arXiv:2305.03460v1 [math.GR] 5 May 2023

关于本原仿射群轨道直径的多项式界

Saveliy V. Skresanov

摘要

设 VG 是一个有限本原仿射置换群，其中 V 是素域 $\mathbb{F}_p$ 上维数为 d 的向量空间，而 G 是作用于 V上的不可约线性群。我们证明，如果 p 整除 $|G|$，那么 VG 的所有非对角轨道图的直径至多为 $9d^3$。这改进了 A. Mar´oti 和本文作者此前得到的指数界。

1 引言

给定一个作用在集合 Ω 上的有限置换群 H，与之关联的是轨道图集合，即 H 在有序对 Ω×Ω 集合上的轨道。每个这样的图都是有向的，而顶点位于对角线 $\{(x,x) \mid x \in \Omega\}$ 上的轨道图称为对角轨道图。

Higman 判据 [1] 表明，群 H 是本原的，当且仅当每个非对角轨道图都是（强）连通的；特别地，每个非对角轨道图 Γ 都具有定义良好的直径。本文所说的有向直径，是指一对顶点之间的最大距离，其中路径必须保持边的方向；而无向直径则是类似的概念，但忽略边的方向。

回顾一下，有限本原置换群是仿射的，是指它分解为一个正则子群 V 与一个不可约矩阵群G 的半直积 VG；其中，正则子群同构于在素域 $\mathbb{F}_p$ 上维数为 d 的向量空间，并且不可约矩阵群作用在 V 上。初等阿贝尔子群 V 可以与点集对应起来，因此我们可以假设 VG 是作用在 V 上的置换群。更准确地说， VG 由以下置换组成

$$VG = \{v \mapsto b + vA \mid b \in V,\ A \in G\},$$

其中， b和 v 表示来自 V的向量， A 表示来自 G 的矩阵（注意，我们采用行向量约定）。由此描述可立即得出， VG 的轨道图是定义在 V 上的 Cayley图，其中 G 在V 上的轨道充当连接集；在这种对应关系下，零轨道 $\{0\}$ 对应于对角轨道图。我们将⟶diam(V,G)记作仿射群 VG的轨道图有向直径的最大值。

对本原置换群的轨道直径进行界定，对模型论有应用，参见 [2], ，作者在那里描述了轨道直径有界的有限置换群的无限类。人们也关注为特定类别的置换群给出轨道直径的上下界，参见 [3] （关于对称群和交错群）以及 [4] （关于对角型的群）。仿射群这一类尤其值得关注，因为 [2] 中关于轨道直径有界的仿射群的描述仍不完整。另请参阅 [5] 的引言，其中更全面地综述了相关问题，尤其是轨道直径与数论和组合学中的若干问题之间的联系。

在 [5, 定理 1.1] A. Mar´oti 与作者证明了，有限本原仿射群 VG 的轨道图直径可以用 dim V和 log $|V|/\log|G|$ 的指数函数来界定。事实上，若 G 含有一个合成因子，该因子同构于特征为 p 的李型有限单群，则可以给出更精确的界：仅用 dim V 就能界定直径，界为 $2^{2^{2(\dim V)^3}}$。本文的主要结果表明，若 p 整除 $|G|$，则可以对直径给出多项式界。

定理 1. 设 VG 为一个有限本原仿射置换群，其中$V \simeq \mathbb{F}_p^d$ 为素数，且 G 是作用在 V 上的不可约线性群，满足 p 整除 $|G|$。则 $\longrightarrow\mathrm{diam}(V,G) \leq 9d^3$。

显然，当 G 含有一个合成因子，且该因子同构于特征为 p的李型有限单群时，主要结果适用。在这种情况下， [5]仅给出了无向直径的上界，因此我们的主要结果在定性上也有所改进。

当 p 不整除$|G|$ 时，改进上界的主要障碍是有限域上的华林问题。在这种情况下，轨道直径的任何上界都会推出该问题的一个上界，而目前已知的有限域华林问题最佳上界是指数级的，见 [6]。

我们注意到，定理 1 中的上界已接近最优，但仍有一定的改进空间。对于奇素数 p，循环群 $G = C_2 \wr C_p$ 的缠绕积在 $V = \mathbb{F}_p^p$ 上不可约且非本原地作用；根据 [5, 命题 7.1]，其直径为 $\longrightarrow\mathrm{diam}(V,G) = p(p-1)/2$。由此可知，直径的上界至少必须随 d 二次增长。尽管如此，最佳上界仍有可能是关于 d 的二次函数；正如证明中将看到的，若 $p \geq 9d^2$，则我们有一个形如 $4d^2 \log d$ 的上界，这支持了这一看法。

