rangle \in \mathrm{im}\zeta$。注意，由于 $f(x) \in \mathrm{im}f$，我们有

$$f(x) \in \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}[t] f(q_i).$$

因此，对于某个 $x' \in \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}[t] f(q_i)$，有 $f(x) = f(x')$。于是 $x - x' \in I$，从而 $x - x'' \in J$（对于某个 $x'' \in \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}q_i.$）。于是 $x'' + \langle J\rangle \in \mathrm{im}\zeta$，从而 $x + \langle J\rangle \in \mathrm{im}\zeta$。类似的论证表明 $y + \langle J\rangle \in \mathrm{im}\zeta$。

Let

$$J' = \ker(h) \subseteq \mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n].$$

因此，根据环的第一同构定理，$\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J'$ 与 $\mathbb{C}[x, y]/\langle J\rangle = N$ 同构。

令 J'' 为由元素生成的 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]$ 的理想。

$$d_k d_m - \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i$$

其中 $\zeta_{i,\ k,\ m}$ 与命题 3.2 中的定义相同。注意，

$$\zeta\left(d_k d_m - \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i\right) = q_k q_m - \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} q_i + \langle J\rangle = 0 + \langle J\rangle.$$

因此 $J'' \subseteq J'$。由此可知，$\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J'$ 的维数不超过 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J''$的维数。

现在证明 $J' = J''$。注意到 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J''$ 至多是 n维的，因为每个元素都可以表示为 $d_i + J''$（ $i = 1$、2、.....、 n）中元素的线性组合。另一方面，$\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J'$ 同构于 $\mathbb{C}[x, y]/\langle J\rangle$，因此是 n维的（由命题 3.6）。因此，通过比较维数，我们得到 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J''$的维数不超过 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J'$的维数。此前我们证明了$\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J'$ 不超过 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J''$的维数。由此可得 $J' = J''$，如所需。

□

现在我们定义 N 上的乘法，使其给代数 A带来形式变形。

定理 3.8. 设 $d_1, \ldots, d_n$ 是 $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]$ 的自由生成元，并假设 $\zeta_{i,\ k,\ m} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,\ k,\ m}(t) \in \mathbb{C}[t]$ 如命题 3.2 所述。那么乘法规则

$$d_k *_t d_m = \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k,m} d_i + t\xi_{i,k,m}(t) d_i).$$

给出一个形式变形，使得 $*_0$ 给出与 N同构的代数上的乘法。

证明。回顾命题 3.2 中的关系：对于任意 k、$m \in \{1, 2, \ldots, n\}$，存在 $\zeta_{i,k,m} \in \mathbb{C}$，$\xi_{i,k,m}(t) \in \mathbb{C}[t]$，使得

$$q_k q_m - \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k,m} q_i + t\xi_{i,k,m}(t) q_i) \in I. \tag{3}$$

我们为 $\mathbb{C}[x, y]/I$ 的元素引入记号 $[q_i] := q_i + I$。因此，我们得到与 (3) 对应的以下关系，它们给出了 $\mathbb{C}[x, y]/I$ 上的乘法表。我们有

$$[q_k][q_m] - \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k,m}[q_i] + t\xi_{i,k,m}(t)[q_i]).$$

请注意，这些关系给出了一个乘法。

$$d_k *_t d_m = \sum_{i=1}^{n} (\zeta_{i,k,m} d_i + t\xi_{i,k,m}(t) d_i) \tag{4}$$

对于 $d_i \in \mathbb{C}[x, y].$，现在回顾一下，$N$ 同构于 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J''$，其中 J'' 是由关系生成的 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]$ 的理想。

$$d_k d_m - \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i.$$

因此，通过在（4）中令 $t = 0$，我们得到 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]/J''$ 的乘法规则。 . □

3.2 在 $t = 1$ 处的规定

在本节中，我们在 $\mathbb{C}[x, y][t]$ 上定义一种乘法，使其成为 N 的形式变形，并且在特化 $t = 1$ 时，我们得到一个与 A 同构的代数。

命题 3.9。设 ξ： $\mathbb{C}[x, y][t] \to A$ 是一个复数域-代数的同态，使得

$$\xi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \xi(y) = \sum_{i=0}^{n} b_i, \quad \xi(t) = 1.$$

此外，假设对于每个 $r \in A$，存在 $i = i(r)$，使得 $rt^i \in \mathrm{im} f$。则 $\ker \xi = \langle I, t - 1 \rangle$.

