此处将显示与文章类型相应的横幅

arXiv:2305.03454v1 [physics.flu-dyn] 5 May 2023

低雷诺数随机流中的速度梯度统计渐近预测：偏度、间歇性与对齐的起始

Maurizio Carbone[1,2]† 和 Michael Wilczek[1,2]‡

[1]德国哥廷根 37077，Am Faßberg 17，马克斯·普朗克动力学与自组织研究所[2]德国拜罗伊特 95447，Universitätsstr. 30，拜罗伊特大学理论物理学 I 系

（收到日期 xx；修订日期 xx；接受日期 xx）

在趋近于零的雷诺数下通过高斯外力搅动流体，会产生高斯随机场；而雷诺数较高的流动则表现出非高斯性、级联、反常标度和优先对齐。近期研究（Yakhot 和 Donzis，*Physical Review Letters*，第 119 卷，2017年，第 044501 页；Gotoh 和 Yang，*Philos. Trans.Royal Soc.A*，第 380 卷，2022年，第 20210097 页）通过考察速度增量的标度，探究了这些湍流典型特征在低雷诺数流动中的起始过程。研究表明，低雷诺数随机流与高雷诺数湍流中的标度规律出奇地相似。本文从速度梯度动力学的角度研究低雷诺数流动中湍流特征的起始过程，并揭示其丰富的统计几何特性。我们将完整纳维–斯托克斯方程的微扰理论与速度梯度建模相结合，由此得到一个速度梯度随机模型，其模型系数直接由纳维–斯托克斯方程和统计均匀性约束决定。与该随机模型相关的福克–普朗克方程存在解析解，表明湍流典型特征会在低雷诺数下逐渐显现：随着雷诺数增大，偏度、间歇性和优先对齐会出现在速度梯度统计中。模型预测与低雷诺数流动的直接数值模拟结果高度吻合。

关键词：

1. 引言

雷诺数表征牛顿流体流动中所涉及的活跃尺度范围，并决定流动从层流向无序湍流态的转变（Reynolds，1883年）。当雷诺数趋近于零时，流动遵循线性方程，而通过高斯随机强迫搅动流体则会产生一个高斯分布

† 通讯邮箱：maurizio.carbone@uni-bayreuth.de ‡ 通讯邮箱：michael.wilczek@uni-bayreuth.de

摘要不得延伸至第 2 页

随机速度场。另一方面，较高雷诺数下的流动会经历非线性演化，并表现出显著的非高斯湍流特征。这些湍流动力学的显著特征包括级联（例如，Alexakis & Biferale 2018；Ballouz & Ouellette 2020；Vela-Martín & Jiménez 2021）、速度增量的反常标度（例如，Benzi 等1995；Chen 等2005）、速度梯度的极端间歇性和优先对齐（例如，Ashurst 等1987；Lund & Rogers 1994；Meneveau 2011；Buaria 等2019；Buaria & Pumir 2022）。近期研究（Yakhot & Donzis 2017；Sreenivasan & Yakhot 2021；Gotoh & Yang 2022；Khurshid 等2022）刻画了这些湍流特征的起始过程，并揭示了低雷诺数流动与充分发展湍流中的标度关系之间惊人的相似性，这促使人们对低雷诺数随机流开展进一步研究。

研究湍流运动起始的一种方法，是考虑由大尺度高斯力驱动、无边界的统计各向同性流动所满足的三维不可压缩纳维–斯托克斯方程。这种设定排除了任何边界条件的影响，并在一定程度上克服了低雷诺数流动缺乏普适性的问题（Gotoh & Yang 2022）。通过建立纳维–斯托克斯方程的微扰理论（Wyld 1961），可以在小雷诺数下对这类理想化流动进行解析研究。这种直接方法能够全面揭示低雷诺数下的完整速度场，但也涉及若干技术难题。例如，级数展开中的各项很快就会变得过于复杂，而且会出现违反伽利略不变性的情况（Yakhot 与 Donzis，2018）。

一种近期提出的深刻方法以低雷诺数下速度梯度矩和结构函数的标度为研究重点（Yakhot & Donzis 2017年；Sreenivasan & Yakhot 2021年），其出发点是速度场特征泛函的霍普夫方程（Hopf 1952年）。这项标度分析显示，令人惊讶的是，没有惯性区的低雷诺数流动，即使借助扩展自相似性（Benzi等 1993）也无法检测到惯性区，其标度在定性上与充分发展湍流相同（Schumacher等 2007年）。具体而言，在低雷诺数流动中观测到的结构函数关于雷诺数和空间间距的标度指数，与基于极高雷诺数假设的理论所预测的标度指数吻合良好（Yakhot & Sreenivasan 2004）。这些标度出现在空间间距 $r \gtrsim \eta$处，其中 η 为柯尔莫哥洛夫长度尺度；同时，基于泰勒微尺度的雷诺数为 $Re_\lambda \gtrsim 9$。而在$Re_\lambda \leqslant 3$ 时，任何反常标度都可以忽略不计（Yakhot & Donzis 2017年）。虽然这项标度分析完整刻画了跨尺度的速度增量统计，却未能揭示流动丰富的统计几何特征。例如，无法由此推断应变率与涡量之间的对齐及其相互作用。

在此，我们从速度梯度的角度探讨随机外力驱动的流动中非高斯性的出现。速度梯度蕴含了湍流态的许多显著特征（Meneveau 2011），并全面刻画了涡量和应变率的几何特征。随着雷诺数增加，速度梯度会从高斯随机矩阵状态（Livan等 2018）转变为湍流态，其特征包括纵向分量的偏度（与动能级联有关）（Eyink 2006; Carbone & Bragg 2020; Johnson 2020）、应变率特征值的优先构型（Betchov1956; Lund&Rogers1994;Davidson 2015），以及涡量与应变率特征向量之间的间歇性和优先对齐（Ashurst 等1987; Buaria & Pumir 2021）。

为了从解析上捕捉非高斯性的出现，我们构建了一个速度梯度模型，该模型直接源自低雷诺数下受随机力驱动的纳维–斯托克斯方程。构建这种梯度动力学模型的主要挑战在于湍流的非局域性。自由度的大幅减少

从完整的纳维–斯托克斯方程推导出一组描述梯度动力学的常微分方程时，需要引入未闭合项（Meneveau 2011）。这些未闭合项包括无迹/各向异性压力赫essian和速度梯度的黏性拉普拉斯算子，因此需要对其进行建模。近年来，速度梯度的现象学模型已被证明能够有效再现雷诺数中等偏高时的小尺度湍流统计（例如 Girimaji & Pope 1990；Chertkov 等1999；Chevillard &Meneveau 2006；Wilczek &Meneveau 2014；Johnson & Meneveau 2016；Pereira等2018；Leppin & Wilczek 2020）。

与高雷诺数下的现象学模型不同，我们的速度梯度低雷诺数模型可以直接由纳维–斯托克斯方程推导得到。这种直接推导减少了建模假设和自由参数的数量。事实上，在雷诺数的零阶近似下，速度场服从高斯分布，因此可以精确计算控制速度梯度的方程中的非局部/未闭合项（Wilczek & Meneveau 2014）。我们利用这些零雷诺数下未闭合项的精确表达式，构造速度梯度动力学关于雷诺数的展开。随后，结合小雷诺数下完整纳维–斯托克斯方程的渐近弱耦合展开（Wyld 1961）以及不可压缩速度梯度的两个统计均匀性约束（Betchov 1956；Carbone & Wilczek 2022），对模型进行闭合。所得的速度梯度单时统计模型不包含可调参数，也不需要来自模拟或实验的任何输入。此外，我们还利用从直接数值模拟结果中拟合得到的两个可调模型参数，将该模型扩展为能够预测完整的时间动力学。这个扩展模型同时捕捉了速度梯度的单时统计特性和时间相关性。

所提出的模型与速度梯度概率密度函数（PDF）的福克-普朗克方程相关，其中雷诺数和强迫参数与受迫纳维–斯托克斯方程中出现的相同参数一一对应。该福克-普朗克方程具有渐近解析解，从而得到速度梯度概率密度函数的解析近似。

对高维速度梯度概率密度函数进行解析预测的尝试十分有限，迄今为止主要建立在关于小尺度湍流动力学的现象学模型之上（Chertkov 等1999年；Moriconi 等2014年；Apolinário 等2019年）。一般而言，PDF的解析表达式源于用于求解支配流动动力学的非线性朗之万方程的场论方法（Martin 等1973年），该方法由带有单圈修正的重整化作用量方法构成（Kleinert & Schulte-Frohlinde 2001；Cavagna 等2021年）。由此得到的梯度PDF通常无法进行解析积分，因此不能直接计算边缘分布和矩，而是通过蒙特卡罗抽样进行计算（Moriconi 等2014年）。不同的是，我们对速度梯度PDF的预测可以进行解析积分，因此能够推导出速度梯度的边缘分布和矩的表达式。这些解析表达式将所关注的量（例如梯度的偏度、峰度和优先对齐）与雷诺数及强迫参数明确联系起来，从而阐明低雷诺数随机流中非高斯性的起始机制。

本文的结构安排如下。第 2 节介绍如何从纳维–斯托克斯方程推导出速度梯度概率密度函数的福克-普朗克方程（FPE）。第 3节针对低雷诺数流动对 FPE 进行具体化，第 4 节则给出其解析解。模型预测/解析预测与低雷诺数直接数值模拟的比较见第 5节；结论与展望则在第 7节讨论。附录A和B介绍了数值模拟的设置，以及用于确定模型系数的纳维–斯托克斯方程低雷诺数展开。

2. 统计各向同性流动中速度梯度概率密度的福克-普朗克方程

本节推导描述速度梯度单时刻/单点统计的通用福克-普朗克方程（FPE），随后将其具体化以适用于低雷诺数流动。

2.1. 速度梯度动力学的控制方程

我们从三维不可压缩纳维–斯托克斯方程出发，该方程受外部高斯随机强迫 $\boldsymbol{F}$ 驱动，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{2.1a}$$

$$\partial_t\boldsymbol{u}+Re_\gamma\left[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\nabla}P\right]=\nabla^2\boldsymbol{u}+\sigma\boldsymbol{F}, \tag{2.1b}$$

其中 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 为速度场，$P(\boldsymbol{x},t)$ 为压力场，$Re\gamma$ 为雷诺数。方程（2.1）采用无量纲变量表示，适用于后续的低雷诺数展开。全文中我们均使用无量纲变量；需要时，以加横线的符号表示相应的有量纲变量。为了构造适当无量纲化所需的参考尺度，我们引入参考长度 $\bar{\gamma}_0$，它与低雷诺数下黏性拉普拉斯算子的阻尼作用有关（其定义见（3.1））。结合 $\bar{\gamma}_0$、流体的运动黏度 $\bar{\nu}$ 以及柯尔莫哥洛夫时间尺度 $\bar{\tau}_\eta=1/\sqrt{\langle\|\bar{\boldsymbol{\nabla}}\bar{\boldsymbol{u}}\|^2\rangle}$（尖括号表示系综平均），我们将方程（2.1）中使用的无量纲变量定义如下：

$$t=\left(\bar{\nu}/\bar{\gamma}_0^2\right)\bar{t},\qquad \boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}/\bar{\gamma}_0,\qquad \boldsymbol{u}=\left(\bar{\tau}_\eta/\bar{\gamma}_0\right)\bar{\boldsymbol{u}},\qquad \sigma^2=\left(\bar{\gamma}_0^2\bar{\tau}_\eta^2/\bar{\nu}\right)\bar{\sigma}^2. \tag{2.2}$$

基于这些量，我们可以据此定义雷诺数：

$$Re_\gamma=\frac{\bar{\gamma}_0^2}{\bar{\nu}\bar{\tau}_\eta}, \tag{2.3}$$

它表示速度梯度模 $\bar{\tau}_\eta^{-1}$ 与黏性阻尼 $\bar{\nu}/\bar{\gamma}_0^2$ 之比。雷诺数（2.3）衡量方程（2.1）中的非线性效应，从而能够恰当地取小雷诺数极限。无量纲纳维–斯托克斯方程（2.1）的零阶解是由随机驱动扩散方程产生的高斯随机速度场。随着雷诺数逐渐增大，非线性项开始发挥作用，进而导致非高斯统计。下文将分析低雷诺数下这种“非高斯性的出现”。

随机驱动的纳维–斯托克斯方程（2.1）对应于一个关于速度梯度单时刻/单点概率密度的福克–普朗克方程（Wilczek & Meneveau 2014）。为推导该方程，我们从控制速度梯度动力学的朗之万方程出发，该方程可通过对方程（2.1b）求梯度得到。

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})=0, \tag{2.4a}$$

$$\partial_t\boldsymbol{A}+Re_\gamma\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}=-Re_\gamma\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}\right)+\nabla^2\boldsymbol{A}+\sigma\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{F}, \tag{2.4b}$$

其中 $A_{ij}=\nabla_j u_i$ 为速度梯度，$H_{ij}=\nabla_i\nabla_j P$ 为压力海森矩阵，矩阵乘法采用标准形式。高斯分布张量噪声 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{F}$ 在（2.4）中均值为零，具有统计各向同性，且时间上为白噪声。它完全由其相关性确定，用笛卡尔分量记法表示为

$$\left\langle\nabla_j F_i(\boldsymbol{x},t)\nabla_q F_p(\boldsymbol{x},t')\right\rangle=\delta(t-t')\left(4\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}-\delta_{ij}\delta_{pq}\right), \tag{2.5}$$

“流体焦点”文章不得超过此页长度

其中 δ_{ij} 表示克罗内克δ。随机强迫的空间相关性在附录A中给出。

2.2. 速度梯度不变量的福克-普朗克方程

方程（2.4）对应于速度梯度 $f(\boldsymbol{A};t)$的概率密度函数（PDF）的福克–普朗克方程（FPE）。对于一组共享相同瞬时速度梯度构型 $\boldsymbol{A}$的流体粒子，其笛卡尔分量形式的福克–普朗克方程为（Wilczek & Meneveau 2014）：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left[Re_\gamma \left(A_{ik}A_{kj} + \left\langle H_{ij}(\boldsymbol{x},t)|\boldsymbol{A}\right\rangle\right) f - \left\langle \nabla^2 A_{ij}(\boldsymbol{x},t)|\boldsymbol{A}\right\rangle f + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sigma^2\left(4\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial A_{ji}}\right)\right], \tag{2.6}$$

其中 $\langle\cdot|\boldsymbol{A}\rangle$ 表示在给定速度梯度构型$\boldsymbol{A}$条件下的系综平均。式（2.6）中的条件平均，即梯度的各向异性压力海森矩阵和黏性拉普拉斯算子，属于未闭合项，仅凭单点处的梯度无法计算（Meneveau 2011）。因此，从描述整个速度梯度的方程（2.4）（编码了速度梯度场实现的完整时空复杂性）简化为描述梯度单时刻/单点统计的方程（2.6），代价是引入未闭合项。

在统计各向同性流动中，速度梯度概率密度函数 f 具有旋转不变性，即仅为五个独立速度梯度不变量的函数（Itskov 2015）。因此，统计各向同性使我们能够运用张量函数表示理论（例如 Rivlin & Ericksen 1955；Itskov 2015），将式（2.6）中未闭合的条件平均表示为速度梯度的各向同性张量函数。条件平均表示为基张量 $\boldsymbol{B}^n$ 与系数γ_n 的组合，而这些系数取决于速度梯度不变量$\mathcal{I}_k$。更具体地说，这些基张量由应变率张量$\boldsymbol{S}$ $=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\top)/2$ 和旋转率张量$\boldsymbol{W}$ $=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\top)/2$构成，具体如下

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}^1 = \boldsymbol{S} && \boldsymbol{B}^3 = \widetilde{\boldsymbol{SS}} && \boldsymbol{B}^5 = \boldsymbol{SW} + \boldsymbol{WS} && \boldsymbol{B}^7 = \widetilde{\boldsymbol{SWW}} + \widetilde{\boldsymbol{WWS}} \\ &\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{W} && \boldsymbol{B}^4 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS} && \boldsymbol{B}^6 = \widetilde{\boldsymbol{WW}} && \boldsymbol{B}^8 = \widetilde{\boldsymbol{SSW}} + \widetilde{\boldsymbol{WSS}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中，波浪号表示张量的无迹／各向异性部分，并默认采用标准矩阵乘法。为消除基可能出现的退化，需要在式（2.7）中加入另外两个基张量（Pennisi & Trovato 1987）。事实上，当两个应变率特征值重合，或涡量为应变率的特征向量时，式（2.7）中的某些张量会变得线性相关。我们忽略这些零测度构型。由速度梯度构成的独立不变量$\mathcal{I}_k$ 如下