2 主要结果的证明

对于向量空间 V 的两个子集 Δ、Π，令 $\Delta + \Pi$ 表示它们的两两和集合。对于正整数 m，我们用 $m\cdot\Delta$ 表示 m 重和集 $\Delta+\cdots+\Delta$。由于本原仿射群 VG 的轨道图是 Cayley图，因此轨道直径可以通过以下公式用和集来计算（参见 [5,

公式（1）]）：

$$\overrightarrow{\operatorname{diam}}(V,G)=\min\{m\in\mathbb{N}\mid m\cdot(\mathcal{O}_i\cup\{0\})=V \text{ for all } i=1,\dots,r\},\quad (\star)$$

其中， $\mathcal{O}_1$，...， $\mathcal{O}_r$是 G在 V上的所有非零轨道。该公式定义良好，因为 G的不可约性意味着每个 $\mathcal{O}_i$、 $i=1$、...、 r都张成 V。

下面的引理是结果 [5, 引理 2.2] 的略微推广。

引理 1. 设 G 是作用在 $V\simeq\mathbb{F}_p^d$ 上的不可约线性群，且 Δ 是 V 的一个 G-不变子集。若对某个 $m\geq 1$，和集 $m\cdot\Delta$ 含有一条非平凡直线 $b+\mathbb{F}_p v$，其中 $b\in V, v\neq 0$，则 $dm\cdot\Delta=V$。

证明。由于 G 在 V 上不可约地作用，一维子空间$\sum_{g\in G}\mathbb{F}_p v^g$之和等于 V。因此存在元素 $g_1,\dots,g_d\in G$ 使得 $\mathbb{F}_p v^{g_1}+\dots+\mathbb{F}_p v^{g_d}=V$。由于 $(b+\mathbb{F}_p v)^{g_i}\subseteq m\cdot\Delta$ 对所有 $i=1,\dots,d$ 均成立，我们有

$$dm\cdot\Delta\supseteq(b+\mathbb{F}_p v)^{g_1}+\dots+(b+\mathbb{F}_p v)^{g_d}=b^{g_1}+\dots+b^{g_d}+\mathbb{F}_p v^{g_1}+\dots+\mathbb{F}_p v^{g_d}=$$
$$=b^{g_1}+\dots+b^{g_d}+V=V.$$

该断言得证。 □

推论 1. $\overrightarrow{\operatorname{diam}}(V,G)\leq d(p-1)$。

证明. 若 $\mathcal{O}$ 是 G 在 V上的非零轨道，则 $(p-1)\cdot(\mathcal{O}\cup\{0\})$ 包含一条非平凡直线（经过零点）。于是 $d(p-1)\cdot(\mathcal{O}\cup\{0\})=V$，由公式 $(\star)$ 即得该断言。 □

下一个引理是 Linnik [7] 关于对角型的同时解的一个结果的推论。证明依赖于指数和的 Weil 界；在此我们引用 Karatsuba 给出的一个具有有效常数的版本。令 $\log k$ 表示 k的自然对数。

引理 2（[8, 引理 2]）。对于任意 $k\geq 1, b_1,\dots,b_k\in\mathbb{F}_p, m>4k\log k$ 以及满足 $p\geq 9k^2$ 的素数 p，方程组

$$\begin{cases}x_1+\dots+x_m=b_1,\\ x_1^2+\dots+x_m^2=b_2,\\ \vdots\\ x_1^k+\dots+x_m^k=b_k.\end{cases}$$

有一个解 $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{F}_p$。

现在我们可以得出主要结果了。

定理 1 的证明。如果 $p<9d^2$，那么根据推论 1，$\operatorname{diam}(V,G)\leq 9d^3$，因此从现在起我们可以假设 $p\geq 9d^2$。

由于 $|G|$ 可被 p整除，群 G 含有一个阶为 p的元素 A。该元素作用于定义在阶为 p的域上的向量空间 V，因此所有

A 的特征值均为 1。令 k 为 A的最小多项式的次数，即满足 $(A-\mathrm{Id})^k = 0$的最小正整数，其中 Id 表示恒等变换。显然 $2 \le k \le d$，因为 $A \neq \mathrm{Id}$。

令 $\mathcal{O}$ 为 V 上 G 的一个非零轨道。由于 $(A-\mathrm{Id})^{k-1}$ 的核是 V 的真子空间，且 $\mathcal{O}$ 张成了整个 V，因此可以选取一个向量 $v \in \mathcal{O}$，使得 $v(A-\mathrm{Id})^{k-1} \neq 0$。现在，对于任意非负整数 x，考虑二项式公式

$$A^x = (A - \mathrm{Id} + \mathrm{Id})^x = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} (A-\mathrm{Id})^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{x}{i} (A-\mathrm{Id})^i.$$