证明。令 $e = \sum_i \alpha_i p_i t^{\beta i} \in \ker \xi$，其中 p_i 是 $\mathbb{C}[x, y]$、$\alpha_i \in \mathbb{C}$ 和 $\beta_i \in \mathbb{N}$ 中的单项式。我们将证明存在 $\gamma_i \in \mathbb{N}$ 使得 $\hat{e} := \sum_i \alpha_i p_i t^{\gamma_i} \in I$，从而 $e \in I + \langle t - 1 \rangle$ 如 $e - \hat{e} \in \langle t - 1 \rangle$. 所示。这是因为

$$e - \hat{e} = \sum_i \alpha_i p_i t^{\beta_i} - \sum_i \alpha_i p_i t^{\gamma_i} = \sum_i \alpha_i p_i (t^{\beta_i} - t^{\gamma_i}) = \sum_i \alpha_i p_i t^m (t^n - 1) \in \langle t - 1 \rangle$$

对于某些 m、$n \in \mathbb{N}$。

回顾记号 1.8，并注意到 $\xi(e) = \sum_i \alpha_i \overline{\overline{p_i}} = 0$。注意，根据假设，存在 $j_i \in \mathbb{N}$ 使得 $\overline{\overline{p_i}} t^{j_i} \in \mathrm{im} f$。我们令 $f(c_i) = \overline{\overline{p_i}} t^{j_i}$，其中某个 $c_i \in \mathbb{C}[x,y][t]$。因此，对于足够大的 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$f\left(\sum_i \alpha_i c_i t^{k-j_i}\right) = \sum_i \alpha_i \overline{\overline{p_i}} t^k = 0.$$

□

命题 3.10。设记号与命题 3.9 中相同，并假设 $\sum_{i=0}^n a_i$ 和 $\sum_{i=0}^n b_i$ 生成 A 作为一个 $\mathbb{C}$-代数。我们有

$$\frac{\mathbb{C}[x,y][t]/I}{\langle t-1+I\rangle} \cong A.$$

证明。注意，$\mathbb{C}[x,y][t]/I$ 的理想 $\langle t-1+I\rangle$ 等于该集合

$$\frac{\mathbb{C}[x,y][t](t-1)+I}{I} = \frac{\langle I, t-1\rangle}{I} = \{g(t-1)+I \mid g \in \mathbb{C}[x,y][t]\}.$$

由第三同构定理，我们得到

$$\frac{\mathbb{C}[x,y][t]/I}{\langle I, t-1\rangle/I} \cong \frac{\mathbb{C}[x,y][t]}{\langle I, t-1\rangle}.$$

由命题 3.9 可知 $\langle I, t-1\rangle = \ker \xi$，且由于 ξ 是满射，

$$\frac{\mathbb{C}[x,y][t]}{\ker \xi} \cong A$$

根据第一同构定理。 □

现在我们在 $\mathbb{C}[x,y][t]/\langle t-1, I\rangle$ 上定义一个乘法，从而在 $t=1$ 处给出对 A 的变形。

定理 3.11。设记号与命题 3.9 中相同，并假设 $\sum_{i=0}^n a_i$ 和 $\sum_{i=0}^n b_i$ 生成了 A 作为 $\mathbb{C}$-代数。设 $d_1, \ldots, d_n$ 是 $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n]$ 的自由生成元，并假设 $\zeta_{i,k,m} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,k,m}(t) \in \mathbb{C}[t]$ 如命题 3.2 中所述。那么乘法规则

$$d_k *_t d_m = \sum_{i=1}^n (\zeta_{i,k,m} d_i + t\xi_{i,k,m}(t) d_i).$$

给出一个形式变形，使得 $*_1$ 给出由 $d_1, \ldots, d_n$ 生成的代数上的乘法，该代数同构于 $\mathbb{C}[x,y][t]/\langle I, t-1\rangle$。