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_1 = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{SS}) && \mathcal{I}_3 = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{SSS}) && \mathcal{I}_5 = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{SSWW}), \\ &\mathcal{I}_2 = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{WW}) && \mathcal{I}_4 = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{SWW}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

要确定应变率特征向量基底相对于涡量的手性，还需要一个第六不变量。然而，该第六不变量只能在符号意义上由其他五个不变量唯一确定（Lund & Novikov 1992），因此我们不将其视为独立变量。

根据上述基张量（2.7）和不变量（2.8）的定义，中的漂移项

福克–普朗克方程（2.6）可以简洁地写为

$$Re_\gamma\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}+\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)|\boldsymbol{A}\rangle\right)-\left\langle\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\middle|\boldsymbol{A}\right\rangle=\sum_{n=1}^{8}\gamma_n(\mathcal{I})\boldsymbol{B}^n. \tag{2.9}$$

一般表达式（2.9）允许我们通过使用符号演算进行缩并（Meurer 等，2017年），将 FPE（2.6）表述为不变量的形式。为简化记号，无论其自变量为何，我们都用 f 表示速度梯度的概率密度函数，f（I($\boldsymbol{A}$)）$\equiv f$（$\boldsymbol{A}$），因为 f 是关于 $\boldsymbol{A}$ 的概率密度，而不变量 $\mathcal{I}_k$ 仅用于更简单的（各向同性）参数化。最后，稳态 FPE（2.6）化简为

$$\begin{aligned}\gamma_n\phi^n f+M_{kl}Z^{ln}\frac{\partial\left(\gamma_n f\right)}{\partial\mathcal{I}_k}-\frac{\sigma^2}{2}M_{kl}\left(4\phi^l-\phi'^l\right)\frac{\partial f}{\partial\mathcal{I}_k}=\\ =\frac{\sigma^2}{2}M_{kl}M_{pq}\left(4Z^{lq}-Z'^{lq}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial\mathcal{I}_k\partial\mathcal{I}_p},\end{aligned} \tag{2.10}$$

默认对重复指标求和。方程（2.10）中的对称矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 是度量张量 Z^{ln}（I）$=B^l_{ij}B^n_{ij}$，其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\mathcal{I}_1 & 0 & \mathcal{I}_3 & 0 & 0 & \mathcal{I}_4 & 2\mathcal{I}_5 & 0\\ 0 & -\mathcal{I}_2 & 0 & 0 & -2\mathcal{I}_4 & 0 & 0 & -2\mathcal{I}_5\\ \mathcal{I}_3 & 0 & \frac{\mathcal{I}_1^2}{6} & 0 & 0 & -\frac{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}{3}+\mathcal{I}_5 & \frac{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_4}{3}+\frac{2\mathcal{I}_2\mathcal{I}_3}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2-6\mathcal{I}_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2\mathcal{I}_4 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2+2\mathcal{I}_5 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_1\mathcal{I}_4-\frac{\mathcal{I}_2\mathcal{I}_3}{3}\\ \mathcal{I}_4 & 0 & -\frac{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}{3}+\mathcal{I}_5 & 0 & 0 & \frac{\mathcal{I}_2^2}{6} & \frac{\mathcal{I}_2\mathcal{I}_4}{3} & 0\\ 2\mathcal{I}_5 & 0 & \frac{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_4}{3}+\frac{2\mathcal{I}_2\mathcal{I}_3}{3} & 0 & 0 & \frac{\mathcal{I}_2\mathcal{I}_4}{3} & -\frac{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2^2}{2}+3\mathcal{I}_2\mathcal{I}_5+\frac{2\mathcal{I}_4^2}{3} & 0\\ 0 & -2\mathcal{I}_5 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_1\mathcal{I}_4-\frac{\mathcal{I}_2\mathcal{I}_3}{3} & 0 & 0 & \frac{\mathcal{I}_1^2\mathcal{I}_2}{2}-3\mathcal{I}_1\mathcal{I}_5+\frac{2\mathcal{I}_3\mathcal{I}_4}{3}\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

其中 $Z'^{ln}=B^l_{ij}B^n_{ji}$ 表示修正度量张量。符号 ϕ^n（I）$=\partial B^n_{ij}/\partial A_{ij}$ 表示基张量的散度

$$\boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10\mathcal{I}_2}{3} & 2\mathcal{I}_1\end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

而转置基张量的散度为 $\phi'^n=\partial B^n_{ji}/\partial A_{ij}$。不变量导数的各分量汇集在矩阵 $M_{kl}=(\partial\mathcal{I}_k/\partial A_{ij})B^l_{ij}Z^{-1}_{nl}$（其中 $\boldsymbol{Z}^{-1}$ 表示度量张量的逆（2.11）），其矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

表征张量基（2.11，2.12，2.13）的量（2.7）均可由 Carbone 和 Wilczek（2022）中计算的克里斯托费尔符号推导得出。

方程（2.10）是关于函数 f（I）的二阶偏微分方程，该函数涉及五个变量 $\mathcal{I}_k$。模型系数 γ_n（I）决定了福克–普朗克方程的性质和复杂程度，接下来我们将计算低雷诺数流动的模型系数 γ_n。

3. 确定模型系数

我们介绍获得所呈现模型所需的两个假设：系数γ_n 在（2.9）中为常数，并且展开式（2.9）截断为速度梯度中最高二阶的基张量。虽然这些假设对于雷诺数一阶下的条件压力海森矩阵是精确的，但它们对黏性应力引入了建模近似。我们将通过将模型系数 γ_n 与直接由低雷诺数流动的直接数值模拟计算得到的相同系数进行比较，事后检验这些假设的有效性（见图7）。

3.1. 零阶条件速度梯度拉普拉斯算子

在 Re_γ 的零阶情况下，支配速度梯度动力学（2.4）的方程是线性的，因此所得流动具有高斯统计。对于多点高斯随机场，条件拉普拉斯算子可简化为线性阻尼（Wilczek & Meneveau 2014）。因此，有量纲变量下的条件拉普拉斯算子为

$$\left\langle \bar{\nabla}^2 \bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t}) \middle| \bar{\boldsymbol{A}} \right\rangle = -\frac{\bar{\boldsymbol{A}}}{\bar{\gamma}_0^2} + O\left(Re_\gamma\right). \tag{3.1}$$

而在无量纲变量（2.2）下，我们有 $\langle \nabla^2 \boldsymbol{A} | \boldsymbol{A} \rangle \sim -\boldsymbol{A}$。高斯随机场的条件速度梯度拉普拉斯算子在雷诺数零阶时对模型系数（2.9）有贡献，而高阶黏性修正则需要建模。参考长度 $\bar{\gamma}_0$ 取决于外力的空间相关性，我们将在附录B中确定它。

3.2. 零阶条件各向异性压力*Hessian*

对于高斯随机场，也就是雷诺数的零阶情形，条件无迹/各向异性压力海森矩阵具有简单的形式（Wilczek & Meneveau 2014年）

$$\left\langle \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x},t) \middle| \boldsymbol{A} \right\rangle = -\frac{2}{7}\widetilde{\boldsymbol{SS}} - \frac{2}{5}\widetilde{\boldsymbol{WW}} + h_4\left(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}\right) + O(Re_\gamma), \tag{3.2}$$

而海森矩阵的局部/各向同性部分由不可压缩条件规定：$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{H}) = -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2)$。高斯随机场的条件各向异性压力海森矩阵会在雷诺数的一阶上影响模型系数（2.9）。因此，根据 Wilczek & Meneveau（2014年），我们知道小Re_γ 时，压力海森矩阵对梯度动力学的精确一阶修正。

系数 h_4 对 $\boldsymbol{B}^4 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}$ 在（3.2）中的权重取决于高斯流动的结构，具体由相关函数决定；但先前的研究表明，它不会影响速度梯度的单点统计。从几何角度看，这是因为 $\boldsymbol{B}^4$ 会旋转应变率特征标架，同时保持涡量方向相对于特征标架本身不变（Carbone 等 2020年）。从梯度概率密度函数的福克-普朗克方程（2.10）也可以看出这一点，因为 $\boldsymbol{B}^4$ 与其他所有基张量的缩并均为零（Leppin & Wilczek 2020），这可从度量张量（2.11）的第四行/列看出。因此，只要我们关注的是单时刻/单点统计，就可以忽略 $\boldsymbol{B}^4$ 的贡献。

3.3. 张量 条件平均的 r 表示及其产生的速度梯度模态 l

我们通过采用一般表达式（2.9），并将其截断至速度梯度的二次项，来模拟未闭合项的高阶贡献。我们考虑从 2.7）中的基张量 $\boldsymbol{B}^1$ 到 $\boldsymbol{B}^6$, , 同时牢记，只要我们$\boldsymbol{B}^4$ 就可以忽略

重点关注单点统计。此外，我们假设系数 γ_n 在（2.9）中为常数。这些假设，结合零阶条件平均值（3.1、3.2）的精确表达式，得出漂移项（2.9）的以下表示形式

$$Re_\gamma\left(\boldsymbol{AA}+\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)|\boldsymbol{A}\rangle\right)-\left\langle\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\middle|\boldsymbol{A}\right\rangle=\boldsymbol{A}-Re_\gamma^2\left[\delta_1\boldsymbol{S}+\delta_2\boldsymbol{W}\right]+$$
$$+Re_\gamma\left[\left(\frac{5}{7}-\delta_3\right)\widetilde{\boldsymbol{SS}}+\gamma_4\left(\boldsymbol{SW}-\boldsymbol{WS}\right)+\left(1-\delta_5\right)\left(\boldsymbol{SW}+\boldsymbol{WS}\right)+\left(\frac{3}{5}-\delta_6\right)\widetilde{\boldsymbol{WW}}\right] \tag{3.3}$$

其中常数系数 δ_i 均为一阶量，有待确定。为使所有雷诺数下的Re_γ 梯度方差保持恒定，我们纳入二阶项；随机驱动的纳维–斯托克斯方程（2.1）也是如此。方程（3.3）中的雷诺数幂次经过选择，使模型方程在变换 $\bar{t}\to-\bar{t}$ 和 $\bar{v}\to-\bar{v}$下保持不变，纳维–斯托克斯方程（2.1）也是如此。我们将事后检验模型系数随雷诺数变化的趋势，并与直接数值模拟数据进行比较（见图7）。

常数模型参数 δ_1，δ_2，δ_3，δ_5，δ_6 仍有待确定。为此，我们结合两条 Betchov 齐次性约束（Betchov 1956）、完整纳维–斯托克斯方程在小雷诺数下的微扰理论（Wyld 1961），以及随机强迫所施加的恒定耗散率（Novikov 1965）。由此得到速度梯度不变量平均值的约束

$$\langle \mathrm{I}_1\rangle=\frac{1}{2},\qquad \langle \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2\rangle=0,\qquad \langle \mathcal{I}_3+3\mathcal{I}_4\rangle=0, \tag{3.4a}$$

$$\langle \mathcal{I}_3\rangle=S_3Re_\gamma,\qquad \langle \mathcal{I}_5\rangle=-\frac{1}{12}+X_5Re_\gamma^2 \tag{3.4b}$$

其中，S_3 和 X_5 是常数参数。关系式（3.4*a*）中的第一个关系源于随机强迫所施加的梯度方差为常数这一条件。这意味着，在无量纲变量（ $\tau_\eta=1/\sqrt{2\langle\mathcal{I}_1\rangle}$ （2.2）中，柯尔莫哥洛夫时间尺度）的数值为 *1*。关系式（3.4a）中的其他关系是两个独立的 *Betchov*齐次性约束，它们仅用速度梯度即可表述（*Carbone & Wilczek 2022*）。此前，已有研究利用齐次性关系式（3.4a）减少高雷诺数下速度梯度模型数值模拟中的参数数量（*Leppin & Wilczek 2020*）；如下文所示，我们则可以直接解析地施加这些约束。关系式（3.4b）源自纳维–斯托克斯方程的低雷诺数展开（Wyld 1961）。量 S_3 和 X_5 分别表示从高斯零阶构型出发，速度梯度三阶矩和四阶矩随雷诺数变化的速率。这些系数取决于强迫相关性，我们在附录B中确定它们。

在约束条件（3.4）中，括号表示系综平均，即对于速度梯度的任意函数 $\varphi(\boldsymbol{A})$，

$$\langle\varphi(\boldsymbol{A})\rangle=\int \mathrm{d}\boldsymbol{A}f\left(\mathcal{I}(\boldsymbol{A});\delta_i\right)\varphi(\boldsymbol{A}), \tag{3.5}$$

其中，$f(\mathcal{I};\delta_i)$ 是由福克–普朗克方程（2.10）及其漂移项（2.9）所支配的速度梯度概率密度函数。福克–普朗克方程（2.10）在较小雷诺数下存在微扰精确解，下一节将对此作进一步介绍。该解析解 $f(\mathcal{I};\delta_i)$ 以模型系数 δ_i为参数，并使我们能够对式（3.4）中的系综平均进行解析计算。因此，五个约束条件（3.4）构成了一个包含五个方程、用于求解五个模型参数的线性方程组 δ_1，δ_2，δ_3，δ_5，δ_6。该线性方程组的解

为

$$\delta_1 = -\frac{1824S_3^2}{35} - \frac{144X_5}{7} \qquad \delta_2 = \frac{96S_3^2}{7} + \frac{240X_5}{7}$$
$$\delta_3 = \frac{5}{7} + \frac{120S_3}{7} \qquad \delta_4 = \gamma_4 - h_4$$
$$\delta_5 = 1 - \zeta_5 - \frac{72S_3}{7} - \frac{180X_5}{7S_3} \qquad \delta_6 = \frac{3}{5} - \frac{6\zeta_5}{5} - \frac{936S_3}{35} - \frac{216X_5}{7S_3}. \tag{3.6}$$

此外，噪声方差 $\sigma^2 = 1/15$ 由在$Re_\gamma = 0$ 处的酉柯尔莫哥洛夫时间约束确定（此时，具有漂移项（2.10）的福克–普朗克方程（3.3）对应一个奥恩斯坦–乌伦贝克过程）。我们假设噪声方差 σ^2 与雷诺数无关。

现在我们已经确定了所有单时刻/单点模型系数， δ_i 和 σ。该模型精确包含压力海森矩阵对$Re\gamma$ 的一阶贡献，而建模假设涉及高阶修正项的表示。由此得到的速度梯度单时统计模型不含任何自由参数，因此无需扫描参数来匹配直接数值模拟结果。不过，仍有两个自由规范参数，即 γ_4 和 ζ_5，它们不影响单时统计，只影响多时刻相关性。这种规范自由度源于以下事实：具有酉柯尔莫哥洛夫时间尺度的高斯各向同性概率密度函数（例如 Wilczek & Meneveau 2014）

$$f_0 = \frac{225\sqrt{5}}{\pi^4} \exp\left[-\left(4\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}\right) A_{ij}A_{pq}\right] \tag{3.7}$$

求解非线性稳态福克–普朗克方程

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left[\left(A_{ij} + Re_\gamma\zeta_5\left(B^5_{ij} + \frac{6}{5}B^6_{ij}\right) + Re_\gamma\gamma_4 B^4_{ij}\right) f_0 + \frac{1}{30}\left(4\frac{\partial f_0}{\partial A_{ij}} - \frac{\partial f_0}{\partial A_{ji}}\right)\right] = 0, \tag{3.8}$$

对于所有 γ_4 和 ζ_5。Leppin & Wilczek（2020年）已观察到，在零阶高斯分布解的情况下，这种规范的一个特例。我们将借助直接数值模拟数据，在 γ_4 和ζ_5 节中确定规范参数 6，其中我们重点研究多时刻统计。

4. 分析　小雷诺数下速度梯度概率密度函数的近似 s

具有由（2.10）指定的漂移项的福克-普朗克方程（3.3）存在关于雷诺数的微扰解。解展开至二阶

$$f(\mathcal{I}) \sim f_0(\mathcal{I}) + Re_\gamma f_1(\mathcal{I}) + Re_\gamma^2 f_2(\mathcal{I}), \tag{4.1}$$

