arXiv:2305.03459v2 [cs.GT] 7 Feb 2024

多商品路由博弈中无政府代价函数的相变

Roberto Cominetti[a]、Valerio Dose[b]、Marco Scarsini[c]

[a]工程与科学学院，阿道弗·伊瓦涅斯大学，*Diagonal las Torres 2640*，佩尼亚洛伦，*7910000*，智利圣地亚哥首都大区[b]计算机工程、自动化与管理系，“萨皮恩扎”罗马大学，*ViaAriosto 25*，罗马，*00185*，意大利[c]经济与金融系，路易斯大学，*Viale Romania 32*，罗马，*00197*，意大利

摘要

我们研究无原子多商品路由博弈中无政府代价和均衡流随交通需求变化的行为。我们分析其光滑性，并特别关注需求的某些特定取值：在这些取值处，Wardrop均衡的支撑集发生相变，最优路径集合随之骤然改变。通常，发生这种相变时，无政府代价函数会出现断点，即不可微。我们证明，若所有商品的需求按比例变化，那么在断点处，无政府代价和均衡时的社会成本的左、右导数中较大的一个，都对应于较小的均衡支撑集。这一结论在需求按比例变化的假设下证明了O’Hare 等人 (2016)提出的猜想；他们在模拟中观察到了这一现象。我们还给出了反例，表明当需求并非按比例变化时，即使需求沿着一条不经过原点的直线变化，单侧导数的这种单调性也可能不成立。

关键词： Wardrop均衡、网络流、交通需求*2020*年数学学科分类： 91A14、91A07、91A43

1. 引言

非原子路由博弈中的 Wardrop 均衡，为大量

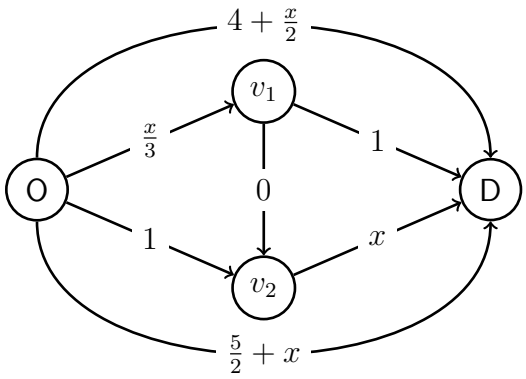
提交至 *arXiv* 的预印本 *2024*年*2*月*9*日

互不协调、互不合作的参与者如何在网络上分配交通流提供了数学描述。典型例子包括道路网络和电信网络。该模型是非原子拥塞博弈的一种特殊情况，其资源是有向多重图中的边，每条边 e 都有一个相关的成本或延迟 $c_e(x_e)$，由边上的交通负载 x_e 的非递减连续函数给出。不同类型的用户有不同的起讫点（OD）对，通常称为商品。每个 OD 对都有一个非负交通需求，用户可以选择不同的路径，从起点前往目的地。如此一来，他们便在网络上形成流。Wardrop均衡是一种交通流分配，它满足每个 OD 对的需求，并使得任意给定类型的所有用户都只使用成本最小的路径。

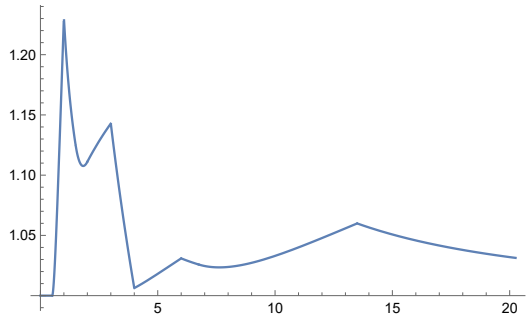
交通需求通常难以预测，因为它本质上是一种动态现象：一周中不同日期之间以及同一天的不同时段内都存在变化。此外，随着人口增长和汽车拥有量增加，交通需求会在更长的时间尺度上不断上升。因此，分析不同需求情景下 Wardrop 均衡的敏感性，对于了解这一均衡概念在多大程度上能够近似真实交通模式具有重要意义。通过这项分析，规划者可以预见均衡的演变，更好地设计不断增长的交通水平所需的政策干预和基础设施改造。这些观察促使多位作者研究交通需求变化如何影响 Wardrop 均衡，重点考察其连续性、光滑性和单调性。在 第 1.2 节 中，我们将简要概述以往针对这些问题开展的研究。

另一方面，众所周知，Wardrop 均衡并非高效，因为可能存在其他交通分布，能够产生更低的总延误。均衡的低效率通常通过无政府代价 （PoA）来衡量，即总均衡成本与总最优成本之比。这为衡量社会成本方面可能实现的最大改进提供了基准。早期关于 PoA 的研究主要关注在最坏情形下寻找紧界，而近期研究则转向分析 PoA 作为交通需求函数时的行为。

图 1 展示了需求变化时 PoA 的典型曲线：当需求非常小或非常大时，PoA 接近 1；在中间值域内，PoA 则上下波动，偶尔出现尖锐拐点以及平滑的临界点



(a) 某个网络



(b) 左侧网络的 PoA

图 1：单商品示例，展示 PoA 随需求变化的行为。该函数在需求为 1、3、4、6 和 $27/2$ 时不光滑。在这些断点之间，最优路径集合保持稳定，PoA 平滑变化。在需求为 4 时，最优路径集合发生收缩，导数跳升。在其他所有断点处，最优路径集合均发生扩张，导数跳降。

局部极小值。正如Youn 等人 (2008年) 报告的那样，在波士顿、伦敦和纽约等实际网络中也观察到了这种曲线；此外，这些网络中的PoA 值远低于最坏情况估计值。Colini-Baldeschi 等人和 Wu 等人在相当一般的假设下，正式证明了低需求和高需求时 PoA 均接近 1 ，见 Colini-Baldeschi 等人 (2019、2020年) 以及 Wu 等人(2021年)。对于中间值域，O'Hare 等人 (2016) 观察到，拐点与均衡时最优路径集合的突然变化有关，并提出了本文所分析的一个猜想。Cominetti 等人 (2021年) 为此提供了部分支持：对于具有仿射成本函数的单商品路由博弈，在均衡时最优路径集合不变的需求区间内，PoA 可微，且至多有一个临界点，并且该点必为局部极小值。本文将针对多商品网络和更一般的成本函数，进一步探讨这些问题。

1.1. 我们的结果

我们研究非原子路由博弈，并分析交通需求变化时均衡流、社会成本和PoA的行为

可能涉及多个 OD 对。本文研究的是受约束路由博弈，在这类博弈中，每个 OD 对只能使用受限路径集合中的路径，而不一定能够使用连接其起点和目的地的所有路径。我们的研究得出的核心结论是：当所有 OD 对的需求始终按照固定比例变化时，PoA 的行为与单商品情形下观察到的现象类似。然而，当需求变化时，不同 OD 对之间的需求比例并未保持恒定，这种情况便不再成立。

具体而言，我们首先将一些关于均衡随需求变化的连续性和可微性的结果推广到多个OD对。我们证明，如果成本函数是 $\mathcal{C}^1$ 且导数严格为正，并且需求沿着由单个变量 t 参数化的光滑曲线变化，那么只要需求曲线始终处于最小成本路径集合不变的区域内，每条边上的均衡负载和 PoA 也会作为 t 的函数而呈现 $\mathcal{C}^1$ 。

通常情况下——尽管并非总是如此——当最优路径集合发生变化且均衡出现相变时，光滑性会在这些点失效。我们称这些点为断点。对于具有 $\mathcal{C}^1$ 成本函数且其导数严格为正、需求按比例变化的网络，我们证明了O'Hare 等人(2016提出的一个猜想：在断点处，PoA 左右导数中较大的一个对应于较小的最优路径集合（见图 1中的示例）。我们还通过一个示例表明，当需求并非按比例变化时，即使这些需求沿着需求空间中的一条仿射直线变化，O'Hare 等人(2016) 最初提出的完整猜想也可能不成立。

1.2. 相关工作

本文采用的非原子路由博弈均衡定义源自 Wardrop (1952年)。Wardrop 均衡作为凸优化问题解的刻画最早由 Beckmann 等人 (1956) 描述；而最早尝试显式计算此类均衡的工作，分别是针对仿射成本的 Tomlin (1966年) 的研究，以及针对一般凸成本的 Dafermos 和 Sparrow (1969) 的研究。有关这一主题的综述，可参阅Florian 和 Hearn (1995) 以及 Correa 和 Stier-Moses(2011)。

多位作者研究了均衡流和成本如何随交通需求变化。Hall (1978)证明，任意给定OD对的均衡成本是该OD对交通量的递增函数。另一方面，Fisk(1979)给出了一个例子，表明

即使总需求增加，总社会成本也可能下降。关于这一悖论现象的进一步分析，可参见Dafermos 和 Nagurney(1984年)。关于均衡流的光滑性，Patriksson (2004年)给出了均衡方向可微性的充要条件，而Josefsson 和 Patriksson (2007年)证明了均衡成本具有方向可微性，但指出均衡边负载未必具有方向可微性。关于最优路径集，Englert 等人(2010年)给出了单OD路由博弈的例子，其中交通需求仅有任意小幅增加，就会导致均衡时所使用的路径集彻底改变，尽管边负载的变化仍然很小。此外，对于次数至多为 d的多项式成本，如果需求增加 ε ，那么均衡成本的增幅至多为$(1+\varepsilon)^d$倍。关于将这一结果推广到多个OD对的内容，可参见Takalloo 和 Kwon (2020年)。最近，Cominetti 等人 (2024年)分析了存在一种Wardrop均衡的情形，其中每条边的负载均非递减；而Verbree 和 Cherukuri (2023年)研究了使Braess悖论在特定需求下发生的条件。在后者的研究中，作者考察了仿射成本函数网络中的均衡成本斜率；这些结果与本文证明的一些定理相似。

Pigou（1920年）可能是首位研究非原子路由博弈中均衡的低效率的学者。用于衡量这种低效率的 PoA 正式定义由 Koutsoupias 和 Papadimitriou（1999年）提出，并在 Papadimitriou（2001年）的研究中获得了这一名称。早期关于 PoA 的大部分文献都集中于为不同类别的博弈（例如拥塞博弈和路由博弈）确定 PoA 的紧确界。在一篇具有里程碑意义的论文中，Roughgarden 和 Tardos（2002年）证明，在每个具有仿射成本的非原子拥塞博弈中，PoA 均有一个不超过$4/3$ 的上界，并证明了这一界是紧确的。Roughgarden（2003年）将这一结果推广到最高次数为 d 的多项式成本函数，表明 PoA 的增长幅度为 Θ（d/log d）。Dumrauf 和 Gairing（2006年）研究了另一类此类结果，其重点是成本函数为若干单项式之和、且这些单项式的次数处于指定值域内的情况；Roughgarden 和 Tardos（2004年）则研究了可微成本函数 c（x）满足 $x\,c$（x）为凸函数的类别。Correa 等人（2004年、2007年、2008年）研究了正则性较低的成本函数以及不同定义的社会成本。

多篇论文探讨了在真实网络中计算 PoA。Monnot 等人(2017分析了来自大量新加坡学生样本的数据

通勤上学的学生，观察到的 PoA 远小于理论最坏情况界限。此外，You n 等人 (2008年,2009) 研究了波士顿、伦敦和纽约的网络中，当所有 OD 交通需求均按相同因子缩放时的 PoA，再次观察到 PoA 的值始终小于最坏情况界限。这三个城市中 PoA 的变化呈现出共同的模式：在需求较小和较大时，PoA 都接近 1 ，而在中间值域内则呈现振荡，在局部最大值处出现尖锐拐点，在局部最小值处则出现平滑的临界点。O'Hare 等人 (2016) 指出，当均衡状态下的最优路径集合发生扩张或收缩时，就会出现这些拐点，并提出了本文稍后将要分析的猜想。