证明。我们证明代数 $\mathbb{C}[x,y][t]/\langle I, t-1\rangle$ 同构于代数$\mathbb{C}[d_1, d_2, \dots d_n]/I'$，其中 I' 是由元素生成的 $\mathbb{C}[d_1, d_2, \dots d_n]$ 的理想

$$d_k *_1 d_m - \sum_{i=1}^{n}(\zeta_{i,k,m}d_i + \xi_{i,k,m}(1)d_i)$$

对于 $\zeta_{i,k,m} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,k,m}(t) \in \mathbb{C}[t]$，如命题 3.2 所述。

令 $\delta\colon \mathbb{C}[d_1, \dots, d_n] \to \mathbb{C}[x,y][t]/\langle I, t-1\rangle$，使得

$$\delta(d_i) = q_i + \langle I, t-1\rangle,$$

对于 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$。注意，由于 $I' \subseteq \ker(\delta)$

$$\begin{aligned}\delta\left(d_k * d_m - \sum_{i=1}^{n}(\zeta_{i,k,m}d_i + \xi_{i,k,m}(1)d_i)\right) &= q_k * q_m - \sum_{i=1}^{n}(\zeta_{i,k,m}q_i + \xi_{i,k,m}(1)q_i) \\ &\quad + \langle I, t-1\rangle \\ &= \langle I, t-1\rangle\end{aligned}$$

因为 $q_k * q_m - \sum_{i=1}^{n}(\zeta_{i,k,m}q_i + \xi_{i,k,m}(1)q_i) \in I + \langle t-1\rangle$。

因此，$\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]/\ker(\delta)$ 的维数不超过 $\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]/I'$ 的维数。注意，$\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]/I'$ 由元素$d_i + I$ 作为向量空间张成，因此其维数至多为 n。另一方面，根据环的第一同构定理:

$$\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]/ker(\delta) \cong \mathrm{im}(\delta) = \mathbb{C}[x,y][t]/\langle I, t-1\rangle, \tag{5}$$

这反过来又根据命题 3.9 与 A 同构，因此其维数为n。由此可得 $I' = \ker(\delta)$, 进而 $\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]/ker(\delta)$ 与 $\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]/I'$ 同构。其中，方程 5 中的等式由命题 3.7 的证明可知成立。

□

备注 3.12. 在 $t \neq 0$ 处的变形。本节的结果通过类似的证明同样适用于在其他 $t \neq 0$ 处的特化。令 $z \in \mathbb{C}$ 和 $z \neq 0$，则在 $t = z$ 处的变形也同构于 A，前提是 $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ 和 $\sum_{i=0}^{n} b_i z^i$ 作为一个 $\mathbb{C}$-代数生成 A。

注 3.13。由于 $\{N_t\}_{t\in[0,1]}$ 中所有代数的维数都$n = \dim(A)$，因此由 $*$ 产生的变形是平坦的。

4 应用

在本节中，我们使用第 3 节中的方法证明 M. Wemyss 的一个猜想。其陈述如下定理所述。

定理 4.1。设

$$N = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle xy+yx, x^3+y^2, y^3\rangle}.$$

那么， N 变形为 $A = M_2$（$\mathbb{C}$） $\oplus \mathbb{C}^{\oplus 5}$。

我们通过一系列引理来证明这个定理。首先，除了定理 4.1 中的记号外，我们还引入以下记号。

记号 4.2. 设 i_1、 i_2 为多项式 $x^2 - x + 1$的根。

记号 4.3. 设 $e \in \mathbb{C}$ 满足：对于$c = \frac{i_1 - i_2}{\sqrt{1+e^2}}$，多项式

$$g(z) = (2z-1)^2 z^3 + c^2$$

有 5 个互异根 α_1、.....、 $\alpha_5 \in \mathbb{C}$。此外，我们假设 $e \neq 0$、 $c^2 \neq 3$ 和$\alpha_i \neq \frac{1}{2}$. 。注意， g（z）与 z^3+1 没有公共根，因此 $\alpha_i \neq -1$ 和$\alpha_j \notin \{i_1, i_2\}$。