并求得 f_i 所有阶的解，其形式为不变量的多项式乘以零阶高斯分布解。具体而言，将展开式（4.1）代入 FPE（2.10），比较 Reynolds 数相同阶次的项，并施加平均值

c约束条件（3.4）可得 FPE 在较小Re_γ下的渐近解

$$f_0 = \frac{225\sqrt{5}}{\pi^4} e^{-5\mathcal{I}_1+3\mathcal{I}_2} \tag{4.2a}$$

$$f_1 = \frac{3600\sqrt{5}S_3\,(25\mathcal{I}_3 - 21\mathcal{I}_4)}{7\pi^4} e^{-5\mathcal{I}_1+3\mathcal{I}_2} \tag{4.2b}$$

$$\begin{aligned} f_2 = \frac{720\sqrt{5}}{49\pi^4}\big(&- 16320S_3^2\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 - 6860S_3^2\mathcal{I}_1 - 1344S_3^2\mathcal{I}_2^2 - 140S_3^2\mathcal{I}_2 + 50000S_3^2\mathcal{I}_3^2 + \\ &- 84000S_3^2\mathcal{I}_3\mathcal{I}_4 + 35280S_3^2\mathcal{I}_4^2 + 42240S_3^2\mathcal{I}_5 + 2240S_3^2 - 22950X_5\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 - 1575X_5\mathcal{I}_1 + \\ &- 1890X_5\mathcal{I}_2^2 - 1575X_5\mathcal{I}_2 + 59400X_5\mathcal{I}_5\big) e^{-5\mathcal{I}_1+3\mathcal{I}_2}. \end{aligned} \tag{4.2c}$$

我们指出，虽然解（4.2）仅对雷诺数而言是渐近的，但f_i 在（4.2）中的各项对所有 $\mathcal{I}_k$，都能在雷诺数的每一阶上精确求解展开后的偏微分方程（2.10）。因此，尽管我们处理的是小雷诺数下的渐近展开，但并未对速度梯度的大小作出明确假设。为通过符号计算检验渐近解（4.2*b*），我们将（4.2*c*）中的各项改写为速度梯度的笛卡尔分量的函数，将所得表达式代入笛卡尔坐标系下的福克–普朗克方程（2.6），并检验余项在雷诺数的二阶以内为零。

简单展开式（4.2）的主要优点是，它能让我们完全通过解析方法求得概率密度函数的相关矩。这使我们能够解析地研究小雷诺数下非高斯性的出现。相反，这种展开的缺点是，对于所有 $\mathcal{I}_k$，其解并非处处为正，而正确的概率密度函数本应如此。不过，当（4.1）中的多项式前因子变为零时，就会出现这种正性破缺，也就是说，此时梯度的量级为 $Re_\gamma^{-1/3}$。在如此大的梯度下，高斯因子 $\exp(-5\mathcal{I}_1 + 3\mathcal{I}_2)$ 已经大幅衰减，因此由此产生的误差极小。与第 5 节数值结果的比较将证实，在低雷诺数下，这一正性问题确实可以忽略。

获得福克–普朗克方程（2.10）渐近解的另一种方法是有效作用量方法，该方法由 Martin等人于1973年针对随机微分方程提出。该方法得到如下形式的解：$\exp(-\mathcal{S}(\mathcal{I}))$ 其中$\mathcal{S}$ 为有效作用量，其中包含$\mathcal{I}_k$ 和Re_γ的高阶多项式。这种概率密度函数无法直接解析地求得各阶矩，因此通常通过蒙特卡罗抽样进行数值计算（Moriconi等人，2014年）。有效作用量涉及重整化噪声方差和模型系数（Apolinário 等人，2019年），旨在提高解析预测的准确性并扩大其适用范围。我们的模型针对的是Re_γ 极小的情况，而且方程本身仅适用于低雷诺数。因此，在这一设定下，导出解（4.2）的简单展开似乎是合适的，而更高级的方法则留待未来研究。

4.1. 体积元与速度梯度矩

该解（4.2）使我们能够以解析方式计算系综平均值。系综平均值（3.5）可以方便地在应变率特征标架中计算。我们将所有不变量$\mathcal{I}_k$ 表示为应变率特征值 λ_i 和涡量主分量 $\omega_i = \boldsymbol{\nu}_i \cdot \boldsymbol{\omega}$的形式，其中 $\boldsymbol{\nu}_i$ 为应变率特征向量。此外，我们采用基于涡量大小 $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ 以及涡量向量与应变率特征向量之间排列关系的应变率特征标架坐标，$\hat{\ }$ $\omega_i \equiv \omega_i/\omega$。这一过程将

Rapid 文章不得超过此页长度

积分（3.5）转换为

$$\langle\varphi(\mathcal{I})\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \int \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\omega_3 f(\mathcal{I})\varphi(\mathcal{I}) \tag{4.3}$$

其中应变率特征标架中的积分算子定义为

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda_2 \int_{\lambda_2}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_1 J_S(\lambda) + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\lambda_2 \int_{-2\lambda_2}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_1 J_S(\lambda) \tag{4.4a}$$

$$\int \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\omega_3 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega^2 \int_0^1 \mathrm{d}\hat{\omega}_1^2 \int_0^1 \mathrm{d}\hat{\omega}_2^2 J_\omega(\omega, \hat{\omega}), \tag{4.4b}$$

and，其中不变量也表示为应变率变量的函数 ，

$$\mathcal{I}_1 = \sum_i \lambda_i^2, \qquad \mathcal{I}_2 = -\frac{\omega^2}{2},$$

$$\mathcal{I}_3 = \sum_i \lambda_i^3, \qquad \mathcal{I}_4 = \frac{\omega^2}{4} \sum_i \lambda_i \hat{\omega}_i^2, \qquad \mathcal{I}_5 = \frac{\omega^2}{4} \sum_i \lambda_i^2 \left(\hat{\omega}_i^2 - 1\right). \tag{4.5}$$

由于统计各向同性，应变率特征标架的旋转可以通过积分消去。这使系综平均积分的维数从八维（即无迹 $\boldsymbol{A}$ 在（3.5）中的独立分量）降至五维（即（4.4）中的独立应变率特征值和涡量主分量）。然而，消去旋转也需要引入体积元（Livan 等，2018年），即J_S 和 J_ω，见方程（4.4a）。体积元 J_S 对应于从标准笛卡尔参考系到应变率特征标架的变换，由 Wigner 排斥项（Wigner 1955年）构成

$$J_S = 2\pi^2 \left|(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)\right| = \sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\mathcal{I}_1^3 - 6\mathcal{I}_3^2}. \tag{4.6}$$

采用排序后的应变率特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ 作为积分变量时，（4.6）中的绝对值可省去。由于不可压缩性，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$，因此有两种可能的构型，$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ 或 $\lambda_1 > -2\lambda_2 > 0$，它们确定了（4.4$a$）中的积分上下限。最后，从笛卡尔坐标转换到应变率特征标架中的涡量大小和方向时，会引入体积元

$$J_\omega = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\omega^2}{\hat{\omega}_1^2 \hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3^2}} \tag{4.7}$$

其中 $\hat{\omega}_3^2 = 1 - \hat{\omega}_1^2 - \hat{\omega}_2^2$，并且我们只需考虑涡量主分量 $\hat{\omega}_i$ 的正值，因为不变量$\mathcal{I}_k$ (4.5) 是涡量的偶函数。

5. 单点/单时统计比较

我们比较了在低雷诺数下，由我们的模型和直接数值模拟得到的单时间/单点速度梯度统计。我们指出，随着雷诺数增加并逐渐过渡到湍流，梯度的动力学和统计几何会发生若干定性变化。直接数值模拟的设置详见附录 A，而所有理论预测均可通过从渐近解（4.1）中积分消去变量，并利用系综平均（4.4）的表达式得到。直接数值模拟与模型参数一一对应。特别是，零阶

条件黏性阻尼和外力的相关性在模型与直接数值模拟中相同，具体如附录A 和B所述。

5.1. 速度梯度不变量的矩

从零开始增加雷诺数，会使梯度统计中的偏度、间歇性和优先对齐开始出现。我们从应变率特征标架的视角出发，通过考察应变率和涡量统计，分别分析这三个特征（Dresselhaus & Tabor 1992年；Tom等人 2021年）。

图 1(a) 展示了应变率纵向分量的归一化矩随雷诺数 Re_γ 的变化。不变量的矩与纵向应变率分量的矩之间存在如下关系（Betchov 1956；Davidson 2015）

$$\left\langle S_{11}^2 \right\rangle = \frac{2}{15}\left\langle \mathcal{I}_1 \right\rangle, \qquad \left\langle S_{11}^3 \right\rangle = \frac{8}{105}\left\langle \mathcal{I}_3 \right\rangle, \qquad \left\langle S_{11}^4 \right\rangle = \frac{4}{105}\left\langle \mathcal{I}_1^2 \right\rangle. \tag{5.1}$$

应变率的偏度通过应变率$\langle I_3 \rangle$的三阶矩来量化，而偶数阶及更高阶矩（例如 $\langle I_1^2 \rangle$）则用于量化间歇性。经过初始阶段的快速增长后，应变率纵向分量的偏度趋于饱和，接近其典型的高雷诺数值 −0.5/−0.6。在大雷诺数下，重整化方法（Yakhot & Orszag 1986）预测该偏度为常数，而数值模拟显示其随雷诺数缓慢增长，增长指数约为0.1（Ishihara et al. 2009）。在 $\mathrm{Re}_\gamma = \mathrm{O}(1)$ 时，应变率统计已呈现出显著的偏度，而间歇性可以忽略。这是因为三阶矩（例如 $\langle I_3 \rangle$）随雷诺数线性增长，而偶数阶矩（例如 $\langle I_1^2 \rangle$）则呈二次增长。近期研究（Yakhot & Donzis 2017；Gotoh & Yang 2022）根据偶数阶速度梯度矩的突然增长，以及其开始增长时幂律的出现，确定了向湍流的转变。直接数值模拟数据表明，向湍流标度的转变始于 $\mathrm{Re}_\lambda \approx 9$（Yakhot & Donzis 2017），对应于 $\mathrm{Re}_\gamma \approx 5$ （见图10）。我们的速度梯度模型在构造时就纳入了低雷诺数下奇数阶矩和偶数阶矩的不同标度。事实上，正如附录B所述，这些标度可以通过纳维–斯托克斯方程的小雷诺数展开解析推导得出。

图 1(b) 显示了低雷诺数下速度梯度统计几何的显著定性变化：应变率与涡量之间的优先对齐发生了转换。通过应变率特征标架中的归一化涡量分量 $\hat{}\omega_i = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ （其中 $\boldsymbol{v}_i$ 为应变率特征向量），并依据相应的应变率特征值 λ_i排序，其中 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$。低雷诺数下，涡量与最具拉伸性的应变率特征向量对齐；只有当 $Re_\gamma \gtrsim 5$ 时，它才与中间特征向量对齐。当$Re_\gamma < 5$时，这种对齐状态仿佛涡量是流体流动中的一条材料线，持续受到应变作用。随后，在 $Re_\gamma \approx 5$时，湍流转捩开始：中间应变率特征向量与涡量之间略显反直觉的对齐逐渐形成，这与充分发展湍流中的观测结果一致（Ashurst等，1987年）。这种特殊对齐在较高雷诺数下开始出现，这与速度梯度动力学中的局部非线性效应变得更加显著相符。例如，简单的受限 Euler 模型（Vieillefosse（1982年））中，梯度仅受非线性项的局部／各向异性部分驱动；该模型在趋近有限时间奇点时，也呈现出涡量与中间应变率特征向量之间的对齐。

通过从 FPE 的渐近解中积分掉应变率特征值和涡量大小（4.1），并将系综平均表示为（4.4的形式，我们可以得到涡量主分量关于

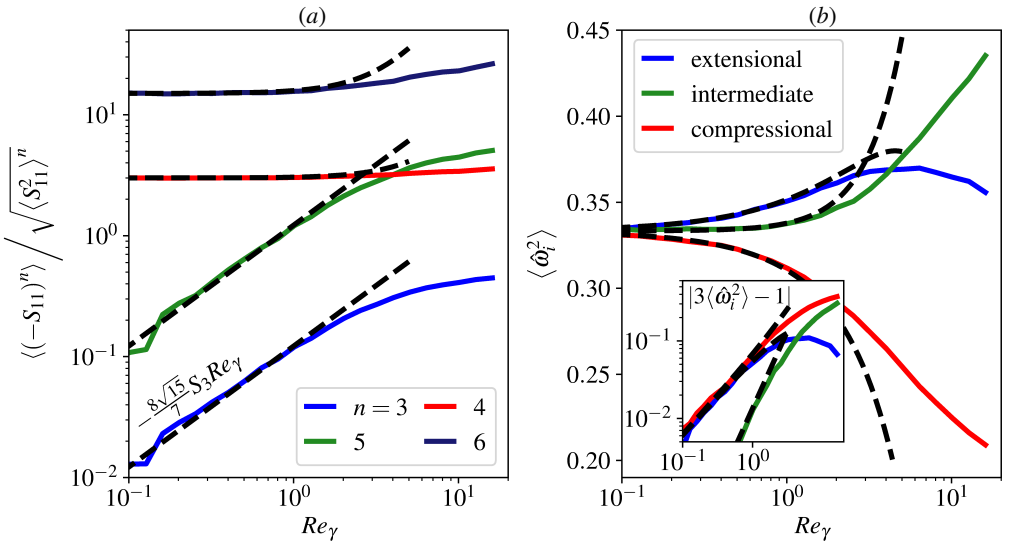

图1：低雷诺数下偏度、间歇性和对齐的出现，以展开参数Re_γ表示。(*a*) 应变率纵向分量 S_{11} 的归一化矩。注意，由于奇数阶矩为负值，我们绘制的是 $\langle(-S_{11})^n\rangle$。(*b*) 涡量与应变率特征向量之间的排列。彩色实线表示直接数值模拟（DNS）的结果，黑色点虚线表示基于我们的低雷诺数模型得到的解析预测。

雷诺数

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\omega}_1^2 \rangle &= \frac{1}{3} - \frac{6\sqrt{30}S_3 Re_\gamma}{25\sqrt{\pi}} + \frac{4224 S_3^2 Re_\gamma^2}{1225} + \frac{1188 X_5 Re_\gamma^2}{245} \\
\langle \hat{\omega}_2^2 \rangle &= \frac{1}{3} - \frac{8448 S_3^2 Re_\gamma^2}{1225} - \frac{2376 X_5 Re_\gamma^2}{245} \\
\langle \hat{\omega}_3^2 \rangle &= \frac{1}{3} + \frac{6\sqrt{30}S_3 Re_\gamma}{25\sqrt{\pi}} + \frac{4224 S_3^2 Re_\gamma^2}{1225} + \frac{1188 X_5 Re_\gamma^2}{245}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$\langle \hat{\omega}_1^2 \rangle$ 和 $\langle \hat{\omega}_2^2 \rangle$ 在雷诺数为零时都从随机均匀值 $\langle \hat{\omega}_i^2 \rangle = 1/3$开始。随后，$\langle \hat{\omega}_1^2 \rangle$ 随 Re_γ 线性增长，而 $\langle \hat{\omega}_2^2 \rangle$ 仅呈二次增长。优先对齐与应变率偏度的出现密切相关。事实上，$S_3 < 0$（通过附录B中的 Wyld 展开解析推导得出）不仅意味着平均而言存在直接能量级联，还意味着如方程（5.2）所示，在低雷诺数下，涡量优先与最大伸展方向对齐。然而，$\langle \hat{\omega}_1^2 \rangle$ 在雷诺数的二阶项中有很强的负贡献，最终，具有正增长率的 $\langle \hat{\omega}_2^2 \rangle$占据主导。解析近似（5.2）表明，只有当 X_5 为负且其绝对值相较于 S_3^2足够大时，$\langle \hat{\omega}_2^2 \rangle$ 才会随 Re_γ 增长。此外，已知在湍流中，涡量会避开压缩方向（Ashurst et al. 1987）。这种不对齐在极低雷诺数下就已形成，并且强烈取决于 S_3 和 X_5 均为负这一事实。我们的模型捕捉到了这种不对齐，因为式（5.2）中的 $\langle \hat{\omega}_3^2 \rangle$ 具有负的一阶和二阶贡献，因此会随雷诺数迅速减小。

正如直接数值模拟与模型预测对涡量–应变率对齐的比较所显示的，我们的低雷诺数模型在定量上准确至$Re_\gamma \approx 1$,

在定性上与直接数值模拟一致，直至 $Re_\gamma \approx 5$ ，之后便失效，这正如弱耦合微扰方法所预期的那样。结果凸显了随着雷诺数增加而出现的许多定性变化，这与近期研究中的观察结果一致（Yakhot & Donzis 2017；Gotoh & Yang 2022）。然而，文献中通常采用泰勒雷诺数来研究向湍流的转变，而我们将转变定位于 $Re_\gamma \approx 5$。在我们的小雷诺数分析中，实际的展开参数是 $Re\gamma$，它与泰勒雷诺数之间存在非平凡的关系，二者的关系取决于外力的空间相关性。