近期的研究尝试从数学上解释上述研究中观察到的 PoA 实证表现。针对分段线性成本函数，Klimm 和 Warode (2019年, 2022) 给出了一种根据交通需求计算 Wardrop 均衡的算法。对于需求趋近于零或无穷大（轻度交通和重度交通）时均衡的效率，Colini-Baldeschi 等人 (2019, 2020年) 和 Wu 等人 (2021 年) 对其进行了分析。Colini-Baldeschi 等人 (2019) 研究了单 OD 并行网络的情形，表明当成本函数正则变动时，重度交通下 PoA 收敛于 1 。在 Colini-Baldeschi 等人 (2020年) 中，这些结果被推广到一般网络，并且还考察了轻度交通制度下 PoA 的表现。对于重度交通的情形，Wu 等人 (2021年) 采用了不同的技术进行研究。对中间需求范围的研究，即交通既非轻度也非重度时的情形，是 Cominetti 等人 (2021) 的主要目标。他们证明，对于仿射成本函数，PoA 函数的形态与实证研究中观察到的相同。最后，我们提及 Wu 和 Möhring(2023年)，他们证明了非原子路由博弈中 PoA 的连续性；PoA 是多种参数的函数，这些参数不仅包括需求，也包括成本函数。

1.3 论文结构

第 2 节回顾本文所研究的模型，并确定后文使用的记号。第 3 节给出关于均衡负载、均衡时的社会成本、最优社会成本和无政府代价的一些正则性与光滑性结果。第 4 节讨论这些量在断点附近的行为，此处通常会失去光滑性。第 5 节包含主要结果的证明。其他一些技术性证明见

附录 A，而附录 B则列出了本文中使用的符号。

2. 可变需求网络博弈

本节介绍全文所用的模型和符号。我们考虑具有多个 OD 对的路由博弈，并研究其均衡如何随多变量需求变化，重点关注需求向量沿需求空间中的一条光滑曲线变化的情形。特别是，我们研究最简单且自然的情形：所有需求都按同一因子缩放，因此各 OD 对的需求按比例变化。

设 $G := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个顶点集为 $\mathcal{V}$、边集为$\mathcal{E}$的有向多重图，其中每条边 $e \in \mathcal{E}$ 都有一个连续且非递减的成本函数c_e：$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$，其中 $c_e(x_e)$表示边 e 上的负载为 x_e时通过该边的行驶时间。一个起讫点（OD） h由三元组 $(\mathrm{O}^{(h)}, \mathrm{D}^{(h)}, \mathcal{P}^{(h)})$ 定义，其中 $\mathrm{O}^{(h)} \in \mathcal{V}$是起点顶点，$\mathrm{D}^{(h)} \in \mathcal{V}$ 是终点顶点，而 $\mathcal{P}^{(h)}$ 是从 $\mathrm{O}^{(h)}$ 到 $\mathrm{D}^{(h)}$的简单路径的子集。符号 $\mathcal{H}$ 表示 OD 对的集合。假定集合 $\mathcal{P}^{(h)}$非空，但可能小于图 G中从起点到终点的所有路径组成的集合。为简化符号和公式，我们假定这些集合两两不相交，因此任意两种不同的 OD 对都没有共同路径。特别地，考虑路径流量时，无需指明该交通流属于哪个 OD 对。我们注意到，结果并不依赖这一简化假设（见注释 4.7）。所有可行路线的集合是集合$\mathcal{P}^{(h)}$（$h \in \mathcal{H}$）的不交并，记作

$$\mathcal{P} := \bigcup_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{P}^{(h)}. \tag{2.1}$$

定义 2.1。A 路由博弈结构 是一个元组 $(G,\ \boldsymbol{c},\ \mathcal{H})$，其中 G 是一个有向多重图，$\boldsymbol{c}$ 是非递减且连续的边成本向量，$\mathcal{H}$ 是起讫点对的集合。

路由博弈结构 $(G,\ \boldsymbol{c},\ \mathcal{H})$ 的交通需求是一个向量$\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(h)})_{h \in \mathcal{H}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$。每个这样的 $\boldsymbol{\mu}$ 都确定一个相关的可行流 $\boldsymbol{f} = (f_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}}$ 集合，满足

$$\sum_{p \in \mathcal{P}^{(h)}} f_p = \mu^{(h)} \text{ for all } h \in \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

这些流进而产生一个负载分布 $\boldsymbol{x} = (x_e)_{e\in\mathcal{E}}$，其中 x_e 表示边 $e \in \mathcal{E}$ 上的总交通量，定义为

$$x_e = \sum_{p\in\mathcal{P}} \delta_{ep} f_p \text{ for all } e \in \mathcal{E}, \tag{2.3}$$

当 $\delta_{ep} = 1$ 如果 $e \in p$ 且 $\delta_{ep} = 0$ 否则。更简洁地说，(2.2) 和 (2.3) 可以写成矩阵形式:

$$S\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{f}. \tag{2.4}$$

我们用 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$ 表示满足这些流/负载守恒方程的有序对 $(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}$ 的集合。我们还用 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}$ 表示将 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$ 投影到负载变量空间 $\boldsymbol{x}$上的投影。

略微滥用一下记号，路径 $p \in \mathcal{P}$ 上的总行驶时间记为

$$c_p(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{e\in p} c_e(x_e). \tag{2.5}$$

T由 $(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{x})$ 引起的总延迟称为社会成本，记为

$$\mathsf{SC}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}) := \sum_{p\in\mathcal{P}} f_p \cdot c_p(\boldsymbol{x}) = \sum_{e\in\mathcal{E}} x_e \cdot c_e(x_e). \tag{2.6}$$

2.1. 均衡与无政府代价

设 $(G,\ \boldsymbol{c},\ \mathcal{H})$ 为一个路由博弈结构。对于每个需求向量 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$，我们都得到一个经典的非原子路由博弈。回顾一下，Wardrop均衡是一个可行的流-负载对 $(\boldsymbol{f}^*,\ \boldsymbol{x}^*) \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$，存在$\boldsymbol{\lambda} \coloneqq (\lambda^{(h)})_{h\in\mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}$ 使得

$$\begin{cases} c_p(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^{(h)} & \text{for every } h \in \mathcal{H} \text{ and all } p \in \mathcal{P}^{(h)} \text{ with } f_p^* > 0, \\ c_p(\boldsymbol{x}^*) \geq \lambda^{(h)} & \text{for every } h \in \mathcal{H} \text{ and all } p \in \mathcal{P}^{(h)} \text{ with } f_p^* = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

数量 $\lambda^{(h)}$ 称为与 OD 对$h \in \mathcal{H}$相关联的均衡成本。

根据 Beckmann 等人 (1956) 的研究，我们知道，所有均衡负载分布的集合 $\boldsymbol{x}^*$ 与该最小化问题的最优解集合相同

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}} \Phi(\boldsymbol{x}), \tag{2.8}$$

其中 $\Phi(\boldsymbol{x}) := \sum_{e\in\mathcal{E}} C_e(x_e)$，且 $C_e(x_e) := \int_0^{x_e} c_e(z)\,\mathrm{d}z$。由于成本函数 c_e 连续且非递减，目标函数 $\Phi(\cdot)$ 连续且凸。因此，最小值能够达到，所以对于每个$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$，至少存在一个均衡。

一个均衡$(\boldsymbol{f}^*,\ \boldsymbol{x}^*) \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$会诱导出均衡边成本 $\tau_e := c_e(x_e^*)$。在 Fukushima (1984年中，均衡边成本被证明是严格凸对偶规划的最优解

$$\min_{\boldsymbol{\tau}} \sum_{e\in\mathcal{E}} C_e^*(\tau_e) - \sum_{h\in\mathcal{H}} \left(\mu^{(h)} \min_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} \sum_{e\in p} \tau_e \right), \tag{2.9}$$

其中 $C_e^*(\cdot)$ 是 $C_e(\cdot)$ 的 Fenchel共轭，而后者是严格凸的。因此，对于每个需求向量 $\boldsymbol{\mu}$，均衡时的边成本 τ_e 都有唯一确定的值，并且在每种均衡负载分布 $\boldsymbol{x}^*$ 中都相同。这定义了映射 $\boldsymbol{\mu} \mapsto \tau_e(\boldsymbol{\mu})$，将每个需求向量 $\boldsymbol{\mu}$ 映射到相应的均衡边成本。由此可知，在均衡状态下，路径 $p \in \mathcal{P}$ 的成本 $c_p^*(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{e\in\mathcal{P}} \tau_e(\boldsymbol{\mu})$，以及每个 $h \in \mathcal{H}$ 的均衡成本 $\lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu}) = \min_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} c_p^*(\boldsymbol{\mu})$，对于每个 $\boldsymbol{\mu}$ 也都有唯一确定的值，并且不取决于我们所考虑的具体均衡 $(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{x}^*)$。

此外，当边成本严格递增时，均衡负载也由 $x_e^*(\boldsymbol{\mu}) = c_e^{-1}(\tau_e(\boldsymbol{\mu}))$ 唯一确定。为便于后文引用，我们引入活跃制度的概念，它为每个 $\boldsymbol{\mu}$关联均衡状态下的最低成本路径集合。

定义 2.2. 考虑路由博弈结构 $(G,\ \boldsymbol{c},\ \mathcal{H})$。

(a) 子集 $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ 称为制度，如果对每个 $h \in \mathcal{H}$都有 $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}^{(h)} \neq \varnothing$.

(b) 需求为 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$ 时的活跃制度 是集合

$$\widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mu}) = \bigcup_{h\in\mathcal{H}} \left\{ p \in \mathcal{P}^{(h)} \colon c_p^*(\boldsymbol{\mu}) = \lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu}) \right\}. \tag{2.10}$$

以上内容使我们能够将需求为 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$ 时的均衡社会成本 定义为

$$\mathsf{SC}^*(\boldsymbol{\mu}) := \sum_{h\in\mathcal{H}} \mu^{(h)} \lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{p\in\mathcal{P}} f_p^*\, c_p(\boldsymbol{f}^*) = \sum_{e\in\mathcal{E}} x_e^*\, c_e(x_e^*), \tag{2.11}$$

其中 $(\boldsymbol{f}^*,\ \boldsymbol{x}^*) \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$ 是任意均衡流。

此外，需求向量 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$ 的最优社会成本定义为

$$\widetilde{\mathsf{SC}}(\boldsymbol{\mu}) \coloneqq \min_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{x})\in\mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}} \sum_{p\in\mathcal{P}} f_p\, c_p(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}} \sum_{e\in\mathcal{E}} x_e\, c_e(x_e), \tag{2.12}$$

且需求量为 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$ 时的无政府代价为

$$\mathsf{PoA}(\boldsymbol{\mu}) \coloneqq \frac{\mathsf{SC}^*(\boldsymbol{\mu})}{\widetilde{\mathsf{SC}}(\boldsymbol{\mu})} \geq 1. \tag{2.13}$$

3. 均衡与 PoA 的连续性和光滑性。

接下来，我们研究需求沿由标量变量参数化的光滑曲线变化时，均衡、社会成本和无政府代价的行为。例如，对于固定向量 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^H$，线性需求函数 $\boldsymbol{\mu}(t) = t\,\boldsymbol{r}$ 表示不同 OD 对的需求按比例变化的情形。

定义 3.1. 一个具有需求函数 $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$ 的非原子路由博弈由元组 $(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$ 给出，其中需求是函数 $\boldsymbol{\mu}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_+^H$。

定理 3.2. 设$(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$ 是一个非原子路由博弈，其需求函数 $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$连续可微。设成本函数 c_e 为 $\mathcal{C}^1$[^1]，且具有严格正导数，并假设活跃制度 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(t))$在 $t^0 \in \mathbb{R}_+$ 的某个邻域内保持不变。那么：

(a) 均衡负载映射 $t \mapsto \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\mu}(t))$ 在 t^0 的某个邻域内连续可微。特别地，均衡成本 $\big(\lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu}(t))\big)_{h\in\mathcal{H}}$ 和均衡时的社会成本 $\mathsf{SC}^*(\boldsymbol{\mu}(t))$ 属于 $\mathcal{C}^1$ 类，在 t^0 的某个邻域内成立。*(b)* 此外，若映射 $x_e \mapsto x_e c_e(x_e)$ 是凸的，则最小社会成本[^2] $\widetilde{\mathsf{SC}}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 和无政府代价 $\mathsf{PoA}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 属于 $\mathcal{C}^1$ 类，在 t^0 的某个邻域内成立。

[^1]当需求为 $\mu(t^0)$ 时，每条最小成本路径上都承载着严格为正的流，这是活跃制度 $\mathcal{P}(\mu(t))$ 在 t^0 的某个邻域内保持恒定的最简单情形。在这种情况下，根据均衡成本的连续性，

我们可以确信，需求发生微小变化后，活跃制度不会改变。

定理 3.2 的证明利用了下文引理 3.3 和 引理 3.4中所述的均衡成本和最优社会成本的正则性性质。引理 3.3 将 Cominetti 等人 (2021年，命题 3.1) 的结果推广到了多 OD 情形，同时也推广了Hall (1978) 对成本严格递增情形的研究。引理 3.3 的证明见 Cominetti 等人 (2024年，命题 1)，而引理 3.4 的证明见附录 A。

引理 3.3。 设$(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H})$ 为一个路由博弈结构。那么，均衡边成本 $\boldsymbol{\mu} \mapsto \tau_e(\boldsymbol{\mu})$ 唯一确定且连续。此外，均衡成本 $\boldsymbol{\mu} \mapsto \lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu})$ 也是连续的。

引理 3.4。 设$(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H})$ 为一个路由博弈结构。若成本函数c_e 为 $\mathcal{C}^1$ ，且函数 $x_e \mapsto x_e c_e(x_e)$ 为凸函数，则最优$\widetilde{\ }$社会成本函数 $\boldsymbol{\mu} \mapsto \mathsf{SC}(\boldsymbol{\mu})$ 为凸函数且处处 $\mathcal{C}^1$ 。

除了这些引理之外，我们对定理 3.2 的证明还涉及分析一些不对变量施加符号约束的辅助最小化问题。为了恰当地表述这些问题，我们将边成本函数扩展到整个 $\mathbb{R}$ 上，使其仍然 $\mathcal{C}^1$ 具有严格为正的导数，且满足$\lim_{x \to -\infty} c_e(x) < 0$ 对所有边 $e \in \mathcal{E}$均成立。接着，对于每个固定机制 $\mathcal{R}$，我们考虑以下辅助问题:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}} \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$}$$

其中，可行集 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$由所有由某个流 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$ 诱导、且支撑集位于 $\mathcal{R}$中的带符号负载向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ 构成，即

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} : (\exists \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}}) \text{ s.t. } S\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{f},\ \text{and } f_p = 0 \text{ for all } p \notin \mathcal{R} \right\}. \tag{3.1}$$

附录 A中的引理 A.1 (b)表明，当成本 c_e 是 $\mathcal{C}^1$ 且导数严格为正时，$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$ 具有唯一的最优解 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$ ，且映射 $\boldsymbol{\mu} \to \boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$ 属于 $\mathcal{C}^1$类。此外，引理 A.1 (a)给出了拉格朗日乘子的显式表达式，其唯一性在定理 4.4 (ii)的证明中有所用到。

我们要求在 ($\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$) 中，制度 $\mathcal{R}$ 保持固定，且变量不受符号约束，因此该问题是 (2.8) 的松弛问题，并且我们可能有$f_p < 0$ 对于某些路径 $p \in \mathcal{P}^{(h)} \cap \mathcal{R}$。此外，尽管对于每一个最优

最优解 $\boldsymbol{x}$ （$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$）且对于每个 OD 对 h 所有路径的成本 $p \in \mathcal{P}^{(h)} \cap \mathcal{R}$最终都等于某个共同值 $m^{(h)}$，某些路径 $p \in \mathcal{P}^{(h)} \setminus \mathcal{R}$ 的成本可能更低 $c_p(\boldsymbol{x}) < m^{(h)}$。然而，如果对于某个需求向量 $\boldsymbol{\mu}$，我们有一个最优解满足 $f_p \geq 0$ 对所有$p \in \mathcal{P}^{(h)} \cap \mathcal{R}$ 以及 $c_p(\boldsymbol{x}) \geq m^{(h)}$ 对所有 $p \in \mathcal{P}^{(h)} \setminus \mathcal{R}$，那么这也是原问题（2.8）的一个最优解，因此它对应于Wardrop均衡。

定理3.2的证明。(a) 点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$是（$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$）的最优解的一个充分条件是存在乘子$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})$ 使得

$$
\begin{aligned}
c_e(x_e) &= \eta_e && \forall e \in \mathcal{E}, \\
m^{(h)} &= \sum_{e \in p} \eta_e && \forall h \in \mathcal{H}\ \forall p \in \mathcal{P}^{(h)} \cap \mathcal{R}, \\
m^{(h)} &= \sum_{e \in p} \eta_e - \nu_p && \forall h \in \mathcal{H}\ \forall p \in \mathcal{P}^{(h} \setminus \mathcal{R}.
\end{aligned}
$$

对于任意需求，$\boldsymbol{\mu}$ 均衡负载向量 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\mu})$ 对 $\mathcal{R} = \widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mu})$ 满足这些条件，其中 $\eta_e = \tau_e = c_e(x_e^*)$、$m^{(h)} = \lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu})$ 和 $\nu_p = \sum_{e \in p} \tau_e - \lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu})$ 对 $p \notin \mathcal{R}$ 成立。这表明，对于 $\mathcal{R} = \widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mu})$，均衡负载 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\mu})$ 与（$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$）的唯一最优解 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$ 一致。现在，根据假设，$\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(t)) \equiv \mathcal{R}$ 在 t_0 附近的 t 上为常数，因此 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\mu}(t)) = \boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}(t))$，它作为 $\mathcal{C}^1$需求函数 $t \mapsto \boldsymbol{\mu}(t)$ 与映射 $\boldsymbol{\mu} \mapsto \boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$ 的复合是连续可微的；根据引理 A.1 (b)，该映射也 $\mathcal{C}^1$。

(b) SC 的光滑性 $t \mapsto$ 社会成本$(\boldsymbol{\mu}(t))$ 是 引理 3.4 的直接推论。结合 (a) 部分，这意味着 $t \mapsto$PoA$(\boldsymbol{\mu}(t)) =$ 社会成本$^*(\boldsymbol{\mu}(t))$/社会成本$(\boldsymbol{\mu}$ ({v55'>)) 的光滑性。 □

备注 3.5。 (a) 注意到定理 3.2要求活跃制度 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(t))$在 $t^0 \in \mathbb{R}_+$ 附近保持不变，但这仅沿需求曲线成立，而不一定在环境空间 $\boldsymbol{\mu}(t^0)$ 的邻域内成立 $\mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$。这涵盖了曲线 $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$ 可能沿着具有不同活跃制度的两个区域之间边界滑动的一些特殊情形。

(b) 调用注释 A.2中的附录 A，定理 3.2 中成本导数的严格正性定理 3.2可以通过假设以下条件而略微放宽

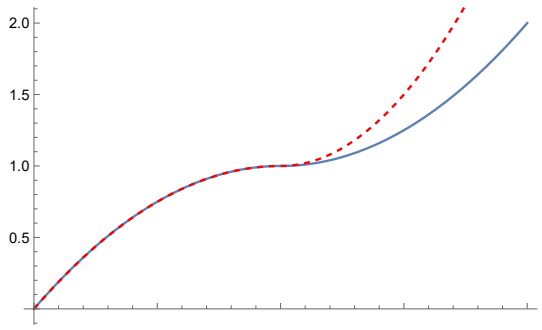


图 2：成本函数（3.2）（蓝色）和（3.3）（红色虚线）的图像。这两个函数是$\mathcal{C}^1$ 但不是凸函数。

边成本 $c_e(\cdot)$ 仅为严格递增，且满足 $c_e'(x_e(\boldsymbol{\mu}(t)))$ 的边集$e = 0$ 不包含无向环。

以下示例表明，定理 3.2 中的假设几乎是最小的：即使最优路径集合在参考点附近保持不变，只要存在一条边，其成本为非凸成本且导数仅在一个点处为零，也可能导致不光滑的均衡负载。在下面的示例 3.6 和3.7 中，成本函数导数为零的点并非原点。能否将定理 3.2 扩展到仅在原点处导数为零的成本函数，仍是一个开放问题。这将具有重要意义，因为美国公共道路局（BPR）成本函数也具有这一特征。

示例 3.6。在这个具有严格递增 $\mathcal{C}^1$ 成本函数的示例中，均衡流在某个并非断点的点处不可微。考虑一个双链路并行网络，其成本函数（绘于图 2中）为

$$c_1(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & \text{if } x \leq 1, \\ (x-1)^2 + 1 & \text{if } x > 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$c_2(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & \text{if } x \leq 1, \\ 2(x-1)^2 + 1 & \text{if } x > 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

这些函数为 $\mathcal{C}^1$，其导数在 $x = 1$ 处为零。均衡流为：

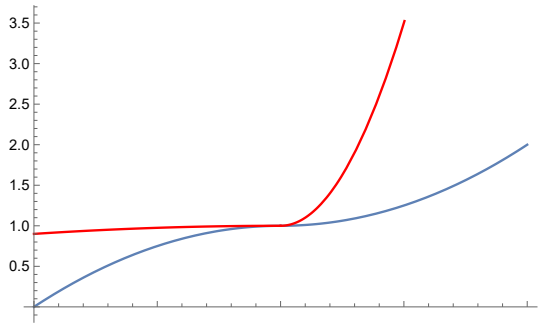


图3：成本函数 c_3 （红色）和 c_4 （蓝色）在例3.7中的曲线。这两个函数C^1 但不是凸函数。

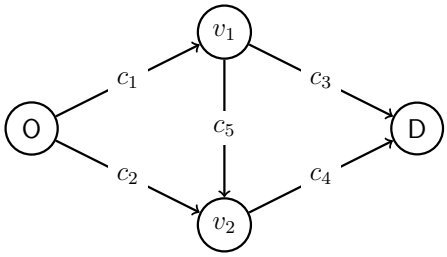
区间	x_1	x_2
$\mu \in [0, 2)$	$\mu/2$	$\mu/2$
$\mu \in [2, +\infty)$	$\frac{\sqrt{2}\cdot\mu-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{\mu+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

两种流在 $\mu = 2$ 处均不可微。

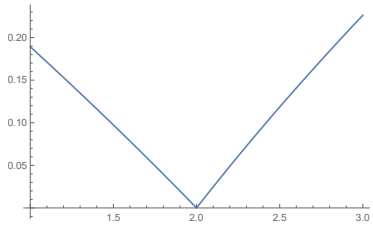
例3.7。在流量消失的点也可以观察到非光滑性。考虑图4(a) 中的惠斯通网络，其中

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= x, \\
c_2(x) &= x, \\
c_3(x) &= \begin{cases} -\frac{1}{10}(x-1)^2 + 1 & x \le 1, \\ 10(x-1)^2 + 1 & x > 1, \end{cases} \\
c_4(x) &= \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & x \le 1, \\ (x-1)^2 + 1 & x > 1, \end{cases} \\
c_5(x) &= x^2.
\end{aligned}
$$

图中展示了 c_3 和 c_4 的曲线，见图3。在 $\mu = 2$的一个邻域内，三条路径均处于活跃状态。当需求从下方趋近于2 时，之字形路径上的流量会减少，并在 $\mu = 2$时消失；而在2之后，流量则以正导数递增。当 $\mu \in [1, 3]$ 时，之字形路径上的流量曲线见图4(b)。



(a)



(b)

图4：左侧是经典的惠斯通网络，其成本函数定义见例3.7。右侧的图展示了需求在区间 $[1,3]$内变化时垂直链路上的负载。注意，当需求为2 时，负载为零，且负载函数不可微。

4. 断点附近的行为

本节描述函数 SC* 和 PoA 在断点附近的行为。具体而言，我们研究需求向量依赖于单个实参数时，它们的左右导数。为形式化地描述这一情形，我们采用以下概念：

定义4.1。 我们称 $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$ 为 $(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$的一个 $\mathcal{P}$-断点，如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(t))$作为 t 的函数，在区间 的每个 $[\bar{t}-\varepsilon, \bar{t})$以及 $(\bar{t}, \bar{t}+\varepsilon]$ 上均为常数，且满足 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}-\varepsilon)) \neq \mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}+\varepsilon))$。在这种情况下，我们使用符号

$$\widehat{\mathcal{P}}(\bar{t}^-) := \widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}-\varepsilon)), \quad \widehat{\mathcal{P}}(\bar{t}^+) := \widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}+\varepsilon)). \tag{4.1}$$

O'Hare 等人 (2016) 考虑了断点附近的两种情形，并观察到，根据经验，如果这两种情形中的一种包含另一种，那么与较小情形相关的 社会成本* 和 PoA 的导数大于较大情形中的导数。他们在猜想 4.5、4.6 和 4.9 中将这一想法形式化。用我们的术语和符号，可以将这些猜想概括为以下陈述，其中我们定义$g(\bar{t}^-) := \lim_{t\to\bar{t}^-} g(t)$ 以及 $g(\bar{t}^+) := \lim_{t\to\bar{t}^+} g(t)$。

猜想 4.2 (O'Hare 等人 (2016))。 设 $(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$ 是一个路由博弈，其中成本函数连续、可微、严格递增且二阶导数为正，并且需求函数 $t \to \boldsymbol{\mu}(t)$ 是分段 $\prec$ 仿射且逐分量非递减，并满足 t。若 $t \in \mathbb{R}_+$ 是一个 $\mathcal{P}$- 断点，则有以下结论：

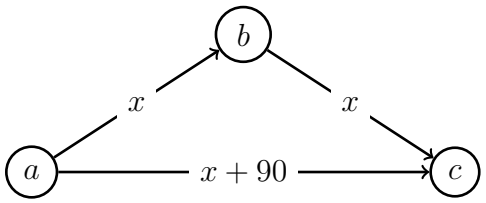
(a) 若 $\widehat{\mathcal{P}}(\bar{t}^-) \subset \widehat{\mathcal{P}}(\bar{t}^+)$，则 (社会成本$^*\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^-) >$ (社会成本$^*\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^+)$，且 (PoA$\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^-) >$(PoA $\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^+)$；(b) 若 $\widehat{\mathcal{P}}(\bar{t}^-) \supset \widehat{\mathcal{P}}(\bar{t}^+)$，则 (社会成本$^*\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^-) <$ (社会成本$^*\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^+)$，且 (PoA$\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^-) <$(PoA $\circ\boldsymbol{\mu}$)$'(\bar{t}^+)$，

如下一个具有仿射成本和仿射需求函数的例子所示，上述猜想以其最一般的形式表述时并不成立。不过，我们稍后将证明，该猜想的一种受限形式确实成立。

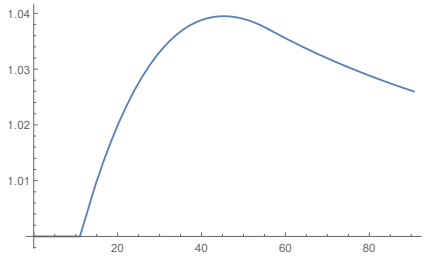
例 4.3. 考虑 图 5(a) 中由 Fisk(1979) 研究的网络，其成本函数为仿射函数，且有三个 OD 对，其需求和路径如下表所示：

OD	需求	可行路线
$(a,\ b)$	1	$p_1 = a \to b$
$(a,\ c)$	t	$p_2 = a \to c$ 和 $p_3 = a \to b \to c$
$(b,\ c)$	100	$p_4 = b \to c$

其中，映射 $t \mapsto \boldsymbol{\mu}(t)$ 是仿射的，只有 $(a,\ c)$ 的需求随 t 增加。



(a) Fisk 网络



(b) 具有仿射需求的 Fisk 网络的 PoA 需求

图5：一个猜想 4.2 不成立的例子。

下表显示了所有 $t \geq 0$ 的路径流和均衡时的社会成本：

区间	f_1^*	f_2^*	f_3^*	f_4^*	社会成本*($\mu(t)$)
$t \in [0, 11$	1	t	0	100	$10001 + 90t + t^2$
$t \in [11, +\infty$	1	$\frac{1}{3}(11 + 2t)$	$\frac{1}{3}(t - 11)$	100	$\frac{1}{3}(28892 + 382t + 2t^2)$

而最优流和最小社会成本则为

区间	$\widetilde{f}_1$	$\widetilde{f}_2$	$\widetilde{f}_3$	$\widetilde{f}_4$	$\widetilde{\text{社会成本}}(\mu(t))$
$t \in [0, 56)$	1	t	0	100	$10001 + 90t + t^2$
$t \in [56, +\infty)$	1	$\frac{1}{3}(56 + 2t)$	$\frac{1}{3}(t - 56)$	100	$\frac{1}{3}(26867 + 382t + 2t^2)$。

图 5(b) 展示了 PoA的图像，其

$$\mathsf{PoA}(\mu(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, 11), \\ \dfrac{28892 + 382t + 2t^2}{3(10001 + 90t + t^2)} & \text{if } t \in [11, 56), \\ \dfrac{28892 + 382t + 2t^2}{26867 + 382t + 2t^2} & \text{if } t \geq 56, \end{cases} \tag{4.2}$$

的导数

$$(\mathsf{PoA} \circ \mu)'(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in [0, 11), \\ -\dfrac{2(-610051 + 8890t + 101t^2)}{3(10001 + 90t + t^2)^2} & \text{if } t \in [11, 56), \\ -\dfrac{4050(191 + 2t)}{(26867 + 382t + 2t^2)^2} & \text{if } t \geq 56. \end{cases} \tag{4.3}$$

在 $t = 11$ 处，活跃制度发生扩展，路径 p_3 在均衡时成为需求对 (a, c) 的最优路径。然而，社会成本 $^* \circ \boldsymbol{\mu}$ 和 PoA $\circ \boldsymbol{\mu}$ 的右导数（分别为 142 和 $5/1852$）严格大于相应的左导数（112 和 0）。这构成了一个反例，推翻了 O'Hare 等人（2016）最初提出的猜想 4.2(a)。$\widetilde{\ }$另请注意，正如引理 3.4 所预言的那样，社会成本 $\circ\, \boldsymbol{\mu}$ 和 PoA $\circ \boldsymbol{\mu}$ 均

在 $t = 56$ 处光滑，尽管社会最优中存在相变。为简单起见，示例中选择需求沿方向 (0，1，0) 变化；不过，对于接近 (0，1，0) 的严格正方向，该反例同样成立。

现在我们继续证明 猜想 4.2 的一个受限版本成立。该版本假设需求函数为线性函数，因此随着总需求增加，每个 OD 对中各项需求之间的比例保持不变。

定理 4.4。 设$(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$ 是一个非原子路由博弈，其需求函数为线性函数 $\boldsymbol{\mu}(t) = t\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$ 固定。设 $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$ 是一个 $\widehat{\mathcal{P}}$-断点。

(i) 若边成本函数为 $\mathcal{C}^1$ 且具有严格正导数，则 (a) 和 (b) 在 猜想 *4.2* 中的性质在弱不等式下成立。(ii) 若边成本是非递减仿射函数，则 (a)和(b) 在 猜想 *4.2* 中的性质在严格不等式下成立。

注 4.5。 定理 4.4(i) 可推广至仅具有严格递增成本函数的网络，前提是边集 e 中满足 $c_e'(x_e(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}))) = 0$ 的边构成一个不含无向环的图。

备注 4.6。 定理 4.4 (i) 中导数严格为正的假设 定理 4.4 (i)将 BPR 成本函数的情形排除在结果之外。如果我们将 定理 3.2 (a)推广到仅可能在零点处导数为零的严格递增光滑成本函数，那么该结果在 BPR 情形下也成立。

注释 4.7。 违反模型中要求集合 $\mathcal{P}^{(h)}$ 对每个 $h \in \mathcal{H}$两两不相交的假设，并不会影响本文的结果。事实上，总可以添加一个虚拟起点 $\tilde{\mathsf{O}}^{(h)}$，并为每条原始路径 $(\tilde{\mathsf{O}}^{(h)}, \mathsf{O}^{(h)})$ 连接一条零成本边 $p \in \mathcal{P}^{(h)}$。此操作不会改变均衡；因此，原有边上的均衡负载保持不变。此外，这一变换不会产生任何新的无向环，因此，正如 注释 4.5 中所述，结果依然成立。

示例 4.8。 在 $\mathcal{P}$-断点 $\bar{t}$ 处，$\mathcal{P}(\bar{t}^-) \subset \mathcal{P}(\bar{t}^+)$ 和 $\mathcal{P}(\bar{t}^-) \supset\!\!\prec \mathcal{P}(\bar{t}^+)$ 均不成立时，社会成本和无政府代价的左右导数之间可能存在任意大小关系。为说明这一现象，考虑图 6 所示的单一 OD 网络，其中一条成本

函数取决于参数 $\epsilon > 0$。对于每个 ϵ，在 $\bar{\mu} = 2$ 处都有一个断点 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$，此时既没有 $\mathcal{P}^-(\bar{\mu}) \subset \mathcal{P}^+(\bar{\mu})$，也没有 $\mathcal{P}^-(\bar{\mu}) \supset \mathcal{P}^+(\bar{\mu})$；在 $\bar{\mu}$ 处，社会成本* 和 PoA 的左右导数会根据 ϵ的取值按不同顺序排列。共有四条路径

$$
\begin{aligned}
p_1 =& \mathsf{O} \to v_1 \to \mathsf{D} \\
p_2 =& \mathsf{O} \to v_2 \to \mathsf{D} \\
p_3 =& \mathsf{O} \to v_1 \to v_2 \to \mathsf{D} \\
p_4 =& \mathsf{O} \to \mathsf{D}
\end{aligned}
$$

且均衡流量向量 $\boldsymbol{f}$ 如下表所示：

区间	$\lambda(\mu)$	f_1	f_2	f_3	f_4
$\mu \in [0, \frac{1}{1+\varepsilon})$	$(2+\varepsilon)\mu$	0	0	μ	0
$\mu \in [\frac{1}{1+\varepsilon}, 2)$	$\frac{\varepsilon\mu+2+2\varepsilon}{1+2\varepsilon}$	$\frac{(1+\varepsilon)\mu-1}{1+2\varepsilon}$	$\frac{(1+\varepsilon)\mu-1}{1+2\varepsilon}$	$\frac{2-\mu}{1+2\varepsilon}$	0
$\mu \in [2, +\infty)$	$\frac{\mu+4}{3}$	$\frac{\mu+1}{3}$	$\frac{\mu+1}{3}$	0	$\frac{\mu-2}{3}$

在这里我们可以观察到

$$
\lim_{\mu \to 2^-} \lambda'(\mu) = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \quad \lim_{\mu \to 2^+} \lambda'(\mu) = \frac{1}{3}.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\lim_{\mu \to 2^-} \lambda'(\mu) &> \lim_{\mu \to 2^+} \lambda'(\mu) \quad \text{if } \varepsilon < 1, \\
\lim_{\mu \to 2^-} \lambda'(\mu) &= \lim_{\mu \to 2^+} \lambda'(\mu) \quad \text{if } \varepsilon = 1, \\
\lim_{\mu \to 2^-} \lambda'(\mu) &< \lim_{\mu \to 2^+} \lambda'(\mu) \quad \text{if } \varepsilon > 1,
\end{aligned}
$$

这意味着 SC* 和 PoA 的左右导数在 $\bar{\mu} = 2$ 处满足相同的关系。

如定理 4.4 (ii)所示，对于仿射成本函数，猜想 4.2 中的不等式在断点处绝不可能取等号。对于凸成本或 BPR 成本，这是否同样成立仍是一个开放问题。另一方面，下面的例子表明，如果允许使用非凸成本，猜想 4.2 中的不等式确实可以取等号。

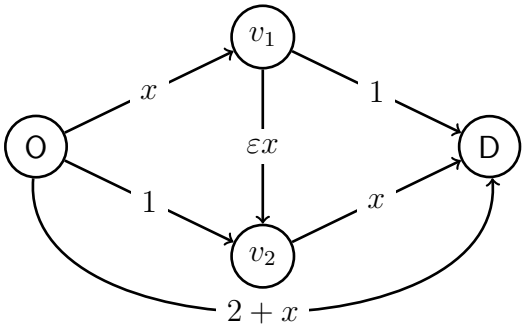


图 6：在此网络中，通过改变参数 ϵ，我们可以观察到断点处均衡成本左右导数之间的任意一种不等关系

例 4.9。 考虑一个具有两条路径和以下成本函数的单商品并行网络：

$$c_1(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & \text{if } x \le 1, \\ (x-1)^2 + 1 & \text{if } x > 1, \end{cases} \qquad c_2(x) = 1 + x^2. \tag{4.4}$$

当 $\mu \le 1$ 时，仅使用第一条边，均衡成本 $\lambda(\mu)$ 等于 $-(\mu-1)^2+1$，其在 1 处的导数为零。当 $\mu \in [1, +\infty)$ 时，均衡流将 $(\mu+1)/2$ 路由经第一条边，将 $(\mu-1)/2$ 路由经第二条边。因此，均衡成本为

$$\lambda(\mu) = 1 + \left(\frac{\mu - 1}{2}\right)^2$$

对于每个 $\mu \in [1, +\infty)$，其在 1 处的导数也等于零。

5. 定理 4.4 的证明

定理 4.4 的证明将分为若干个预备性的中间步骤。其一般原理见引理 5.1，该引理先验地假设存在一组均衡流，在断点左右两侧均为光滑函数。随后证明，当成本函数的导数严格为正时（定理 4.4 (i)），以及成本函数为仿射函数时（定理 4.4 (ii)），这一假设均成立。

引理 5.1。设 $(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$ 是一个非原子路由博弈，其成本函数 $\mathcal{C}^1$ 非递减，需求函数 $\boldsymbol{\mu}(t) = t\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}_+$。设 $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$ 是一个 $\mathcal{P}$-断点，其活跃区域为 $\mathcal{R}^- := \mathcal{P}(\bar{t}^-)$ 在 $I^- := (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t})$ 上，以及 $\mathcal{R}^+ := \mathcal{P}(\bar{t}^+)$ 在 $I^+ := (\bar{t}, \bar{t}+\varepsilon)$ 上。假设存在映射 $\boldsymbol{f}^-, \boldsymbol{f}^+ : (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon) \to \mathbb{R}^{\mathcal{P}}_+$，它们属于 $\mathcal{C}^1$ 类，且满足

- $\boldsymbol{f}^-(t)$ 是需求 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 的均衡流，对所有 $t \in I^-$ 都成立。
- $\boldsymbol{f}^+(t)$ 是所有 $t \in I^+$ 下需求 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 的均衡流，
- $\boldsymbol{f}^-(\bar{t}) = \boldsymbol{f}^+(\bar{t})$。

那么猜想 4.2 在弱不等式下成立。

证明。令 $\boldsymbol{x}^-(t)$ 和 $\boldsymbol{x}^+(t)$ 分别表示由 $\boldsymbol{f}^-(t)$ 和 $\boldsymbol{f}^+(t)$ 诱导的负载，且令 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 表示它们在 t 处对应的共同值。为简化记号，对于每个 $t \in (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon)$，我们令 $\lambda^{(h)}(t) = \lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 表示需求为 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 时的均衡成本，并令 $\mathsf{SC}^*(t) = \mathsf{SC}^*(\boldsymbol{\mu}(t))$ 表示均衡时的社会成本，因此

$$\mathsf{SC}^*(t) = \sum_{h \in \mathcal{H}} \mu^{(h)}(t) \cdot \lambda^{(h)}(t). \tag{5.1}$$

根据引理 3.3，映射 $t \mapsto \lambda^{(h)}(t)$ 是连续的。它们在 I^- 和 I^+ 上也都是 $\mathcal{C}^1$，并且在 $\bar{t}$ 处具有定义良好的单侧极限 $(\lambda^{(h)})'(\bar{t}^-)$ 和 $(\lambda^{(h)})'(\bar{t}^+)$。事实上，对于每个 $h \in \mathcal{H}$，我们可以固定一条活跃路径 $p \in \mathcal{R}^+$，使得对于所有 $t \in I^+$，都有 $\lambda^{(h)}(t) = c_p(\boldsymbol{x}^+(t))$，该函数是光滑的，并且其导数在 $\bar{t}^+$ 处具有定义良好的极限。使用 $\boldsymbol{x}^-(\cdot)$ 对$t \in I^-$进行类似的论证同样适用。

由于 $\mu^{(h)}(t) = t\, r^{(h)}$，我们可以将社会成本在$t$ 处的左导数和右导数表示为

$$\begin{aligned}
(\mathsf{SC}^*)'(t^-) &= \sum_{h \in \mathcal{H}} r^{(h)} \cdot \lambda^{(h)}(\bar{t}) + \bar{t}\, r^{(h)} \cdot (\lambda^{(h)})'(\bar{t}^-), \\
(\mathsf{SC}^*)'(t^+) &= \sum_{h \in \mathcal{H}} r^{(h)} \cdot \lambda^{(h)}(\bar{t}) + \bar{t}\, r^{(h)} \cdot (\lambda^{(h)})'(\bar{t}^+).
\end{aligned}$$

由此可知，$(\mathsf{SC}^*)'(t^-) \geq (\mathsf{SC}^*)'(t^+)$ 当且仅当 $\theta(\bar{t}^-) \geq \theta(\bar{t}^+)$，其中对于$t \neq \bar{t}$，我们定义

$$\theta(t) := \sum_{h \in \mathcal{H}} r^{(h)} \cdot (\lambda^{(h)})'(t). \tag{5.2}$$

现在我们推导 $\theta(\bar{t}^-)$ 和 $\theta(\bar{t}^+)$ 的另一种刻画。先考虑后者。对于 $t \in I^+$，我们有 $\boldsymbol{f}(t) := \boldsymbol{f}^+(t)$ 是一个均衡流，其对应的诱导均衡负载为 $\boldsymbol{x}(t) := \boldsymbol{x}^+(t)$。特别地，

$$\sum_{p \in \mathcal{P}^{(h)}} \boldsymbol{f}_p(t) = \mu^{(h)}(t) = t\, r^{(h)}, \tag{5.3}$$

因此，对其求导可得 $\sum_{p \in \mathcal{P}^{(h)}} \boldsymbol{f}'_p(t) = r^{(h)}$. 因此，对于 $t > \bar{t}$，我们有

$$\theta(t) = \sum_{h \in \mathcal{H}} \sum_{p \in \mathcal{P}^{(h)}} \boldsymbol{f}'_p(t) \cdot (\lambda^{(h)})'(t). \tag{5.4}$$

现在，对于任意非活跃路径 $p \notin \mathcal{R}^+$，有 $f'_p(t) = 0$，因此（5.4）中的内层求和可以限制在活跃路径 $p \in \mathcal{R}^+$上。对于这些路径$p \in \mathcal{P}^{(h)} \cap \mathcal{R}^+$，有 $\lambda^{(h)}(t) = c_p(\boldsymbol{x}(t))$ 因此

$$(\lambda^{(h)})'(t) = \sum_{e \in p} c'_e(x_e(t)) \cdot x'_e(t) = \sum_{e \in p} c'_e(x_e(t)) \cdot \sum_{q \in \mathcal{P}} \delta_{eq} f'_q(t). \tag{5.5}$$

将其代入（5.4），并利用 Fubini 定理交换求和次序，可将 θ（t）写成等价形式

$$\theta(t) = \sum_{e \in \mathcal{E}} c'_e(x_e(t)) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \delta_{ep} f'_p(t) \right)^2. \tag{5.6}$$

回顾一下，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 表示由 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\bar{t})$诱导的均衡负载，并考虑半正定二次型

$$Q_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{y}) := \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} c'_e(\bar{x}_e) \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \delta_{ep} y_p \right)^2 \geq 0. \tag{5.7}$$

我们声称，$\theta(\bar{t}^+)$ 与该凸二次规划的最优值一致。

$$\theta(\bar{t}^+) = \min_{\boldsymbol{y}} \; Q_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{y}) \quad \text{s.t.} \sum_{p \in \mathcal{P}^{(h)}} y_p = r^{(h)} \text{ for all } h \in \mathcal{H}, \text{ and } y_p = 0 \text{ for } p \notin \mathcal{R}^+, \tag{5.8}$$

具有最优解 $\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}'(\bar{t})$。事实上，我们已经观察到 $\boldsymbol{f}'(t)$满足 (5.8) 中的约束条件，对所有 $t > \bar{t}$均成立，因此令 $t \downarrow \bar{t}$ 相同

对 $\bar{y} = \boldsymbol{f}'(\bar{t})$成立。另一方面，记 $z_e = \sum_{p\in\mathcal{P}} \delta_{ep} y_p$，有 $\partial Q_{\bar{\boldsymbol{x}}}/\partial y_p = \sum_{e\in p} c_e'(\bar{\boldsymbol{x}})\, z_e$，因此 (5.8) 的一阶最优性条件为

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall p \in \mathcal{P}^{(h)}, \quad \sum_{e\in p} c_e'(\bar{\boldsymbol{x}})\, z_e = \begin{cases} m^{(h)} & \text{if } p \in \mathcal{R}^+, \\ m^{(h)} + \nu_p & \text{if } p \notin \mathcal{R}^+, \end{cases} \tag{5.9}$$

其中，$m^{(h)}$ 是约束条件 $\sum_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} y_p = r^{(h)}$ 对所有 $h \in \mathcal{H}$的拉格朗日乘子，而 ν_p 是约束条件 $y_p = 0$ 对 $p \notin \mathcal{R}^+$的乘子。现在，由于对所有 $t \in I^+$，数对（$\boldsymbol{f}(t)$ $\boldsymbol{x}(t)$）都是满足$\curvearrowright\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(t)) = \mathcal{R}^+$的均衡流，因此我们有

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall p \in \mathcal{P}^{(h)} \quad \sum_{e\in p} c_e(x_e(t)) = \begin{cases} \lambda^{(h)}(t) & \text{if } p \in \mathcal{R}^+, \\ \lambda^{(h)}(t) + (c_p(\boldsymbol{x}(t)) - \lambda^{(h)}(t)) & \text{若 } p \notin \mathcal{R}^+. \end{cases} \tag{5.10}$$