记号 4.4. 设 $\alpha =$ （α_1、 α_2、 α_3、 α_4、 α_5）和 $\beta =$ （β_1、 β_2、 β_3、 β_4、 β_5），其中 $\beta_i \in$$\mathbb{C}$满足

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)(2\alpha_1-1, 2\alpha_2-1, 2\alpha_3-1, 2\alpha_4-1, 2\alpha_5-1) = c(1,1,1,1,1).$$

注意到这样的 β_i 存在，这是因为 $\alpha_i \neq \frac{1}{2}$ 。

引理 4.5. 设 ξ： $\mathbb{C}[x,y][t] \to A$ 是 $\mathbb{C}$-代数的同态，使得

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix} + \alpha, \quad \xi(y) = \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & -1 \end{pmatrix} + \beta, \quad \xi(t) = 1.$$

那么 $\xi(x)$ $\xi(y)$ 和 1 作为代数生成 A 。

证明。注意到 $\xi(x^j(x^2-x+1)) = \alpha^j$ $(\alpha^2-\alpha+1)$（其中 $\alpha^j(\alpha^2-\alpha+1)$ $=(\alpha_1^j($ $\alpha_1^2-\alpha_1+1)\ldots,\alpha_5^j(\alpha_5^2-\alpha_5+1))$）。现在令 W 为元素为 $W_{ij} = \alpha_i^j(\alpha_i^2-\alpha_i+1)$ 的矩阵。令 V 为元素为 $V_{ij} = \alpha_i^j$ 的范德蒙德矩阵。令 D 为元素为 $D_{ij} = \delta_{ij}(\alpha_i^2-\alpha_i+1)$ 的对角矩阵。由此可得$W = DV.$。现在由于 V 是非奇异的， W 也是非奇异的。这意味着 A 中的任意 5维向量都属于 imξ。那么 $\xi(x)$ $-\alpha \in$ imξ ，因此

$$\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{im}\xi.$$

类似地， $\xi(y)$ $-\beta \in$ imξ ，因此

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ e & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{im}\xi.$$

现在回想一下， i_1、 i_2 是多项式 z^3+1的根，因此我们有

$$\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意，每个对角矩阵都是 $\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix}$ 和$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$的线性组合。现在可以验证，这些矩阵足以生成 $M_2(\mathbb{C})$中的所有矩阵。

□

记号 4.6。设 $f\colon \mathbb{C}[x,y][t] \to A[t]$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数同态，使得

$$f(x) = t^2 \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix} + t^2\alpha, \quad f(y) = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} t^3 \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & -1 \end{pmatrix} + t^3\beta, \quad f(t) = t_{\tilde{\mathbb{I}}},$$

其中$\tilde{\mathbb{I}}$是 A中的单位元。我们记 $\mathbf{1} := (1,1,1,1,1)$。按照惯例，我们用 $\mathbf{1}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的单位元，因此也表示 $\mathbb{C}[x,y][t]$中的单位元。

现在我们证明定理 4.1。

证明。参照记号 4.4 和 4.6，我们计算：

$$\begin{aligned}
f(x^2) &= t^4\Big(\begin{pmatrix} i_1^2 & 0 \\ 0 & i_2^2 \end{pmatrix} + \alpha^2 \Big), \\
f(y^2) &= t^6\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta^2 \Big), \\
f(xy) &= \frac{t^5}{\sqrt{1+e^2}}\Big(\begin{pmatrix} i_1 & i_1 e \\ i_2 e & -i_2 \end{pmatrix} + \alpha\beta \Big), \\
f(yx) &= \frac{t^5}{\sqrt{1+e^2}}\Big(\begin{pmatrix} i_1 & i_2 e \\ i_1 e & -i_2 \end{pmatrix} + \alpha\beta \Big).
\end{aligned}$$