5.2. 应变率统计

为了更好地理解应变率偏度的成因，并深入了解充分发展湍流中观测到的应变率特征值优先构型（Betchov 1956），我们运用随机矩阵理论的方法分析应变率张量的概率密度函数（Livan等2018）。当雷诺数趋近于无穷小，速度场呈多点高斯分布，应变率则是一个正交高斯随机矩阵。高斯随机矩阵在许多研究领域中已得到广泛应用（Wigner 1955；Dyson 1962），但在流体动力学中的应用较少。例如，与高斯应变率相对应的耗散率分布，直到最近才在该领域中重新推导出来（Gotoh & Yang 2022）。

由于不可压缩性和统计各向同性，应变率概率密度函数可用两个量来表征，即两个独立的（无序）应变率特征值λ_1 和 λ_2，或两个主不变量 $\mathrm{I}_1 = 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2)$ 和 $\mathrm{I}_3 = 3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)$。因此，将坐标从标准笛卡尔基变换到应变率特征标架，可显著降低维度。这一坐标变换意味着，应变率概率密度函数 $f_S(\lambda(\boldsymbol{S}))$ 与其特征值的概率密度函数 $\rho_\lambda(\lambda)$ 之间存在如下关系（Livan 等2018）

$$f_S(\lambda) = \frac{\rho_\lambda(\lambda)}{J_S(\lambda)}, \tag{5.3}$$

其中 J_S 是 Stiefel 流形上的体积元（James，1977年），定义见（4.6）。由于体积元 J_S 形式复杂，以特征值为参数的应变率概率密度函数 f_S（λ）在视觉上远比特征值本身的概率密度函数 ρ（λ）简单。因此，我们将绘制并讨论 f_S（λ），如图 2 所示，涵盖了不同的雷诺数。此外，我们采用特征值的缩放和与差，使得雷诺数趋近于零时应变率概率密度函数的等高线呈圆形。图 2 中的概率密度函数等高线按对数等间距排列；彩色实线来自直接数值模拟，黑色虚线表示按（4.1）对涡量积分消去后，依照（4.4）得到的解析预测。

$$f_S(\lambda) = \left(\frac{50\sqrt{30}}{\pi^{\frac{5}{2}}} - Re_\gamma \frac{60000\sqrt{30}S_3}{7\pi^{\frac{5}{2}}} \lambda_1\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_2) + Re_\gamma^2 \frac{20000\sqrt{30}S_3^2}{49\pi^{\frac{5}{2}}} \Big(1800\lambda_1^4\lambda_2^2 + \right.$$
$$\left. + 3600\lambda_1^3\lambda_2^3 + 1800\lambda_1^2\lambda_2^4 - 42\lambda_1^2 - 42\lambda_1\lambda_2 - 42\lambda_2^2 + 7 \Big) \right) e^{-10\lambda_1^2 - 10\lambda_1\lambda_2 - 10\lambda_2^2}. \tag{5.4}$$

随着雷诺数增加，图中应变率概率密度函数的等值线2从圆形变为三角形。等值线沿较大且为正的$\lambda_1 + \lambda_2$（即较大且为负的 λ_3）方向伸长，同时沿 $\lambda_1 - \lambda_2$方向收缩，尤其当 λ_3较大时更是如此。这种形状表明存在一种优先状态：一个特征值为较大负值，另外两个特征值较小、为正且彼此接近。这种构型已

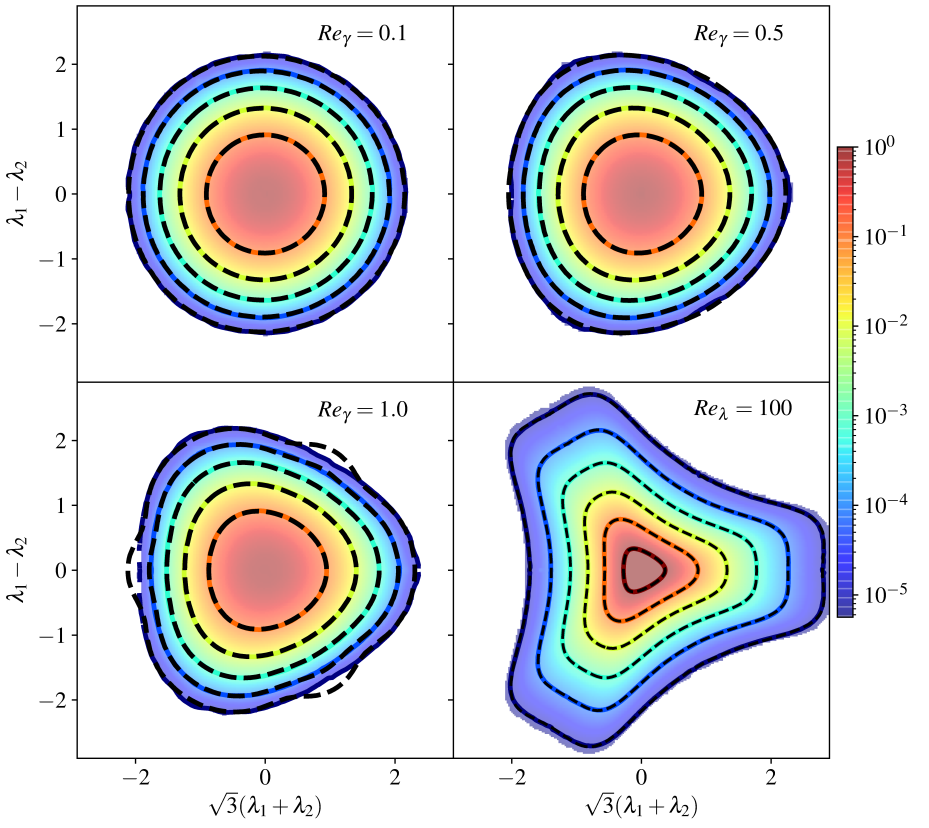

图2：应变率的概率密度函数 $f_S(\lambda)$ 通过其无序重标度特征值进行参数化 λ_i，对应不同的雷诺数。颜色映射和有色实线等值线来自直接数值模拟，而黑色点线表示低雷诺数模型给出的相应解析预测。高雷诺数图中的细点线表示经验参数化（5.5）。颜色映射采用以 10 为底的对数尺度，等值线在以 10 为底的对数尺度上等间距分布，间隔为 1。

由 Betchov（1956）通过对高雷诺数湍流中应变率动力学的现象学分析观察到，而方程（5.4）从解析上展示了这种优先构型的出现。概率密度函数（5.4）中的偏度源于 Re_γ中的一阶贡献，它增强了乘积 $S_3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 为负值的区域出现的概率。这对应于中间应变率特征值 λ_2 优先为正（Lund & Novikov 1992）。

解析预测（5.4）可准确捕捉应变率概率密度函数，直至 $Re_\gamma = O(1)$。在两个应变率特征值重合的零测度区域中出现了偏差。这可能是由于所选的基张量（2.7）所致；当应变率处于退化构型时，这些基张量并非线性无关。

图 2 还表明，低雷诺数和中等雷诺数下应变率概率密度函数的形状存在定性差异。中等偏高雷诺数下应变率概率密度函数呈现的边缘，在较低雷诺数下并不存在，构成了高雷诺数特征。应变率概率密度函数关于坐标轴 $\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda_1 = -\lambda_2/2$ 和 $\lambda_2 = -\lambda_1/2$ 的对称性在所有雷诺数下都保持不变，这仅仅是因为特征值可以任意互换。然而，即使在较高雷诺数下，应变率概率密度函数的等值线

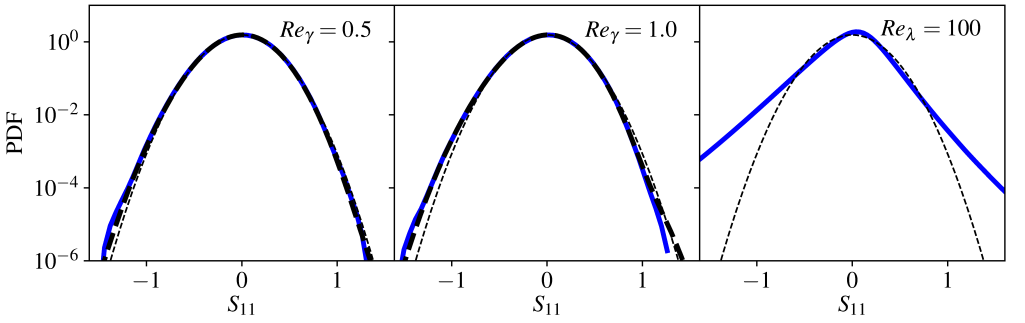

图 3：不同雷诺数下应变率纵向分量的概率密度函数。实线来自直接数值模拟，黑色虚线表示低雷诺数模型给出的解析预测。较细的虚线表示零阶高斯概率密度函数。

看起来也出奇地简单。事实上，它们可以通过主不变量的组合来参数化，即

$$\alpha_1(f_S)\,\mathcal{I}_1^3 + \alpha_2(f_S)\,\mathcal{I}_3\mathcal{I}_1^{3/2} + \alpha_3(f_S)\,\mathcal{I}_3^2 = 1, \tag{5.5}$$

其中各个量 α_i 取决于等值线本身的水平 f_S。这种参数化方式针对大雷诺数应变率概率密度函数展示于图2 中。

应变率概率密度函数尾部开始呈现偏斜和拉长，导致应变率纵向分量概率密度函数出现非高斯性，如图3所示。随着雷诺数增加，左尾逐渐形成，而靠近概率密度函数核心处的右分支则略呈亚高斯特征。尽管在如此低的雷诺数下，非高斯性与高雷诺数湍流中的非高斯性相比非常弱，我们的模型仍能捕捉到左尾的轻微增长，直至$Re_\gamma = O(1)$。

5.3. 涡量统计

现在，我们分析应变率特征标架中涡量分量的分布，并探讨图1(b)中观察到的、随雷诺数增加而呈现非单调趋势的应变率–涡量优先对齐。如同上一节对待应变率那样，我们去除由在应变率特征标架中采用大小/方向坐标而产生的体积元的运动学效应 J_ω (4.7)。更具体地说，根据公式（4.4），我们从速度梯度概率密度函数中对微分应变率和涡量大小进行积分，从而得到归一化涡量主分量的边缘概率密度函数

$$\rho_{\hat{\omega}}(\hat{\omega}^2) = \int \mathrm{d}\omega J_\omega \int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\, f(\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega})), \tag{5.6}$$

其中，对应变率的积分定义于（4.4*a*）。随后，我们用体积元的分母 J_ω (4.7) 对对齐的概率密度函数 ρ_ω 进行加权。该分母与涡量大小无关，因此可以从（5.6）中的积分移出，从而得到

$$f_{\hat{\omega}}(\hat{\omega}^2) = \mathcal{N}\sqrt{\hat{\omega}_1^2\hat{\omega}_2^2\hat{\omega}_3^2}\,\rho_{\hat{\omega}}(\hat{\omega}^2) \tag{5.7}$$

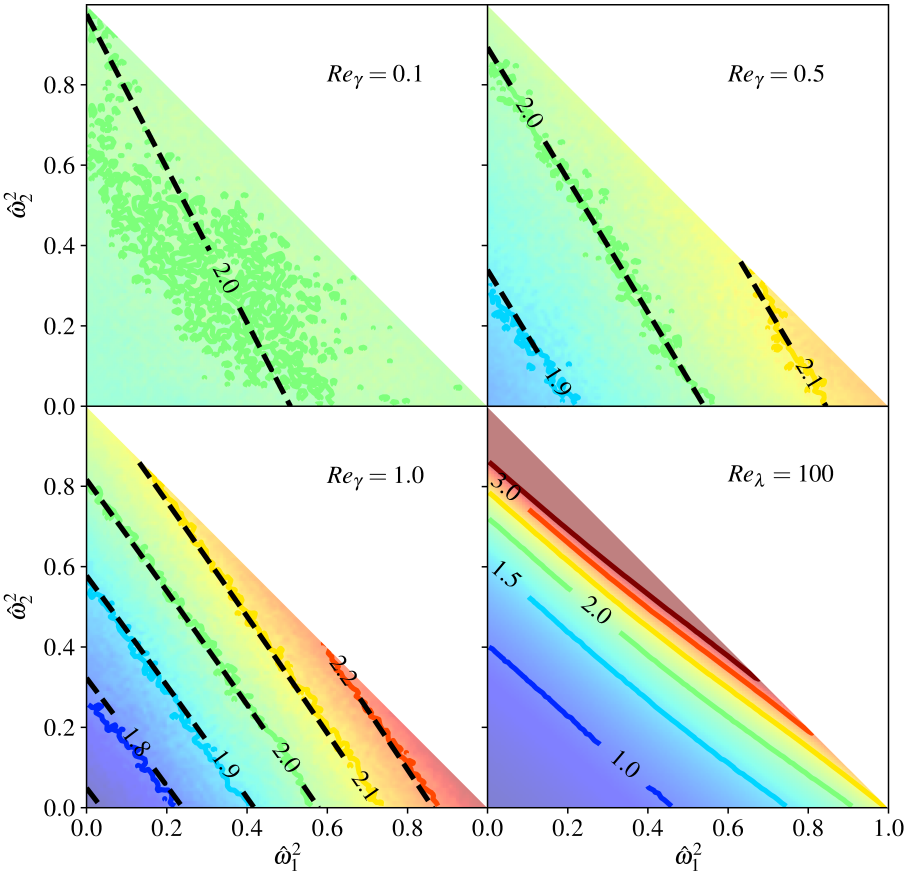

图 4：涡量主分量平方的概率密度函数，并按体积元加权，如式（5.7）所示，展示了不同雷诺数下的结果。$\hat{}\omega_1$ 和 $\hat{}\omega_2$ 分别表示沿最具扩张性和中间应变率特征方向的归一化涡量分量。颜色映射和有色实线等值线表示直接数值模拟结果，黑色虚点线表示相应的解析预测（5.8）。等值线上的数字表示该等值线水平处的概率密度函数值。

其中，$\mathcal{N}$ 是一个归一化因子，使得 $\int \mathrm{d}\,\hat{}\omega_1^2 \mathrm{d}\,\hat{}\omega_2^2 f_{\hat{\omega}} = 1$。这种对概率密度函数重新加权的优点在于，它消除了体积元 J_ω 中的复杂特征，从而使对齐概率密度函数呈现出直观简洁的趋势，如图 4所示。

在图 4 中，我们比较了直接数值模拟得到的对齐 $f_{\hat{\omega}}$ 的重新加权概率密度函数（彩色线）与低雷诺数模型的预测（黑色虚点线）。对 $f_{\hat{\omega}}$ 的渐近预测可通过对渐近解（4.1）中的应变率和涡量大小进行积分消去得到，表达式为

$$f_{\hat{\omega}}\left(\hat{\omega}^2\right) = 2 - Re_\gamma \frac{18\sqrt{30}S_3}{5\sqrt{\pi}}\left(2\hat{\omega}_1^2 + \hat{\omega}_2^2 - 1\right) + Re_\gamma^2\Bigg(228S_3^2\hat{\omega}_1^4 + 228S_3^2\hat{\omega}_1^2\hat{\omega}_2^2 + \\ - 228S_3^2\hat{\omega}_1^2 + 66S_3^2\hat{\omega}_2^4 - \frac{59856S_3^2\hat{\omega}_2^2}{245} + \frac{21912S_3^2}{245} - \frac{10692X_5\hat{\omega}_2^2}{49} + \frac{3564X_5}{49}\Bigg), \tag{5.8}$$

其中，涡量分量按照对应的应变率特征值排序，

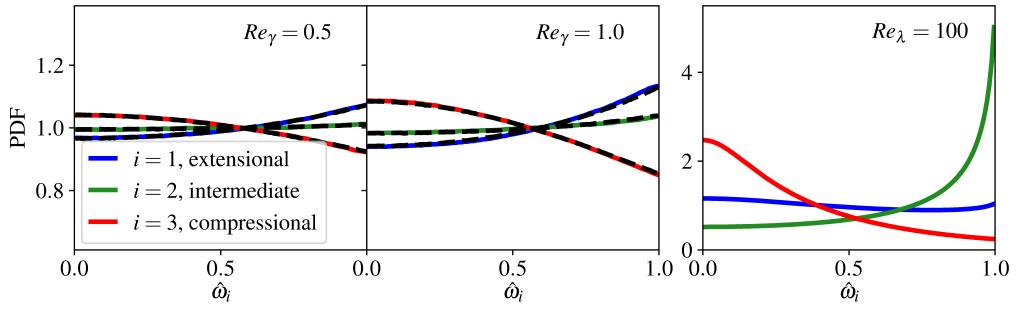

图5：不同雷诺数下，通过有序涡量主分量的概率密度函数量化的涡量-应变率对齐。实色曲线表示直接数值模拟结果，黑色虚点线表示低雷诺数模型的数值解（5.9）。

其中 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$，两个归一化涡量主分量就足以参数化对齐概率密度函数，因为 $\sum_i \hat{\omega}_i^2 = 1$。