对 t 求导并令 $t \downarrow \bar{t}$，可推出（5.9）成立，其中对所有 $h \in \mathcal{H}$，$m^{(h)} =$($\lambda^{(h)}$)′($\bar{t}^+$)，且对 $p \in \mathcal{P}^{(h)} \setminus \mathcal{R}^+$，$\nu_p =$ ($c_p \circ \boldsymbol{x}$)′($\bar{t}$) − ($\lambda^{(h)}$)′($\bar{t}^+$)。由于该二次规划是凸的，这些最优性条件意味着最优性。因此，$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}'(\bar{t})$是一个最优解，进而在（5.6）中令 $t \to \bar{t}^+$ 即可得到等式（5.8）。

对 $t \in I^-$ 重复上述论证，这次令 $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}^-(t)$ 和$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^-(t)$，并注意到 $\boldsymbol{x}^-(\bar{t}) = \bar{\boldsymbol{x}}$，我们得到 $\theta(\bar{t}^-)$ 也具有类似的刻画，即

$$\theta(\bar{t}^-) = \min_{\boldsymbol{y}} \; Q_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{y}) \quad \text{s.t.} \sum_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} y_p = r^{(h)} \text{ for all } h \in \mathcal{H}, \text{ and } y_p = 0 \text{ for } p \notin \mathcal{R}^-. \tag{5.11}$$

(5.8) 和 (5.11) 中的目标函数相同，这两个二次规划之间的唯一区别在于约束条件 $y_p = 0$ 对所有 $p \notin \mathcal{R}^-$ 或 $p \notin \mathcal{R}^+$：更大的制度意味着更少的约束条件，因此最优值更小。具体而言，如果 $\mathcal{R}^- \subset \mathcal{R}^+$，那么 $\theta(\bar{t}^-) \geq \theta(\bar{t}^+)$；因此 (社会成本*)′($\bar{t}^-$) ≥(社会成本*)′($\bar{t}^+$)。类似地，如果 $\mathcal{R}^- \supset \mathcal{R}^+$，那么 $\theta(\bar{t}^-)$ $\leq \theta(\bar{t}^+)$，且 (社会成本 *)′($\bar{t}^-$) ≤ (社会成本 *)′($\bar{t}^+$)。这就以弱不等式的形式证明了猜想 4.2 的一半。

关于 PoA $\circ\boldsymbol{\mu}$ 的导数（如果存在），它是

$$(\mathsf{PoA} \circ \boldsymbol{\mu})'(t) = \frac{(\mathsf{SC}^* \circ \boldsymbol{\mu})'(t) \cdot \widetilde{\mathsf{SC}}(\boldsymbol{\mu}(t)) - \mathsf{SC}^*(\boldsymbol{\mu}(t)) \cdot (\widetilde{\mathsf{SC}} \circ \boldsymbol{\mu})'(t)}{(\widetilde{\mathsf{SC}}(\boldsymbol{\mu}(t)))^2}. \tag{5.12}$$

⁀利用 社会成本* 在 $\boldsymbol{\mu}(\bar{t})$ 处的连续性，以及 社会成本 在 $\mathcal{C}^1$ 处 $\boldsymbol{\mu}(\bar{t})$ (引理 3.3 和 3.4)，我们可以看出，关于 猜想 4.2 中无政府代价的陈述，在采用弱不等式时也成立。 □

为了使用引理 5.1，需要确保断点左右两侧均存在光滑的均衡流。拥有光滑的均衡负载分布（可由第 3 节的结果推导得出），便可选择光滑的均衡流，如下引理所示。请注意，即使均衡负载是唯一的，也可能存在多个产生相同负载的路径流。为了选出一组光滑的路径流，我们使用摩尔－彭若斯伪逆。我们回顾一下，伪逆是非奇异方阵的经典逆的推广，并为求解病态线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$提供了一种工具，其中 A 是一个实矩形矩阵，而右端项 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 甚至可能不属于 A 的值域，因此该方程组可能无解。伪逆是一个线性映射 $\boldsymbol{b} \mapsto A^\dagger \boldsymbol{b}$，它¯将每个 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 映射为方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ¯的最小范数解，其中 $\boldsymbol{b}$ 是 b 在 Range(A)上的投影。因此，如果 $\boldsymbol{b} \in$ Range(A)，它给出 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小范数解；当 A 是可逆方阵时，它则退化为经典逆 $A^\dagger \boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{b}$。一般而言，$A^\dagger \boldsymbol{b}$ 定义为当 $\varepsilon \to 0^+$ 时强凸函数 $\boldsymbol{x} \mapsto \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 + \varepsilon\|\boldsymbol{x}\|^2$的唯一极小化解的极限，即 $A^\dagger \boldsymbol{b} = \lim_{\varepsilon \to 0^+}($ $A^\top A + \varepsilon I)^{-1} A^\top \boldsymbol{b}$。这定义了一个线性映射，其表示矩阵记为 $A^\dagger$。在我们的场景中，我们使用伪逆将每个负载向量 $\boldsymbol{x}$ 映射为路径流向量 $\boldsymbol{f}$，使其产生给定的 $\boldsymbol{x}$，且范数 $\|\boldsymbol{f}\|$最小。

引理 5.2。 设$(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H}, \boldsymbol{\mu}(\cdot))$ 是一个具有 $\mathcal{C}^1$需求映射 $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$的非原子路由博弈。设 $t \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 是一条均衡负载曲线，它在某个区间 I 上有定义且 $\mathcal{C}^1$。那么， $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 可分解为路径流 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu}(t))$，该路径流对于 $t \in I$ 也 $\mathcal{C}^1$。

证明。令 $\boldsymbol{f}^0 \in \mathbb{R}^P$ 为 $x(\boldsymbol{\mu}(t^0))$ 的任意路径流分解，其中$t^0 \in I$ 固定，并令

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu}(t)) \coloneqq \boldsymbol{f}^0 + \begin{bmatrix} \Delta \\ S \end{bmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}(t)) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}(t^0)) \\ \boldsymbol{\mu}(t) - \boldsymbol{\mu}(t^0) \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

其中， Δ 和 S 与式（2.4）中的定义相同，而符号 $L^\dagger$ 表示矩阵 L的摩尔－彭若斯伪逆。由于伪逆也是一个矩阵，我们得出结论。 □

有了这些预备知识，我们现在可以开始证明定理 4.4。

定理 4.4 (i) 的证明。利用引理 A.1，我们有，对于每个制度$\mathcal{R}$，都可以找到问题 ($\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$) 的一个 $\mathcal{C}^1$ 解 $t \mapsto \boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}(t))$，该解定义在 $\bar{t}$ 的一个开邻域内，并且当 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(t))$等于 $\mathcal{R}$ 时，$\boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 与均衡 $\widehat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\mu}(t))$ 一致。此外，通过应用引理 5.2，我们可以找到与此类负载剖面相关联的 $\mathcal{C}^1$ 流。如果我们在 $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\bar{t}^-)$和 $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\bar{t}^+)$这两种情况下都这样做，就能在 t 的一个邻域内得到可微的流；当活跃制度与 $\mathcal{R}$ 一致时，这些流均为均衡。现在，由于边成本严格递增，均衡负载向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是唯一的，因此根据连续性可知，这些流满足 $\boldsymbol{f}^-(\boldsymbol{\mu}(\bar{t})) = \boldsymbol{f}^+(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}))$，从而可以应用引理 5.1 完成证明。

□

证明定理 *4.4* (ii)。当成本函数为仿射函数时，在 $\bar{t}$ 的左侧和右侧，我们可以将均衡流选为仿射形式

$$\boldsymbol{f}^-(\boldsymbol{\mu}(t)) = w^- \cdot t + z^-, \quad \boldsymbol{f}^+(\boldsymbol{\mu}(t)) = w^+ \cdot t + z^+, \tag{5.14}$$

其中 $\boldsymbol{f}^-(\boldsymbol{\mu}(\bar{t})) = \boldsymbol{f}^+(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}))$。单商品情形的证明见 Cominetti 等人(2021年, 命题 4.1)。多商品情形的推理完全类似。

这些函数作为 t 的函数是可微的，因此引理 5.1 表明，猜想 4.2 中的 (a) 和 (b) 在弱不等式下成立。接下来需要证明这些不等式是严格的。按照引理 5.1 的证明思路，我们需要证明 $\theta(\bar{t}^-)$ 与 $\theta(\bar{t}^+)$ 之间的不等式是严格的，这需要比较问题 (5.8) 和 (5.11) 的值。由 (5.7) 可知，这两个问题恰好是引理 A.1 中针对图 G 上的博弈所定义的问题 $\left(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}\,\bar{t}}^{\mathcal{R}^+}(\,)\right)$ 和 $\left(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}\,\bar{t}}^{\mathcal{R}^-}(\,)\right)$，其中成本函数为线性函数 $\bar{c}_e(x) = c_e'(\bar{x}_e) \cdot x$，且 $\bar{x}_e = \sum_{p \ni e} f_p^-(\mu(\bar{t}))$ $= \sum_{p \ni e} f_p^+(\mu(\bar{t}))$。

这两个问题的目标函数相同，但与 $\mathcal{R}^-$ 和 $\mathcal{R}^+$之间较小的制度相关的情形中，约束条件更多。举例来说，假设 $\mathcal{R}^-$ 严格包含于 $\mathcal{R}^+$。那么，相对于（5.8），（5.11）中的额外约束条件为 $y_p = 0$，其中 $p \in \mathcal{R}^+ \setminus \mathcal{R}^-$ 对应的拉格朗日乘子 ν_p 如引理 5.1的证明中所示给出，即，记 $h(p)$ 为与路径 p相关联的商品，

$$\nu_p = (\boldsymbol{c}_p \circ \boldsymbol{x}^+)'(\bar{t}) - (\lambda^{(h(p))})'(\bar{t}^+). \tag{5.15}$$

$^-$ $^-$当 $t > \bar{t}$ 时，路径 p 处于活跃状态；但当 $t < \bar{t}$ 时则不然。因此，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$(c_p \circ \boldsymbol{x}^+)(t) > \lambda^{(h(p))}(t), \quad \text{for } t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}) \tag{5.16}$$

因为 p 未激活，并且

$$(c_p \circ \boldsymbol{x}^+)(\bar{t}) = \lambda^{(h(p))}(\bar{t}) \tag{5.17}$$

根据路径成本的连续性。

根据假设，成本函数是仿射的；因此，路径成本和均衡成本也关于变量 $t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t})$ 呈仿射关系。这意味着差值 $(c_p \circ \boldsymbol{x}^+)'(t) - (\lambda^{(h(p))})'(t)$ 在 $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t})$ 上是严格负常数。因此，拉格朗日乘子 ν_p 在最优解处取严格负值。根据引理 A.1，该问题 $\left(\mathrm{P}_{\mu\,\bar{t}}^{\mathcal{R}^-}(\,)\right)$ 的乘子是唯一的，因此，放宽 (5.11) 中的约束 $y_p = 0$ 会使目标函数的最优值严格下降，即 $\theta(\bar{t}^-) > \theta(\bar{t}^+)$，进而得到猜想 4.2 的 (a) 中所述的严格不等式。

对于（b）情形，也可以使用类似的论证，见猜想 4.2 ，当 $\mathcal{R}^-$ 严格包含 $\mathcal{R}^+$时。 □

备注5.3。 要使（a）和（b）这两条陈述猜想 4.2成立，需求函数必须是线性的。事实上，如例 4.3所示，引理 5.1即使在需求函数为仿射函数时（甚至将范围限制在仿射成本函数时）也可能不成立。因此，定理 4.4 无法应用。

致谢

我们感谢两位审稿人仔细审阅本文，并提出宝贵的意见和建议。Valerio Dose 和 Marco Scarsini 是 GNAMPA-INdAM 的成员。他们的研究部分得到 GNAMPA 项目 CUP_E53C22001930001“*Schelling* 隔离模型中随机动力学的极限行为。”的资助。Marco Scarsini 的研究部分得到 MIUR PRIN 2022EKNE5K 项目“市场与社会中的学习。”资助。Roberto Cominetti 的研究得到 Proyecto Anillo ANID/PIA/ACT192094 的资助。

附录 A. 缺失的证明

引理 *3.4* 的证明引理 *3.4*。关于成本函数的假设意味着，最优流是博弈 $(G,\ \widetilde{\boldsymbol{c}},\ \mathcal{H})$ 的 Wardrop 均衡，其中

$$\widetilde{c}_e(x_e) \coloneqq c_e(x_e) + x_e c_e'(x_e). \tag{A.1}$$

对于每个 $e \in \mathcal{E}$，函数 $\widetilde{c}_e$ 是连续且非递减的。对于这个修改后的博弈，Beckmann 势的最小值为

$$\widetilde{V}(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_\mu} \sum_{e \in \mathcal{E}} x_e c_e(x_e), \tag{A.2}$$

$\widetilde{\ }$即最优社会成本 社会成本$(\boldsymbol{\mu})$。注意到 Beckmann 势的最小值连续可微，且其梯度等于均衡成本向量（该向量连续，参见引理 3.3），即可得出结论。

□

证明定理 3.2时会用到以下技术引理。除优化问题（$\mathsf{P}^{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\mu}}$）外，我们还考虑扰动最小化问题的最优值函数

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}) = \min_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f})}\ & \Phi(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } & S\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\xi},\ \text{and } f_p = \omega_p \text{ for all } p \notin \mathcal{R}, \end{aligned} \tag{$\mathsf{P}^{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}}$}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}$ 是对负载向量的扰动，$\boldsymbol{\omega}$ 是流扰动向量。

引理 A.1。 设 $(G, \boldsymbol{c}, \mathcal{H})$ 为一个路由博弈结构，$\mathcal{R}$ 为给定的固定机制。则，

(a) 对于每个 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}_+$，*($P^{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\mu}}$)* 中的最小值都在某个 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\mu}}$ 处取得。对于每个最优 $\boldsymbol{x}$，边成本 $\eta_e \coloneqq c_e(x_e)$ 都相同；并且对于每个 $h \in \mathcal{H}$，都存在路径成本 $m^{(h)}$，使得对于所有 $p \in \mathcal{P}^{(h)} \cap \mathcal{R}$，$\sum_{e \in p} \eta_e = m^{(h)}$。此外，最优值函数 $V_{\mathcal{R}}(\ \cdot\ )$ 处处有限、凸，且在 $(\boldsymbol{\mu}, 0, 0)$ 处可微，其中 $\nabla V_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}, 0, 0) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})$，其中

$$\nu_p = \sum_{e \in p} \eta_e - m^{(h)} \quad \forall p \in \mathcal{P}^{(h)} \setminus \mathcal{R}. \tag{A.3}$$

(b) 如果成本函数严格递增，那么 ($\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$) 有唯一的最优解 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$。此外，如果成本 c_e 具有 $\mathcal{C}^1$ 严格正导数，那么 $\boldsymbol{\mu} \to \boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$ 也 $\mathcal{C}^1$。

证明。 (a) 鉴于我们将成本函数扩展 $c_e(\,\cdot\,)$ 至 $\mathbb{R}_-$，我们有 极限$_{x\to-\infty}\, c_e(x)$ <0 ，并且 极限$_{x\to\infty}\, c_e(x)$ $>$ 0。因此，利用无穷远分析，对于每个非零方向 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$ ，我们有

$$\Phi^{\infty}(\boldsymbol{d}) = \lim_{t\to\infty} \Phi(t\boldsymbol{d})/t = \sum_{e\in\mathcal{E}} \lim_{t\to\infty} c_e(td_e)d_e > 0, \tag{A.4}$$

从而 Φ 是下半紧的，因此（$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}}^{\mathcal{R}}$）的极小值集合非空（例如参见（Rockafellar，1997年，定理 9.2））。特别地，这表明值函数 $V_{\mathcal{R}}(\,\cdot\,)$ 处处有限。因此，根据凸对偶理论，该函数是凸函数，且次微分 $\partial V_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{0},\mathbf{0})$ 与对偶问题的最优解集合重合。下面我们刻画该对偶问题，并证明其具有唯一解，由此可推出它在 $\nabla V_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{0},\mathbf{0})$ 处可微，且该处的取值如第 (a)部分的陈述所给出。

为了写出对偶问题，我们将问题（$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$）明确写为

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}} \sum_{e\in\mathcal{E}} C_e(x_e) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} f_p = \mu^{(h)} \text{ for all } h \in \mathcal{H}, \text{ and } f_p = 0 \text{ for } p \notin \mathcal{R}, \\ x_e = \sum_{p\in\mathcal{P}} \delta_{ep} f_p \text{ for all } e \in \mathcal{E}.\end{gathered} \tag{A.5}$$

引入乘子 $\boldsymbol{m} = (m^{(h)})_{h\in\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_p)_{p\notin\mathcal{R}}$ 和 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_e)_{e\in\mathcal{E}}$,

以及拉格朗日函数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f},\boldsymbol{m},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\eta}) &= \sum_{e\in\mathcal{E}} C_e(x_e) + \sum_{h\in\mathcal{H}} m^{(h)}\left(\mu^{(h)} - \sum_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} f_p\right) - \sum_{p\notin\mathcal{R}} \nu_p f_p \\ &\quad + \sum_{e\in\mathcal{E}} \eta_e\left(\sum_{p\in\mathcal{P}} \delta_{ep} f_p - x_e\right) \\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}} C_e(x_e) - \eta_e x_e + \sum_{h\in\mathcal{H}} m^{(h)}\mu^{(h)} + \sum_{p\in\mathcal{R}} f_p\left(\sum_{e\in p}\eta_e - m^{(h(p))}\right) \\ &\quad + \sum_{p\notin\mathcal{R}} f_p\left(\sum_{e\in p}\eta_e - m^{(h(p))} - \nu_p\right),\end{aligned} \tag{A.6}$$

其中 $h(p)$ 是路径 p 的商品，对偶问题变为

$$\sup_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\eta}} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f},\boldsymbol{m},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\eta}). \tag{A.7}$$

对 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f})$ 求内层最小值，可显式求解，从而得到最终形式的对偶问题：

$$\begin{aligned}\sup_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\eta}} -\sum_{e\in\mathcal{E}} C_e^*(\eta_e) + \sum_{h\in\mathcal{H}} m^{(h)}\mu^{(h)} \quad \text{s.t.} \quad & m^{(h(p))} = \sum_{e\in p}\eta_e \ \text{ for every } p\in\mathcal{R}, \\ & m^{(h(p))} = \sum_{e\in p}\eta_e - \nu_p \ \text{ for every } p\notin\mathcal{R},\end{aligned} \tag{A.8}$$

其中 C_e^* 是 C_e 的 Fenchel共轭。

这相当于求解

$$\min_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\eta}} \sum_{e\in\mathcal{E}} C_e^*(\eta_e) - \sum_h m^{(h)}\mu^{(h)} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{e\in p}\eta_e = m^{(h(p))} \ \text{ for every } p\in\mathcal{R}, \tag{A.9}$$

然后定义

$$\nu_p = \sum_{e\in p}\eta_e - m^{(h(p))} \ \text{ for every } p\notin\mathcal{R}. \tag{A.10}$$

如上所述，根据一般的凸对偶理论，该对偶问题的最优解集与原问题最优值函数在 $\boldsymbol{\mu}, 0, 0)$ 处的次微分 $\partial V_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}, 0, 0)$ 重合。由于 $V_{\mathcal{R}}(\cdot)$ 处处有限，该次微分非空，因此对偶问题存在最优解。另一方面，由于 C_e^* 严格凸，对偶最优解 $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})$ 唯一，因此 $V_{\mathcal{R}}(\cdot)$ 在 $(\boldsymbol{\mu}, 0, 0)$ 处可微，且 $\nabla V_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}, 0, 0) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})$。写出 (A.5) 的最优性条件，可得 $c_e(x_e) = \eta_e$，而梯度的刻画则由 (A.9) 和 (A.10) 得出。这就证明了引理的 (a) 部分。

(b) 注意，$(\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}})$ 中的松弛约束仅为线性等式约束。将这些方程投影到变量对 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 所构成的空间上，可以消去流变量 $\boldsymbol{f}$，并将约束重写为仅关于负载变量的线性方程组 $\boldsymbol{x}$，即：

$$A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \tag{A.11}$$

其中，矩阵 A 和 B 取决于制度 $\mathcal{R}$，而矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的各行线性无关。因此，该问题可以改写为等价形式。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}} \{\Phi(\boldsymbol{x}) \colon A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}\}. \tag{$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$}$$

引入拉格朗日乘子向量 $\boldsymbol{\alpha}$，最优性条件为

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(\boldsymbol{x}) + A^\top \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{0}, \\ A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\mu} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

我们注意到，对于每个 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$，唯一的最优解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu})$ 也具有唯一对应的乘子 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\mu})$。这可由 $\operatorname{Ker} A^\top = \{\mathbf{0}\}$ 得出。为证明后者，假设对于某个向量 $\boldsymbol{\beta}$，有 $A^\top \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$。对于每个 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$，我们都可以找到一个可行的 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}$，使得 $A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$，只需将任意使用制度 $\mathcal{R}$ 的需求为 $\boldsymbol{\mu}$ 的流进行路由即可。因此，我们有

$$0 = \langle \boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\mu} \rangle = \langle B^\top \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu} \rangle. \tag{A.13}$$

对所有 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$，由此可推得 $B^\top \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$。因此 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^\top \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，进而得到 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，因为 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的各行线性无关。

若能证明式（A.12）的左端在任意点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$. 处的雅可比矩阵非奇异，则可由隐函数定理得出该引理的结论。

这相当于证明以下齐次线性系统

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} + A^\top\boldsymbol{\beta} &= \mathbf{0} \\ A\boldsymbol{d} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{A.14}$$

仅存在平凡解。将第一个方程乘以 $\boldsymbol{d}$，并利用第二个方程，可得

$$0 = \left\langle \boldsymbol{d}, \nabla^2\Phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{d}, A^\top\boldsymbol{\beta} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{d}, \nabla^2\Phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} \right\rangle = \sum_{e\in\mathcal{E}} c_e'(x_e)d_e^2, \tag{A.15}$$

这意味着 $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$，因为 $c_e'(x_e) > 0$。因此，第一个方程化为 $A^\top\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，这意味着 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，因为 $\mathrm{Ker}(A^\top) = \{\mathbf{0}\}$，如上所示。证明至此完成。 □

注释 A.2. 假设边集 e 满足 $c'(x_e(\boldsymbol{\mu})) = 0$ 的边构成一个没有无向环的图，则引理 A.1 和定理 3.2 可以推广到成本函数仅为严格递增的博弈。事实上，(A.14) 表明，对于每条活跃边 e，要么 $d_e = 0$，要么 $c_e'(x_e) = 0$；而条件 $A\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$ 告诉我们，向量 $\boldsymbol{d}$ 是网络上一个需求为零的（可能为负的）流。由于对于所有满足 $c_e'(x_e) > 0$ 的边，都有 $d_e = 0$，向量 $\boldsymbol{d}$ 在由满足 $c_e'(x_e) = 0$ 的边 e 构成的子网络上诱导出一个需求为零的流。若后一个子网络没有无向环，则可得出 $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$，并如上所述完成证明。

附录 B. 符号列表

c_e 边的成本 $e\boldsymbol{c}$ 边成本函数向量c_p 路径成本 $pC_e(x_e)$ $\int_0^{x_e} c_e(z)\,\mathrm{d}zC_e^*(\cdot)$ C_e的Fenchel共轭$(\cdot)$ $\mathrm{D}^{(h)}$ OD 对 h的目的地e 边$\mathcal{E}$ 边集f_p 路径 p上的流f_p^* 路径 p上的均衡流$\boldsymbol{f}$ 流向量

$\boldsymbol{f}^*$ 均衡流量向量$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$ $\left\{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}}\colon \ \sum_{p\in\mathcal{P}^{(h)}} f_p = \mu^{(h)} \text{ 对于所有 } h \in \mathcal{H}\right\}$，可行流集合，定义见 (2.2)$G(\mathcal{V},\mathcal{E})$，顶点集为 $\mathcal{V}$、边集为 $\mathcal{E}$的有向多重图$\mathcal{H}$ 起讫点对集合H $\mathcal{H}$中的元素个数$I^-(\bar{t}-\varepsilon,\bar{t})$，定义见引理 5.1 $I^+(\bar{t},\bar{t}+\varepsilon)$，定义见引理 5.1$J_{\boldsymbol{c}}(\cdot)$ 路径成本函数 $\boldsymbol{c}$的雅可比矩阵: $\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n m^{(h)}$ 与 OD 对 h关联的拉格朗日乘子$\boldsymbol{m}$ OD 对拉格朗日乘子向量 N 邻域 $\mathrm{O}^{(h)}$ OD 对 h的起点p 路径$\mathcal{P}^{(h)}$ OD 对的路径集合 $hP^{(h)}$ 中元素的个数 $\mathcal{P}^{(h)}P$ 中元素的个数 $\mathcal{P}\mathcal{P}$ $\bigcup_{h\in\mathcal{H}}\mathcal{P}^{(h)}$，所有 OD 对的路径集合的并集，定义见 (2.1)$\curlywedge\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu})$ 活跃制度，定义见 (2.10) $\curlywedge$ $\curlywedge\mathcal{P}(\bar{t}^-)$ $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}-\varepsilon))$，定义见 (4.1)$\curlywedge$ $\curlywedge\mathcal{P}(\bar{t}^+)$ $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mu}(\bar{t}+\varepsilon))$，定义见 (4.1) PoA($\boldsymbol{\mu}$) 需求为 $\boldsymbol{\mu}$时的无政府代价，定义见 (2.13)$r^{(h)}$ OD 对 h 的速率$\boldsymbol{r}$ 线性增长需求的速率$\mathcal{R}$ 线性增长需求的速率向量$\curlywedge$制度，定义见定义 2.2$\mathcal{R}^-$ $\mathcal{P}\bar{t}^-(\curlywedge)$，定义见引理 5.1$\mathcal{R}^+$ $\mathcal{P}(\bar{t}^+)$，定义见引理 5.1S 定义见 (2.4) SC 社会成本，定义见 (2.6) SC*($\boldsymbol{\mu}$) 需求为 $\boldsymbol{\mu}$ 时的均衡社会成本，定义见 (2.11)$\widetilde{\ }$ SC($\boldsymbol{\mu}$) 需求为 $\boldsymbol{\mu}$时的最优社会成本，定义见 (2.12)$\mathcal{V}$ 顶点集x_e 边上的负载 $e\boldsymbol{x}$ 负载向量

$\boldsymbol{x}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu})$ ($\mathrm{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathcal{R}}$) 的最优解$\mathcal{X}_{\mu}$ 由需求 $\boldsymbol{\mu}$的某个流所诱导的负载配置集合 y_p 在 (5.8) 中引入$\boldsymbol{y}$ 在 (5.7) 中引入$\boldsymbol{\alpha}$ 拉格朗日乘子向量$\boldsymbol{\beta}$ 拉格朗日乘子向量$\boldsymbol{\gamma}_p$ p规范基的第δ_{ep} $\begin{cases}1 \text{ 个元素；若}\end{cases}$ $e \in p$，则为 0。定义见 (2.3)Δ 定义见 (2.4)η_e 与边 e相关的拉格朗日乘子$\boldsymbol{\eta}$ 边拉格朗日乘子向量$\theta(t)$ $\sum_{h \in \mathcal{H}} r^{(h)} \cdot (\lambda^{(h)})'(t)$，定义见公式 (5.2) $\lambda^{(h)}(\boldsymbol{\mu})$ OD 对 h 的均衡成本，需求为 $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\lambda}$ 均衡成本向量 $\mu^{(h)}$ OD 对 h的需求$\boldsymbol{\mu}$ $\left(\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(H)}\right)$，需求向量$\nu_p$ 与路径 p相关的拉格朗日乘子$\boldsymbol{\nu}$ 路径拉格朗日乘子向量ξ_e 负载扰动 $x_e\boldsymbol{\xi}$ 负载向量扰动 $\boldsymbol{x}\tau_e$ $c_e(x_e^*)$ 边 e的均衡成本$\Phi(\boldsymbol{x})$ $\sum_{e \in \mathcal{E}} C_e(x_e)$ 势能 ω_p 流扰动 $f_p\boldsymbol{\omega}$ 流向量扰动 $\boldsymbol{f}0$ 零向量 $\mathbf{1}^{(h)}$ $\sum_{p \in h} \boldsymbol{\gamma}_p$

参考文献

Beckmann, M. J., McGuire, C., and Winsten, C. B.（1956）。《交通经济学研究》。耶鲁大学出版社，美国康涅狄格州纽黑文。

Colini-Baldeschi, R., Cominetti, R., Mertikopolous, P., and Scarsini, M.（2020年）。自私路由何时会造成不良影响？轻度和重度交通下的无政府代价。*Oper. Res.*，68(2):411–434。

Colini-Baldeschi, R., Cominetti, R., 和 Scarsini, M.（2019）。高度拥堵并行网络中路由博弈的无政府代价 y

。《理论计算机系统》，63(1):90–113。Cominetti, R., Dose, V., 和 Scarsini, M.（2021）。路由博弈中的无政府代价与需求的函数关系。《数学规划》，即将出版。Cominetti, R., Dose, V., 和 Scarsini, M.（2024）。非原子拥塞博弈中均衡的单调性。《欧洲运筹学杂志》，即将出版。Correa, J. R., Schulz, A. S., 和 Stier-Moses, N. E.（2004）。容量受限网络中的自私路由。《Math. Oper. Res.》，29(4):961–976。Correa, J. R., Schulz, A. S., 和 Stier-Moses, N. E.（2007）。网络中快速、公平且高效的流。《Oper. Res.》，55(2):215–225。Correa, J. R., Schulz, A. S., 和 Stier-Moses, N. E.（2008）。非原子拥塞博弈中无政府代价的几何方法。《Games Econom. Behav.》，64(2):457–469。Correa, J. R. 和 Stier-Moses, N. E.（2011）。Wardrop 均衡。载于 Cochran, J. J.（编），《运筹学与管理科学百科全书》。威利。Dafermos, S. 和 Nagurney, A.（1984）。非对称网络均衡问题的敏感性分析。《数学规划》，28(2):174–184。Dafermos, S. C. 和 Sparrow, F. T.（1969）。一般网络的交通分配问题。《国家标准局研究杂志 B辑》，73B:91–118。Dumrauf, D. 和 Gairing, M.（2006）。多项式 Wardrop 博弈的无政府代价。载于《WINE '06：第二届网络与互联网经济学会议论文集》，第319–330页。施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡。Englert, M., Franke, T., 和 Olbrich, L.（2010）。Wardrop 均衡的敏感性。《理论计算机系统》，47(1):3–14。Fisk, C.（1979）。均衡分配问题中的更多悖论。《交通研究 B辑》，13(4):305–309。

Florian, M. 和 Hearn, D.（1995年）。网络均衡模型与算法。载于 M. H. 等编，《运筹学与管理科学手册》，第8卷。North Holland，阿姆斯特丹。Fukushima, M.（1984年）。关于交通分配问题的对偶方法。交通研究 *B*辑，18(3)：235–245。Hall, M. A.（1978年）。交通网络中均衡状态的性质。*Transportation Sci.*，12(3)：208–216。Josefsson, M. 和 Patriksson, M.（2007年）。可分交通均衡的敏感性分析及其在网络设计双层优化中的应用。交通研究 *B*辑，41(1)：4–31。Klimm, M. 和 Warode, P.（2019年）。计算由流量需求参数化的所有 Wardrop 均衡。载于第三十届*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，第917–934页。SIAM，费城，宾夕法尼亚州。Klimm, M. 和 Warode, P.（2022年）。具有分段二次成本的最小费用流的参数化计算。*Math. Oper. Res.*，47(1)：812–846。Koutsoupias, E. 和 Papadimitriou, C.（1999年）。最坏情况均衡。载于*STACS 99*（特里尔），第1563卷*Lecture Notes in Comput. Sci.*，第404–413页。Springer，柏林。Monnot, B.、Benita, F. 和 Piliouras, G.（2017年）。现实环境中的路由博弈：效率、均衡化与遗憾值。载于 R. Devanur, N. 和 Lu, P. 编，《网络与互联网经济学》，第340–353页，Cham。Springer国际出版公司。O'Hare, S. J.、Connors, R. D. 和 Watling, D. P.（2016年）。支配无政府代价如何随出行需求变化的机制。交通研究 *B*辑，84：55–80。Papadimitriou, C.（2001年）。算法、博弈与互联网。载于第三十三届*ACM*计算理论研讨会论文集，第749–753页，纽约。ACM。Patriksson, M.（2004年）。交通均衡的敏感性分析。*TransportationSci.*，38(3)：258–281。

Pigou, A. C.（1920年）。福利经济学。Macmillan and Co.，伦敦，第一版。Rockafellar, R. T.（1997年）。凸分析。《数学中的普林斯顿地标著作》。Princeton University Press，普林斯顿，新泽西州。重印1970年原版，Princeton Paperbacks。Roughgarden, T.（2003年）。无政府代价与网络拓扑无关。*J. Comput. System Sci.*，67(2)：341–364。Roughgarden, T. 和 Tardos, E.（2002年）。自私路由有多糟糕? *J.ACM*，49(2)：236–259。Roughgarden, T. 和 Tardos, E.（2004年）。非原子拥塞博弈中均衡低效率的界。*Games Econom. Behav.*，47(2)：389–403。Takalloo, M. 和 Kwon, C.（2020年）。Wardrop 均衡的敏感性：再探。*Optim. Lett.*，14(3)：781–796。Tomlin, J. A.（1966年）。最小成本多商品网络流。*Oper.Res.*，14(1)：45–51。Verbree, J. 和 Cherukuri, A.（2023年）。变化需求下的 Wardrop 均衡与 Braess悖论。技术报告，arXiv预印本 arXiv:2310.04256。Wardrop, J. G.（1952年）。道路交通研究的若干理论方面。载于土木工程师学会论文集，第二辑，第1卷，第325–378页。Wu, Z. 和 Möhring, R.（2023年）。非原子拥塞博弈中无政府代价的敏感性分析。*Math. Oper. Res.*，48(3)：1364–1392。Wu, Z.、Möhring, R. H.、Chen, Y. 和 Xu, D.（2021年）。自私未必有害。*Oper. Res.*，69(2)：410–435。Youn, H.、Gastner, M. T. 和 Jeong, H.（2008年）。交通网络中的无政府代价：效率与最优性控制。*Phys. Rev. Lett.*，101(12)：128701。

Youn, H.、Gastner, M. T. 和 Jeong, H.（2009）。勘误：交通网络中的无政府代价：效率与最优性控制 [phys. rev. lett. 101，128701（2008年）]。*Phys. Rev. Lett.*，102：049905。