注意，$f(x^2 - t^2x + t^4) = t^4(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1})$，因此

$$\begin{aligned}
f(x(x^2 - t^2x + t^4)) &= t^6\alpha(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}), \\
f(x^2(x^2 - t^2x + t^4)) &= t^8\alpha^2(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}), \\
f(y(x^2 - t^2x + t^4)) &= t^7\beta(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
f(xy + yx) &= \frac{t^5}{\sqrt{1+e^2}} \begin{pmatrix} 2i_1 & e \\ e & -2i_2 \end{pmatrix} + t^5 2\alpha\beta, \\
f(t^2y) &= \frac{t^5}{\sqrt{1+e^2}} \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & -1 \end{pmatrix} + t^5\beta, \\
f(t^5\frac{i_2 - i_1}{\sqrt{1+e^2}}) &= \frac{t^5}{\sqrt{1+e^2}} \begin{pmatrix} i_2 - i_1 & 0 \\ 0 & i_2 - i_1 \end{pmatrix} + \frac{t^5(i_2 - i_1)}{\sqrt{1+e^2}}\tilde{1}.
\end{aligned}$$

注意， $2i_1 - 1 + (i_2 - i_1) = 0$ 和 $-2i_2 + 1 + (i_2 - i_1) = 0$，因此

$$f(xy + yx - t^2y + \frac{t^5(i_2 - i_1)}{\sqrt{1+e^2}}) = 2\alpha\beta - \beta + \frac{i_2 - i_1}{\sqrt{1+e^2}}\tilde{1}.$$

现在注意，根据记号 4.4 的假设， $2\alpha\beta - \beta + \frac{i_2-i_1}{\sqrt{1+e^2}}\tilde{1} = 0$。因此， $xy + yx - t^2y + \frac{t^5(i_2-i_1)}{\sqrt{1+e^2}} \in I$，所以 $xy + yx \in \langle J \rangle$ 是 N 中按记号 3.4 定义的关系。

注意，根据记号 4.4，我们有 $\beta^2(2\alpha - 1)^2 = c^2$ ~

1. 现在由记号 4.3 可得，则

$$\alpha^3 + \beta^2 = 0, \tag{6}$$

因此 $x^3 + y^2 \in \langle J \rangle$ 是 N 中的一个关系。

现在我们继续证明 $y^3 \in \langle J \rangle$。注意：

$$f(y^3) = \frac{t^9}{\sqrt{1+e^2}} \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & -1 \end{pmatrix} + t^9\beta^3.$$

因此 $y^3 - t^6y = t^9(\beta^3 - \beta)$。所以，只需证明，对于某个 $q \in t\mathbb{C}[x, y][t]$，有 $y^3 - t^6y + q \in I$。我们记为：

$$\begin{aligned} r_1 &:= t^5(x^2 - t^2x + t^4) \\ r_2 &:= t^3x(x^2 - t^2x + t^4) \\ r_3 &:= tx^2(x^2 - t^2x + t^4) \\ r_4 &:= t^2y(x^2 - t^2x + t^4) \end{aligned}$$

注意到这些元素

$$\begin{aligned} f(r_1) &= t^9(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}) =: t^9e_1, \\ f(r_2) &= t^9\alpha(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}) =: t^9e_2, \\ f(r_3) &= t^9\alpha^2(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}) =: t^9e_3, \\ f(r_4) &= t^9\beta(\alpha^2 - \alpha + \tilde{1}) =: t^9e_4 \end{aligned}$$

属于 $t\mathbb{C}[x, y][t]$。注意，只需证明对于某个 $q \in \mathbb{C}r_1 + \mathbb{C}r_2 + \mathbb{C}r_3 + \mathbb{C}r_4$， $y^3 - t^6y + q \in I$。因此，只需证明

$$\beta^3 - \beta \in \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 + \mathbb{C}e_3 + \mathbb{C}e_4. \tag{7}$$