在 $\mathrm{Re}\gamma$ 非常小时，图4中的对齐分布接近随机均匀分布，对应于近乎恒定的 $f_{\hat{\omega}}$，且不存在优先对齐。在低雷诺数下，经体积元 $f_{\hat{\omega}}$ 重新加权的概率密度呈现近乎笔直的等值线，其斜率使得当 $\hat{\omega}_1^2$ 较大时，概率密度函数的取值也较大。解析解 (5.8) 表明，在雷诺数的一阶近似下，等值线确实是在 $\hat{\omega}_1^2$–$\hat{\omega}_2^2$ 平面上斜率为 -2 的直线。这导致涡量与应变率最强拉伸特征方向之间出现优先对齐，这一点此前已在图1中观察到。此外，一阶修正提高了 $\hat{\omega}_1^2 + \hat{\omega}_2^2$ 较大区域的概率，因为 $S_3 < 0$。这表明，应变率统计的负偏度与涡量和应变率最强压缩方向之间缺乏对齐存在联系。随着雷诺数增大，对齐概率密度函数的等值线 4 向 $\hat{\omega}_2^2$ 较大的方向倾斜，即在 $\hat{\omega}_1^2$–$\hat{\omega}_2^2$ 平面上的斜率大于 -1。在低雷诺数下，等值线仍近似为直线，重新加权后的概率密度函数在其支撑集上的幅值仅有轻微变化。解析解 (5.8) 定量地刻画了概率密度函数，以及等值线随 $\mathrm{Re}\gamma$ 增大而发生的倾斜；这种倾斜源于 $\mathrm{Re}\gamma$ 的二阶项。在高雷诺数下，概率密度函数在其支撑集上的变化更快，其等值线在视觉上偏离直线。然而，低雷诺数和高雷诺数下经重新加权的对齐概率密度函数仍然十分相似，只是等值线发生了倾斜。

归一化涡量主分量概率密度函数的等值线向偏大的 $\hat{\omega}_2^2$ 倾斜，反映在余弦边缘概率密度函数的变化中：$\hat{\omega}_i = |\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{\omega}|$，其中 $\boldsymbol{v}_i$ 是按序排列的应变率特征向量。本例中，由于积分（$1/\int \hat{\omega}_1\, \hat{\omega}_2\, \hat{\omega}_3|$）中出现的体积元带来了技术上的困难，我们无法计算对齐的边缘概率密度函数的解析近似。我们改为对一组速度梯度数值求解与福克–普朗克方程（2.6）相关联的朗之万方程，从而计算对齐的概率密度函数。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = -\left[\left(1 - Re_\gamma^2\delta_1\right)\boldsymbol{S} + \left(1 - Re_\gamma^2\delta_2\right)\boldsymbol{W} + Re_\gamma\left(\frac{5}{7} - \delta_3\right)\widetilde{\boldsymbol{SS}} + Re_\gamma\gamma_4\left(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}\right) + \right.$$
$$\left. + Re_\gamma\left(1 - \delta_5\right)\left(\boldsymbol{SW} + \boldsymbol{WS}\right) + Re_\gamma\left(\frac{3}{5} - \delta_6\right)\widetilde{\boldsymbol{WW}}\right] + \sigma\boldsymbol{\Gamma} \tag{5.9}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是时间白噪声张量，其（单点/单时刻）统计特性与外力 $\boldsymbol{\nabla F}$ (2.5) 相同。

图5 展示了从直接数值模拟和对我们的低雷诺数模型（5.9）进行数值积分得到的归一化涡量主分量$\hat{\omega}_i$的概率密度函数。当Re_γ极小时，不存在优先对齐，归一化主分量的分布均匀随机。随着Re_γ 增大，涡量首先优先对齐于最具拉伸性的应变率主方向，同时避开压缩方向。由于流体微团的旋转会导致沿涡量方向的压缩（Carbone 等，2020年），涡量与收缩方向之间缺乏对齐，阻碍了压缩性最强的速度梯度增长。涡量与拉伸应变率特征向量之间的暂态对齐持续到$Re_\gamma \approx 5$，随后便形成了众所周知的与中间特征向量的优先对齐（Ashurst等，1987年）。

5.4. 速度梯度主不变量

最后，我们聚焦于速度梯度主不变量的联合概率密度函数，即

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2\right), \qquad \mathcal{R} = -\frac{1}{3}\left(\mathcal{I}_3 + 3\mathcal{I}_4\right), \tag{5.10}$$

这是湍流速度梯度动力学研究中的一个标志性特征（Meneveau2011）。表征 $\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$ 空间的体积元使我们无法对完整的概率密度函数（4.1）进行解析积分，从而得到主不变量的边缘概率密度函数。与上文介绍的应变率–涡量对齐类似，我们通过数值求解朗之万方程（5.9）来获得边缘 $\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$ 概率密度函数。

$\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$ 概率密度函数以一种颇为复杂的方式交织了应变率和涡量的所有信息。事实上，对$\boldsymbol{A}$的特征向量积分，以得到边缘$\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$ 概率密度函数，并不能直接等同于对参考系的旋转积分；而对于应变率而言，情况则是如此。此外，$\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$ 概率密度函数包含两个运动学上不同的区域：Vieillefosse 线（Vieillefosse（1982））下方对应实数速度梯度特征值，上方则对应复特征值。这种拓扑差异导致主不变量的概率密度函数出现边缘，尽管梯度统计是平滑的。

尽管如此，$\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$ 概率密度函数仍展现出速度梯度统计量的一个显著特征：经典的泪滴形，向右侧的 Vieillefosse 尾部延伸（Vieillefosse（1982）），如图6所示。在雷诺数趋近于零时，概率密度函数呈现众所周知的高斯形状，关于 $\mathcal{R}$ 轴对称，这是因为方程（2.4）在符号翻转 $\boldsymbol{A} \rightarrow -\boldsymbol{A}$ 下保持不变（Meneveau 2011）。随着 Re_γ 增大，特征性的泪滴形随之出现。我们的模型定量地捕捉到了右侧 Vieillefosse 尾部偏度的初现，这种偏度在较高雷诺数下依然存在。不过，低雷诺数与高雷诺数下概率密度函数之间的相似性仅限于定性层面；高雷诺数下的概率密度函数呈现出明显更长的尾部。这也是因为主不变量是二阶和三阶的速度梯度矩，而应变率特征值和涡量分量分布中微小的尾部，会导致 $\mathcal{R}$–$\mathcal{Q}$概率密度函数出现显著的尾部。

6. 多时刻统计与速度梯度动力学的比较

在上一节中，我们展示了渐近解（4.1）如何定量地再现直接数值模拟得到的单时间/单点速度梯度统计，适用范围最高达到 $Re_\gamma \simeq 1$，而在 $Re_\gamma \simeq 5$时仍能定性吻合。现在，我们来研究

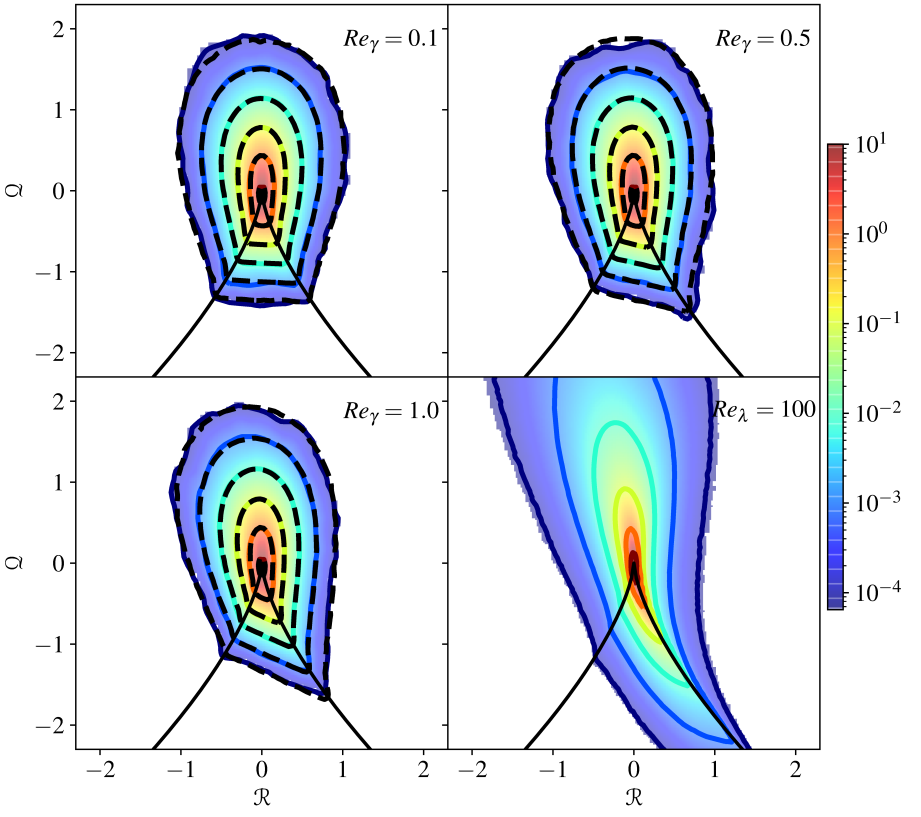

图6：速度梯度主不变量的概率密度（5.10），采用log10 尺度。颜色映射和有色实线等值线表示直接数值模拟结果，黑色虚线则表示低雷诺数模型的数值解（5.9）。

我们的模型是否也能再现速度梯度的完整拉格朗日动力学，具体而言，即速度梯度样本实现和时间相关性。

6.1. 直接数值模拟得到的模型系数

为了比较直接数值模拟生成的速度梯度时间序列与低雷诺数模型的预测结果，我们首先需要完整确定所有模型系数（3.6）。事实上，在第2节中，我们确定了两个规范系数，γ_4 和 ζ_5，它们只影响多时刻统计，而不改变单时概率密度函数。我们直接根据直接数值模拟数据计算模型系数（3.6），并将其与解析预测进行比较。这样便可利用直接数值模拟数据拟合这两个规范系数，γ_4 和 ζ_5，从而使低雷诺数模型能够捕捉速度梯度的时间动力学。

通过对低雷诺数随机流进行直接数值模拟，我们可以获得压力海森矩阵和黏性拉普拉斯算子的时空实现，也就是单时单点建模方法中的未闭合项。因此，我们可以利用直接数值模拟，计算未闭合项在给定局部速度梯度条件下的平均值，方法是张量

fun表示理论（Leppin & Wilczek 2020年；Carbone & Wilczek 2021年 ）

$$\left\langle \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x},t)\middle|\boldsymbol{A}\right\rangle = \sum_{n=1}^{8} h_n \boldsymbol{B}^n, \tag{6.1a}$$

$$\left\langle \nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\middle|\boldsymbol{A}\right\rangle + \boldsymbol{A} = Re_\gamma^2 \sum_{n=1}^{2} \delta_n \boldsymbol{B}^n + Re_\gamma \sum_{n=3}^{8} \delta_n \boldsymbol{B}^n. \tag{6.1b}$$

这里$\boldsymbol{B}^n$ 是基张量（2.7），h_n （6.1a）中的是条件压力海森矩阵分量，而 δ_n（6.1b）中的是黏性修正的分量。为与我们的低雷诺数模型表述保持一致，这里我们采用与推导模型系数（3.6）时相同的压力海森矩阵和黏性拉普拉斯算子表述。对于黏性拉普拉斯算子（6.1b），我们减去线性阻尼部分 $-\boldsymbol{A}$，然后引入与前两个系数 δ_1 和 δ_2成正比的雷诺数二阶修正，以及与其他基张量成正比的一阶修正。

为了从直接数值模拟数据中提取系数h_n 和 δ_i，我们利用任意条件平均的以下性质（这里只以各向异性压力海森矩阵为例说明）

$$\left\langle \left\langle \widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{x},t)\middle|\boldsymbol{A}\right\rangle T_{ij}(\boldsymbol{A})\right\rangle = \left\langle \widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{x},t) T_{ij}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right)\right\rangle \tag{6.2}$$

其中$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 是仅依赖于梯度的张量函数。模型系数至多依赖于全部五个不变量（2.8），而我们的主要建模假设是将系数限制为常数。对于极低雷诺数下的条件压力海森矩阵和零阶黏性拉普拉斯算子，这一假设是精确的；而对于高阶修正，这则是一种近似。

利用（6.2）的性质，通过对张量表示（6.1）与基张量（2.7）进行双重缩并，然后取平均，我们得到关于常数模型系数的线性方程组

$$\sum_{n=1}^{8} \langle Z^{mn}\rangle\, h_n = \left\langle \widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{x},t) B_{ij}^m\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right)\right\rangle, \tag{6.3a}$$

$$Re_\gamma^2 \sum_{n=1}^{2} \langle Z^{mn}\rangle\, \delta_n + Re_\gamma \sum_{n=3}^{8} \langle Z^{mn}\rangle\, \delta_n = \left\langle \left(\nabla^2 A_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right) B_{ij}^m\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right)\right\rangle, \tag{6.3b}$$

其中 Z^{mn} 是度量张量（2.11）。求解线性方程组（6.3）可得系数h_n 和 δ_n，如图 7 所示，它们是雷诺数Re_γ的函数。

图7(a)显示，低雷诺数下，压力海森矩阵系数 h_3 和 h_6 （分别对应基张量 $\widetilde{\mathrm{SS}}$ 和 $\widetilde{\mathrm{WW}}$）是主要贡献项，而当 Re_γ 趋近于零时，$\mathrm{h}_3 \to -2/7$ 和 $\mathrm{h}_6 \to -2/5$ 的值极小（Wilczek & Meneveau 2014）。系数 h_7 在很大程度上被黏性部分抵消，这有利于建模，因为我们假设三阶基张量不会对梯度动力学产生贡献。当 $\mathrm{Re}_\gamma \simeq 5$ 达到一定值时，抑制应变率自放大的系数 h_3，的绝对值变得大于系数 h_7,；后者则抑制流体微团旋转所产生的离心力。在相同的雷诺数阈值处，沿 $\mathrm{B}^1 \equiv \mathrm{S}$ 方向的条件压力海森矩阵分量开始增大。

图 7（b）表明， δ_1 和δ_2 中体现的对黏性线性阻尼的修正幅度适中，该模型在定性上捕捉到了 δ_1 和δ_2幅值的增大趋势；随着雷诺数增加，它们缓慢变得更加负。系数$Re_\gamma\delta_1$ 和 $Re_\gamma\delta_2$ 在雷诺数较小时仍然很小，这一事实证明了将黏性修正假设为二次（或至少高于线性阶）形式的合理性

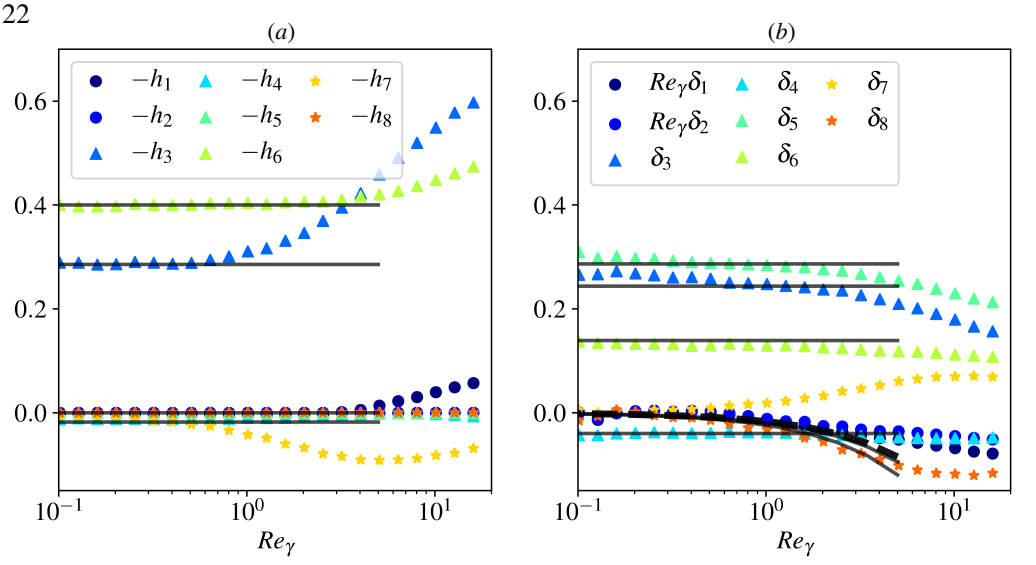

图7：条件各向异性压力Hessian的分量h_n（a）和（b）条件黏性拉普拉斯算子 δ_n 的分量（其定义见公式（6.1））， 随雷诺数Re_γ变化。彩色点表示使用（6.3）根据直接数值模拟计算得到的系数，点的形状区分了对应基张量的阶数（2.7）。灰色半透明曲线来自解析预测（3.6），其规范参数 γ_4 和 ζ_5经拟合得到。模型系数 δ_7 和 δ_8 设为零，因此未在此处显示。