在最后一个等式中，我们将求和的上限替换为 $k-1$，因为对所有 $i \ge k$，都有 $(A-\mathrm{Id})^i = 0$。注意，二项式系数可以看作

$$\binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$$

关于 x 的 i 次多项式；又由于 $i < k \le d < p$，我们可以放心地假设这些多项式的系数属于 $\mathbb{F}_p$。由于 $A^p = \mathrm{Id}$，我们也可以将 x 与其模 p 的剩余类等同起来。

现在，令 $\alpha \in \mathbb{F}_p$ 为任意元素。根据引理 2，对于任意 $m > 4(k-1)\log(k-1)$，存在 $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F}_p$ 满足以下方程组：

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_m = 0, \\ \vdots \\ x_1^{k-2} + \dots + x_m^{k-2} = 0, \\ x_1^{k-1} + \dots + x_m^{k-1} = \alpha \cdot (k-1)!. \end{cases}$$

注意，如果 $k = 2$，我们只有一个右端项为 α 的方程，因此可以取 $m = 1$。令 $m = \max\{1, \lceil 4(k-1)\log(k-1) \rceil\}$。

展开括号并重新整理后，二项式系数之和可表示为：

$$\binom{x_1}{i} + \dots + \binom{x_m}{i} = \frac{x_1^i + \dots + x_m^i}{i!} + c_{i-1}(x_1^{i-1} + \dots + x_m^{i-1}) + \dots + c_1(x_1 + \dots + x_m),$$

其中 c_1、…、$c_{i-1} \in \mathbb{F}_p$ 不依赖于 x_1、…、x_m。由此可得

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{x_j}{i} = \begin{cases} m, & \text{for } i = 0, \\ 0, & \text{for } 0 < i < k-1, \\ \alpha, & \text{for } i = k-1. \end{cases}$$

现在我们将这一观察应用于元素 A 的幂公式：

$$A^{x_1} + \dots + A^{x_m} = \sum_{i=0}^{k-1} (A-\mathrm{Id})^i \sum_{j=1}^{m} \binom{x_j}{i} = \mathrm{Id} \cdot m + (A-\mathrm{Id})^{k-1} \cdot \alpha.$$

元素 $A^{x_1}, \dots, A^{x_m}$ 属于 G，因此向量 $vA^{x_1}, \dots, vA^{x_m}$ 属于 $\mathcal{O}$。因此

$$m \cdot \mathcal{O} \ni vA^{x_1} + \cdots + vA^{x_m} = v \cdot m + [v(A - \mathrm{Id})^{k-1}] \cdot \alpha.$$

由于 $\alpha \in \mathbb{F}_p$ 是任意的，且 $v(A - \mathrm{Id})^{k-1}$ 是非零向量，和集 $m \cdot \mathcal{O}$ 包含一条直线。由引理 1 可得 $dm \cdot \mathcal{O} = V$，又因为 $m \leq 4d^2$，我们得到 $4d^3 \cdot \mathcal{O} = V$。由于非零轨道 $\mathcal{O}$ 是任意的，公式（$\star$）推出 $\longrightarrow \mathrm{diam}(V, G) \leq 4d^3$，结论得证。

3 致谢

作者谨向 prof. A. Mar´oti 和 A.V. Vasil'ev 致以谢意，感谢他们提出的宝贵意见和建议。

本申请所涉项目获得欧洲研究委员会（ERC）资助，资助来源为欧盟"地平线 2020"研究与创新计划（拨款协议编号 741420）。

参考文献

[1] D. G. Higman，《有限置换群的交矩阵》，《代数杂志》6 (1967) 22–42。[2] M.W. Liebeck、D. Macpherson、K. Tent，《轨道直径有界的本原置换群》，《伦敦数学会会刊》(3) 100 (2010)，第 1 期，216–248。[3] A. Sheikh，《对称群与交错群的轨道直径》，《代数组合论杂志》45 (2017)，第 1 期，1–32。[4] K.Rekv´enyi，《关于对角型群的轨道直径》，《组合理论杂志》A辑 190 (2022)，论文编号 105636。[5] A. Mar´oti、S.V. Skresanov，《仿射群轨道图直径的界》，《越南数学杂志》（2023），在线发表。[6] T. Cochrane、J. Cipra，《有限域上应用于华林问题的和积估计》，《整数》12 (2012)，第 3 期，385–403。[7] Yu.V. Linnik，《关于三角和估计的若干评注》，《数学科学进展》14:3(87) (1959)，153–160。[8]A.A. Karatsuba，《一个同余方程组》，《苏联科学院数学札记》19 (1976)，237–239。

Alfr´ed R´enyi 数学研究所，Re´altanoda utca 13-15，
H-1053，布达佩斯，匈牙利 电子邮件地址：
skresan@renyi.hu