现在，关系 (7) 等价于

$$(2\alpha - 1)\beta(\beta^2 - 1) \in \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_1 + \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_2 + \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_3 + \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_4,$$

这又等价于

$$-c(\alpha^3 + 1) \in \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_1 + \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_2 + \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_3 + \mathbb{C}(2\alpha - 1)e_4. \tag{8}$$

现在，注意到 $\alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1)$，并且 $\alpha+1$ 有非零项，因此将关系 (8) 乘以 $\alpha+1$，我们得到一个等价关系

$$(\alpha^3+1)(\alpha+1)\in\mathbb{C}(2\alpha-1)(\alpha^3+1)+\mathbb{C}(2\alpha-1)(\alpha^3+1)\alpha \\ +\mathbb{C}(2\alpha-1)(\alpha^3+1)\alpha^2+\mathbb{C}(\alpha^3+1).$$

注意，右端可以改写为 $\mathbb{C}(\alpha^3+1)+\mathbb{C}(\alpha^3+1)\alpha+\mathbb{C}(\alpha^3+1)\alpha^2+\mathbb{C}(\alpha^3+1)\alpha^3$。

□

5 一种更通用的方法

在本节中，我们考虑一种更一般的方法，该方法得到的代数 N 不一定是局部的，并且具有更多的生成元。此外，我们假设 A 具有有限多个生成元。

设 A 为一个有限生成的 $\mathbb{C}$-代数。

1. 我们考虑一个具有 j 个生成元 $x_1,\ldots,x_j$ 的自由 $\mathbb{C}$-代数 F，其中 $j\in\mathbb{N}$。我们定义：

$$f:F[t]\to A[t]$$
$$x_i\mapsto\sum_{l=0}^{m}a_{i,l}t^l$$

对于某些 $m\in\mathbb{N}$ 和某些 $a_{i,l}\in A$。我们还假设，对于每个 $z\in\mathbb{C}$，m $z\neq 0$ 个元素 $\sum a_{i,l}z^l$，当 $i=1$ 取 $2,\ldots j$ 时，它们生成 A。换句话说，当 t 取非零数时，生成元的像生成 A。

2. 我们定义

$$\mathcal{N}:=\frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j][t]}{I},$$

其中 $I:=\ker(f)$。

3. 我们假设，对每个 $r\in A$，都存在 $i=i(r)$，使得 $rt^i\in\operatorname{im}f$。

4. 我们的代数 $N=N_0$ 同构于

$$\frac{\mathcal{N}}{\langle t+I\rangle}$$

并且平坦且结合地变形为 A。此外，N同构于 $\frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j][t]}{\langle I\ t\rangle}$，，其中 $\langle I,t\rangle$ 是 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j][t]$ 的理想，由 I 中的元素以及 t 生成。

如果 $j=2$，那么该方法对应于第 3 节中描述的方法，前提是对所有 i，$a_{i,0}=0$。

证明。像前几章那样推理时，我们在所有地方都将使用 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j]$ 代替 $\mathbb{C}[x,y]$，并使用 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j][t]$ 代替$\mathbb{C}[x,y][t]$。设 A 在 $\mathbb{C}$上的维数为 n。回想一下，我们

$$\mathcal{N} := \frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j][t]}{I},$$

其中 $I := \ker(f)$。

- 仿照命题 3.1 的推理，我们得到存在q_1、.....、 $q_n \in F$，使得

$$f(F[t]) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C} f(q_i),$$

因此，由于 $I = \ker\ f$，我们得到

$$F(t) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C} q_i + I.$$

特别地，存在 $\zeta_{i,k,m} \in \mathbb{C}$, $\xi_{i,k,m}(t) \in \mathbb{C}[t]$ 使得

$$q_k \cdot q_m - (\sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} q_i + t\xi_{i,k,m} q_i) \in I.$$

- 类似于定理 3.8 中的推理，我们得到，如果 d_1，.....， d_n 是自由生成元，那么

$$d_k * d_m - (\sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i + t\xi_{i,k,m} d_i),$$