阻尼。与压力海森矩阵类似，对于黏性应力，其主要贡献也来自二阶基张量，$\boldsymbol{B}^3$ 至 $\boldsymbol{B}^6$。在较小的雷诺数下，三次项处于次要地位，只有在 $Re_\gamma \gtrsim 1$ 时才变得重要。虽然压力海森矩阵和黏性应力对对称部分 $\boldsymbol{B}^7$ 的贡献相互抵消，但与 $\boldsymbol{B}^8$ 成正比的黏性反对称部分在 $Re_\gamma \gtrsim 1$时变得重要。这表明，较高雷诺数下的速度梯度模型需要考虑这些三阶基张量。

值得注意的是，系数 δ_3相对于$\boldsymbol{B}^3 \equiv \boldsymbol{SS}$而言，在小雷诺数 S_3下由偏度增长率唯一确定，如渐近预测（3.6）所示。梯度统计中偏度的出现与系数$\boldsymbol{B}^3$ 之间的紧密联系，已在 Leppin & Wilczek（2020年）的数值实验中得到注意；本文则对其进行了解析证明。此外， S_3 和 δ_3 均同时与其直接数值模拟结果吻合（参见图1（a）和7（b））。这些结果通过两种独立方法获得（S_3 通过考察 $\langle I_3\rangle$ 随Re_γ的变化，以及 δ_3 通过计算条件黏性拉普拉斯算子）。这支持了我们建模方法的一致性。

最后，(δ_4, δ_5 和 δ_6 中的系数解析表达式（3.6），包含规范项 γ_4 和 ζ_5。虽然单时统计与这两个项无关，但时间相关性会受到影响。我们根据直接数值模拟数据拟合这些规范项的值，并且借助

$$\gamma_4 \simeq -0.022, \qquad \zeta_5 \simeq 0.013, \tag{6.4}$$

解析预测（3.6）与 δ_n 根据图7（b）中所示的直接数值模拟独立计算得到的系数吻合良好。

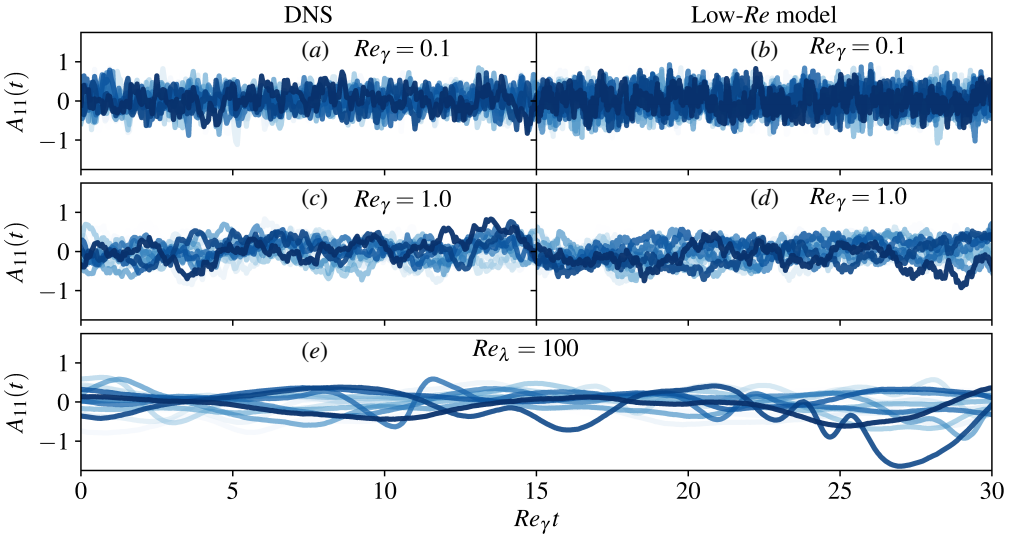

图8：低雷诺数下速度梯度纵向分量随时间的演化，数据来自直接数值模拟（a、c）和我们的低雷诺数模型（2.4）（b、d）。底部面板（e）显示中等偏大雷诺数下的轨迹。不同透明度的曲线对应同一模拟中的不同样本。所有图共用同一横轴，量纲时间以柯尔莫哥洛夫时间尺度归一化，$\bar{t}/\bar{\tau}_\eta = Re_\gamma\, t$。

6.2. 拉格朗日轨迹

现在我们已经完全确定了模型系数，接下来分析由我们的模型和直接数值模拟生成的流体粒子轨迹上的速度梯度。重现单时刻速度梯度统计所需的模型系数已经通过解析方法确定。然而，还必须拟合直接数值模拟数据，才能设定（3.6）中的规范项，这些规范项会影响速度梯度时间相关性。朗之万方程（5.9）及其对应的福克-普朗克方程（2.6）旨在匹配单时刻/单点统计，其结果既可以从欧拉角度解读，也可以从拉格朗日角度解读。以下我们采用拉格朗日视角。

图8 展示了模型和直接数值模拟中，在不同雷诺数下沿流体粒子轨迹测得的应变率纵向分量。当雷诺数趋近于零时，噪声占主导，样本轨迹遵循张量 Ornstein-Uhlenbeck 过程。随着雷诺数增大，随机强迫的影响减弱，时间相关性逐渐形成，较大的负梯度得以持续。关于 $A_{11} = 0$ 的对称性随着 Reynolds 增大而被打破，出现较大负梯度的可能性更高，在雷诺数较大时尤其明显。在数个 Kolmogorov 时间尺度内观察到的较高雷诺数轨迹显得平滑，这表明随机强迫的细节被流动丰富的小尺度湍流结构所掩盖。我们的低雷诺数模型得到的速度梯度样本轨迹，在视觉上与直接数值模拟所得结果相似，直至$Re_\gamma = O(1)$；接下来，我们将通过比较它们的时间相关性来量化这种相似性。

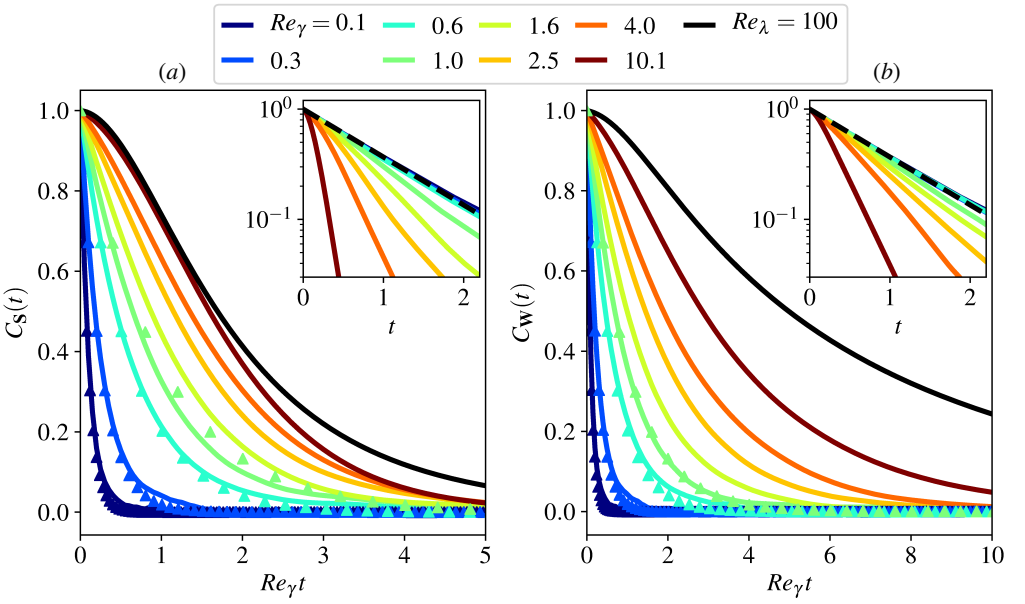

图9：不同雷诺数下，应变率 (a) 和旋转率 (b) 的归一化时间相关性，随以柯尔莫哥洛夫时间尺度归一化的时间间隔变化，$\bar{t}/\bar{\tau}_\eta = Re_\gamma\, t$。实线来自直接数值模拟，符号表示我们的低雷诺数模型（2.4）。插图以半对数尺度展示了相关性随无量纲时间间隔的变化，$t = (\bar{\nu}/\bar{\gamma}_0^2)\bar{t}$。插图中的黑色虚点线表示预期的零雷诺数相关性，$C_A = \exp(-t)$。

6.3. 直接数值模拟与低雷诺数模型的时间相关性在图9中，我们比较应变率和旋转率的归一化时间相关性 s

$$C_S(t) = \frac{\langle S_{ij}(t)S_{ij}(0)\rangle}{\langle S_{ij}(0)S_{ij}(0)\rangle}, \qquad C_W(t) = \frac{\langle W_{ij}(t)W_{ij}(0)\rangle}{\langle W_{ij}(0)W_{ij}(0)\rangle}, \tag{6.5}$$

由直接数值模拟和我们的低雷诺数模型（5.9）得到。在极小Re_γ下，速度梯度遵循线性朗之万方程，因此相关性随时间呈指数衰减，特征时间尺度为 $\bar{\gamma}_0^2/\nu$。因此，在无量纲时间(2.2）下，雷诺数较小时相关性趋于重合，如图9的插图所示。然而，随着雷诺数增大，相关性会以短于 $\bar{\gamma}_0^2/\nu$的时间尺度衰减，这表明对流非线性会削弱时间相关性。

此外，应变率的相关时间尺度更短，如图9(a)所示，而且当$Re_\gamma = O(10)$时，大部分相关性便已形成，也就是说，湍流构型刚开始转变后不久便已如此。相比之下，涡量的相关时间尺度更长，而这些持久相关性只有在雷诺数相对较大时才会形成。因此，与湍流流动相比，极强的涡量间歇性和持久相关性构成了低雷诺数随机流中主要缺失的因素。这与近期的观察结果一致（例如 Ghira等人，2022年）：只有在雷诺数非常大时，最强烈的涡结构才会充分发展。

我们的模型能够定量预测直至 $Re_\gamma = O(1)$ 的速度梯度时间相关性，为此，前几节讨论的规范项至关重要。此外，与应变率相关性相比，模型对涡量时间相关性的预测效果更好。最近，人们发现预测应变率时间相关性颇具难度。

在高雷诺数下的速度梯度降阶模型中也观察到了这一现象（Leppin & Wilczek2020）。

7. 结论

我们针对由随机强迫纳维–斯托克斯方程支配的低雷诺数流动，推导了一个速度梯度模型。该模型直接源自纳维–斯托克斯方程的弱耦合展开，并结合了速度梯度矩的均匀性约束；在小雷诺数下，该模型渐近精确。模型包含压力海森矩阵对速度梯度动力学产生的精确一阶修正，而黏性贡献则取决于建模假设。

我们通过比较直接数值模拟与模型的结果，探索了速度梯度张量丰富的统计几何。该模型能够定量预测随机低雷诺数流动中非高斯性的出现，且适用范围可达雷诺数为 1；直至流动转变为让人联想到湍流的速度梯度构型之前，模型在定性上仍与模拟结果一致。超过这一转变后，正如弱耦合微扰方法所预期的那样，模型预测会失效。无需输入直接数值模拟数据，即可从模型得到单时统计。另一方面，要捕捉时间相关性，则需要根据直接数值模拟数据拟合两个规范参数。

与我们的随机模型相关联的模型福克–普朗克方程，其渐近解可通过解析方法求解，从而利用封闭形式的渐近表达式刻画低雷诺数下偏度、对齐和间歇性的出现。这使我们能够量化湍流典型特征的出现，例如涡量与应变率之间的对齐、应变率特征值的优先构型，以及速度梯度主不变量概率密度函数特有的泪滴形状。

此处发展的方法也可能适用于在较高雷诺数下从纳维–斯托克斯方程出发，对速度梯度的概率密度函数进行建模，例如采用重整化技术（Yakhot & Orszag 1986年；Apolinário等 2019年）。

致谢。感谢 Gabriel B.Apolinário、Andy D. Bragg、Michele Iovieno 和 Alain Pumir 对稿件提出的深刻见解。本研究由马克斯·普朗克学会资助。计算工作在马克斯·普朗克计算与数据设施的 Cobra 高性能计算系统上完成。本项目获得欧盟地平线2020研究与创新计划下欧洲研究理事会（ERC）的资助（资助协议编号：101001081）。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

附录A. 直接数值模拟详情

本附录概述直接数值模拟的设置。我们采用有量纲变量，并用上横线表示；计量单位为（任意）代码单位。这是因为在我们的设置中，直接数值模拟扮演真实世界实验的角色，而我们通过这些实验确定参考长度 $\bar{\gamma}_0$，使得条件拉普拉斯算子（B12）的关系成立。确定 $\bar{\gamma}_0$ 以及湍动能的有量纲耗散率 $\bar{\varepsilon}$ 之后，我们便可以对所有有量纲变量（2.2）重新缩放，以无量纲形式写出低雷诺数模型（2.6、5.9）。

我们采用标准的傅里叶伪谱方法，对由高斯随机强迫驱动、受纳维–斯托克斯方程支配的不可压缩流动进行直接数值模拟，具体方法参见（例如 Carbone 等人 2019年）。该代码在三重周期立方域上求解不可压缩纳维-斯托克斯方程，其形式为

$$\bar{k}_i\widehat{u}_i = 0, \qquad (\partial_{\bar{t}} + \bar{\nu}\bar{k}^2)\widehat{u}_i + \mathrm{i}P_{ij}\bar{k}_l\mathcal{F}\left[\bar{u}_j\bar{u}_l\right] = \sqrt{\bar{\nu}}\bar{\sigma}_0\bar{k}\widehat{F}_i, \tag{A 1}$$

其中，F 表示空间傅里叶变换，$P_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j/k^2$ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 正交平面上的投影张量，$k = \|\boldsymbol{k}\|$ 表示波矢范数，i 是虚数单位，$\widehat{\boldsymbol{u}}$ 是变换后的速度场，

$$\widehat{\boldsymbol{u}}(\bar{\boldsymbol{k}}, \bar{t}) = \frac{1}{\bar{L}^3} \int \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{u}}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{t}) \exp(-\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{k}} \cdot \bar{\boldsymbol{x}}). \tag{A 2}$$

区域长度为 $L = 2\pi$ 代码单位，整数波矢分量的范围为区间 $-N/2 < k_i < N/2$，其中 N 是每个方向上解析的傅里叶模态数（Canuto 等 2006年）。傅里叶空间中每个方向的网格间距为 $\Delta k = 2\pi/L$（且 $\Delta k = 1$ 以代码单位表示）。低雷诺数模拟解析64^3 个傅里叶模态，空间分辨率随雷诺数增大而从 $\bar{k}_{\max}\bar{\eta} \simeq 40$ 变化至 $\bar{k}_{\max}\bar{\eta} \simeq 5\ Re_\gamma$。这里 $\bar{\eta} = (\bar{\nu}^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}$ 为柯尔莫哥洛夫长度尺度。较高雷诺数下的数值模拟解析 512^3 个傅里叶模态，其中$k_{\max}\bar{\eta} \simeq 3$，泰勒雷诺数为$Re_\lambda \approx 100$。非线性对流项引入的混叠误差通过3/2规则消除（Canuto 等 2006年），时间推进采用二阶随机龙格–库塔算法（Honeycutt 1992年）。

在所有模拟中，式（A1）中的复高斯随机强迫仅作用于低波数，其形式为

$$\hat{F}_i(\bar{\boldsymbol{k}}, t) = (\Delta\bar{k})^2 \sum_l P_{ij}(\boldsymbol{k}_l) \left[\left(\bar{a}_j^l + \mathrm{i}\bar{b}_j^l \right) \delta\left(\bar{\boldsymbol{k}} - \bar{\boldsymbol{k}}_l\right) + \left(\bar{a}_j^l - \mathrm{i}\bar{b}_j^l \right) \delta\left(\bar{\boldsymbol{k}} + \bar{\boldsymbol{k}}_l\right) \right] \tag{A 3}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{a}}^l$ 和 $\bar{\boldsymbol{b}}^l$ 是均值为零、方差为单位值的实值矢量时间白噪声高斯随机过程，$\langle \bar{a}_i^l(\bar{t})\ \bar{a}_j^m(\bar{t}') \rangle = \delta_{lm}\delta_{ij}\delta(\bar{t} - \bar{t}')$。式（A 3）中的求和覆盖受迫波数 $\bar{\boldsymbol{k}}_l$、$1 \leqslant \|\bar{\boldsymbol{k}}_l\| < \bar{K}$，其中 $\bar{K} = \sqrt{7}$（以代码单位计）。式（A1）中的噪声振幅与波数成正比，因此低波数处的动能谱 E_k 与 $\|\boldsymbol{k}\|^2$成正比。当 $\mathrm{Re}_\gamma \to 0$时，方程（A 1）趋于一个奥恩斯坦–乌伦贝克过程，此过程中速度的傅里叶模态彼此独立地演化，且方差为 $\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|^2 \propto \bar{\sigma}_0^2$，与黏度和波矢无关。因此，三维速度谱按 $E_k \sim \sigma_0^2 k^2$标度，这与最低阶傅里叶模态的热平衡相符。

通过在定义 $(\Delta\bar{k})^2$ 中采用前因子（A 3），$\bar{\sigma}_0$ 具有时间的倒数这一物理单位，并且独立于区域尺寸 L，决定了流动的柯尔莫哥洛夫时间尺度。此外，外力（A3）在很好的近似下具有统计各向同性，其梯度的相关性近似于我们在低雷诺数模型中采用的外力的各向同性相关性（2.5）。将定义（A3）代入方程（2.5）可得，在直接数值模拟中使用的有量纲强迫振幅 $\bar{\sigma}_0$ 与福克-普朗克方程（2.6）中采用的无量纲振幅 $\sigma = 1/\sqrt{15}$ 之间满足如下关系：

$$\sigma^2 \simeq \frac{\bar{\gamma}_0^2 \bar{\tau}_\eta^2}{30\bar{\nu}} \left(\frac{8}{(\Delta\bar{k})^2} \sum_l \bar{k}_l^4 \bar{\nu} \bar{\sigma}_0^2 \right) \simeq \frac{16\pi}{105\Delta\bar{k}^5} \bar{\gamma}_0^2 \bar{K}^7 \bar{\tau}_\eta^2 \bar{\sigma}_0^2, \tag{A 4}$$

其中，$\bar{\gamma}_0$ 是阻尼特征尺度（B12），而 K 是最大强迫波数。我们在下述附录B中计算了使酉柯尔莫哥洛夫时间尺度成立的直接数值模拟参数 $\bar{\sigma}_0$。模拟参数汇总于表1中。

为了了解参数范围和流动构型，我们在图10 中给出了速度谱，以及若干特征性的雷诺数和尺度比。图10(a) 展示了不同雷诺数下模拟得到的动能谱。随着雷诺数增加，能量向小尺度级联，高

	低 Reynolds 数系数	中等雷诺数
	模拟次数	数值模拟
解析傅里叶模态	64^3	512^3
雷诺数	$Re_\gamma \simeq 0.2 \times 10^{n/10}$	$Re_\lambda \simeq 100$
黏度（$\bar{\nu}$）	$10^{-n/10}$	0.002
柯尔莫哥洛夫时间尺度（$\bar{\tau}_\eta$）	1	0.09
强迫振幅（$\bar{\sigma}_0$）	0.027	0.3
最大强迫波数（K）	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$

表1：低雷诺数和中等雷诺数下直接数值模拟的代码单位模拟参数。在低雷诺数模拟中，n 是一个介于1和20之间的整数，用于调节黏度，进而调节雷γ。

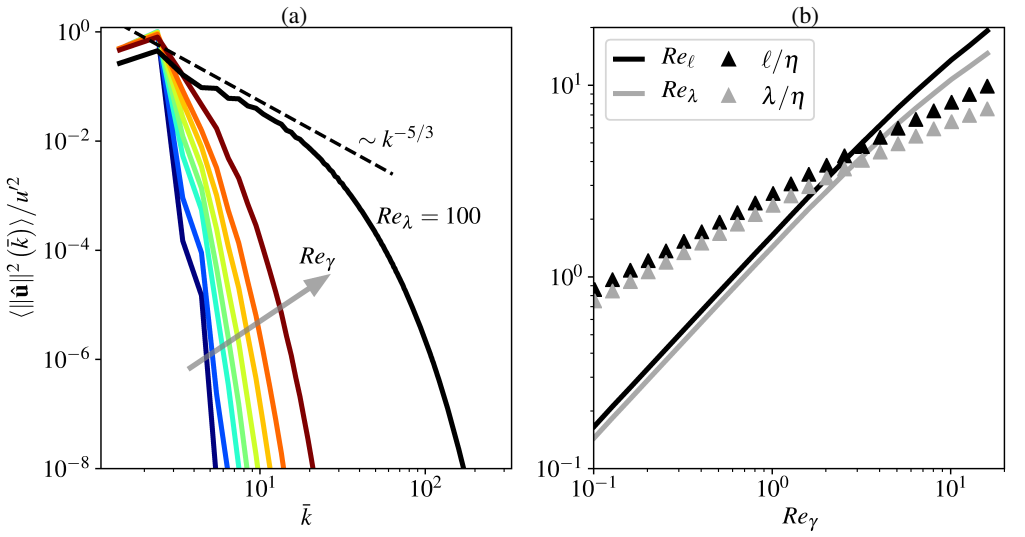

图10：（a）不同雷诺数下直接数值模拟得到的动能谱，其中雷γ 范围从0。1到10（配色方案与图9相同）。（b）积分尺度雷诺数雷l 和泰勒雷诺数雷$_\lambda$，以及尺度分离l/η 和λ/η，随低雷诺数扰动参数雷γ的变化。

波数模态的能量变得更高，而低波数模态则损失能量。特征性的惯性区趋势 $k^{-5/3}$ 仅在雷诺数最高时才明显。事实上，得出该惯性区斜率的唯象论证要求流动中存在明确的尺度分离，而随机低雷诺数流动并不具备这一条件。

图10(b)展示了各种雷诺数与相应尺度分离之间的比较。积分尺度雷诺数 $\mathrm{Re}_\ell = u'l/\nu$（其中 $u' = \sqrt{2\int \mathrm{d}k E_k/3}$ 为均方根速度，$l = \pi \int \mathrm{d}k E_k/(2ku'^2)$ 为积分尺度）在低雷诺数下与 Re_γ 成正比；而当 $\mathrm{Re}_\gamma \simeq 5$时，流动开始向湍流转变，此时它开始遵循不同的幂律。泰勒雷诺数 $\mathrm{Re}_\lambda = u'\lambda/\nu$（其中 $\lambda = \sqrt{15u'\tau_\eta}$ 为泰勒微尺度）始终小于 Re_ℓ；在低雷诺数下，它与 Re_γ 呈线性关系，而从 $\mathrm{Re}_\gamma \approx 5$起增长速度变慢。我们通过 l/η 和 $\lambda/\eta = \sqrt{15u'/u_\eta}$来量化尺度分离，其中$u_\eta = \eta/\tau_\eta$ 为科尔莫戈洛夫速度尺度。尽管 l 和 λ 在

很小的 Re_γ 下就已大于科尔莫戈洛夫尺度，但在较小雷诺数下，它们仅以 $\sqrt{Re_\gamma}$ 的速度增长，因此在 $Re_\gamma \gtrsim 1$ 时尺度分离仍非常有限。然而，在这样的雷诺数下，速度梯度统计中的偏度和优先对齐已经不可忽略，间歇性的迹象也开始显现。这与如下观察一致：即使在没有尺度分离的流动中，非高斯性也可能十分显著（Schumacher等2007年；Yakhot 与 Donzis，2018年）。

附录B. 通过 Wyld 展开确定模型参数

在本附录中，我们计算低雷诺数模型的参数，即参考长度 $\bar{\gamma}_0$、强迫振幅 $\bar{\sigma}_0$，以及应变自放大的增长率 $\langle \mathrm{I}_3 \rangle$ 和四阶矩的增长率 $\langle \mathrm{I}_5 \rangle$，

$$S_3 = \left.\frac{\partial \langle \mathcal{I}_3 \rangle}{\partial Re_\gamma}\right|_{Re_\gamma=0}, \qquad X_5 = \left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \langle \mathcal{I}_5 \rangle}{\partial Re_\gamma^2}\right|_{Re_\gamma=0}. \tag{B 1}$$

我们使用 Wyld（1961年）针对一般强迫提出的弱耦合展开，从纳维–斯托克斯方程推导这些量。尽管这一关于扰动参数 Re_γ 的幂级数是发散的，但它有助于推导极小雷诺数下的速度梯度矩，而这正是我们关注的范围。我们将这一弱耦合展开专用于高斯分布、时间白噪声的外力，并借助符号演算（Meurer等 2017年），求得 Re_γ 的二阶速度梯度矩。随着雷诺数展开阶数增加，计算很快变得非常复杂；下面我们以系数 S_3 为例说明这一过程，该系数表示 Re_γ 的一阶修正。

B.1. *Wyld* 展开的设置

我们考虑速度场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)$ 的时空傅里叶变换，

$$\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{TL^3}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}\boldsymbol{x}\, u_i(\boldsymbol{x},t)\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}), \tag{B 2}$$

其中，$\boldsymbol{q} = (\omega,\ \boldsymbol{k})$ 是频率–波矢空间中的位置矢量，而 T 和 L 分别是速度场在时间和空间上的周期。根据 Wyld（1961年），我们将速度场形式上展开为 Reynolds 数的幂级数。

$$\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q}) = \sum_N \widetilde{u}_i^{(N)}(\boldsymbol{q}) Re_\gamma^N, \tag{B 3}$$

其中 $N \geqslant 0$为整数。系数 $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(N)}$ 在 Re_γ 的各阶项之间通过纳维–斯托克斯方程（A1）的无量纲形式相互关联

$$\left(-\mathrm{i}\omega + k^2\right)\widetilde{u}_i + \mathrm{i}Re_\gamma P_{ij}k_l\left(\widetilde{u}_j * \widetilde{u}_l\right) = \sigma_0 k \tilde{F}_i, \tag{B 4}$$

其中，无量纲参数 σ_0 与方程（A1）中的相应有量纲（DNS）参数相关，$\sigma_0 = \bar{\tau}_\eta \bar{\sigma}_0$，符号 $*$ 表示卷积，

$$\left[\widetilde{u}_j * \widetilde{u}_l\right](\boldsymbol{q}) = \frac{TL^3}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}'\widetilde{u}_j(\boldsymbol{q}')\widetilde{u}_l(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'). \tag{B 5}$$

将速度场（B3）的级数展开代入纳维–斯托克斯方程（B 4），可得级数系数的以下关系式 $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(N)}$，

$$\widetilde{u}_i^{(0)}(\boldsymbol{q}) = \sigma_0 k G(\boldsymbol{q}) \tilde{F}_i \tag{B 6a}$$

$$\widetilde{u}_i^{(N+1)}(\boldsymbol{q}) = G_{ijl}(\boldsymbol{q}) \sum_{L+M=N} \left[\widetilde{u}_j^{(L)} * \widetilde{u}_l^{(M)}\right](\boldsymbol{q}), \tag{B 6b}$$

其中 L, M, N 均为非负整数，传播子为

$$G(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{-\mathrm{i}\omega + k^2}, \qquad G_{ijl}(\boldsymbol{q}) = -\frac{\mathrm{i}}{2} G(\boldsymbol{q}) \left(P_{il} k_j + P_{ij} k_l\right). \tag{B 7}$$

外　　部高斯力在时间上呈 δ 相关，均值为零，其相关性为

$$\left\langle \tilde{F}_i(\boldsymbol{q}) \tilde{F}_j(\boldsymbol{q}') \right\rangle = 2 \frac{(2\pi)^5}{T^2 L^4} \sum_l P_{ij}(\boldsymbol{k}_l) \left(\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_l) + \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_l)\right) \delta(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}') \tag{B 8}$$

其中 $\boldsymbol{k} = \bar{\gamma}_0 \boldsymbol{k}$，波矢 $\boldsymbol{k}$ 的分量均为整数，且受迫波矢属于区间 $\{1 \leqslant \|\bar{\boldsymbol{k}}_l\|^2 < 7\}$ (参见附录 A中的 DNS 设置B8)。离散外力（B8）是对DNS（A3）中所用外力进行时间傅里叶变换的结果；在 DNS 中，波矢按构造就是离散的。这种离散外力 $\boldsymbol{F}$仅近似各向同性，而 Wyld 展开和 DNS（B8）中所用外力的空间相关性也仅近似符合低雷诺数模型中采用的各向同性形式（2.5）。不过，对于所选的受迫波数范围，实际强迫相关性与其各向同性极限之间的差异极小。

B.2. 雷诺数零阶时的速度梯度矩

我们关注由展开方程（B6）得到的速度梯度矩，可由傅里叶空间中的速度场推导如下。应变率的傅里叶变换是作用于速度场的线性算子，并且在雷诺数的任意阶上均有

$$\widetilde{S}_{ij}^{(N)} = \widetilde{S}_{ijl} \widetilde{u}_l^{(N)}, \qquad \widetilde{S}_{ijl} = \frac{\mathrm{i}}{2} \left(P_{il} k_j + P_{jl} k_i\right). \tag{B 9a}$$

零阶应变率幅值可由方程（B6a）结合外力相关性的定义（B8）得到，

$$\langle \mathcal{I}_1 \rangle = \left\langle S_{ij}^{(0)} S_{ji}^{(0)} \right\rangle = \frac{V}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q} k_i k_i \left\langle \widetilde{u}_j^{(0)}(\boldsymbol{q}) \widetilde{u}_j^{(0)}(-\boldsymbol{q}) \right\rangle = 684 \sigma_0^2, \tag{B 10}$$

其中 $V = TL^3/(2\pi)^4$ 是卷积归一化因子。结果（B 10）不仅在零阶时成立，而且对所有雷诺数都成立，因为随机外力 $\boldsymbol{F}$ 会产生恒定的梯度方差（Furutsu 1963年；Novikov 1965年），且与（2.1）中非线性项的权重无关。令柯尔莫哥洛夫时间尺度为酉，$\langle \mathcal{I}_1 \rangle = 1/2$，可得

$$\bar{\sigma}_0 \simeq 0.027, \tag{B 11}$$

<escape>这就是我们在直接数值模拟（DNS）中采用的参数（参见表1）。</escape>

最后，我们需要根据量纲速度梯度场计算阻尼参数 $\bar{\gamma}_0$，因为它构成了低雷诺数模型中的参考长度。该参考长度由高斯随机场中的条件拉普拉斯算子（B12）得出。

场（Wilczek & Meneveau 2014年），

$$\left\langle \bar{\nabla}^2 \boldsymbol{S}^{(0)} \middle| \boldsymbol{S}^{(0)} \right\rangle = -\frac{\boldsymbol{S}^{(0)}}{\bar{\gamma}_0^2}. \tag{B 12}$$

对方程（B12）两边与应变率本身进行双重缩并并取平均，可得

$$\bar{\gamma}_0^2 = \frac{\left\langle S_{ij}^{(0)} S_{ij}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \bar{\nabla}_k S_{ij}^{(0)} \bar{\nabla}_k S_{ij}^{(0)} \right\rangle} = \frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \bar{k}^2 \left\langle \widetilde{u}_j^{(0)}(\boldsymbol{q}) \widetilde{u}_j^{(0)}(-\boldsymbol{q}) \right\rangle}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \bar{k}^4 \left\langle \widetilde{u}_j^{(0)}(\boldsymbol{q}) \widetilde{u}_j^{(0)}(-\boldsymbol{q}) \right\rangle} \simeq 0.20, \tag{B 13}$$

其中，波矢范数 $\bar{k}$ 和系数 $\bar{\gamma}_0$ 均为有量纲的（以代码单位计）。FPE（4.2）渐近解中出现的展开参数 Re_γ 与 $\bar{\gamma}_0^2$ 成正比，如（2.3）所示。Re_γ 与基于泰勒微尺度的雷诺数 Re_λ 之间的关系通常用于研究非高斯性的出现（Gotoh & Yang 2022），但取决于外力的具体细节。

B.3. 雷诺数一阶和二阶下的速度梯度矩

现在还需要根据纳维–斯托克斯方程的 Wyld 展开（Wyld 1961年；Lvov & L'vov 2023）确定梯度矩 S_3 和 X_5（B1）的增长率。对于雷诺数一阶下应变率的三阶矩 Re_γ，有

$$S_3 = 3\left\langle S_{i_1 j_1}^{(1)} S_{j_1 j_2}^{(0)} S_{j_2 i_1}^{(0)} \right\rangle = 3V^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1 \widetilde{S}_{i_1 j_1 l_1}(\boldsymbol{q}_1) \widetilde{S}_{j_1 j_2 l_2}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \widetilde{S}_{j_2 i_1 l_3}(-\boldsymbol{q}_2) \times \\ \times \left\langle \widetilde{u}_{l_1}^{(1)}(\boldsymbol{q}_1) \widetilde{u}_{l_2}^{(0)}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \widetilde{u}_{l_3}^{(0)}(-\boldsymbol{q}_2) \right\rangle. \tag{B 14}$$

该矩分为确定性部分和随机部分，系综平均作用于随机部分。我们的目标是使系综平均中只包含高斯变量。为此，我们迭代地利用较低阶速度来代换 $\widetilde{u}_i^{(N)}$，直至 $\widetilde{u}_i^{(0)}$，所依据的是纳维–斯托克斯方程B6。在一阶情况下，这种代换得到

$$S_3 = 3V^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_3 \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1 \widetilde{S}_{i_1 j_1 l_5}(\boldsymbol{q}_1) G_{l_5 l_1 l_4}(\boldsymbol{q}_1) \widetilde{S}_{j_1 j_2 l_2}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \widetilde{S}_{j_2 i_1 l_3}(-\boldsymbol{q}_2) \times \\ \times \left\langle \widetilde{u}_{l_1}^{(0)}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_4}^{(0)}(\boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_2}^{(0)}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \widetilde{u}_{l_3}^{(0)}(-\boldsymbol{q}_2) \right\rangle. \tag{B 15}$$

将高阶速度用高斯随机场 $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(0)}$ 表示，会引入额外的卷积；对于更高次数的矩，这种迭代代换会导致项数迅速增加（Monin & Yaglom 1975；Lvov & L'vov 2023），因此需要对若干 Wyld–Dyson 积分进行符号和数值计算。

由于 $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(0)}$ 服从高斯分布，式（B15）中的平均可拆分为成对项（Isserlis 1918；Wick 1950）

$$\begin{aligned} S_3 =& 3V^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_3 \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1 \widetilde{S}_{i_1 j_1 l_5} G_{l_5 l_1 l_4}(\boldsymbol{q}_1) \widetilde{S}_{j_1 j_2 l_2}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \widetilde{S}_{j_2 i_1 l_3}(-\boldsymbol{q}_2) \\ & \Big(\left\langle \widetilde{u}_{l_1}^{(0)}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_4}^{(0)}(\boldsymbol{q}_3) \right\rangle \left\langle \widetilde{u}_{l_2}^{(0)}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \widetilde{u}_{l_3}^{(0)}(-\boldsymbol{q}_2) \right\rangle + \\ & \left\langle \widetilde{u}_{l_1}^{(0)}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_2}^{(0)}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \right\rangle \left\langle \widetilde{u}_{l_4}^{(0)}(\boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_3}^{(0)}(-\boldsymbol{q}_2) \right\rangle + \\ & \left\langle \widetilde{u}_{l_1}^{(0)}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_3}^{(0)}(-\boldsymbol{q}_2) \right\rangle \left\langle \widetilde{u}_{l_4}^{(0)}(\boldsymbol{q}_3) \widetilde{u}_{l_2}^{(0)}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \right\rangle \Big). \end{aligned} \tag{B 16}$$

此外，对于 δ相关噪声，平均运算就相当于缩并的组合

关于确定性部分，即

$$S_3 = 3V^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_3\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\widetilde{S}_{i_1j_1l_5}(\boldsymbol{0})G_{l_5l_1l_1}(\boldsymbol{0})\widetilde{S}_{j_1j_2l_2}(\boldsymbol{q}_2)\widetilde{S}_{j_2i_1l_2}(-\boldsymbol{q}_2)R(\boldsymbol{q}_3)R(\boldsymbol{q}_2)+$$
$$+3V^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\widetilde{S}_{i_1j_1l_5}(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1)G_{l_5l_1l_4}(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1)\widetilde{S}_{j_1j_2l_1}(\boldsymbol{q}_1)\widetilde{S}_{j_2i_1l_4}(-\boldsymbol{q}_2)R(\boldsymbol{q}_1)R(\boldsymbol{q}_2)+$$
$$+3V^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_3\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\widetilde{S}_{i_1j_1l_5}(\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3)G_{l_5l_1l_2}(\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3)\widetilde{S}_{j_1j_2l_2}(\boldsymbol{q}_3)\widetilde{S}_{j_2i_1l_1}(-\boldsymbol{q}_2)R(\boldsymbol{q}_2)R(\boldsymbol{q}_3) \quad \text{(B 17)}$$

其中，为了方便记号，$R = \sigma_0^2 k^2 |G|^2 \left\langle \tilde{F}_i(\boldsymbol{q})\ \tilde{F}_i(-\boldsymbol{q}) \right\rangle$是$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(0)}$的自相关函数。在更高阶的情况下，由于高阶高斯分布矩会分解为相关函数的乘积，独立缩并的数量会迅速增加，从而带来额外的技术难题。

我们通过结合符号演算与离散积分来处理频率-波数积分（B17）。频率积分通过留数定理解析地计算（Kleinert & Schulte-Frohlinde 2001）。另一方面，由于强迫相关性（B8）的形式是狄拉克 delta 函数的叠加，对波矢的积分可化为对离散受迫波矢的离散求和。计算积分（B 17），以及 X_5 对应的积分后，我们最终得到

$$S_3 \simeq -0.027, \qquad X_5 \simeq -0.0010, \qquad \text{(B 18)}$$

与我们在低$Re\gamma$（参见图（1）
）.

对于参数 X_5，其步骤与 S_3中概述的相同，但展开至雷诺数的二阶，并且多一个积分变量。此外，根据 Wick 定理，$\widetilde{u}^{(0)}$ 的六阶矩平均值现在分解为十五对（不同于方程（B16），其中我们只得到三对）。因此，直接计算此处给出的（B17）这类积分，计算代价很高；而对展开后的纳维–斯托克斯方程（B4）进行（等价的）数值积分则更为可取。该积分得到场 $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(N)}$（B 3），据此可通过快速傅里叶变换，在物理空间中计算梯度的矩（对于这些低阶矩以及外力（13^3，FFT 只需 B8）个网格点）。对（B17）这类表达式进行系统研究，以实现这些积分的高效符号／数值求值，目前仍在进行中。

参考文献

Alexakis, A. & Biferale, L. 2018年 湍流流动中的级联与转变。物理学报告 **767–769**，1–101。Apolinário, G.B., Moriconi, L. & Pereira, R.M. 2019年 湍流拉格朗日模型中的瞬子与涨落。物理学 *A*：统计力学与应用 **514**，741–757。Ashurst, W. T., Kerstein, A. R., Kerr, R. M. & Gibson, C. H. 1987年 模拟 Navier–Stokes 湍流中涡量和标量梯度与应变率的排列。物理流体 **30** (8)，2343–2353。Ballouz, J. G. & Ouellette, N. T. 2020年 湍流级联中能量传递的几何约束。物理评论：流体 **5**，034603。Benzi, R., Ciliberto, S., Baudet, C. & Chavarria, G. R. 1995年 三维均匀各向同性湍流的标度规律。物理学 *D*：非线性现象 **80** (4)，385–398。Benzi, R., Ciliberto, S., Tripiccione, R., Baudet, C., Massaioli, F. & Succi, S. 1993年 湍流流动中的扩展自相似性。物理评论 *E* **48**，R29–R32。Betchov, R. 1956年 关于各向同性湍流中涡量生成的一条不等式。*Journal of Fluid Mechanics* **1** (5)，497–504。Buaria, D. & Pumir, A. 2021年 湍流流动中强涡量的非局部放大。物理评论：研究 **3**，L042020。

Buaria, D. & Pumir, A. 2022 涡量-应变率动力学与湍流的最小尺度。Physical Review Letters 128, 094501。Buaria, D., Pumir, A., Bodenschatz, E. & Yeung, P. K. 2019 湍流流动中的极端速度梯度。New Journal of Physics 21 (4), 043004。Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. & Zang, T. A. 2006 谱方法。Springer 柏林，海德堡。Carbone, M. & Bragg, A. D. 2020 涡旋拉伸是湍流能量级联的主要原因吗？Journal of Fluid Mechanics 883, R2。Carbone, M., Bragg, A. D. & Iovieno, M. 2019 各向同性湍流中的多尺度流体–粒子热相互作用。Journal of Fluid Mechanics 881, 679–721。Carbone, M., Iovieno, M. & Bragg, A. D. 2020 各向异性压力海森矩阵的对称变换与降维。Journal of Fluid Mechanics 900, A38。Carbone, M. & Wilczek, M. 2021 运用张量函数表示理论对湍流中的压力海森矩阵建模。载于《Progress in Turbulence IX》（编者：R. Örlü, A. Talamelli, J. Peinke & M. Oberlack），第223–229页。沙姆：施普林格国际出版公司。Carbone, M. & Wilczek, M. 2022 各向同性湍流仅存在两个Betchov齐次性约束。Journal of Fluid Mechanics 948, R2。Cavagna, A., Di Carlo, L., Giardina, I., Grigera, T., Pisegna, G. & Scandolo, M. 2021 带无散约束的模耦合场论动态重整化群。Journal of Statistical Physics 184。Chen, S. Y., Dhruva, B., Kurien, S., Sreenivasan, K. R. & Taylor, M. A. 2005 湍流速度低阶结构函数的反常标度。Journal of Fluid Mechanics 533, 183–192。Chertkov, M., Pumir, A. & Shraiman, B. I. 1999 拉格朗日四面体动力学与湍流现象学。Physics of Fluids 11 (8), 2394–2410。Chevillard, L. & Meneveau, C. 2006 拉格朗日动力学与湍流的统计几何结构。Physical Review Letters 97, 174501。Davidson, P. A. 2015《湍流：科学家与工程师入门》。牛津大学出版社。Dresselhaus, E. & Tabor, M. 1992 一般流场中物质微元拉伸与排列的运动学。Journal of Fluid Mechanics 236, 415–444。Dyson, F. J. 1962 随机矩阵特征值的布朗运动模型。Journal of Mathematical Physics 3 (6), 1191–1198。Eyink, G. L. 2006 湍流应力张量的多尺度梯度展开。Journal of Fluid Mechanics 549, 159–190。Furutsu, K. 1963 涨落介质中电磁波的统计理论（I）。Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology 67, 303–323。Ghira, A. A., Elsinga, G. E. & da Silva, C. B. 2022 高雷诺数各向同性湍流中强涡量结构的特征。Physical Review Fluids 7, 104605。Girimaji, S. S. & Pope, S. B. 1990 湍流速度梯度的扩散模型。Physics of Fluids A: Fluid Dynamics 2 (2), 242–256。Gotoh, T. & Yang, J. 2022 涨落从高斯态向湍流态的转变。Philosophical Transactions of the Royal Society A 380 (2218), 20210097。Honeycutt, R. L. 1992 随机龙格–库塔算法。I. 白噪声。Physical Review A 45, 600–603。Hopf, E. 1952 统计水力学与泛函演算。Journal of Rational Mechanics and Analysis 1, 87–123。Ishihara, T., Gotoh, T. & Kaneda, Y. 2009 通过直接数值模拟研究高雷诺数各向同性湍流。Annual Review of Fluid Mechanics 41 (1), 165–180。Isserlis, L. 1918 关于任意数量变量的正态频率分布任意阶乘积矩系数的公式。Biometrika 12 (1-2), 134–139。Itskov, M. 2015《工程师用张量代数与张量分析》。瑞士：施普林格国际出版公司。James, I. M. 1977《斯蒂费尔流形的拓扑》。剑桥：剑桥大学出版社。Johnson, P. L. 2020 湍流中通过多尺度非线性应变与涡量相互作用实现从大尺度到小尺度的能量传递。Physical Review Letters 124, 104501。Johnson, P. L. & Meneveau, C. 2016 利用初始高斯场的近期变形映射闭合湍流中的拉格朗日速度梯度演化。Journal of Fluid Mechanics 804, 387–419。Khurshid, S., Donzis, D. & Sreenivasan, K. R. 2022 各向同性湍流中普适标度的出现，arXiv: 2211.06307。Kleinert, H. & Schulte-Frohlinde, V. 2001《Phi4理论的临界性质》。世界科学出版社。

Leppin, L. A. & Wilczek, M. 2020 捕捉湍流中的速度梯度和粒子旋转率。《Physical Review Letters》125, 224501。Livan, G., Novaes, M. & Vivo, P. 2018 《随机矩阵导论：理论与实践》。Springer。Lund, T.S. & Novikov, E. A. 1992 通过速度梯度张量对亚格子尺度应力进行参数化。湍流研究中心（斯坦福大学和美国国家航空航天局）。Lund, T. S. & Rogers, M. M. 1994 一种改进的湍流流动应变状态概率度量。《流体物理学》6 (5), 1838–1847。Lvov, Y. V. & L'vov, V. S. 2023 各向同性湍流中普适标度的涌现，arXiv: 2303.06803。Martin, P. C., Siggia, E. D. & Rose, H. A. 1973 8, 423 437 经典系统的统计动力学。《Physical Review A》–。Meneveau, C. 2011 湍流流动中速度梯度张量的拉格朗日动力学与模型。《流体力学年评》43 (1), 219–245。Meurer, A., Smith, C. P., Paprocki, M., Čertík, O., Kirpichev, S. B., Rocklin, M., Kumar, A., Ivanov, S., Moore, J. K., Singh, S., Rathnayake, T., Vig, S., Granger, B. E., Muller, R. P., Bonazzi, F., Gupta, H., Vats, S., Johansson, F., Pedregosa, F., Curry, M. J., Terrel, A. R., Roučka, Š., Saboo, A., Fernando, I., Kulal, S., Cimrman, R. & Scopatz, A. 2017 Sympy：Python中的符号计算。《PeerJ计算机科学》3, e103。Monin, A.S. & Yaglom, A.M. 1975 《统计流体力学》，第I卷，《湍流力学》。剑桥：麻省理工学院出版社。Moriconi, L, Pereira, R M & Grigorio, L S 2014 湍流拉格朗日模型中的速度梯度概率分布函数。《统计力学杂志：理论与实验》2014 (10), P10015。Novikov, E. A. 1965 湍流理论中的泛函与随机力方法。《苏联实验与理论物理学杂志》20 (5), 1290–1294。Pennisi, S. & Trovato, M. 1987 关于G.F. Smith教授的各向同性函数表示的不可约性。《国际工程科学杂志》25 (8), 1059–1065。Pereira, R. M., Moriconi, L. & Chevillard, L. 2018 湍流流动中速度梯度动力学的多重分形模型。《 Journal of Fluid Mechanics》839, 430–467。Reynolds, O. 1883 关于决定水流呈直线还是蜿蜒运动的条件及平行通道阻力定律的实验研究。《皇家学会哲学汇刊》174, 935–982。Rivlin, R. S. & Ericksen, J. L. 1955 各向同性材料的应力－变形关系。《理性力学与分析杂志》4, 323–425。Schumacher, J., Sreenivasan, K. R & Yakhot, V. 2007 低雷诺数流动的渐近指数。《New Journal of Physics》9 (4), 89–89。Sreenivasan, K. R. & Yakhot, V. 2021 纳维–斯托克斯方程所描述的三维湍流动力学。《Physical Review Fluids》6, 104604。Tom, J., Carbone, M. & Bragg, A. D. 2021 从应变率特征标架的角度探索不同尺度下的湍流速度梯度。《Journal of Fluid Mechanics》910, A24。Vela-Martín, A. & Jiménez, J. 2021 各向同性湍流惯性区中的熵、不可逆性与级联。《Journal of Fluid Mechanics》915, A36。Vieillefosse, P. 1982 理想不可压缩流体中涡量与剪切之间的局部相互作用。《法国物理学杂志》43 (6), 837–842。Wick, G. C. 1950 碰撞矩阵的计算。《Physical Review》80, 268–272。Wigner, E. P. 1955 无限维边框矩阵的特征向量。《数学年刊》62 (3), 548–564。Wilczek, M. & Meneveau, C. 2014 基于高斯随机场的速度梯度统计中的压力海森矩阵与黏性贡献。《Journal of Fluid Mechanics》756, 191–225。Wyld, H.W 1961 14, 143 165 不可压缩流体湍流理论的表述。《物理学年刊》–。Yakhot, V. & Donzis, D. 2017 随机力搅拌流体中多重标度的涌现。《Physical Review Letters》119, 044501。Yakhot, V. & Donzis, D. A. 2018 强湍流中的反常指数。《物理学D：非线性现象》384-385, 12–17。Yakhot, V. & Orszag, S. A. 1986 湍流的重整化群分析。I. 基本理论。《科学计算杂志》1, 3–51。Yakhot, V. & Sreenivasan, K.R. 2004 迈向湍流多重分形的动力学理论。《物理学A：统计力学及其应用》343, 147–155。