给出一个形式变形，使得 $*_0$ 在 N 上给出一种乘法，其中N是由生成元 d_1，.....， d_n 生成并满足关系的 $\mathbb{C}$-代数。

$$d_k *_0 d_m = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i.$$

注意， $*$在代数 $\mathbb{C}[d_1,\ldots,d_n][t]/I'$ 上定义了一种乘法，其中 I'是由元素生成的 $\mathbb{C}[d_1,\ldots,d_n][t]$ 的理想

$$d_k * d_m - (\sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m} d_i + t\xi_{i,k,m} d_i).$$

注意， d_1，.....， d_n是自由代数 $\mathbb{C}[d_1,\ldots,d_n]$的自由生成元。注意，代数 $\mathbb{C}[d_1,\ldots,d_n][t]/I'$与代数 $\mathcal{N}$同构。为此，考虑由 $\sigma\mathbb{C}[d_1,\ldots,d_n][t] \to \mathcal{N}$给出的映射:

$$d_i \to q_i + I.$$

注意，由于.....， $I' \subseteq \ker\sigma$

$$(q_k + I) * (q_m + I) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,k,m}(q_i + I) + t\xi_{i,k,m}(q_i + I).$$

回顾一下，\(\ker\)$\sigma = I'$，因为如果 $a \in ker\sigma$，那么利用 I' 中的关系，我们可以将 a 表示为 $a' + i$，其中 $i' \in I$，且对于某个 $\alpha_i(t) \in \mathbb{C}[t]$，有 $a' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)d_i$。注意，此时 $\sigma(i') = 0$，因此

$$\sigma(a) = \sigma(a') = \sigma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)d_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)q_i.$$

按照推论 3.3 中的推理，我们得到这意味着所有 $\alpha_i = 0$，进而有 $a' = 0$，再进而有 $a = i'$。因此，$\ker\ \sigma \subseteq I$，从而 $\ker\sigma = I'$。
因此，根据代数第一同构定理，$\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n][t]/I'$同构于 $Im(\sigma)$，而这等于 $\mathcal{N}$。要证明 σ 是满射，注意到 $q_1 + I, \ldots, q_n + I$作为线性空间张成 $\mathcal{N}$（如前所述，这可以用与命题 3.1 类似的方法证明）。

- 仿照命题 3.6 推理可得，N 是 n 维的 $\mathbb{C}$代数。

- 类似命题 3.7 推理可得，代数N 与代数 $\frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_j][t]}{\langle I\ t\rangle}$ 同构, 其中 $\langle I$是由 I中的元素及 t生成的$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_j][t]$ 的理想。根据第三同构定理，N 同构于

$$\frac{\mathcal{N}}{\langle t + I\rangle}.$$

仿照命题 3.10 推理，但在证明中用t 代替 $t - 1$，即可得到这一结论。

- 现在我们来考察 $t = 1$处的变形 $*_1$。首先考虑 $\mathbb{C}$代数的同态 ξ: $F[t] \to A$，其定义为 $\xi(x_i) = \sum_{l=0}^{m} a_{i,\ l}$，其中$i = 1, 2, \ldots, j$。

  仿照命题 3.9 推理可得，$\ker\ \xi = \langle I, t - 1\rangle$。类似命题 3.10 最后两行推理可得，$F[t]/\ker\ \xi$同构于 A。

- 按照定理 3.11 中的推理，我们看到代数 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n][t]/I$ 在 $t = 1$ 处变形为代数 $F[t]/\langle I,\ t - 1\rangle = F[t]/\ker\ \xi$，它与 A 同构。

- 现在我们将考虑 $*_z$ 处的变形，其中 $t = z$ 且 $z \in \mathbb{C}$、$z \neq 0$、$z \neq 1$。首先考虑 $\mathbb{C}$-代数的同态 ξ ： $F[t] \to A$ 由$\xi(x_i) = \sum_{l=0}^{m} a_{i,\ l}z^l$ 其中 $i = 1$、2、.....、j。

按照命题 3.9中的类似推理，我们得到 $\ker \xi = \langle I, t - z \rangle$（这可以通过在命题 3.9的证明中用 $t' = t/z$ 代替 t ，并在第一行声明 $p_i \in F$ 而不是 $p_i \in \mathbb{C}[x, y]$来完成）。

接下来，仿照命题 3.10 最后两行中的推理，我们得到 $F[t]/\ker \xi$ 与 A 同构（这是因为元素 $\xi(x_i)$ 生成 A ）。

接下来，按照定理 3.11 中的推理，我们看到代数 $\mathbb{C}[d_1, \ldots, d_n][t]/I$ 在 $t = z$ 处变形为代数 $F[t]/\langle I, t - z \rangle = F[t]/\ker \xi$ 与 A 同构。 □

6 未来工作

本节提出一些关于方法 1 的问题，并建议一些推广。

问题 6.1. 设 A 是一个 $\mathbb{C}$-代数，并假设 $G_1 = \{a, b\}$ 和 $G_2 = \{a', b'\}$ 是 A 的两个不同生成集。在什么条件下，使用 A、G_1 和 A、G_2 的方法 1 会得到同一个代数 N_0，且 A 是它的一个变形?

问题 6.2. 设 A 是一个 $\mathbb{C}$-代数。在什么条件下，方法 1 只产生一个代数 N，该代数以 A 为变形。

问题 6.3。设 A 是一个 $\mathbb{C}$-代数。是否存在一种有限终止算法，能够生成由方法 1 产生的所有代数 N，且这些代数具有 A 作为变形?

问题 6.4. 设 A 是一个 $\mathbb{C}$ 代数。生成元 a、b 的环论性质（例如是否为幂等元、不可约幂等元或素元）能否决定使用方法 1 和 A、$\{a, b\}$ 得到的代数 N 的某些性质?

问题 6.5. 设 A 是一个 $\mathbb{C}$-代数。 A 的环论性质（例如半单、局部）是否决定了使用 A 的方法 1 所得到的代数 N 的某些性质?

问题 6.6：能否将方法 1 推广到一般交换环上的代数?

Acknowledgements

我们感谢 Michael Wemyss 提出了启发本文的有趣问题，并感谢他对收缩代数及其在几何中的应用所作的有益评论。第三位作者感谢英国工程与自然科学研究委员会项目拨款 EP/R034826/1 和研究拨款 EP/V008129/1 的支持。

参考文献

[Ber78] George M Bergman。《环论中的菱形引理》。《数学进展》，29(2)：178–218，1978年2月。[BW22] Gavin Brown 和 Michael Wemyss。《非交换函数的局部标准形》，2022年。[CGG89] Vincent Coll、Murray Gerstenhaber 和 Anthony Giaquinto。《含非交换导子的显式变形公式》。《以色列数学会议论文集》，1：396–403，1989年1月。[DW16] Will Donovan 和 Michael Wemyss。《非交换变形与翻转》。《杜克数学杂志》，165(8)，2016年6月。arXiv:1309.0698 [math].[FO19] Boris Feigin 和 Alexandre Odesski。《代数的平坦变形与函数方程》。《组合代数杂志》，3(3)：215–236，2019年9月。[HT18] Zheng Hua 和 Yukinobu Toda。《收缩代数与奇点不变量》。《国际数学研究通报》，(10)：3173–3198，2018年。[SW13] Anne V. Shepler 和 Sarah Witherspoon。《正特征下斜群代数的PBW变形》，2013年12月。arXiv:1312.3616 [math].[Tod15] Yukinobu Toda。《非交换宽度与 Gopakumar-Vafa 不变量》。《数学手稿》，148(3-4)：521–533，2015年。[Wem23] Michael Wemyss。《cdv奇点综述》，2023年。[Wit19] Sarah J. Witherspoon。《代数的 Hochschild上同调》，《数学研究生教材》第204卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯， [2019] ©2019。