arXiv:2305.03467v1 [math.CA] 5 May 2023

Heisenberg 及相关群的可解扩张尖锐乘子定理

ALESSIO MARTINI 和 PAWE L PLEWA

Abstract. 设 G 为半直积 $N \rtimes \mathbb{R}$，其中 N 是分层李群，且 $\mathbb{R}$ 通过自同构膨胀作用于 N。N 和 $\mathbb{R}$ 上的齐次左不变次拉普拉斯算子可以提升到 G，而它们的和 Δ是 G上的左不变次拉普拉斯算子。在此前 Ottazzi、Vallarino 与第一作者的合作研究中，我们为 Δ证明了 Mihlin–H¨ormander 型谱乘子定理，表明形如$F(\Delta)$的算子具有弱型 (1, 1)，且对所有 $p \in (1, \infty)$，在 $L^p(G)$上有界，前提是F 满足阶为 $s > (Q + 1)/2$的尺度不变光滑性条件，其中 Q 是 N的齐次维数。本文证明，若 N 是 Heisenberg 型群，或更一般地，是 M´etivier 群与阿贝尔群的直积，则光滑性条件可降至尖锐阈值 $s > (d + 1)/2$，其中 d是 N的拓扑维数。证明基于将 N 上的加权 Plancherel 估计提升到 G，并利用 Δ的函数演算与贝塞尔–金曼超群的半直扩张上的类似算子之函数演算之间的关系。

1. Introduction

设 N 是步长为 r 的分层李群。换言之，N 是一个连通、单连通的幂零李群，其李代数 $\mathfrak{n}$ 可分解为非平凡子空间 $\mathfrak{n}_j$ 的直和 $\mathfrak{n}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_r$，这些子空间称为层，并满足：对所有 $j = 1$, ..., r，都有 $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_j] = \mathfrak{n}_{j+1}$，其中 $\mathfrak{n}_{r+1} = \{0\}$。由于 N 是幂零且单连通的，指数映射是 $\mathfrak{n}$ 与 N 之间的微分同胚；在指数坐标下，$\mathfrak{n}$ 上的勒贝格测度对应于 N 上的（左、右）哈尔测度。我们用 $d = \sum_{j=1}^{r} \dim \mathfrak{n}_j$ 和 $Q = \sum_{j=1}^{r} j \dim \mathfrak{n}_j$ 分别表示 N 的拓扑维数和齐次维数。设 Δ_N 是 N 上的一个齐次左不变次拉普拉斯算子，即一个形如

$$\Delta_N = -\sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{n}_1} X_j^2, \tag{1.1}$$

其中，X_j 是构成第一层 $\mathfrak{n}_1$ 的一组左不变向量场的基。

分层群 N 自然地带有一个自同构膨胀的单参数群 $(e^{uD})_{u\in\mathbb{R}}$，其中 D 是 $\mathfrak{n}$ 的导子，它在 $\mathfrak{n}_j$上等于 j 倍的恒等算子。于是我们可以构造半直积 $G = N \rtimes \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}$通过膨胀作用于 N；换言之，G 上的乘法律为

$$(z, u) \cdot (\tilde{z}, \tilde{u}) = (z \cdot e^{uD}\tilde{z}, u + \tilde{u})$$

对所有的 (z, u)、$(\tilde{z}, \tilde{u}) \in G$。在这些坐标下，$N$ 上的哈尔测度与 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度的乘积测度 $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$ 是

2020 *Mathematics Subject Classification.* 22E30, 42B15, 42B20, 43A22.

*Key words and phrases.*Mihlin–H¨ormander 乘子，谱乘子，次拉普拉斯算子，可解群，超群。作者衷心感谢 Compagnia di San Paolo 的资助。第一作者是 Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM) 的 Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilit`a e le loro Applicazioni (GNAMPA) 成员。

G上的右 Haar 测度，而左 Haar 测度为 $e^{-Qu}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}u$；除非另有说明，我们在 G 上积分以及定义勒贝格空间 $L^p(G)$时，均采用右 Haar 测度。

向量场 ∂_u在 $\mathbb{R}$上以及 X_j（$j=1,\dots,\dim\,\mathfrak{n}_1$）在 N上的提升，是半直积 G上的左不变向量场，定义为

$$X_j^\sharp=\begin{cases}\partial_u & \text{if } j=0,\\ e^u X_j & \text{if } j=1,\dots,\dim\mathfrak{n}_1,\end{cases}\tag{1.2}$$

并且我们可以考虑相应的左不变次拉普拉斯算子

$$\Delta=-\sum_{j=0}^{\dim\mathfrak{n}_1}(X_j^\sharp)^2=-\partial_u^2+e^{2u}\Delta_N\tag{1.3}$$

作用于 G上。该算子在 $L^2(G)$ 上本质自伴；因此，根据谱定理，次拉普拉斯算子 Δ 具有博雷尔函数演算，并且对于任意有界博雷尔函数 $F\colon[0,\infty)\to\mathbb{C}$，算子 $F(\Delta)$ 在 $L^2(G)$ 上有界。

这里我们感兴趣的是研究谱乘子 F需要满足哪些附加条件，才能使最初定义在$L^2(G)$上的算子 $F(\Delta)$ 延拓为 $L^p(G)$ 上的有界算子，其中某个 $p\neq 2$成立。更具体地说，我们要探究 $F(\Delta)$ 的 L^p-有界性与 F的大小和平滑性之间的关系，例如满足如下形式的 Mihlin–H¨ormander 型估计

$$\|F(\Delta)\|_{L^p(G)\to L^p(G)}\lesssim_{p,s}\sup_{t>0}\|F(t\cdot)\chi\|_{L^2_s(\mathbb{R})}\tag{1.4}$$

对于适当的 p 和 s，其中 $L^2_s(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上阶数为 s 的 L^2 索伯列夫空间，而 $\chi\in C_c^\infty(0,\infty)$ 是一个非平凡的截断函数。这些结果推广了关于 $\mathbb{R}^n$上拉普拉斯算子的经典估计；对于该算子，作为傅里叶乘子的 Mihlin–H¨ormander 定理 [38, 60]的推论，(1.4) 的类似结论对任意 $p\in(1,\infty)$ 和 $s>n/2$均成立。

我们指出， G 是一个具有指数体积增长的可解李群。特别是，为多项式增长李群上的次拉普拉斯算子以及更一般的倍增度量测度空间上的次拉普拉斯算子函数演算提供 Mihlin–H¨ormander 型 L^p-界的“标准方法”（例如参见 [2, 13, 18, 30]）在此并不适用；事实上，若赋予 G 由向量场 (1.2) 关联的 Carnot–Carath´eodory 距离，则 G 局部倍增，但整体上并非如此。然而，颇令人意外的是， G 上的次拉普拉斯算子 Δ 在 $L^p(G)$ [11, 23, 29, 69] 上具有可微函数演算；这应与其他指数增长可解李群及其次拉普拉斯算子的情形形成对照，后者可能具有全纯 L^p-型 [9, 32]。最近，通过发展并扩展 [31, 33, 80], 中的先前结果和思路， [55] 的作者证明了一个 Mihlin–H¨ ormander 型谱乘子定理，适用于 Δ，其表述如下。

对于固定的截断函数 $\chi\in C_c^\infty(0,\infty)$（其中 $\mathbb{I}_{[1/2,2]}\le\chi\le\mathbb{I}_{[1/4,4]}$），我们为 $s\ge 0$ 和有界博雷尔函数 F 定义以下量：$[0,\infty)\to\mathbb{C}$

$$\|F\|_{0,s}=\sup_{0<t\le 1}\|F(t\cdot)\chi\|_{L^2_s(\mathbb{R})},\qquad \|F\|_{\infty,s}=\sup_{t\ge 1}\|F(t\cdot)\chi\|_{L^2_s(\mathbb{R})}.$$

这些量是（1.4）右侧尺度不变 Sobolev 范数的变体，分别关注函数 F 的“局部部分”和“无穷远部分”。

定理 1.1 ([33, 55])。假设 s_0、 $s_\infty>3/2$ 均成立，且此外 $s_\infty>(Q+1)/2$。若有界博雷尔函数 $F\colon[0,\infty)\to\mathbb{C}$ 满足 $\|F\|_{0,s_0}<\infty$且 $\|F\|_{\infty,s_\infty}<\infty$，则 $F(\Delta)$ 可延拓为一个弱型 (1, 1) 算子，并且在 $L^p(G)$ 上有界，其中 $p\in(1,\infty)$，且从 $H^1(G)$ 到 $L^1(G)$ 以及从 $L^\infty(G)$ 到 $BMO(G)$ 均有界。

我们参见 [55, 81] 以获取原子 Hardy 空间 $H^1(G)$及其对偶空间 $BMO(G)$的精确定义；按照 [33]的意义，这些定义适用于 G 的 Calder´on–Zygmund 结构。

我们指出，上述表述中的限制条件 $s_\infty > 3/2$ 可由 $s_\infty > (Q+1)/2$ 推出，但 $Q = 1$ 的情形除外；在这种情况下， N 必须是阿贝尔的。一般而言，上述结果要求乘子 F 在局部部分和无穷远部分具有不同的光滑性阶数 s_0 和 s_∞，这分别与 G 的“伪维数”3 和“局部倍增维数” $Q+1$ 相关；在这里，伪维数所起的作用，相当于多项式增长群的 [2] 中“无穷远处的维数”所起的作用。无论如何，定理 1.1 蕴含：对于任意 $p \in (1,\infty)$ 以及 $s > \max\{3, Q+1\}/2$，估计式 (1.4) 均成立。

当 N 为阿贝尔群，即 N 的步长为 1 时，则有 $N \cong \mathbb{R}^d$，而上述结果已包含于 [33] 中。在这种情况下， Δ_N 就是 $\mathbb{R}^d$ 上的拉普拉斯算子，并且 Δ 是椭圆的；此外， $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1$ 和 $Q = d$。于是，经典的移植论证 [43] 表明，光滑性条件 $s_\infty > (Q+1)/2$ 是尖锐的，即阈值 $(Q+1)/2$ 在此情形下等于 G 的拓扑维数 $(d+1)/2$ 的一半，不能用更小的量替代。

相反，当 N 不是阿贝尔的时，算子 Δ_N 和 Δ 不是椭圆的，并且 $Q > d \geq 3$。在这里，探讨前一个定理中条件$s_\infty > (Q+1)/2$ 的尖锐性是有意义的。事实上，根据 [54], 的结果，我们知道阈值 $(Q+1)/2$不可能被任何小于 $(d+1)/2$的数所替代，但这两个量之间仍存在差距。本文的主要结果表明，至少对于某些类别的非阿贝尔分层群 N，该条件确实可以降低至 $s_\infty > (d+1)/2$，从而得到一个尖锐结果；在这种情况下，这改进了定理 1.1。

我们回顾一下：若分层群 N 满足步长为 2，并且对所有 $\mu \in \mathfrak{n}_2^* \setminus \{0\}$，斜对称双线性形式 $\mu[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_1 \to \mathbb{R}$是非退化的，则称其为 M´etivier 群 [59] 。海森堡群，以及更一般地，按照 Kaplan [42] 的定义，海森堡型群都是 M´etivier 群，但也存在并非 Heisenberg 型的 M´etivier 群 [64]。我们对定理 1.1 的改进尤其适用于 N 是 M´etivier 群的情形。

定理 1.2. 假设二步群 N 是有限个 M´etivier 群与阿贝尔群的直积。设 $s_0 > 3/2$ 和 $s_\infty > (d+1)/2$。如果有界博雷尔函数 $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ 满足 $\|F\|_{0,\ s_0} < \infty$ 且 $\|F\|_{\infty,\ s_\infty} < \infty$，那么 $F(\Delta)$ 可延拓为弱型 (1, 1) 算子，并且在 $L^p(G)$ 上有界（当 $p \in (1,\infty)$ 时），同时从 $H^1(G)$ 到 $L^1(G)$ 以及从 $L^\infty(G)$ 到 $BMO(G)$ 有界。

作为推论，在本定理的假设下，对于所有 $p \in (1,\infty)$ 和 $s > (d+1)/2$，估计式 (1.4) 成立。我们再次指出，阈值 $(d+1)/2$（对应于 G 的一半拓扑维数）是尖锐的。在这方面，本结果可视为一项研究计划的一部分，该计划旨在确定各种背景下非椭圆“类拉普拉斯”算子的 Mihlin–H¨ormander 估计中的尖锐阈值；关于更深入的讨论及进一步参考文献，请参见 [6, 13, 14, 53, 54, 66]。定理 1.2 在这一背景下的重要性在于：据我们所知，这是此类结果中第一个底层流形具有指数体积增长的尖锐结果。

通过收缩论证（参见例如 [51, 定理 5.2]），定理 1.1 和定理 1.2˜分别推出了关于直积 $G = N \times \mathbb{R}$的相应结果，其光滑性条件分别为 $s_0 = s_\infty > (Q+1)/2$ 和 $s_0 = s_\infty > (d+1)/2$。然而，˜关于 G 的这些结果在文献中已有论述。事实上，直积G 本身就是一个分层群，而通过收缩从定理

1.1 和 1.2 推出的结果对应于分层群上齐次次拉普拉斯算子的 Christ–Mauceri–Meda定理 [8, 56] ，以及 Hebisch [28]和 M¨uller 与 Stein [66] 对 Heisenberg 群及相关群所作的改进。

目前，对于任意分层群而言，Christ–Mauceri–Meda定理中将界改进至拓扑维数一半是否总是可能，仍然是一个公开问题（例如，参见 [52, 53, 54] 中的讨论）。因此，目前看来，是否可以完全去除定理 1.2 中关于 N 的附加假设，仍然遥不可及，因为直积 G 上相应且显然˜更容易的问题仍未解决。尽管如此，本文所发展的技术可以改进定理 1.1，使其适用于比定理 1.2 中所考虑的更大类的非阿贝尔分层群 N ，其中还包括一些步长高于 2 的群。

关于 [49, 第 3] 节 h维分层群的定义，请参阅相关内容。这里仅回顾以下事实：任意分层群 N 都是 0-广容量的；但是，如果 N 是 M´etivier 群，那么它也是 $(Q-d)$-广容量的。此外，如果 N是一个 h_1-广容量群与一个 h_2-广容量群的直积，那么 N 就是 (h_1+h_2)- 广容量的。进一步地，如果 N 的步长为 r 且维数为 $\dim \mathfrak{n}_r = 1$，那么根据 [49, 命题 3.9]， N 是 1-广容量的。因此，下面的结果恰当地推广了定理 1.2。

定理 1.3. 假设对于某个 $h \in \mathbb{N}$， N 是 h-宽裕的。设 s_0、 $s_\infty > 3/2$ 和 $s_\infty > (Q-h+1)/2$。若有界博雷尔函数 $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ 满足 $\|F\|_{0,\ s_0} < \infty$ 且 $\|F\|_{\infty,\ s_\infty} < \infty$，则 F（Δ）可延拓为弱型 (1,1) 算子，并且在 L^p（G）上对 $p \in (1,\infty)$ 有界，从 H^1（G）到L^1（G）以及从 L^∞（G）到 BMO（G）有界。

这一结果可与 [49, 推论 6.1] 中关于 h-宽裕分层群上的齐次次拉普拉斯算子的结果相比较。定理 1.3 的证明是对定理 1.2 证明的相对直接的修改，但需要作若干调整并更改记号。为不影响论述的清晰性，下文仅讨论定理 1.2 的证明细节。

证明思路。根据对偶性和插值，上述针对 Δ 的各个谱乘子定理均可归结为如下形式的端点估计。

$$\begin{aligned} \|F(\Delta)\|_{L^1(G)\to L^{1,\infty}(G)} &\lesssim_\varepsilon \|F\|_{0,\varsigma_0+\varepsilon} + \|F\|_{\infty,\varsigma_\infty+\varepsilon}, \\ \|F(\Delta)\|_{H^1(G)\to L^1(G)} &\lesssim_\varepsilon \|F\|_{0,\varsigma_0+\varepsilon} + \|F\|_{\infty,\varsigma_\infty+\varepsilon} \end{aligned} \tag{1.5}$$

对所有 $\varepsilon > 0$，其中 ς_0、 $\varsigma_\infty \geq 0$ 为适当的阈值。与该领域的其他研究一样，借助 Calder´on–Zygmund 理论，估计式 (1.5) 基本上可归结为算子 $F(t\Delta)$ 的卷积核 $K_{F(t\Delta)}$ 的 L^1-估计；这些算子对应于具有紧支撑 $\operatorname{supp} F \subseteq [-4,4]$ 的乘子 F 的重缩放版本：

$$\sup_{0<t\leq 1} \|K_{F(t\Delta)}\|_{L^1(G)} \lesssim_\varepsilon \|F\|_{L^2_{\varsigma_0+\varepsilon}(\mathbb{R})}, \quad \sup_{t\geq 1} \|K_{F(t\Delta)}\|_{L^1(G)} \lesssim_\varepsilon \|F\|_{L^2_{\varsigma_\infty+\varepsilon}(\mathbb{R})}.$$

反过来，通过频率分解，至少当 $\varsigma_0 \leq \varsigma_\infty$ 时，可以从如下形式的估计中推导出这些结论。

$$\|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^1(G)} \lesssim r^{[\varsigma_\infty,\varsigma_0]} \left(\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[2\varsigma_0,2\varsigma_\infty]} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \right)^{1/2} \tag{1.6}$$

对于所有 $r > 0$ 和 $F \in \mathcal{E}_r$；这里 $\mathcal{E}_r$ 是偶施瓦茨函数 F 的集合： $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 其傅里叶支集包含于 $[-r,r]$，并记作

$$\lambda^{[a,b]} = \begin{cases} \lambda^a & \text{if } \lambda \leq 1, \\ \lambda^b & \text{if } \lambda \geq 1, \end{cases} \tag{1.7}$$

对于任意 a、 $b \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda > 0$。

当 $\varsigma_0 = 3/2$ 和 $\varsigma_\infty = (Q+1)/2$ 时，可以通过结合 Δ 的函数演算的普朗歇尔公式证明估计式 (1.6)，即

$$\|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^2(G)}^2 \simeq \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[3,Q+1]} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}, \tag{1.8}$$

以及 Δ 的有限传播速度性质，即

$$\operatorname{supp} K_{F(\sqrt{\Delta})} \subseteq \overline{B_G}(0_G, r)$$

只要 $F \in \mathcal{E}_r$，其中 $\overline{B_G}(0_G, r)$ 是以 G 的原点为中心、半径为 r 的闭球，距离度量采用 Carnot–Carath´eodory 距离。事实上，由有限传播速度和柯西–施瓦茨不等式，

$$\|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^1(G)} \leq |\overline{B_G}(0_G, r)|^{1/2} \|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^2(G)}$$

当 $F \in \mathcal{E}_r$ 时，由普朗歇尔公式 (1.8) 可得当 $r \leq 1$ 时的 (1.6)，因为在这种情况下 $|\overline{B_G}(0_G, r)| \simeq r^{Q+1}$。然而，这一论证不能直接用于 $r \geq 1$，因为当 r 较大时，$|\overline{B_G}(0_G, r)| \simeq \exp(Qr)$。不过，应用柯西–施瓦茨不等式时引入适当的权重即可解决这一问题，以消除指数体积增长；随后，大致而言，可以利用 $K_{F(\sqrt{\Delta})}$ 的有限传播速度和径向性，将 L^2 范数中的额外权重去掉，从而在 r 较大时得到 (1.6)。这基本上就是 [33, 55] 用于证明定理 1.1 的方法。

为了改进这一结果，即降低阈值 ς_∞，这里我们在应用柯西–施瓦茨不等式时，即使对于较小的 r，也引入一个适当的权函数 $w = w(z)$：

$$\|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^1(G)} \leq \left(\int_{\overline{B_G}(0_G, r)} w(z)^{-2} \, dz \, du \right)^{1/2} \|w \, K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^2(G)}.$$

如果选取 w 使得 $\int_{\overline{B_G}(0_G,r)} w(z)^{-2} \, dz \, du \simeq r^{2\varsigma_\infty}$ 对于 $r \leq 1$ 成立，那么获得 (1.6) 的问题，在至少对较小的 r 而言，实质上就归结为证明如下形式的“加权Plancherel估计”

$$\|w \, K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^2(G)}^2 \lesssim \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[3,2\varsigma_\infty]} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \tag{1.9}$$

在 $\varsigma_\infty = (\nu+1)/2$ 的情况下，对于某个整数 ν，根据 (1.8)，我们可以将前一个不等式等价地改写为

$$\|w \, K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^2(G)} \lesssim \|K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})}\|_{L^2(G_\nu)}, \tag{1.10}$$

其中，G_ν 和 Δ_ν 是将 N 替换为 $\mathbb{R}^\nu$ 时，G 和 Δ 的对应形式。由于 w 仅依赖于变量 z，Δ 与 Δ_N 的函数演算之间的关系使得可以将（1.10）归约为分层群 N 上的一个类似估计：

$$\|w \, K_{F(\sqrt{\Delta_N})}\|_{L^2(N)} \lesssim \|K_{F(\sqrt{\Delta_{\mathbb{R}^\nu}})}\|_{L^2(\mathbb{R}^\nu)}, \tag{1.11}$$

或等价地，

$$\|w \, K_{F(\sqrt{\Delta_N})}\|_{L^2(N)}^2 \lesssim \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^\nu \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \tag{1.12}$$

事实证明，当 N 是由 M´etivier 群与阿贝尔群构成的直积时，对于任意 $\nu \in (d, Q]$，在选取一个依赖于 ν 的适当权函数 w 后，N 上的“加权Plancherel估计”(1.12)均成立。事实上，这种估计是 [28] 中所用的基本工具，用于强化 Christ–Mauceri–Meda定理在这一类分层群上的结论。中间步骤(1.11)和(1.10)使我们能够将加权估计提升到 G，并推出 $\varsigma_\infty = (\nu+1)/2$ 上的(1.9)，其中 $\nu \in (d, Q] \cap \mathbb{N}$。

为了在尖锐条件 $s_\infty > (d+1)/2$ 下证明定理 1.2，原则上我们希望取 $\varsigma_\infty = (d+1)/2$，也就是 $\nu = d$，但加权

Plancherel 估计 (1.12) 在 N 上不成立。作为一种变通方法，我们可以改为取 $\nu = d + \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$ 任意小，因为此时 (1.12) 成立，但这要求我们处理非整数的 ν。于是问题变成：在导向 (1.9) 的提升论证中，如何理解中间步骤 (1.11) 和 (1.10)，因为当 ν 为分数时，$\mathbb{R}^\nu$ 和 $G_\nu = \mathbb{R}^\nu \rtimes \mathbb{R}$ 都没有定义。

我们在此采用的解决方案是，将 $\mathbb{R}^\nu$ 上的拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{R}^\nu}$ 替换为半直线 $X_\nu = [0, \infty)$ 上的贝塞尔算子 $L_\nu = -\partial_x^2 - (\nu - 1)x^{-1}\partial_x$，并配备测度 $x^{\nu-1}\mathrm{d}x$。当 ν 为整数时，贝塞尔算子 L_ν 就是 $\mathbb{R}^\nu$ 上拉普拉斯算子的径向部分；当然，L_ν 和 X_ν 对分数 ν 也有定义，并由此得到对 (1.11) 的如下替代：

$$\|w\, K_{F(\sqrt{\Delta_N})}\|_{L^2(N)} \lesssim \|K_{F(\sqrt{L_\nu})}\|_{L^2(X_\nu)}. \tag{1.13}$$

类似地，取半直积 $X_\nu \rtimes \mathbb{R}$ 作为 G_ν，并取其上的算子 $-\partial_u^2 + e^{2u}L_\nu$ 作为 Δ_ν，则提升后的估计 (1.10) 对分数 ν 也有意义。

实施这一策略时遇到的一个技术难题是，半直线X_ν 不是李群；不过，它是一个超群 [3, 41]（更准确地说，X_ν 称为贝塞尔–金曼超群），因此存在卷积结构，并据此定义卷积核 $K_{F(\sqrt{L_\nu})}$。此外，X_ν 具有一族自同构膨胀，因此可以在超群理论的框架下定义半直积 $G_\nu = X_\nu \rtimes \mathbb{R}$ [36, 84],；同样，$\Delta_\nu = -\partial_u^2 + e^{2u}L_\nu$ 上函数演算中的算子也是 G_ν 上的卷积算子。因此，我们在此要完成的任务之一是发展算子 L_ν和 Δ_ν的理论，使之与 ν 为整数时关于 $\Delta_{\mathbb{R}^\nu}$ 和 $-\partial_u^2 + e^{2u}\Delta_{\mathbb{R}^\nu}$ 的经典理论相对应，并确立运行上述论证所需的所有性质，以处理 ν 为分数的情形（例如有限传播速度、控制距离的显式公式、函数演算中卷积核的径向性、普朗歇尔公式等）。为此，一项基础工具是 [23], 中发展的理论，该理论明确关联了由 L_ν 和 Δ_ν 生成的热半群，从而建立它们的函数演算之间的联系，为将 (1.13) 提升至 (1.10) 提供依据，并最终导出证明定理 1.2 所需的估计。

论文结构。第 2 节回顾分层群 N、它们的可解扩张 $G = N \rtimes \mathbb{R}$ 以及其上的次拉普拉斯算子的主要性质。我们还陈述并证明 N 上一个合适版本的加权Plancherel估计，该估计扩展了文献中已有的结果，并证明该估计中出现的权重在 G 上具有正确的可积性。

第 3 节和第 4 节讨论超群 X_ν 和 G_ν，以及相应的算子 L_ν 和 Δ_ν。当然，关于贝塞尔算子 L_ν 的文献浩如烟海，因此我们仅结合 X_ν 上的汉克尔变换，回顾一些主要性质。相比之下，关于半直积超群 G_ν 上的算子 Δ_ν，现有结果似乎不多，因此我们花一些篇幅推导所需的性质。我们需要处理的问题之一是，X_ν 和 G_ν 是带边界流形，而且边界条件确实会影响（至少在 ν 较小时）L_ν 和 Δ_ν 的自伴扩张的选择，而这些扩张又决定了它们的函数演算。

利用上述超群结构，在第 5 截面中，我们将第 2 截面中在 N 上获得的加权Plancherel估计提升到 G，并证明我们的主要结果，即定理1.2。

最后，我们在附录（第 6 节）中回顾一些术语和结果，内容涉及带狄利克雷和诺伊曼边界条件的散度型微分算子的自伴扩张，以及相关波动方程的有限传播速度性质；我们采用了 [57] 中的“一阶方法”。

一些评论与开放问题。本文所发展的技术依赖于将 N 上形如 (1.12) 的加权 Plancherel 估计提升到半直积 $G = N \rtimes \mathbb{R}$ 上。如前所述，类似的估计最初是在 [28, 66] 中得到的，作为改进 N 上 Christ–Mauceri–Meda 乘子定理的一种工具。然而，并非所有分层群 N 都适用于这种方法。近来，[50, 52] 中发展出另一种方法，它适用于其他类别的分层群，其基础是 (1.12) 的变体；粗略地说，这些变体的右端也可能包含 F 的导数。除了 M´etivier 群与阿贝尔群的直积外，这种替代方法还可用于若干二步分层群 N，将 Christ–Mauceri–Meda 定理中的条件降至拓扑维数的一半。对于这些分层群 N，可以预期，在相应的半直积 $G = N \rtimes \mathbb{R}$ 上也能获得定理 1.1 的类似改进；但本文提出的方法并不直接适用，似乎还需要新的思路。

另一个自然的问题是，与 Δ 上的次拉普拉斯算子相关的波动方程是否满足 L^p Miyachi–Peral 型 [61, 71] 估计；事实上，这类尖锐估计很可能通过从属原理 [63] 推出关于 Δ 的尖锐乘子定理。在 G 上的此类估计 [67] 已知于 N 为阿贝尔群的情形（另见 [68] 中关于 Damek–Ricci 空间上的椭圆拉普拉斯算子的推广），但非阿贝尔 N 和非椭圆 Δ 的情形似乎仍基本未解。对于 N 上的齐次次拉普拉斯算子 Δ_N，当 N 为 Heisenberg 型 [65], 时，尖锐的 Miyachi–Peral 估计已为人所知；人们不禁会问，在相应的可解扩张 G 上，Δ 是否也满足类似估计。

记号。$\mathbb{N}$ 表示自然数集，其中包括 0。我们用 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}_+$ 分别表示闭半直线 $[0, \infty)$ 和开半直线 $(0, \infty)$。对于两个非负的 $^\circ$ 量 A 和 B，我们用 $A \lesssim B$ 表示存在一个常数 $C \in \mathbb{R}_+$ 使得 $A \leq CB$。我们还用 $A \simeq B$ 表示 $A \lesssim B$ 与 $B \lesssim A$ 同时成立。带下标的变体，例如 $\lesssim_p$ 或 $\simeq_p$，表示常数可能依赖于参数 p。最后，我们用 $\mathbb{I}^S$ 表示集合 S 的示性函数。

2. Stratified Lie groups and their solvable extensions

2.1. M´etivier 群乘积的加权Plancherel估计。本节旨在证明加权Plancherel估计 (1.12)，它是我们论证的核心。文献中已有该估计的若干版本（例如，参见 [28, 引理 1.4] 或 [48, 命题 3.5]），但这些版本的陈述和证明都假设乘子 F 支撑在 $\mathbb{R}_+$ 的一个固定 $^\circ$ 紧子集内。我们在此给出的证明表明，对于左端 (1.12) 中的某些齐次权 w，只要在右端选择适当的测度齐次度，就可以去掉对 F 支撑的这一限制。这个不带支撑限制的估计版本，结果证明对我们证明定理 1.2 至关重要。

设 N 是一个二步分层李群。因此，N 的李代数 $\mathfrak{n}$ 是两个层 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ 的直和。若以 d_1 和 d_2 分别表示 $\mathfrak{n}_1$ 和 $\mathfrak{n}_2$ 的维数，则 $d = d_1 + d_2$ 和 $Q = d_1 + 2d_2$ 分别是 N 的拓扑维数和齐次维数。通过指数映射，我们可以将 N 与 $\mathfrak{n}$ 等同；通过这种等同，$\mathfrak{n}$ 上的勒贝格测度是 N 上的左、右哈尔测度。同样的等同也使我们能够定义 N 上快速衰减的光滑函数的施瓦茨类 $\mathcal{S}(N)$。

我们选取一组 $\{X_j\}_{j=1}^{d_1}$ 左不变向量场，它们构成 $\mathfrak{n}_1$ 的一组基，并令 Δ_N 如 (1.1) 所示为 N 上相应的齐次次拉普拉斯算子。由于 Δ_N 在 $L^2(N)$ 上、定义域为 $C_c^\infty(N)$ 时本质自伴，故可定义博雷尔

函数演算：通过谱定理定义 Δ_N 的函数演算。对于任意有界博雷尔函数 F: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, L^2-有界算子 $F(\Delta_N)$ 是左不变的，因此根据 Schwartz 核定理，存在一个卷积核 $K_{F(\Delta_N)} \in \mathcal{S}'(N)$，使得

$$F(\Delta_N) f = f * K_{F(\Delta_N)}, \qquad f \in \mathcal{S}(N).$$

众所周知（例如参见 [12, 58, 76] 或下文的命题 6.3）， Δ_N 具有有限传播速度性质：

$$\operatorname{supp} K_{\cos(t\sqrt{\Delta})} \subseteq \overline{B_N}(0_N, |t|), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

其中， $\overline{B_N}(z, r)$ 是相对于与 Δ_N 相关联的 Carnot–Carath´eodory 距离，以 z 为中心、半径为 r 的闭球，而 0_N 是 N 的单位元。此外， Δ_N 满足普朗歇尔公式：

$$\|K_{F(\Delta)}\|^2_{L^2(N)} \simeq \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{Q/2} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \tag{2.2}$$

（例如参见 [8, 16, 40]）。这对应于 (1.12) 的无权版本，且不需要对 N 作任何假设。

设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathfrak{n}_1$ 上的内积，使得 $\{X_j\}_{j=1}^{d_1}$ 构成标准正交基。对于所有 $\mu \in \mathfrak{n}_2^*$，定义反对称线性算子 $J_\mu : \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_1$ 如下：

$$\langle J_\mu x, y \rangle = \mu[x, y] \qquad \forall x, y \in \mathfrak{n}_1.$$

我们在 $\mathfrak{n}_1$ 和 $\mathfrak{n}_2$ 上选取线性坐标。因此，我们将写作 $z = (z', z'') \in N \simeq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$，并且也写作 $\mu \in \mathfrak{n}_2^* \simeq \mathbb{R}^{d_2}$。注意， $|J_\mu z'|^2$ 是关于 (z', μ) 的多项式，分别关于 z' 和 μ 齐次，次数均为 2；表达式 $|J_\mu z'|^2$ 中出现的 $\mathfrak{n}_1$ 上的范数由内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导。

令 $Z'' = -i\nabla_{z''} = (-i\partial_{z_1''}, \dots, -i\partial_{z_{d_2}''})$ 为 N 中第二层导数构成的向量，令 $P = (z_1', \dots, z_{d_1}')$ 为乘以 z_j' 的乘法算子构成的向量。 P 和 Z'' 的分量共同构成作用于 $L^2(N)$ 上的自伴算子强对易系统（参见 [49, 第 1229-1230 页]）。由于 $|J_\mu z'|^2$ 是一个多项式，我们将 $|J_{Z''} z'|^2 := |J_{Z''} P|^2$ 视为作用于 N 上、具有多项式系数的二阶微分算子。

引理 2.1. 设 $f \in \mathcal{S}(N)$ 满足：对所有 $t > 0$， $f * K_{e^{-t\Delta_N}} = K_{e^{-t\Delta_N}} * f$。那么，对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$\| |J_{Z''} P|^{2k} f \|_{L^2(N)} \lesssim_k \|\Delta_N^k f\|_{L^2(N)}.$$

证明。对于 N 上的每个光滑微分算子 D，我们定义 D° 为

$$(Df)^* = D^\circ f^*,$$

其中， $f^*(z) = \overline{f(z^{-1})}$ 表示 N 上的对合。若 D 是左不变的，则 D° 是右不变的，反之亦然。根据引理 3.4] 的 [49, ，我们有

$$|J_{Z''} z'|^2 = \sum_{j=1}^{d_1} (X_j + X_j^\circ)^2. \tag{2.3}$$

由于上述表达式包含左不变和右不变微分算子的混合，因此借助提升到直积 $N \times N$ 来分析它会比较方便；这一思路已在 [34, 49] 中得到运用。

直积 $N \times N$ 的李代数与 $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}$ 可自然地等同。特别地，我们也可以将 $N \times N$ 看作一个二步群，其第一层和第二层分别为 $\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ 和 $\mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$。令 ξ 为 $N \times N$ 在 $L^2(N)$ 上由下式定义的酉表示

$$\xi(x, y) f(z) = f(y^{-1} z x).$$

对所有 x、y、$z \in N$ 和 $f\colon N \to \mathbb{C}$。若 D 是 $L^2(N \times N)$ 上的左不变微分算子，则 $\mathrm{d}\xi(D)$ 是 N 上的光滑微分算子。此外，

$$\mathrm{d}\xi(D^\bullet) = \mathrm{d}\xi(D)^\circ$$

（见 [49, 第 1228] 页），其中 $D \mapsto D^\bullet$ 是左不变微分算子代数上的对应，它被定义为将李代数自同构 $(X, Y) \mapsto (Y, X)$ 延拓而成的唯一共轭线性自同构，作用于 $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}$。

现在，注意到 $X_j = \mathrm{d}\xi(\tilde{X}_j)$、$X_j^\circ = \mathrm{d}\xi(\tilde{X}_j^\bullet)$，其中 $\tilde{X}_j = X_j \otimes \mathrm{id}$ 是将 X_j 提升到 $N \times N$ 的提升算子，而 X_j、$X_j^\bullet$ 是二步群 $N \times N$ 上的左不变 1-齐次向量场。特别地，由 (2.3) 可知，对所有 $k \in \mathbb{N}$，

$$|J_{Z''}P|^{2k} = \mathrm{d}\xi(D_k), \tag{2.4}$$

其中

$$D_k = \left(\sum_{j=1}^{d_1} (\tilde{X}_j + \tilde{X}_j^\bullet)^2 \right)^k$$

是 $N \times N$ 上的左不变 $2k$-齐次微分算子。

定义 $A = \frac{1}{2}(\tilde{\Delta}_N + \tilde{\Delta}_N^\circ)$。注意到 $A = \mathrm{d}\xi(\tilde{A})$，其中

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}(\tilde{\Delta}_N + \tilde{\Delta}_N^\bullet) = \frac{1}{2}(\Delta_N \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta_N)$$

是二步群 $N \times N$ 上的二次齐次次拉普拉斯算子。特别地，

$$A^k = \mathrm{d}\xi(\tilde{A}^k), \tag{2.5}$$

其中，$\tilde{A}^k$ 是 $N \times N$ 上的 $2k$齐次正 Rockland 算子。

因此，根据 Helffer–Nourrigat 定理 [35]（另见 [19, 定理 2.5] 及 [34, 第 32] 页），由（2.4）和（2.5）可推出，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，有如下估计

$$\| |J_{Z''}P|^{2k} f \|_{L^2(N)} \lesssim_k \|A^k f\|_{L^2(N)}, \qquad f \in \mathcal{S}(N).$$

最后，根据 [49, 引理 3.2], ，对于任意与 Δ_N 相关的热核对易的 $f \in \mathcal{S}(N)$，有 $A^k f = \Delta_N^k f$。□

注意，Δ_N 及 Z'' 的各分量也是 $L^2(N)$ 上的一组强对易自伴微分算子。实际上，它们构成一个齐次加权次强制系统，或称 Rockland 系统（见 [48, 定理 5.2] 及 [4, 定理 3.5]）。特别地，根据 [48, 推论 3.3]，Δ_N 和 Z'' 在 $L^2(N)$ 上具有联合函数演算，并且对于任意有界博雷尔函数 $H\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{C}$，$L^2(N)$-有界算子 $H(\Delta_N, Z'')$ 是左不变的。此外，对于该联合函数演算，存在一个普朗歇尔测度 σ（见 [48, 定理 3.10]），即 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的一个正则博雷尔测度，其支持集位于联合谱中（因而特别有 $\operatorname{supp}\sigma \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d_2}$），使得

$$\|K_{H(\Delta_N, Z'')}\|_{L^2(N)} = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_2}} |H(\lambda, \mu)|^2 \, \mathrm{d}\sigma(\lambda, \mu). \tag{2.6}$$

由于 Δ_N 和 Z'' 的分量都是二次齐次的，[48, 命题 5.1] 得出，对于所有 $t > 0$，

$$K_{H(t^2\Delta_N, t^2 Z'')}(z', z'') = t^{-Q} K_{H(\Delta_N, Z'')}(t^{-1}z', t^{-2}z'').$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_2}} H(t^2\lambda, t^2\mu) \, \mathrm{d}\sigma(\lambda, \mu) = t^{-Q} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_2}} H(\lambda, \mu) \, \mathrm{d}\sigma(\lambda, \mu). \tag{2.7}$$

注 2.2. 若 $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d_2})$ 非负，则测度 $\varphi(\mu)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu)$ 经投影 $(\lambda,\mu) \mapsto \lambda$ 的推前是 $\mathbb{R}$ 上的正则博雷尔测度 $\sigma_\varphi(\lambda)$，其支撑于 $\mathbb{R}_+$ (见 [48, 引理 3.7])。此外，若 φ 是次数为 $\omega \in \mathbb{R}$ 的齐次函数，则对于任意 $F \in C_c(\mathbb{R})$ 和 $t>0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(t^2\lambda)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_2}} F(t^2\lambda)\varphi(\mu)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu)\\ &= t^{-Q}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_2}} F(\lambda)\varphi(t^{-2}\mu)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu)\\ &= t^{-Q-2\omega}\int_0^\infty F(\lambda)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi(\lambda),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (2.7) 得出。因此，测度 σ_φ 是齐次的，且存在一个正的常数 C_φ，使得

$$\mathrm{d}\sigma_\varphi(\lambda) = C_\varphi \lambda^{(Q+2\omega)/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

在 $\varphi \equiv 1$ 的情况下，我们有 $\omega = 0$，这表明 (2.6) 与 (2.2) 一致。

我们指出，根据 Hulanicki 定理的多元扩展 [39] （参见例如 [47, 命题 4.2.1]），若 $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_2})$，则 $K_{H(\Delta_N,Z'')} \in \mathcal{S}(N)$；因此，对 $K_{H(\Delta_N,Z'')}$ 作任意部分（欧几里得）傅里叶变换，所得函数也是施瓦茨函数。

引理 2.3. 如果 $\gamma \geq 0$ 和 $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_2})$，那么

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\int_{\mathbb{R}^{d_2}} ||J_\mu z'|^{2\gamma}\hat{K}_{H(\Delta_N,Z'')}(z',\mu)|^2\,\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}\mu \lesssim_\gamma \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_2}} |H(\lambda,\mu)|^2|\lambda|^\gamma\,\mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu),$$

其中，$\hat{}K_{H(\Delta_N,Z'')}(z',\mu)$ 是 $K_{H(\Delta_N,Z'')}(z',z'')$ 关于 z'' 的部分傅里叶变换。

证明。显然，$K_{H(\Delta_N,Z'')}$ 与热核 $K_{e^{-t\Delta_N}}$ 对易，因为算子 $H(\Delta_N,Z'')$ 和 $e^{-t\Delta_N}$ 属于 Δ_N 和 Z'' 的联合函数演算。因此，首先假设 $\gamma \in \mathbb{N}$，由 $\mathbb{R}^{d_2}$ 中的 Plancherel 定理和引理 2.1 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\int_{\mathbb{R}^{d_2}} ||J_\mu z'|^{2\gamma}\hat{K}_{H(\Delta_N,Z'')}(z',\mu)|^2\,\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}\mu &\simeq \int_N ||J_{Z''}z'|^{2\gamma}K_{H(\Delta_N,Z'')}(z)|^2\,\mathrm{d}z\\ &\lesssim_\gamma \int_N |\Delta_N^\gamma K_{H(\Delta_N,Z'')}(z)|^2\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d_2}} |H(\lambda,\mu)|^2|\lambda|^{2\gamma}\,\mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu).\end{aligned}$$

通过插值 [78] 我们将所得不等式扩展到非整数 γ。 □

从现在起，我们假设 N 满足定理 1.2 的假设，也就是说， N 是直积

$$N = N^{(0)} \times N^{(1)} \times \ldots \times N^{(\ell)} \tag{2.8}$$

一个阿贝尔群 $N_{(0)}$和有限多个梅蒂维耶群 $N^{(j)}$, $j = 1,\ldots,\ell$，其中某个 $\ell \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$。对于每个 $j = 1,\ldots,\ell$，因子 $N^{(j)}$ 都是二步群，因此$\mathfrak{n}^{(j)} = \mathfrak{n}_1^{(j)} \oplus \mathfrak{n}_2^{(j)}$，并且对于 $i = 1,2$，我们设 $d_i^{(j)} = \dim\,\mathfrak{n}_i^{(j)}$。由于 $N^{(0)}$是阿贝尔群，它是一步群，因此 $\mathfrak{n}^{(0)} = \mathfrak{n}_1^{(0)}$，并且我们只需设 $d^{(0)} = \dim\mathfrak{n}^{(0)}$。我们强调，经过适当解释，可以允许 $d^{(0)} = 0$并考虑 $N = N^{(1)} \times \ldots \times N_{(\ell)}$。由于 N 是直积， $\mathfrak{n}$ 的第一层和第二层为

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}^{(0)} \oplus \mathfrak{n}_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_1^{(\ell)}, \qquad \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_2^{(\ell)}. \tag{2.9}$$

特别地，如果我们定义 $\vec{d_i} = (d_i^{(1)}, \dots, d_i^{(\ell)})$，并且对于 $i = 1, 2$ 定义 $|\vec{d_i}| = \sum_{j=1}^{\ell} d_i^{(j)}$，那么 $\mathfrak{n}$ 两层的维数分别为 $d_1 = d^{(0)} + |\vec{d_1}|$ 和 $d_2 = |\vec{d_2}|$。因此，N的齐次维数和拓扑维数分别为 $Q = d^{(0)} + |\vec{d_1}| + 2|\vec{d_2}|$ 和$d = d^{(0)} + |\vec{d_1}| + |\vec{d_2}|$。

我们为所有层 $\mathfrak{n}_i^{(j)}$ 选取线性坐标，因此可以将 $N^{(0)} \simeq \mathbb{R}^{d^{(0)}}$ 和 $N^{(j)} \simeq \mathbb{R}^{d_1^{(j)}} \times \mathbb{R}^{d_2^{(j)}}$ 识别为流形，其中 $1 \leq j \leq \ell$，相应地 $N \simeq \mathbb{R}^{d^{(0)}} \times \mathbb{R}^{\vec{d_1}} \times \mathbb{R}^{\vec{d_2}}$，其中 $\mathbb{R}^{\vec{d_i}} := \mathbb{R}^{d_i^{(1)}} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_i^{(\ell)}}$。

我们强调，定义次拉普拉斯算子 Δ_N 的 X_j 上的向量场 N 不一定与直积分解相容。换言之，我们不要求次拉普拉斯算子 Δ_N 是各因子 N_j 上次拉普拉斯算子的和，也不要求 (2.9) 中 $\mathfrak{n}_1$ 的分解相对于与 Δ_N 相关联的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是正交分解。

对于一个多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$，我们用 $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell$ 表示其长度。我们还使用符号 $\prec$、$\preccurlyeq$、$\succ$、$\succcurlyeq$ 表示多重指标之间的逐分量不等式：例如，当 $\alpha_j \leq \beta_j$ 对所有 $j = 1$、.....、ℓ 都成立时，我们记 $\alpha \preccurlyeq \beta$ 表示 α、$\beta \in \mathbb{R}^\ell$。此外，我们记 $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^\ell$。除非另有说明，我们使用的所有多重指标都具有 ℓ 个分量。

关于 N 的上述结构假设给出了以下关键估计（参见，例如，[49, 命题 3.9]）。

引理 2.4. 对所有 $z' = (z'_0, z'_1 \dots, z'_\ell) \in \mathfrak{n}_1$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell) \in \mathfrak{n}_2$,

$$|J_\mu z'| \gtrsim \sum_{j=1}^{\ell} |\mu_j||z'_j|. \tag{2.10}$$

特别地，对于任意 $\alpha \succeq \vec{0}$,

$$|J_\mu z'|^{|\alpha|} \gtrsim_\alpha \prod_{j=1}^{\ell} (|\mu_j||z'_j|)^{\alpha_j}. \tag{2.11}$$

此外,

$$\vec{d_2} \prec \vec{d_1}. \tag{2.12}$$

证明。由于 N 是一个直积,

$$\langle J_\mu x, y \rangle = \mu[x, y] = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j[x_j, y_j]$$

对于所有 $x = (x_0, x_1, \dots, x_\ell)$ $y = (y_0, y_1, \dots, y_\ell) \in \mathfrak{n}_1$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell) \in \mathfrak{n}_2^*$。因此,

$$|J_\mu x| \simeq |\mu[x, \cdot]| \simeq \sum_{j=1}^{\ell} |\mu_j[x_j, \cdot]| \gtrsim \sum_{j=1}^{\ell} |\mu_j||x_j|, \tag{2.13}$$

其中，$\mu[x, \cdot]$ 和 $\mu_j[x_j, \cdot]$ 分别被视为 $\mathfrak{n}_1^*$ 和（$\mathfrak{n}_1^{(j)}$）* 的元素；在（2.13）的最后一个不等式中，我们使用了每个 N_j 都是M´etivier这一事实。这证明了（2.10），而（2.11）立即可得。

最后，M´etivier 群的层的维数之间众所周知的不等式 $d_2^{(j)} < d_1^{(j)}$，源于以下事实：对于任意非零的 $x \in \mathfrak{n}_1^{(j)}$，线性映射 $[x, \cdot] : \mathfrak{n}_1^{(j)} \to \mathfrak{n}_2^{(j)}$ 是满射（这是由 M´etivier 条件所决定的），但不是单射，因为其核包含 x。□

结合引理 2.3 和 2.4，我们最终可以得到所需的 N上的加权Plancherel估计。

命题 2.5。对于 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d_2}$ 以及所有 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_N |K_{F(\Delta_N)}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \lesssim_\alpha \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \lambda^{(Q-|\alpha|)/2} \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

证明。对于任意 $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\vec{d_2}})$ 和 $\alpha \succcurlyeq \vec{0}$，由引理 2.3 和 (2.11) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\vec{d_2}}} |H(\lambda,\mu)|^2 |\lambda|^{|\alpha|/2} \, \mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu) \\
&\gtrsim_\alpha \int_{\mathbb{R}^{d^{(0)}}\times\mathbb{R}^{\vec{d_1}}} \int_{\mathbb{R}^{\vec{d_2}}} |\hat{K}_{H(\Delta_N,Z'')}(z',\mu)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} (|\mu_j||z_j'|)^{\alpha_j} \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}z' \\
&= \int_N |Z_1''|^{\alpha_1} \dots |Z_\ell''|^{\alpha_\ell} |K_{H(\Delta_N,Z'')}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \\
&= \int_N |K_{|Z_1''|^{\alpha_1}\dots|Z_\ell''|^{\alpha_\ell} H(\Delta_N,Z'')}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

设 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。我们将上述结果应用于 $H(\lambda,\mu) = F(\lambda)\chi(\mu) \prod_{j=1}^{\ell} |\mu_j|^{-\alpha_j/2}$ 其中 $\chi(\mu) = \prod_{j=1}^{\ell} \chi_j(\mu_j)$，对某个 $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d_2^{(j)}} \setminus \{0\})$，从而得到

$$\begin{aligned}
&\int_N |K_{F(\Delta_N)\chi(Z'')}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \\
&\qquad \lesssim_\alpha \|\chi\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\vec{d_2}}} |F(\lambda)|^2 |\lambda|^{|\alpha|/2} \prod_{j=1}^{\ell} |\mu_j|^{-\alpha_j} \, \mathrm{d}\sigma(\lambda,\mu). \quad (2.14)
\end{aligned}$$

现在我们将注 2.2 应用于 $\varphi(\mu) = \prod_{j=1}^{\ell} |\mu_j|^{-\alpha_j}$，并将相应的测度 σ_φ 记为 σ_α。我们限制 $\alpha \prec d_2$，使得 φ 局部可积。由于 φ 是次数为 $-|\alpha|$的齐次函数，我们得到 $\sigma_\alpha(\lambda) = C_\alpha \lambda^{(Q-2|\alpha|)/2} \, \mathrm{d}_\lambda^\lambda$。

因此，由 (2.14) 得

$$\int_N |K_{F(\Delta_N)\chi(Z'')}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \lesssim_\alpha \|\chi\|_{L^\infty}^2 \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \lambda^{(Q-|\alpha|)/2} \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \quad (2.15)$$

现在我们选取一列光滑截断函数 $\chi^{(n)} = \chi_1^{(n)} \otimes \dots \otimes \chi_\ell^{(n)}$，使得 $0 \le \chi^{(n)} \le 1$，且 χ_n 在 $\mathbb{R}^{\vec{d_2}} \setminus A$ 上单调地收敛到 1，其中

$$A := (\{0\} \times \mathbb{R}^{d_2^{(2)}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_2^{(\ell)}}) \cup \dots \cup (\mathbb{R}^{d_2^{(1)}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_2^{(\ell-1)}} \times \{0\}).$$

我们断言 $\sigma(\mathbb{R}_+ \times A) = 0$。事实上，对于 $b > a > 0$，我们有

$$\sigma((a,b)\times A) = \|K_{\mathbb{I}^{(a,b)\times A}(\Delta_N,Z'')}\|_{L^2(N)} = \|_{\mathbb{I}^{(a,b)}(\Delta_N)} {}_{\mathbb{I}^A}(Z'')\|_{L^1(N)\to L^2(N)} = 0,$$

因为 $\mathbb{I}^A(Z'')$ 消失：在 N 上选定的坐标中，算子 $\mathbb{I}^A(Z'')$ 就是作用于 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的欧几里得傅里叶乘子算子，其符号为 $\mathbb{I}^{\mathbb{R}^{d_1}\times A}$，且几乎处处为零。因此，根据控制收敛定理，$F(\lambda)\chi^{(n)}(\mu) \to F(\lambda)$ 在 $L^2(\mathrm{d}\sigma)$ 中成立。于是，由普朗歇尔公式 (2.6)，$K_{F(\Delta_N)\chi_n^{(n)}(Z'')} \to K_{F(\Delta_N)}$ 在 $L^2(N)$ 中成立；并且在抽取一个子列后，该结论在 N 上也几乎处处成立。

最后，由 Fatou 引理和 (2.15)，我们得到

$$\int_N |K_{F(\Delta_N)}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j}\,\mathrm{d}z \le \liminf_{n\to\infty} \int_N |K_{F(\Delta_N)\chi^{(n)}(Z'')}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j}\,\mathrm{d}z \lesssim_\alpha \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \lambda^{(Q-|\alpha|)/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

如所愿。 □

2.2. 半直积扩张。如引言中所述，我们设 $G = N \rtimes \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}$ 通过自同构膨胀作用于 N。左不变向量场 X_j、$j = 1\ldots$、d_1 构成 N的第一层的一组基，而 $\mathbb{R}$ 的李代数的标准基 $X_0 = \partial_u$，可如(1.2)所示提升为 G上的左不变向量场 $\{X_j^\sharp\}_{j=0}^{d_1}$，它们生成 G的李代数。如(1.3)所示，令 G上相应的左不变次拉普拉斯算子为 Δ。

群 G 和次拉普拉斯算子 Δ 属于 [55], 中所考虑的对象；关于更为详尽的讨论，我们请读者参阅该文献。这里我们只回顾一下：与前面讨论的 Δ_N 情形大致相同，算子 Δ 在定义域 $C_c^\infty(G)$ 上，于 $L^2(G)$ 中是本质自伴的；对于任意有界博雷尔函数 $F\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$，我们通过谱定理定义$F(\Delta)$。由于它是左不变的，根据 Schwartz 核定理，存在一个（可能是分布意义下的）卷积核 $K_{F(\Delta)}$，使得

$$F(\Delta) f = f * K_{F(\Delta)}, \qquad f \in C_c^\infty(G).$$

此外，Δ [55, 推论 4.6], 给出了如下普朗歇尔公式：

$$\|K_{F(\Delta)}\|_{L^2(G)}^2 \simeq \int_0^\infty |F(\lambda)|^2\, \lambda^{[3/2,(Q+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

其中我们采用记号 (1.7)。接下来，若 $|z|_N$ 表示 $z \in N$ 到单位元 0_N的 Carnot–Carath´eodory 距离，那么根据 [55, 命题 2.7], , $(z,u) \in G$ 中到单位元 0_G 的距离在 G 上由下式给出：

$$|(z,u)|_G = \operatorname{arccosh}\left(\cosh u + \frac{|z|_N^2}{2e^u}\right). \tag{2.16}$$

此外，对于 Δ，有限传播速度成立：

$$\operatorname{supp} K_{\cos(t\sqrt{\Delta})} \subseteq \overline{B_G}(0_G, |t|), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

其中，$\overline{B_G}(0_G, r)$ 表示以 r 为半径、以 G 的单位元为中心，并关于 Carnot–Carath´eodory 距离的闭球。

上述所有结果对二步群 N均无需任何假设。现在我们将范围限制在这样的情形：N 是交换群与 M´etivier 群的乘积，如 (2.8) 中所述。回顾第 2.1 节中的记号 $z = (z', z'') \in N$, $z' = (z_0', z_1', \ldots, z_\ell')$。下面的结果是 [55, 命题 2.9], 的变体，其中我们还纳入了命题 2.5 中出现的权重的倒数。

引理 2.6. 设 f、$g\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是可测函数，且 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d_1}$。则

$$\int_G f(|(z,u)|_G) g(|z|_N) \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{-\alpha_j}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u = C_{N,\alpha} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty f(\operatorname{arccosh}(\cosh u + e^{-u}t/2)) g(\sqrt{t})\, t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}u$$

°对于某个适当的常数 $C_{N,\ \alpha} \in \mathbb{R}_+$。

证明。令 $S = \{z \in N : \ |z|_N = 1\}$。则存在一个定义在 S 上的博雷尔测度 τ，使得

$$\int_N h(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \int_S h(t\omega)\,t^Q\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}\tau(\omega) \tag{2.18}$$

（例如，参见 [20, 命题 1.15]）。因此，由（2.16）可得，

$$\begin{aligned}&\int_G f(|(z,u)|_G)g(|z|_N)\prod_{j=1}^{\ell}|z_j'|^{-\alpha_j}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u\\ &= C_N\int_{\mathbb{R}}\int_S\int_0^\infty f(\operatorname{arccosh}(\cosh u + e^{-u}|t|^2/2))g(t)t^Q\prod_{j=1}^{\ell}(t|\omega_j'|)^{-\alpha_j}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}\tau(\omega)\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{2.19}$$

由于 $\alpha \prec \vec{d}_1$，函数 $h(z) = \mathbb{I}^{[1,2]}(|z|_N)\prod_{j=1}^{\ell}|z_j'|^{-\alpha}$ 在 N 上可积，因此由 (2.18) 还可推出 $\int_S \prod_{j=1}^{\ell}|\omega_j'|^{-\alpha_j}\mathrm{d}\tau(\omega) < \infty$。对 (2.19) 右端作简单的变量替换，即完成证明。□

推论 2.7. 设 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d}_1$。如果 $r \in (0,1]$, 那么

$$\int_{B_G(0_G,r)}\prod_{j=1}^{\ell}|z_j'|^{-\alpha_j}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u \lesssim_\alpha r^{Q-|\alpha|+1}.$$

如果 $r \geq 1$，那么

$$\int_{B_G(0_G,r)}(1+|z|_N^{Q-|\alpha|})^{-1}\prod_{j=1}^{\ell}|z_j'|^{-\alpha_j}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u \lesssim_\alpha r^2.$$

证明。在第一种情况下，我们应用引理 2.6，其中 $f = \mathbb{I}^{[0,r]}$ 和 $g \equiv 1$:

$$\begin{aligned}&\int_{B_G(0_G,r)}\prod_{j=1}^{\ell}|z_j'|^{-\alpha_j}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u\\ &\simeq_\alpha \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \mathbb{I}^{[0,r]}(\operatorname{arccosh}(\cosh u + e^{-u}t/2))\,t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-r}^{r}\int_0^{2e^u(\cosh r-\cosh u)} t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}u\\ &\leq \int_{-r}^{r}\int_0^{8e^u(r+u)(r-u)} t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}u\\ &\simeq_\alpha \int_0^{2r}((2r-v)v)^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}\,\mathrm{d}v \simeq_\alpha r^{Q-|\alpha|+1},\end{aligned}$$

其中我们用到了 $|u| \leq r \leq 1$ 属于积分定义域这一点。

在第二种情形下，我们再次使用引理 2.6，这次取 $f(x) = \mathbb{I}^{[0,r]}(x)$ 和 $g(x) = (1 + x^{Q-|\alpha|})^{-1}$。因此，

$$\begin{aligned}
&\int_{B_G(0_G,r)} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{-\alpha_j}}{1 + |z|_N^{Q-|\alpha|}} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u \\
&\simeq_\alpha \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \mathbb{I}^{[0,r]}(\operatorname{arccosh}(\cosh u + e^{-u} t/2)) \frac{t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}}{1 + t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \,\mathrm{d}u \\
&\le \int_{-r}^{r} \int_0^{2e^{u+r}} \frac{t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}}{1 + t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \,\mathrm{d}u \\
&\le \int_{-r}^{r} \int_0^1 t^{\frac{Q-|\alpha|}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \,\mathrm{d}u + \int_{-r}^{r} \int_1^{2e^{u+r}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \,\mathrm{d}u \\
&\simeq_\alpha \int_{-r}^{r} (1 + u + r) \,\mathrm{d}u \simeq r^2,
\end{aligned}$$

作为 $r \ge 1$。 □

3. The Bessel–Kingman hypergroup

3.1. 贝塞尔–金曼超群与汉克尔变换。我们在此汇集一些关于汉克尔卷积和汉克尔变换的已知事实。更多细节可参见 [24, 25, 26, 37, 79] 及其中的参考文献。

令 $\nu \ge 1$ 并记为 $X_\nu = (\mathbb{R}_+, \mu_\nu)$，其中 $\mathrm{d}\mu_\nu(x) = x^{\nu-1} \,\mathrm{d}x$。适当函数 $f, g \colon X_\nu \to \mathbb{C}$ 的汉克尔卷积定义为

$$f *_\nu g(x) = \int_0^\infty \tau_\nu^{[x]} f(y) \, g(y) \,\mathrm{d}\mu_\nu(y) = \int_0^\infty f(y) \, \tau_\nu^{[x]} g(y) \,\mathrm{d}\mu_\nu(y), \tag{3.1}$$

其中，$\tau_\nu^{[x]} f$ 是 f 的汉克尔平移，

$$\begin{aligned}
\tau_\nu^{[x]} f(y) &= \tau_\nu^{[y]} f(x) \\
&= \begin{cases} \mathrm{B}(\frac{\nu-1}{2}, \frac{1}{2})^{-1} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega}) \sin^{\nu-2}\omega \,\mathrm{d}\omega & \text{if } \nu > 1, \\ \frac{1}{2}[f(x+y) + f(|x-y|)] & \text{if } \nu = 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

对于所有 x、$y \in X_\nu$，B 表示贝塔函数。汉克尔平移经过归一化，使得当 $f \equiv 1$ 时，$\tau_\nu^{[x]} f \equiv 1$。此外，$\tau_\nu^{[x]}$两两可交换，在 $L^2(X_\nu)$ 上是自伴的，并且在 $L^p(X_\nu)$ 上是压缩算子，其中 $p \in [1, \infty]$，对所有 $x \ge 0$ 均成立。

如果 ν 是整数，那么汉克尔卷积 $*_\nu$ 对应于 $\mathbb{R}^\nu$ 上的欧几里得卷积 $*$ 在径向函数上的限制；更准确地说，如果 $C_\nu = 2\pi^{\nu/2}/\Gamma(\nu/2)$ 表示 $\mathbb{R}^\nu$中单位球面的表面积，那么

$$f *_\nu g(|z|) = C_\nu^{-1} F * G(z), \tag{3.2}$$

其中，F、$G \colon \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{C}$ 为径向函数，且 $F(z) = f(|z|)$，$G(z) = g(|z|)$。尽管如此，对于非整数 ν，卷积 $*_\nu$ 仍然是良好定义的。

对于任意 $\nu \ge 1$，卷积 $*_\nu$ 是交换的、结合的，并满足杨氏不等式，即

$$\|f *_\nu g\|_{L^r(X_\nu)} \le \|f\|_{L^p(X_\nu)} \|g\|_{L^q(X_\nu)}, \tag{3.3}$$

其中 p、q、$r \in [1, \infty]$ 和 $1 + 1/r = 1/p + 1/q$ [37, 定理 2b]。

汉克尔卷积可以推广到测度；通常，我们在此将$f \in L^1(X_\nu)$视为测度 $f\mathrm{d}\mu_\nu$。特别地，如果 δ_x表示狄拉克 δ 函数

在 $x \in X_\nu$ 处的测度，那么 $\delta_x *_\nu \delta_y$ 就是定义在 X_ν 上的概率测度，给定为

$$\delta_x *_\nu \delta_y(A) = \begin{cases} \mathrm{B}(\frac{\nu-1}{2}, \frac{1}{2})^{-1} \int_0^\pi \mathbb{1}_A(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\omega}) \sin^{\nu-2}\omega \, \mathrm{d}\omega & \text{if } \nu > 1, \\ \frac{1}{2}(\delta_{x+y} + \delta_{|x-y|})(A) & \text{if } \nu = 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

对 X_ν 的所有博雷尔子集 A，其支集包含于 $[|x-y|, x+y]$。此外，汉克尔平移可以表示为卷积算子：

$$\tau_\nu^{[x]} f = \delta_x *_\nu f.$$

赋予 X_ν 这种卷积结构后，它成为一个超群 [3, 41], ，称为贝塞尔–金曼超群 [44]。这是一个交换超群，其单位元为 δ_0，而对合为恒等映射（即 X_ν 是一个厄米超群），其哈尔测度为 μ_ν。超群 X_ν 是 Sturm–Liouville 超群 [85], 的一个特例，更具体地说，是与我们在第 3.2 节讨论的贝塞尔算子 L_ν 相关联的 Ch ´ebli–Trim `eche 超群 [1, 7],。

X_ν 上的（修正）汉克尔变换 H_ν 定义为

$$H_\nu f(x) = \int_0^\infty f(y)\, j_x^\nu(y) \, \mathrm{d}\mu_\nu(y), \qquad x \geq 0, \qquad f \in L^1(X_\nu), \tag{3.5}$$

其中

$$j_x^\nu(y) = j_y^\nu(x) := j^\nu(xy), \qquad j^\nu(t) := \kappa_\nu \frac{J_{\nu/2-1}(t)}{t^{\nu/2-1}}, \qquad \kappa_\nu := 2^{\nu/2-1}\Gamma(\nu/2) \tag{3.6}$$

其中 J_s 表示第一类 s 阶贝塞尔函数。我们指出，j^ν 是一个偶解析函数，满足

$$|j^\nu(t)| \leq 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

如 $\nu \geq 1$ [17, 式 (10.14.4)]。

对于整数 ν，汉克尔变换与傅里叶变换有关：事实上，若 $\nu \in \mathbb{N}$，则对于径向函数 F: $\mathbb{R}^\nu \to \mathbb{C}$，记 $F(z) = f(|z|)$，我们有

$$H_\nu f(|\xi|) = C_\nu^{-1} \mathcal{F}F(\xi),$$

其中 C_ν 如（3.2）所示， $\mathcal{F}F$ 表示 F 在 $\mathbb{R}^\nu$中的傅里叶变换，

$$\mathcal{F}F(\xi) = \int_{\mathbb{R}^\nu} F(z)\, e^{-iz\cdot\xi} \, \mathrm{d}z.$$

我们指出，文献中的许多研究使用式 (3.5) 中贝塞尔函数的阶数 $\nu/2-1$，而非 ν，作为相应汉克尔变换和贝塞尔–金曼超群的参数；与 [21], 中的做法一样，我们更倾向于选择当前的参数，因为当 ν 为整数时，它与相关欧几里得空间的维数有直接联系。

对于任意 $\nu \geq 1$，由 (3.7) 可知，汉克尔变换将$L^1(X_\nu)$映射到 $C \cap L^\infty(X_\nu)$。此外，函数 j_x^ν 满足

$$\tau_\nu^{[y]} j_x^\nu(z) = j_x^\nu(y)\, j_x^\nu(z) \tag{3.8}$$

（参见 [83, 第 11 节41]），由此可推得

$$H_\nu(\tau_\nu^{[z]} f) = j_z^\nu H_\nu f, \qquad H_\nu(j_z^\nu f) = \tau_\nu^{[z]} H_\nu f. \tag{3.9}$$

换言之，汉克尔变换将汉克尔平移与某些乘法算子相互交织，这些算子可以看作是调制的类似物。

令 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 为 $\mathbb{R}$ 上偶施瓦茨函数限制到 $\mathbb{R}_+$ 上所得的空间。那么， $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 在汉克尔平移和卷积下封闭，且汉克尔变换将 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 映到其自身（参见 [10, 77, 79]）。此外，汉克尔变换可扩张为同构 $H_\nu\colon L^2(X_\nu) \to L^2(X_\nu)$，满足

$$H_\nu^{-1} = \kappa_\nu^{-2} H_\nu \tag{3.10}$$

（参见 [83, 第 14.4] 节），并且帕塞瓦尔定理成立，即

$$\int_0^\infty H_\nu f(x)\,\overline{H_\nu g(x)}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x) = \kappa_\nu^2 \int_0^\infty f(y)\,\overline{g(y)}\,\mathrm{d}\mu_\nu(y)$$

对于所有的 $f, g \in L^2(X_\nu)$（参见 [46]）。特别地，

$$\|H_\nu f\|_{L^2(X_\nu)} = \kappa_\nu \|f\|_{L^2(X_\nu)}. \tag{3.11}$$

通过将这一事实与 $H_\nu\colon L^1(X_\nu) \to L^\infty(X_\nu)$ 的有界性进行插值，我们得到豪斯多夫–杨不等式

$$\|H_\nu f\|_{L^{p'}(X_\nu)} \lesssim_{\nu,p} \|f\|_{L^p(X_\nu)}, \qquad f \in L^p(X_\nu), \tag{3.12}$$

其中 $p \in [1,2]$ 和 $1/p + 1/p' = 1$。

注意，根据 (3.8)，

$$H_\nu(f *_\nu g) = H_\nu f \cdot H_\nu g \tag{3.13}$$

对于 $f, g \in L^1(X_\nu)$ [37, 定理 2d]。事实上，由 (3.3) 和 (3.12) 可将其推广到 $f \in L^p(X_\nu)$ 且 $g \in L^q(X_\nu)$ 的情形，前提是 $p, q \in [1,2]$满足 $1/p + 1/q \in [3/2, 2]$。

°3.2. 贝塞尔算子。令 $X_\nu = (\mathbb{R}_+, \mu_\nu)$ 为 X_ν 的内部。现在引入贝塞尔算子 L_ν，即定义在 X_ν 上具有°光滑系数的二阶微分算子，定义为

$$L_\nu = -\partial_x^2 - \frac{\nu-1}{x}\partial_x = D_\nu^+ D_\nu,$$

其中，$D_\nu = \partial_x$，而 D_ν^+ 是其关于 μ_ν 的形式伴随算子。注意，尽管 D_ν 不依赖于 ν，但其伴随算子却依赖于它。如果 $\nu \in \mathbb{N}$，那么 L_ν 就是 $\mathbb{R}^\nu$ 中标准拉普拉斯算子的径向部分。

由于贝塞尔算子 $L_\nu = D_\nu^+ D_\nu$ 是流形 X_ν 上一个光滑的散度型二阶°微分算子，因此我们可以使用附录中引入的语言来讨论其在 $L^2(\mathring{X}_\nu)$ 上的自伴扩张。有关此处使用的狄利克雷定义域和诺伊曼定义域的定义，请参阅该附录。另一方面，由于 X_ν 和 $\mathring{X}_\nu$ 仅相差一个零测集，我们将 $L^2(\mathring{X}_\nu) = L^2(X_\nu)$ 视为相同，并将 L_ν 视为作用于 $L^2(X_\nu)$ 上的无界算子。

注意到，L_ν 在定义域 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 上是对称且正的，而 L_ν将该定义域映射到自身。此外，可以根据 [17, 式 (10.13.4)] 验证：

$$L_\nu j_x^\nu = x^2 j_x^\nu.$$

因此，对于 $f \in \mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$，

$$H_\nu(L_\nu f)(x) = x^2 H_\nu f(x). \tag{3.14}$$

这很容易使我们定义一个与汉克尔变换相容的自伴扩张 L_ν。

引理 3.1。算子 L_ν 在 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 上本质自伴，并且对于自伴扩张定义域中的任意 f，恒等式 (3.14) 对几乎所有 $x \in X_\nu$ 都成立。此外，该自伴扩张等于具有诺伊曼定义域的算子 $D_\nu^+ D_\nu$。

这一结果专家们想必早已熟知。我们仍在此给出证明的一些细节，因为在下文第 4.2 节讨论如何将贝塞尔算子“提升”到半直积超群上时，这些细节会派上用场。

证明。公式 (3.14) 表明，H_ν 在定义域 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 上与由 $M(x) = x^2$ 给出的乘法算子通过 L_ν 交织。后者在自然定义域上是自伴的。

$$\{f \in L^2(X_\nu) : Mf \in L^2(X_\nu)\},$$

并且 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 显然在该定义域中关于图范数稠密。由 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 关于 H_ν 的不变性，我们得出 L_ν 在 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 上本质自伴，且交织关系 (3.14) 在自伴扩张的定义域上仍然成立。

鉴于诺伊曼定义域 $\mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(D_\nu^+ D_\nu)$ 的定义 (6.4)，为了证明该陈述的其余部分，只需验证：若 $f \in \mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$，则 $D_\nu f \in \mathfrak{D}_{\min}(D_\nu^+)$。由于 $D_\nu f = f' \in \mathcal{S}_o(\mathbb{R}_+)$ 是奇施瓦茨函数在 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 上的限制所构成的空间，只需证明 $g \in \mathcal{S}_o(\mathbb{R}_+)$ 中任意元素都能在 D_ν^+ 的图范数下，由 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 中一列 $^\circ$ 函数逼近。

令 $g \in \mathcal{S}_o(\mathbb{R}_+)$。则 $D_\nu^+ g(x) = -g'(x) - (\nu-1)g(x)/x$，且 $g'(x)$ 和 $g(x)/x$ 均属于 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$。取光滑函数 $\psi, \phi\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$，使得 $\psi(x) = 1$ 对 $x \geq 2$，$\psi(x) = 0$ 对 $x \leq 1$，$\phi(x) = 1$ 对 $x \leq 2$，以及 $\phi(x) = 0$ 对 $x \geq 4$。令 $\psi_n(x) = \psi(nx)$，$\phi_n(x) = \phi(x/n)$，并定义逼近序列 $g_n = g\psi_n\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$。

显然，根据控制收敛定理，$g_n \to g$ 和 $g_n(x)/x \to g(x)/x$ 属于 $L^2(X_\nu)$。此外，

$$g_n'(x) = \psi(nx)\phi(x/n)g'(x) + [nx\psi'(nx)]\phi(x/n)g(x)/x + \psi(nx)\phi'(x/n)g(x)/n.$$

同样，第一个加项根据控制收敛定理趋于 g'（在 $L^2(X_\nu)$中），而第二和第三个加项趋于 0；对于第二个加项，我们利用$g(x)/x$ 属于 $L^2(X_\nu)$，而乘数在 n上一致地属于 $L^\infty(X_\nu)$，并且在 $[1/n, 2/n]$之外为零。因此，$g_n' \to g'$ 属于 $L^2(X_\nu)$；结合前述观察可知，$D_\nu^+ g_n \to D_\nu^+ g$ 属于 $L^2(X_\nu)$且 $g_n \to g$ 属于$\mathfrak{D}_{\max}(D_\nu^+)$。□

注 3.2. 若将 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$替换为 $\mathcal{D}_e(\mathbb{R}_+)$空间（其元素是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的偶、光滑且紧支撑函数在 $\mathbb{R}$上的限制），引理 3.1 仍然成立；事实上，利用适当的截断函数，很容易看出 $\mathcal{D}_e(\mathbb{R}_+)$在后者的 Fr´echet 结构下于 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$中稠密，因此在 L_ν的图范数下也稠密。另一方面，在定义域 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$上，算子 L_ν 本质自伴当且仅当 $\nu \geq 4$，见 [73, 第 161]页；请注意，与 $\mathcal{D}_e(\mathbb{R}_+)$的元素不同，$C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$的元素必须在 0 附近为零。另见 [27, 第 2]节的讨论。

从现在起，我们用 L_ν 表示引理 3.1 中讨论的贝塞尔算子的自伴扩张。由 (3.9) 和 (3.14) 可立即得出，L_ν 与 Hankel 平移可交换：

$$\tau_\nu^{[y]} L_\nu f = L_\nu \tau_\nu^{[y]} f \tag{3.15}$$

对于定义域为 L_ν 的任意 f，即 L_ν 在 X_ν 上具有平移不变性。

由于 L_ν 是自伴且非负的，根据谱定理，对于任意有界博雷尔函数 $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$，我们可以在 $L^2(X_\nu)$ 上定义有界算子 $F(L_\nu)$；结合 (3.14)，它满足

$$H_\nu(F(L_\nu)g)(x) = F(x^2)H_\nu g(x)$$

对于所有 $g \in L^2(X_\nu)$。同样，由 (3.9) 可推出

$$\tau_\nu^{[y]} F(L_\nu) = F(L_\nu)\tau_\nu^{[y]}, \tag{3.16}$$

因此，$F(L_\nu)$ 在 X_ν 上具有平移不变性。

此外，如果 $x \mapsto F(x^2)$ 属于 $L^2(X_\nu)$，等价地，$F \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{\nu/2}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$，那么根据 (3.13)，$F(L_\nu)$ 是一个 $*_\nu$-卷积算子，

$$F(L_\nu)g = g *_\nu K_{F(L_\nu)}, \qquad K_{F(L_\nu)} = H_\nu^{-1}(x \mapsto F(x^2)). \tag{3.17}$$

注意，(3.11) 蕴含了这些核的普朗歇尔公式：

$$\|K_{F(L_\nu)}\|_{L^2(X_\nu)}^2 = \frac{1}{2\kappa_\nu^2}\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \lambda^{\nu/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \tag{3.18}$$

现在我们考虑与 L_ν 相关联的热半群 $\{e^{-tL_\nu}\}_{t>0}$。在下面的陈述中，我们将记录它的一些基本性质。

引理 3.3. 与 L_ν 相关的热半群是一族 $*_\nu$-卷积算子，其对应的核由下式给出。

$$K_{e^{-tL_\nu}}(x) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)(4t)^{\nu/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \tag{3.19}$$

此外，对于所有 $t>0$，$\|K_{e^{-tL_\nu}}\|_{L^1(X_\nu)}=1$。因此，对于所有 $t>0$，算子 $e^{-t\Delta_\nu}$ 是 $L^p(X_\nu)$ 上的压缩算子，$p\in[1,\infty]$。

证明。公式（3.19）由（3.17）、（3.10）和 [17, 式 (10.22.51)] 得出。对该公式积分，立即得到 $\|K_{e^{-tL_\nu}}\|_{L^1(X_\nu)}=1$，进而由 $*_\nu$ 的杨氏不等式（3.3）得到 L^p-收缩性质。□

最后，我们对 X_ν 上的膨胀结构以及 L_ν 相关的齐次性作几点说明。记 $\delta_\alpha g(x) = g(\alpha x)$ 为 $\alpha>0$。由于 $\mathrm{d}\mu_\nu(x) = x^{\nu-1}\mathrm{d}x$，这些膨胀对任意 $p\in[1,\infty]$ 都是 $L^p(X_\nu)$ 上等距映射的倍数。容易验证，贝塞尔算子 L_ν 是二次齐次的，即

$$L_\nu(\delta_\alpha g) = \alpha^2\delta_\alpha(L_\nu g), \qquad \alpha>0, \tag{3.20}$$

对 L_ν 的定义域中的所有 g 均成立。因此，由谱演算可知，对于任意有界博雷尔函数 $F\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$，

$$F(L_\nu)\delta_\alpha = \delta_\alpha F(\alpha^2 L_\nu), \qquad \alpha>0. \tag{3.21}$$

4. The semidirect product hypergroup

4.1. 贝塞尔–金曼超群的扩张。对于任意 $u\in\mathbb{R}$，膨胀 $\gamma_u : x\mapsto e^u x$ 是贝塞尔–金曼超群 X_ν的一个自同构，其意义是，根据 (3.4)，

$$\delta_{\gamma_u(x)} *_\nu \delta_{\gamma_u}(y) = \gamma_u(\delta_x *_\nu \delta_y)$$

对所有 x、$y\in X_\nu$ 均成立，且右端是测度 $\delta_x *_\nu \delta_y$ 经由 γ_u 的推前。此外，$\gamma_{u+u'} = \gamma_u\gamma_{u'}$ 和 γ_0 是恒等映射；换言之，$u\mapsto\gamma_u$是群 $\mathbb{R}$ 通过自同构作用于超群 X_ν的一个作用。借助这一作用，我们可以定义半直积超群 $G_\nu := X_\nu\rtimes\mathbb{R}$（参见 [36,命题 4.1 和第 4.1 节、例 4]，另见 [84, 定义 3.1]）。

G_ν 上的测度卷积定义为

$$\delta_{(x,u)} \diamond_\nu \delta_{(y,v)} = (\delta_x *_\nu \delta_{e^u y}) \otimes \delta_{u+v}$$

对所有的 (x,u)、$(y,v)\in G_\nu$。半直积 G_ν 是一个非交换超群，其单位元为 (0, 0)，对合定义为 $(x,u)^- = (e^{-u}x, -u)$。测度 $e^{-\nu u}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u$ 分别是左 Haar 测度和右 Haar 测度，模函数为

$$m(x,u) := e^{-\nu u}; \tag{4.1}$$

注意，左、右 Haar 测度互为通过 G_ν上的对合得到的推前。

除非另有说明，我们将使用以右 Haar 测度定义的 G_ν 上的勒贝格空间 $L^p(G_\nu)$。将以下结果与超群文献中的结果进行比较时，必须牢记这一点，因为大多数参考文献都是相对于左 Haar 测度定义勒贝格空间的。

我们定义函数 f 在 G_ν 上的左平移和右平移为

$$\ell_{(x,u)}f(y,v) = r_{(y,v)}f(x,u) = \int_{G_\nu} f \,\mathrm{d}(\delta_{(x,u)} \diamond_\nu \delta_{(y,v)}) \tag{4.2}$$

对所有 (x,u)、$(y,v) \in G_\nu$；更明确地说，

$$\begin{aligned} \ell_{(x,u)}f(y,v) &= \tau_\nu^{[x]} f(e^u y, u+v), \\ r_{(x,u)}f(y,v) &= \tau_\nu^{[e^v x]} f(y, u+v), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中，汉克尔平移作用于 f 的第一个变量。根据这些定义， G_ν 上函数的卷积定义为

$$\begin{aligned} f \diamond_\nu g(x,u) &= \int_{G_\nu} f((y,v)^-) r_{(x,u)} g(y,v) \,\mathrm{d}\mu_\nu(y) \,\mathrm{d}v \\ &= \int_{G_\nu} \ell_{(x,u)} f((y,v)^-) g(y,v) \,\mathrm{d}\mu_\nu(y) \,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.4}$$

根据超群理论，我们可以推导出 $\diamond_\nu$ 的若干性质，例如杨氏不等式。

引理 4.1. 对所有满足 $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 的 p、 q、 $r \in [1,\infty]$，

$$\|(f m^{-1/q'}) \diamond_\nu g\|_{L^r(G_\nu)} \le \|f\|_{L^p(G_\nu)} \|g\|_{L^q(G_\nu)}, \tag{4.5}$$

其中 $1/q + 1/q' = 1$。特别地，对于任意 $p \in [1,\infty]$,

$$\|f \diamond_\nu g\|_{L^p(G_\nu)} \le \|f\|_{L^p(G_\nu)} \|g\|_{L^1(G_\nu)}. \tag{4.6}$$

证明。我们沿用群的相应结果的证明（例如，参见 [45, 引理 2.1]）。由 [41, 定理 6.2E]可推出

$$\|f \diamond_\nu g\|_{L^\infty(G_\nu)} \le \|f^-\|_{L^{q'}(G_\nu)} \|g\|_{L^q(G_\nu)} = \|f m^{1/q'}\|_{L^{q'}(G_\nu)} \|g\|_{L^q(G_\nu)},$$

其中 $f^-(x,u) := f((x,u)^-)$; 这个不等式可改写为

$$\|(f m^{-1/q'}) \diamond_\nu g\|_{L^\infty(G_\nu)} \le \|f\|_{L^{q'}(G_\nu)} \|g\|_{L^q(G_\nu)}. \tag{4.7}$$

由 [41, 定理 5.3C 和 6.2C]还可推出

$$\|(f m^{1/q}) \diamond_\nu (g m^{1/q})\|_{L^q(G_\nu)} = \|(f \diamond_\nu g) m^{1/q}\|_{L^q(G_\nu)} \le \|f m\|_{L^1(G_\nu)} \|g m^{1/q}\|_{L^q(G_\nu)},$$

这也可等价地改写为

$$\|(f m^{-1/q'}) \diamond_\nu g\|_{L^q(G_\nu)} \le \|f\|_{L^1(G_\nu)} \|g\|_{L^q(G_\nu)}. \tag{4.8}$$

对 (4.7) 和 (4.8) 进行插值可得 (4.5)，而取 $q = 1$ 可得 (4.6)。 □

我们还有 L^p 空间上平移的以下映射性质。

引理 4.2. 设 $p \in [1,\infty]$ 和 $f \in L^p(G_\nu)$。则：

(i) $\|r_{(x,u)}f\|_{L^p(G_\nu)} \le \|f\|_{L^p(G_\nu)}$ *for any* $(x,u) \in G_\nu$;
(ii) $\|\ell_{(x,u)}f\|_{L^p(G_\nu)} \le m(x,u)^{1/p} \|f\|_{L^p(G_\nu)}$ *for any* $(x,u) \in G_\nu$.

此外，如果 $p < \infty$，或者如果 $p = \infty$ 和 $f \in C_0(G_\nu)$，则：

(iii) $\|r_{(x,u)}f - r_{(\bar{x},\bar{u})}f\|_{L^p(G_\nu)} \to 0$ *as* $(x,u) \to (\bar{x},\bar{u})$ *in* G_ν;
(iv) $\|\ell_{(x,u)}f - \ell_{(\bar{x},\bar{u})}f\|_{L^p(G_\nu)} \to 0$ *as* $(x,u) \to (\bar{x},\bar{u})$ *in* G_ν.

Proof. Notice that $\ell_{(x,u)} f = \delta_{(x,u)^-} \diamond_\nu f$ and $r_{(x,u)} f = f \diamond_\nu \delta_{(x,u)^-}$ [41, Section 4.2]。界限 (i) 和 (ii) 是右 Haar 测度在平移下的不变性性质的推论；具体而言，(i) 可见于 [41, 定理 6.2B]，而 (ii) 可利用前者以及以下事实推出： $\ell_{(x,u)}f = (r_{(x,u)^-}f^-)^-$ [41, 引理 4.2K]，并且对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，由于模函数的性质，有 $r_{(x,u)}(m^\alpha f) = m(x,u)^\alpha m^\alpha r_{(x,u)}f$ [41, 定理 5.3C]。

最后，连续性性质 (iii) 可由 [41, 引理 2.2B、4.2F 和 5.4H], 推出；利用对合，我们也可推出 (iv) 的情形 $p=\infty$；随后，(iv) 的情形 $p<\infty$ 可通过稠密性论证推出，方法与 [41, 引理 5.4H]的证明相同。□

°°4.2. 贝塞尔算子的提升。记 $G_\nu=(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u)$ 为 $^\circ G_\nu$ 的内部。在流形 G_ν 上，我们引入以下具有光滑系数的微分算子：

$$\Delta_\nu=-\partial_u^2+e^{2u}L_\nu=\nabla_\nu^+\nabla_\nu, \tag{4.9}$$

其中

$$\nabla_\nu=\begin{pmatrix}\partial_u\\ e^u\partial_x\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

并且 ∇_ν^+ 表示 ∇_ν 在 $\mathring{G}_\nu$ 上的形式伴随算子。与第 3.2 节的情形大致相同，算子 ∇_ν 不依赖于 ν，但其形式伴随算子 ∇_ν^+ 则依赖于它。由于 Δ_ν 是流形 G_ν 上一个光滑的散度型二阶微分算子，因此附录中的讨论同样适用于它。此外，由于 G_ν 和 G_ν 仅相差一个零测集，我们可以将 Δ_ν 视为作用于 $L^2(G_\nu)$ 上的无界算子。我们首先在 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上定义 Δ_ν，也就是说，在由张量积 $f\otimes g$ 的有限线性组合构成的空间上，其中 $f\in\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$， $g\in C_c^\infty(\mathbb{R})$。

引理 4.3. 算子 Δ_ν 在 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上本质自伴。此外，其自伴扩张等于带有诺伊曼定义域的 $\nabla_\nu^+\nabla_\nu$。

证明。为证明本质自伴性，我们采用与 [14,第 3 节2] 类似的方法。根据 [72, 第 256-257] 页，当且仅当 $\operatorname{Im}((\Delta_\nu+i)|_{\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R})})^\perp=\{0\}$ 时，定义域为 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的算子 Δ_ν 本质自伴。换言之，只需证明：若 $f\in L^2(G_\nu)$ 满足

$$\int_{G_\nu} f(x,u)\,\overline{(\Delta_\nu+i)(\varphi_1\otimes\varphi_2)(x,u)}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u=0$$

对所有 $\varphi_1\in\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 和 $\varphi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 均成立，则 $f=0$ 几乎处处成立。

取如上所述的 f，并定义 $g(x,u)=H_\nu(f(\cdot,u))(x)$。由 (3.14) 可知，又因汉克尔变换在 $L^2(X_\nu)$ 上相差一个常数因子是等距映射，且在 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 上也是双射，所以函数 g 属于 $L^2(G_\nu)$，并满足

$$\int_{G_\nu} g(x,u)\,\overline{(-\partial_u^2+e^{2u}x^2+i)\widetilde{\varphi_1}(x)\varphi_2(u)}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u=0 \tag{4.11}$$

对所有 $\widetilde{\varphi_1}\in\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$、 $\varphi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R})$（此处 $\widetilde{\varphi_1}=H_\nu\varphi_1$）。任务是证明$g=0$ 几乎处处。

固定 $\varphi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，并定义

$$h(x)=(1+x^2)^{-1}\int_{\mathbb{R}} g(x,u)\,\overline{(-\partial_u^2+e^{2u}x^2+i)\varphi_2(u)}\,\mathrm{d}u,\qquad x\in\mathbb{R}_+.$$

由于 $g\in L^2(G_\nu)$ 且 $\varphi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，容易验证 $h\in L^2(X_\nu)$。此外，由 (4.11),

$$\int_0^\infty h(x)\,\overline{(i+x^2)\widetilde{\varphi_1}(x)}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)=0,\qquad \widetilde{\varphi_1}\in\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+).$$

由于 $(i+x^2)\widetilde{\varphi_1}(x)=H_\nu((i+L_\nu)\varphi_1)(x)$，且 H_ν 是 $L^2(X_\nu)$ 上等距映射的倍数，后一条件可改写为

$$\langle H_\nu h,(i+L_\nu)\varphi_1\rangle_{L^2(X_\nu)}=0,\qquad \varphi_1\in\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+).$$

引理 3.1 中讨论的 L_ν 在 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 上的本质自伴性，进而意味着 $H_\nu h=0$ 几乎处处成立。因此， $h=0$ 几乎处处成立。

由于在 h 的定义中 φ_2 是任意的，这意味着，对于所有 $\varphi_2 \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}$），

$$\int_{\mathbb{R}} g(x,u)\,\overline{(i+T_x)\varphi_2(u)}\,\mathrm{d}u = 0 \tag{4.12}$$

对几乎所有 $x \in \mathbb{R}_+$，其中 $T_x := -\partial_u^2 + x^2 e^{2u}$ 是作用于 $\mathbb{R}$ 上、具有非负光滑势的 Schr¨odinger 算子。已知，作为作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子，Schr¨odinger 算子 T_x 在 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上本质自伴。

令 $M \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ 可数且稠密，并设 $V = \operatorname{span} M$。因此，(4.12) 对所有 $\varphi_2 \in V$ 和 $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$ 均成立，其中 E 是一个与 φ_2 无关的勒贝格零测集。因此，对所有 $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$，我们有 $g(x,\cdot) \in \operatorname{Im}((i+T_x)|_V)^\perp$。由于每个 T_x 在 V 上本质自伴，我们得出，对所有 $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$，我们有 $g(x,\cdot) = 0$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}$ 上。这意味着 g 在 G_ν 上几乎处处为零，从而证明了 Δ_ν 的本质自伴性。

仍需证明，该自伴扩张与带诺伊曼定义域的算子$\nabla_\nu^+\nabla_\nu$一致，其意义如（6.4）所述。由于 ∇_ν将 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R})$ 映射到 $(\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R})) \oplus (\mathcal{S}_o(\mathbb{R}_+) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}))$ 中，因此只需证明

$$(\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R})) \oplus (\mathcal{S}_o(\mathbb{R}_+) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R})) \subseteq \mathfrak{D}_{\min}(\nabla_\nu^+).$$

另一方面，由于

$$\nabla_\nu^+ = \begin{pmatrix} -\partial_u & e^u D_\nu^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\otimes\partial_u & D_\nu^+ \otimes e^u \end{pmatrix},$$

并且 ∂_u 和 e^u 都保持 $C_c^\infty(\mathbb{R})$不变，这归结为证明：$\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$中的任意元素都可以在 $L^2(X_\nu)$ 中由 $C_c^\infty(\mathring{\mathbb{R}}_+)$ 中的一个序列逼近，同时 $\mathring{}\,\mathcal{S}_o(\mathbb{R}_+)$ 中的任意元素也可以由 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 中的一个序列，在 D_ν^+ 的图范数下逼近。第一个事实是显然的，而第二个事实已在引理 3.1 的证明中讨论过。□

从现在起，写作 Δ_ν 时，我们总是指自伴扩张。注意，(3.15) 和 (3.20) 与 (4.3) 和 (4.9) 一起推出 Δ_ν 是左不变的，即

$$\ell_{(y,v)}\Delta_\nu f = \Delta_\nu \ell_{(y,v)} f \qquad \forall (y,v) \in G_\nu, \tag{4.13}$$

对定义域为 Δ_ν的所有 f均成立；先对 $f \in \mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R})$ 验证这一点很容易，然后利用密度即可。根据谱定理，由 (4.13) 可推得函数演算中的任意算子都具有左不变性：

$$\ell_{(y,v)} F(\Delta_\nu) = F(\Delta_\nu)\ell_{(y,v)} \qquad \forall (y,v) \in G_\nu, \tag{4.14}$$

对所有有界博雷尔函数 $F\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ 均成立；这应与 (3.16) 和 (3.21) 对照。正如我们将看到的，$F(\Delta_\nu)$ 实际上是右 $\diamond_\nu$-卷积算子。

4.3. 热半群与普朗歇尔公式。我们考虑与 Δ_ν相关联的热半群 $\{e^{-t\Delta_\nu}\}_{t>0}$。我们将用到 [23, 定理 2.1]，其中确立了与某些算子相关联的热核（在我们的情形下为 L_ν）与其提升版本（在我们的情形下为 Δ_ν）之间的关系。

命题 4.4. 与 Δ_ν 相关联的热半群由一族$\diamond_\nu$-卷积算子给出，即

$$e^{-t\Delta_\nu} f = f \diamond_\nu K_{e^{-t\Delta_\nu}} \tag{4.15}$$

对所有 $t > 0$，其中核由下式给出

$$K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty \Psi_t(\xi)\,(2\xi e^u)^{-\nu/2} \exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi} - \frac{x^2}{2\xi e^u}\right) \mathrm{d}\xi, \tag{4.16}$$

and

$$\Psi_t(\xi) = \frac{e^{\frac{\pi^2}{4t}}}{\xi^2\sqrt{4\pi^3 t}} \int_0^\infty \sinh(\theta)\sin\left(\frac{\pi\theta}{2t}\right)\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t} - \frac{\cosh\theta}{\xi}\right)\mathrm{d}\theta, \qquad \xi > 0. \tag{4.17}$$

此外，对于所有 $t>0$、$K_{e^{-t\Delta_\nu}} \geq 0$，在 G_ν 上，以及 $\|K_{e^{-t\Delta_\nu}}\|_{L^1(G_\nu)} = 1$。因此，$e^{-t\Delta_\nu}$ 是 $L^p(G_\nu)$ 上的保正性压缩算子，$p\in[1,\infty]$，对所有 $t>0$。

证明。为论证公式 (4.16)，我们希望应用 [23] 的理论。具体而言，此处的算子 Δ_ν 对应于 [23, 第 2]，节中 T 的自伴算子，其中 [23] 中的 L 取为我们的 L_ν；作此选择后，[23] 中 T 的定义域显然包含 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R})$，而由于后者是 Δ_ν 的一个核，根据引理 4.3，这两个算子确实相同。因此，根据 [23, 定理 2.1]，

$$e^{-t\Delta_\nu} f(x,u) = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\,\exp\left(-\frac{\cosh(u-v)}{\xi}\right) e^{-\xi e^{u+v}L_\nu/2} f_v\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}v\right)(x), \tag{4.18}$$

对于所有的 $f\in L^1\cap L^2(G_\nu)$ 以及几乎所有的 $(x,u)\in G_\nu$，其中我们采用记号 $f_v(\cdot) = f(\cdot,v)$。注意，对于任意的 $t>0$，函数 Ψ_t 满足以下界限

$$|\Psi_t(\xi)| \lesssim_t \xi^{-2} \qquad \forall \xi>0, \tag{4.19}$$

见 [23, 定理 2.1]。根据（4.19）和（3.17），我们可以将（4.18）改写为

$$\begin{aligned} &e^{-t\Delta_\nu} f(x,u) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\,\exp\left(-\frac{\cosh(u-v)}{\xi}\right)\left(f_v *_\nu K_{e^{-\xi e^{u+v}L_\nu/2}}\right)(x)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_v *_\nu \left(\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\,\exp\left(-\frac{\cosh(u-v)}{\xi}\right) K_{e^{-\xi e^{u+v}L_\nu/2}}(\cdot)\,\mathrm{d}\xi\right)(x)\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.20}$$

根据引理 3.3，内积分为

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\,\exp\left(-\frac{\cosh(u-v)}{\xi}\right) K_{e^{-\xi e^{u+v}L_\nu/2}}(y)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\,(2\xi e^{u+v})^{-\nu/2}\exp\left(-\frac{\cosh(u-v)}{\xi} - \frac{y^2}{2\xi e^{u+v}}\right)\mathrm{d}\xi \\ &= e^{-v\nu} K_{e^{-t\Delta_\nu}}(e^{-v}y, u-v), \end{aligned}$$

其中 $K_{e^{-t\Delta_\nu}}$ 是（4.16）中定义的函数。将其代入（4.20），并按照（3.1）展开汉克尔卷积，得到

$$\begin{aligned} e^{-t\Delta_\nu} f(x,u) &= \int_{G_\nu} \tau_\nu^{[x]} f(y,v) K_{e^{-t\Delta_\nu}}(e^{-v}y, u-v) e^{-v\nu}\,\mathrm{d}\mu_\nu(y)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{G_\nu} \tau_\nu^{[x]} f(e^{u-v}y, u-v) K_{e^{-t\Delta_\nu}}(y,v)\,\mathrm{d}\mu_\nu(y)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{G_\nu} \ell_{(x,u)} f((y,v)^-) K_{e^{-t\Delta_\nu}}(y,v)\,\mathrm{d}\mu_\nu(y)\,\mathrm{d}v \\ &= f \diamond_\nu K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u), \end{aligned}$$

由（4.3）和（4.4）可得。这证实了由（4.16）给出的 $K_{e^{-t\Delta_\nu}}$ 确实是 $e^{-t\Delta_\nu}$ 的 $\diamond_\nu$-卷积核。

现在我们转而证明，对于所有 $t>0$，$K_{e^{-t\Delta_\nu}}\geq 0$。由 (4.19) 可容易验证，(4.16) 中的积分绝对收敛，并且对于任意 $t>0$，$K_{e^{-t\Delta_\nu}}\in C\cap L^1(G_\nu)$。此外，由 (4.15)、(4.4) 和 (4.2) 可推得，$e^{-t\Delta_\nu}$ 是作用于 G_ν 上的积分算子，

$$e^{-t\Delta_\nu} f(x,u) = \int_{G_\nu} K_t((x,u),(y,v))\,f(y,v)\,\mathrm{d}\mu_\nu(y)\,\mathrm{d}v,$$

其积分核 K_t 由下式给出

$$\begin{aligned} K_t((x,u),(y,v)) &= e^{-\nu v} r_{(x,u)} K_{e^{-t\Delta_\nu}}((y,v)^-) \\ &= e^{-\nu v} \ell_{(y,v)^-} K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u) \end{aligned} \tag{4.21}$$

（另见 [23, 定理 2.3]）。特别地，由引理 4.2，$K_t(\cdot,(y,u)) \to K_{e^{-t\Delta_\nu}}$ 属于 $L^1(G_\nu)$，当 $(y,u) \to (0,0)$ 时；因此，为了证明 $K_{e^{-t\Delta_\nu}} \geq 0$，只需证明 $K_t \geq 0$ 在 $G_\nu \times G_\nu$ 上几乎处处成立，也就是说，$e^{-t\Delta_\nu}$ 是保正的。

现在，由 [15, 定理 1.3.2], 可知，热半群 $e^{-t\Delta_\nu}$ 保正这一事实等价于如下性质：对于定义域 $\mathfrak{D}(\sqrt{\Delta_\nu})$ 中的任意实值 f，都有 $|f| \in \mathfrak{D}(\sqrt{\Delta_\nu})$，并且

$$\langle \sqrt{\Delta_\nu}|f|, \sqrt{\Delta_\nu}|f|\rangle \leq \langle \sqrt{\Delta_\nu} f, \sqrt{\Delta_\nu} f\rangle. \tag{4.22}$$

由引理 4.3，此处 Δ_ν 是具有诺伊曼定义域的算子 $\nabla_\nu^+ \nabla_\nu$（见 (6.4)），也就是说，$\Delta_\nu = \nabla_\nu^* \nabla_\nu$，其中 ∇_ν 取最大定义域。因此，

$$\mathfrak{D}(\sqrt{\Delta_\nu}) = \mathfrak{D}_{\max}(\nabla_\nu) = \{f \in L^2(G_\nu) : |\nabla_\nu f| \in L^2(G_\nu)\}$$

并且，对于所有 $f \in \mathfrak{D}(\sqrt{\Delta_\nu})$，

$$\langle \nabla_\nu f, \nabla_\nu f\rangle = \langle \sqrt{\Delta_\nu} f, \sqrt{\Delta_\nu} f\rangle$$

（参见 [73, 定理 X.25]的证明）。此外，若 $f \in \mathfrak{D}(\sqrt{\Delta_\nu})$ 为实值，则 $f, |\nabla_\nu f| \in L^1_{\mathrm{loc}}(G_\nu)$，因此应用 [22, 引理 7.6] 可得 $\nabla_\nu |f| = \mathrm{sign}(f) \nabla_\nu f$。因此，$|f| \in \mathfrak{D}(\sqrt{\Delta_\nu})$，且（4.22）成立。

我们还需计算热核的 $L^1(G_\nu)$ 范数。注意到

$$\begin{aligned} &\|K_{e^{-t\Delta_\nu}}\|_{L^1(G_\nu)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \Psi_t(\xi) \exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}\right) \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{2\xi e^u}\right)^{\nu/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\xi e^u}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \Psi_t(\xi) \exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}\right) \mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

由于对于任意 $s > 0$，热核 $K_{e^{-sL_\nu}}$ 的 $L^1(X_\nu)$-范数均等于 1。此外，由 (4.17) 可将上述表达式改写为

$$\frac{e^{\frac{\pi^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi^3 t}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \sinh(\theta) \sin\left(\frac{\pi\theta}{2t}\right) e^{-\frac{\theta^2}{4t}} \int_0^\infty \xi^{-2} \exp\left(-\frac{\cosh\theta + \cosh u}{\xi}\right) \mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}u.$$

注意到，对 ξ 的积分等于 $(\cosh\theta + \cosh u)^{-1}$。此外，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{\cosh\theta + \cosh u} = \frac{2\theta}{\sinh\theta}.$$

因此，综合以上结果可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u) \,\mathrm{d}\mu_\nu(x) \,\mathrm{d}u &= \frac{e^{\frac{\pi^2}{4t}}}{\sqrt{\pi^3 t}} \int_0^\infty \theta \sin\left(\frac{\pi\theta}{2t}\right) e^{-\frac{\theta^2}{4t}} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{e^{\frac{\pi^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2t}\right) e^{-\frac{\theta^2}{4t}} \,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

根据高斯函数的傅里叶变换公式，该值等于 1。

因此，$\|K_{e^{-t\Delta_\nu}}\|_{L^1(G_\nu)} = 1$ 对所有 $t > 0$均成立。因此，根据 Young 卷积不等式 (4.6)，可得 $e^{-t\Delta_\nu}$ 是 $L^p(G_\nu)$ 上的压缩算子，适用于任意 $p \in [1,\infty]$。□

命题 4.4 的热核公式是我们推导 Δ_ν 函数演算若干性质的出发点，其中包括它由卷积算子给出这一事实，以及存在一个普朗歇尔公式，将卷积核的 L^2 范数与相应谱乘子的适当 L^2 范数联系起来。

我们首先证明一个基本性质，它与函数演算中算子的左不变性 (4.14) 有关（参见 [70, 定理 5]）。回顾一下，m 是 G_ν上的模函数，由 (4.1) 给出。

引理 4.5. 设 $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ 是一个有界博雷尔函数，且 $f \in L^1(G_\nu)$ 满足 $fm^{1/2} \in L^1(G_\nu)$。那么

$$F(\Delta_\nu)(f \diamond_\nu g) = f \diamond_\nu F(\Delta_\nu)g, \qquad g \in L^2(G_\nu).$$

证明。固定如上的 f。$\diamond_\nu$ 在 $L^1(G_\nu)$ 上的结合律、杨氏不等式（引理 4.1）以及稠密性论证表明

$$(f \diamond_\nu g) \diamond_\nu h = f \diamond_\nu (g \diamond_\nu h)$$

对所有 $g \in L^2(G_\nu)$ 以及所有 $h \in L^1(G_\nu)$ 均成立。由命题 4.4，我们可以将此应用于 $h = K_{e^{-\Delta_\nu}}$，得到

$$e^{-\Delta_\nu}(f \diamond_\nu g) = f \diamond_\nu e^{-\Delta_\nu}g, \qquad g \in L^2(G_\nu).$$

由于左卷积算子 $g \mapsto f \diamond_\nu g$ 是 L^2-有界的，根据 $e^{-\Delta_\nu}$ 的谱演算，对于所有有界博雷尔函数 $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$，我们有

$$G(e^{-\Delta_\nu})(f \diamond_\nu g) = f \diamond_\nu G(e^{-\Delta_\nu})g, \qquad g \in L^2(G_\nu).$$

最后，取 $G(\lambda) = F(-\log \lambda)$，即可完成证明。 □

对于 $t > 0$ 和 $u \in \mathbb{R}$，我们定义函数 $M_{t,\,u}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 如下：

$$M_t(\lambda, u) := M_{t,u}(\lambda) = \int_0^\infty \Psi_t(\xi) \exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi} - \frac{\xi\lambda e^u}{2}\right) \mathrm{d}\xi \tag{4.23}$$

对所有 $\lambda > 0$，其中 Ψ_t 在 (4.17) 中定义。

我们强调，$M_{t,\,u}$ 与 ν无关，这一点至关重要。文献中早已利用了这一事实，例如见 [31, 55]。

引理 4.6. 对所有 $t > 0$ 和 $u \in \mathbb{R}$，函数 $M_{t,\,u}$ 有界。此外，对所有 $\alpha > 0$，$M_{t,\,u} \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})$。

证明。由 (4.19) 可得

$$\|M_{t,u}\|_\infty \lesssim_t \int_0^\infty \xi^{-2} e^{-1/\xi}\,\mathrm{d}\xi = 1,$$

以及

$$\|M_{t,u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})} \lesssim \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \xi^{-2} \exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi} - \frac{\xi\lambda e^u}{2}\right) \mathrm{d}\xi\right)^2 \lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

我们将对 λ 的积分分为区间 (0,1) 和 $(1,\infty)$ 上的积分。在前一种情形下，我们有

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty \xi^{-2} \exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi} - \frac{\xi\lambda e^u}{2}\right) \mathrm{d}\xi\right)^2 \lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \lesssim_\alpha \left(\int_0^\infty \xi^{-2} e^{-1/\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)^2 = 1.$$

另一方面，对于剩余区间，我们有

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \left(\int_0^\infty \xi^{-2}\exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}-\frac{\xi\lambda e^u}{2}\right)\mathrm{d}\xi\right)^2\lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\\&\quad\lesssim_\alpha \int_1^\infty \left(\int_0^\infty \xi^{-2}(\xi\lambda e^u)^{-(\alpha+2)/4}\exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}\right)\mathrm{d}\xi\right)^2\lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\\&\quad\lesssim \left(\int_0^\infty \left(\frac{\eta}{e^u\cosh u}\right)^{(\alpha+2)/4}e^{-\eta}(\cosh u)^{-1}\,\mathrm{d}\eta\right)^2\lesssim 1.\end{aligned}$$

结合以上结果，证明得证。 □

函数 $M_{t,\ u}$ 描述了 X_ν 与 L_ν 上热传播子的关系，这一关系已在命题 4.4 的证明中得到运用。

引理 4.7。对于任意 $t>0$ 和 $u\in\mathbb{R}$，有

$$K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u)=K_{M_{t,u}(L_\nu)}(x)\qquad\qquad \textit{for a.a. } x\in\mathbb{R}_+.$$

证明。固定 $t>0$ 和 $u\in\mathbb{R}$。由 (3.17) 和引理 4.6 可得

$$K_{M_{t,u}(L_\nu)}(x)=\kappa_\nu^{-2}\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}-\frac{\xi e^u y^2}{2}\right)j_x^\nu(y)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mu_\nu(y).$$

由 (4.19)，我们可以应用 Fubini 定理和引理 3.3，得到

$$\begin{aligned}K_{M_{t,u}(L_\nu)}(x)&=\int_0^\infty \Psi_t(\xi)\exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}\right)H_\nu^{-1}\left(y\mapsto e^{-\xi e^u y^2/2}\right)(x)\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty \Psi_t(\xi)(2\xi e^u)^{-\nu/2}\exp\left(-\frac{\cosh u}{\xi}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\xi e^u}\right)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

而这等于 $K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u)$，见（4.16）。 □

注记 4.8。引理 4.7 在超群 G_ν 的背景下，确立了分层群 N 上的热核与半直积群 $G=N\rtimes\mathbb{R}$上的热核之间关系的类似结论，而这一关系在现有文献中已为人所知。特别地，对于 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，令 $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的经典拉普拉斯算子，令 $\widetilde{\Delta}_{\mathbb{R}^n}=-\partial_u^2+e^{2u}\Delta_{\mathbb{R}^n}$ 为 $\mathbb{R}^n\rtimes\mathbb{R}$上相应的左不变拉普拉斯算子。根据[55, 命题 4.3],

$$K_{e^{-t\widetilde{\Delta}_{\mathbb{R}^n}}}(x,u)=K_{M_{t,u}(\Delta_{\mathbb{R}^n})}(x).\tag{4.24}$$

~此外，与 $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ 和 $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ 相关的普朗歇尔测度可以显式计算（参见 [55, 第 388-389] 页），且对于所有有界博雷尔函数 $F\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|K_{F(\Delta_{\mathbb{R}^n})}(z)|^2\,\mathrm{d}z&\simeq_n\int_0^\infty|F(\lambda)|^2\lambda^{n/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},\\\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}|K_{F(\widetilde{\Delta}_{\mathbb{R}^n})}(z,u)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u&\simeq_n\int_0^\infty|F(\lambda)|^2\lambda^{[3/2,(n+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},\end{aligned}$$

其中我们使用记号 (1.7)。当然，第一个公式与 L_ν 的普朗歇尔公式 (3.18) 类似。如下文所示，第二个公式也有一个适用于 Δ_ν 的类似公式。

设 $\mathcal{J}$ 为所有衰减指数函数 $\lambda\mapsto e^{-t\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$ 的有限线性组合所构成的集合，其中 $t>0$ 如 [55, p. 389] 所示。斯通–魏尔斯特拉斯定理表明，$\mathcal{J}$ 在 $C_0(\mathbb{R}_+)$ 中一致稠密。

定义线性算子 $\Phi\colon\mathcal{J}\to\bigcap_{\alpha>0}L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\lambda^\alpha\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda\,\mathrm{d}u)$，其定义为

$$\Phi(e^{-t\cdot})=M_t$$

对所有 $t>0$，其中 M_t 由 (4.23) 给出。我们将 $(\Phi F)_u(\lambda)=\Phi F(\lambda,u)$ 记为。

引理 4.9. 对所有 $\alpha \in [1,\infty)$，算子 Φ 可延拓为有界算子，其定义域为 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\alpha+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$，值域为 $L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, \lambda^{\alpha/2}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda\,\mathrm{d}u)$。

证明。对于 $\alpha\in\mathbb{N}$，这一结论已为人所知，并且在 [55] 中已被隐含使用。为方便读者，我们给出一个简短的论证。

固定 $\alpha\in\mathbb{N}, \alpha\geq 1$。由注 4.8，利用 (4.24) 和线性性，我们推得，对所有 $F\in\mathcal{J}$，

$$K_{F(\widetilde{\Delta}_{\mathbb{R}^\alpha})}(z,u) = K_{(\Phi F)_u(\Delta_{\mathbb{R}^\alpha})}(z),$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty |\Phi F(\lambda,u)|^2\lambda^{\alpha/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\,\mathrm{d}u &\simeq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^\alpha} |K_{(\Phi F)_u(\Delta_{\mathbb{R}^\alpha})}(z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^\alpha} |K_{F(\widetilde{\Delta}_{\mathbb{R}^\alpha})}(z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u\\ &\simeq \int_0^\infty |F(\lambda)|^2\lambda^{[3/2,(\alpha+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

因此，若 α 是整数，则 Φ 可延拓为从空间 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\alpha+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 到 $L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, \lambda^{\alpha/2}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda\,\mathrm{d}u)$ 的有界算子。

对于分数 α 的情形，则可由 Stein 加权 L^2 空间 [78] 的插值定理得出。□

推论 4.10. 若 $F\in\mathcal{J}$，则 $F(\Delta_\nu)$ 是一个右 $\diamond_\nu$-卷积算子，其卷积核为 $K_{F(\Delta_\nu)}\in L^1\cap L^2(G_\nu)$. 此外，

$$\|K_{F(\Delta_\nu)}\|_{L^2(G_\nu)} \lesssim \|F\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}.$$

特别地，与 Δ_ν 相关的热核属于 $L^2(G_\nu)$。

证明. 由命题 4.4 和线性性可知，对所有 $F\in\mathcal{J}$，算子 $F(\Delta_\nu)$ 都是一个卷积算子，其卷积核为 $K_{F(\Delta_\nu)}\in L^1(G_\nu)$。此外，再由线性性和引理 4.7，可推出

$$K_{F(\Delta_\nu)}(x,u) = K_{(\Phi F)_u(L_\nu)}(x). \tag{4.25}$$

因此，由 (3.18) 和引理 4.9，

$$\begin{aligned}\int_{G_\nu} |K_{F(\Delta_\nu)}(x,u)|^2\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty |K_{(\Phi F)_u(L_\nu)}(x)|^2\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u\\ &\simeq \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty |(\Phi F)_u(\lambda)|^2\lambda^{\nu/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\,\mathrm{d}u\\ &\lesssim \int_0^\infty |F(\lambda)|^2\lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},\end{aligned}$$

如所需。□

现在我们希望将推论 4.10 推广到更大一类乘子 F。为此，有必要建立类 $\mathcal{J}$ 的一些密度性质。

引理 4.11。设 $F\in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 有界。

(i) 存在一个一致有界序列 $F_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，几乎处处收敛到 F，并且在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中收敛。(ii) 如果另外 $F\in C_0(\mathbb{R}_+)$，那么存在一个序列 $F_n\in\mathcal{J}$，一致地收敛到 F，并且在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中收敛。

证明。我们从 (i) 开始。给定任意 $F\in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$，我们可以先用函数 $F\mathbb{1}_{[1/k,k]}$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 对其进行逼近，这些函数在 $\mathring{\mathbb{R}}_+$ 中具有紧支撑，且受 $|F|$ 控制；反过来，这些紧支撑函数又可以通过磨光子逼近为 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 函数。然后，对角线

论证给出 $C_c^\infty(\mathring{\mathbb{R}}_+)$ 中的一个序列，它在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中收敛到 F，并且在抽取一个子序列后，也几乎处处收敛。若另外 F 有界，则每个逼近函数也都由 $\|F\|_{L^\infty}$ 控制。

对于 (ii)，只需证明 $\mathcal{J}$ 在巴拿赫空间中稠密即可。

$$W = C_0(\mathbb{R}_+) \cap L^2\left(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\right),$$
$$\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_{L^\infty} + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}.$$

显然，$C_c(\mathbb{R}_+)$ 在 W 中稠密；利用紧支撑截断函数和控制收敛，这一点很容易看出。因此，为了得出结论，只需验证 $\mathcal{J}$ 在 W 中的闭包包含 $C_c(\mathbb{R}_+)$。与 [48, 引理 3.13],的证明大致相同，令 $G \in C_c(\mathbb{R}_+)$ 并设 $g(x) := G(x)e^x \in C_c(\mathbb{R}_+)$。由斯通–魏尔斯特拉斯定理，我们可以找到 $g_k \in \mathcal{J}$，使其一致地收敛于 g。因此，$G_k(x) := g_k(x)e^{-x} \in \mathcal{J}$ 满足

$$|G_k(x) - G(x)| = e^{-x}|g_k(x) - g(x)| \le e^{-x}\|g_k - g\|_{L^\infty}$$

因此，G_k 一致地收敛到 G。此外，由于 $|G_k(x)| \lesssim e^{-x}$，勒贝格控制收敛定理表明，G_k 在 $L^2(\mathbb{R}_+, (\lambda^{3/2} + \lambda^{(\nu+1)/2})\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中也收敛到 G。因此，$C_c(\mathbb{R}_+)$ 包含于 W 中 $\mathcal{J}$ 的闭包内。□

最终，我们可以为 Δ_ν 的函数演算中更广泛的一类算子建立卷积核的存在性，并证明相应普朗歇尔测度的存在性。

命题 4.12. 对于所有属于$L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$的有界博雷尔函数 $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$，算子 $F(\Delta_\nu)$ 是一个 $\overline{\diamond}_\nu$-卷积算子，相应的核 $K_{F(\Delta_\nu)}$ 属于 $L^2(G_\nu)$。此外，存在一个正则博雷尔测度 σ_ν，称为与 Δ_ν 相关联的普朗歇尔测度，使得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty |K_{F(\Delta_\nu)}(x,u)|^2\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u &= \int_0^\infty |F(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\sigma_\nu(\lambda)\\ &\lesssim \int_0^\infty |F(\lambda)|^2\,\lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\end{aligned} \tag{4.26}$$

对于所有这样的 F，结论均成立。此外，σ_ν 的零测集与和 Δ_ν 相关联的谱测度的零测集相同。

证明。首先，设 $F \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 也属于 $C_0(\mathbb{R}_+)$。根据引理 4.11 (ii)，我们找到一个序列 $F_n \in \mathcal{J}$，其在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中收敛于 F，且一致收敛。根据谱定理，$F_n(\Delta_\nu) \to F(\Delta_\nu)$ 在 $L^2(G_\nu)$ 上按算子范数收敛。另一方面，根据推论 4.10，将 $G \in \mathcal{J}$ 映射到 $K_{G(\Delta_\nu)} \in L^2(G_\nu)$ 的算子可延拓为一个有界算子

$$T : L^2\left(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\right) \to L^2(G_\nu).$$

因此，$K_{F_n(\Delta_\nu)} \to TF$ 属于 $L^2(G_\nu)$。综合以上结果，对于所有 $f \in C_c(G_\nu)$，我们可以看到，$F_n(\Delta_\nu)f$ 在 $L^2(G_\nu)$ 中收敛于 $F(\Delta_\nu)f$；此外，根据杨氏不等式，$F_n(\Delta_\nu)f$ 在 $L^2(G_\nu)$ 中收敛于 $f \diamond_\nu TF$。这表明，$F(\Delta_\nu)$ 确实是一个以 $K_{F(\Delta_\nu)}$ 为核的 $\diamond_\nu$-卷积算子：$= TF \in L^2(G_\nu)$。

为了构造普朗歇尔测度，我们沿用证明 [75, 引理 1] 中的方法。根据谱定理，令 E_ν 为与 Δ_ν 相关联的谱测度。对于任意博雷尔函数 $G\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ 该算子

$$G(\Delta_\nu) = \int_0^\infty G(\lambda)\,\mathrm{d}E_\nu(\lambda)$$

是作用于 $L^2(G_\nu)$ 上的闭算子，当 G 有界时它也是有界的。此外，对于任意 $f \in L^2(G_\nu)$，$\langle \mathrm{d}E_\nu f, f\rangle$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的正则博雷尔测度，并且

$$\|G(\Delta_\nu)f\|^2_{L^2(G_\nu)} = \int_0^\infty |G(\lambda)|^2 \langle \mathrm{d}E_\nu(\lambda) f, f\rangle, \tag{4.27}$$

其中，当且仅当 f 属于 $G(\Delta_\nu)$ 的定义域时，右侧有限。

现在取 $F \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}\frac{\lambda}{\lambda}) \cap C_0(\mathbb{R}_+)$。注意，对于任意 $f \in C_c(G_\nu)$，由引理 4.5 可得

$$e^{-\Delta_\nu} F(\Delta_\nu) f = e^{-\Delta_\nu}(f \diamond_\nu K_{F(\Delta_\nu)}) = f \diamond_\nu (e^{-\Delta_\nu} K_{F(\Delta_\nu)}).$$

显然，$e^{-\Delta_\nu}$ 与 $F(\Delta_\nu)$ 可交换，因此我们也得到

$$e^{-\Delta_\nu} F(\Delta_\nu) f = F(\Delta_\nu) e^{-\Delta_\nu} f = f \diamond_\nu (F(\Delta_\nu) K_{e^{-\Delta_\nu}}).$$

因此，

$$e^{-\Delta_\nu} K_{F(\Delta_\nu)} = F(\Delta_\nu) K_{e^{-\Delta_\nu}}. \tag{4.28}$$

结合 (4.27) 和 (4.28)，我们推得

$$\begin{aligned}
\int_{G_\nu} |K_{F(\Delta_\nu)}(x,u)|^2 \,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u &= \int_0^\infty e^{2\lambda} \langle \mathrm{d}E_\nu(\lambda) e^{-\Delta_\nu} K_{F(\Delta_\nu)}, e^{-\Delta_\nu} K_{F(\Delta_\nu)}\rangle \\
&= \int_0^\infty e^{2\lambda} \langle \mathrm{d}E_\nu(\lambda) F(\Delta_\nu) K_{e^{-\Delta_\nu}}, F(\Delta_\nu) K_{e^{-\Delta_\nu}}\rangle \\
&= \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 e^{2\lambda} \langle \mathrm{d}E_\nu(\lambda) K_{e^{-\Delta_\nu}}, K_{e^{-\Delta_\nu}}\rangle.
\end{aligned}$$

这给出了普朗歇尔测度的公式：

$$\mathrm{d}\sigma_\nu(\lambda) = e^{2\lambda} \langle \mathrm{d}E_\nu(\lambda) K_{e^{-\Delta_\nu}}, K_{e^{-\Delta_\nu}}\rangle. \tag{4.29}$$

在这样的测度 σ_ν 定义下，在附加假设 $F \in C_0(\mathbb{R}_+)$ 的条件下，等式 (4.26) 得以证明。

现在我们来证明 (4.26) 中的不等式。对于任意 $G \in \mathcal{J}$，根据推论 4.10，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |G(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\sigma_\nu(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |K_{G(\Delta_\nu)}(x,u)|^2 \,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u \\
&\lesssim \int_0^\infty |G(\lambda)|^2 \,\lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{J}$ 在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}\frac{\lambda}{\lambda})$ 中稠密，我们得到对所有 $G \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}\frac{\lambda}{\lambda})$ 都成立的 (4.26) 中的不等式。特别地，我们推得 σ_ν 关于 $\mathbb{R}_+$ 上的勒贝格测度绝对连续，且其密度由 $\lambda^{[1/2,(\nu-1)/2]}$ 的某个倍数所界定。

现在我们证明，对于 σ_ν 而言的零测集与谱测度的零测集相同。根据 σ_ν 的定义 (4.29)，唯一非平凡的蕴含是：如果对于 $A \subseteq \mathbb{R}_+$ 有 $\sigma_\nu(A) = 0$，那么也有 $\mathbb{I}^A(\Delta_\nu) = E_\nu(A) = 0$。

固定这样一个集合 A。令 D 为 $L^2(G_\nu)$ 的可数稠密子集。由于 σ_ν 以及测度 $\langle \mathrm{d}E_\nu f, f\rangle$（$f \in D$）都是正则博雷尔测度，我们可以找到一列紧集 K_n 和开集 U_n，使得 $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq A \subseteq \ldots \subseteq U_{n+1} \subseteq U_n$，并且 $\sigma_\nu(U_n \setminus K_n) \to 0$ 以及 $\langle E_\nu(U_n \setminus K_n) f, f\rangle \to 0$、$f \in D$。令 $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R})$ 满足 $0 \le \varphi_n \le 1$、$\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq U_n$ 和 $\varphi_{n|_{K_n}} \equiv 1$。那么，相对于 σ_ν 以及每个 $\langle \mathrm{d}E_\nu f, f\rangle$、$f \in D$，$\varphi_n \to \mathbb{I}^A$ 几乎处处成立。

由于 $0 \le \varphi_n \le \mathbb{I}^{U_n}$ 和 $\sigma_\nu(U_n)$ 趋于 0，我们也有 $\varphi_n \to 0$ 属于 $L^2(\mathrm{d}\sigma_\nu)$。由于 $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}_+)$，我们可以应用 (4.26) 并推出 $K_{\varphi_n(\Delta_\nu)} \to 0$ 属于 $L^2(G_\nu)$；由于 φ_n 一致有界，根据杨氏卷积不等式（引理

4.1）并通过稠密性论证，我们得到 $\varphi_n(\Delta_\nu)$ 在 $L^2(G_\nu)$ 上的强算子拓扑中 $\to 0$。另一方面，对于任意 $f \in D$,

$$\|\varphi_n(\Delta_\nu)f - \mathbb{I}^A(\Delta_\nu)f\|_{L^2(G_\nu)} = \int_0^\infty |\varphi_n(\lambda) - \mathbb{I}^A(\lambda)|^2 \langle \mathrm{d}E_\nu(\lambda)f, f\rangle \to 0,$$

根据控制收敛定理，因为相对于 $\langle \mathrm{d}E_\nu f, f\rangle$, $\varphi_n \to \mathbb{I}^A$ 几乎处处成立；此外，$|\varphi_n - \mathbb{I}^A| \le 1$ 和 $\langle \mathrm{d}E_\nu f, f\rangle$ 是有限测度。由 D 的稠密性，我们推出 $\varphi_n(\Delta_\nu)$ 在强算子拓扑下收敛到 $\mathbb{I}^A(\Delta_\nu)$。因此，根据极限的唯一性，$\mathbb{I}^A(\Delta_\nu)$ 作为算子等于 $= 0$，所以 A 是谱测度的零测集。

剩下要证明的是卷积核的存在性，以及对一般的 F，即对有界函数 $F \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$，等式 (4.26) 成立。我们可以应用引理 4.11 (i)，找到一个函数一致有界序列 $F_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，它几乎处处（相对于勒贝格测度）收敛到 F，并且在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中收敛。由于 σ_ν 相对于勒贝格测度绝对连续，且谱测度具有相同的零测集，因此 $F_n(\Delta_\nu)$ 在强算子拓扑下收敛到 $F(\Delta_\nu)$。与上文类似，核 $K_{F_n(\Delta_\nu)}$ 在 $L^2(G_\nu)$ 中收敛，其极限是 $F(\Delta_\nu)$ 的 $\diamond_\nu$-卷积核。最后，稠密性论证证明了对 F，等式 (4.26) 成立。□

下一个结果是引理 4.7 的推广。

引理 4.13。设 F 有界且属于 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$。那么

$$K_{F(\Delta_\nu)}(x,u) = K_{(\Phi F)_u(L_\nu)}(x)$$

对于几乎所有的 $(x,u) \in G_\nu$。

证明。由 (3.18) 和引理 4.9 可知，对于任意 $H \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$,

$$\int_{G_\nu} |K_{(\Phi H)_u(L_\nu)}(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u \simeq \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty |(\Phi H)_u(\lambda)|^2 \lambda^{\nu/2}\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\,\mathrm{d}u \lesssim \|H\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}$$

因此，将 H 映射到函数 $(x,u) \mapsto K_{(\Phi H)_u(L_\nu)}(x)$ 的对应关系 T 是一个有界算子 T: $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda) \to L^2(G_\nu)$。

固定命题中的 F。设 $F_n \in \mathcal{J}$ 是一列函数，在 $L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$ 中收敛到 F。命题 4.12 表明，$K_{F_n(\Delta_\nu)}$ 在 $L^2(G_\nu)$ 中收敛到 $K_{F(\Delta_\nu)}$。同时，T 的有界性表明，$K_{(\Phi F_n)_u(L_\nu)}(x)$ 在 $L^2(G_\nu)$ 中收敛到 $K_{(\Phi F)_u(L_\nu)}(x)$。因此，经过提取子列，

$$K_{F_n(\Delta_\nu)}(x,u) \to K_{F(\Delta_\nu)}(x,u) \text{ 和 } K_{(\Phi F_n)_u(L_\nu)}(x) \to K_{(\Phi F)_u(L_\nu)}(x) \text{ 在 } G_\nu \text{ 上} \tag{4.30}$$

处处成立。由于根据 (4.25)，$K_{F_{n_k}(\Delta_\nu)}(x,u) = K_{(\Phi F_{n_k})_u(L_\nu)}(x)$，我们得出 $K_{F(\Delta_\nu)}(x,u) = K_{(\Phi F)_u(L_\nu)}(x)$ 几乎处处成立。□

4.4. 黎曼距离与有限传播速度。回顾 $\Delta_\nu = \nabla_\nu^+ \nabla_\nu$，其中 ∇_ν 由 (4.10) 给出。我们在流形 $\mathring{G}_\nu$ 上赋予黎曼结构，使向量场 ∂_u 和 $e^u \partial_x$ 构成一个正交归一标架。由于这些向量场正是 (4.10) 中作为 ∇_ν 的分量出现的向量场，因此，G_ν 上的黎曼距离 $\mathring{\varrho}$ 是与 ∇_ν 相关联的控制距离，其意义见附录（参见注 6.2）。

我们强调，∇_ν 不依赖于 ν，因此 G_ν 上的黎曼结构及相应的距离也不依赖于 ν。以下陈述对此予以证实，其中我们得到了 G_ν上黎曼距离的显式公式，类似于群 G上的次黎曼距离公式（2.16）。

命题 4.14. 对任意 $\nu \geq 1$, G_ν 上的黎曼距离由下式给出。

$$\varrho((x,u),(x',u')) = \operatorname{arccosh}\left(\cosh(u-u') + \frac{|x-x'|^2}{2e^{u+u'}}\right). \tag{4.31}$$

同一表达式也给整个 G_ν 定义了一个距离。

证明。当 $N = \mathbb{R}^d$ 为阿贝尔群且 Δ_N 为 $\mathbb{R}^d$ 上的标准拉普拉斯算子时，引言中讨论的半直积 $G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}$ 配备使向量场 (1.2) 构成正交归一标架的黎曼度量后，是维数为 $d+1$ 的实双曲空间的一种实现。众所周知（例如，见 [55, 命题 2.7]），两点 (x,u)、$(x',u') \in \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}$ 之间的黎曼距离由 (4.31) 右端给出。

现在取 $G = G_\nu$，可以分别看作双曲平面 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$中的一个开子集和一个闭子集。因此，表达式（4.31）显然分别在 G_ν 和 G_ν上定义了一个距离。此外， G_ν 上的向量场 ∂_u 和 $e^u\partial_x$ 是 G_ν 上向量场（1.2）在 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$上的限制。因此， G_ν 上的黎曼度量张量实际上就是双曲平面上相应张量的限制，而黎曼流形G_ν 中的曲线 γ 的长度，与将 γ 视为双曲平面中的一条曲线时的长度相同。

回想一下，双曲平面是一个完备的黎曼流形，因此平面上两点之间的黎曼距离就是连接这两点的唯一最短曲线的长度。因此，要得出公式 (4.31) 也给出了 G_ν 上的黎曼距离，只需证明 G_ν 在双曲平面上是测地凸的。

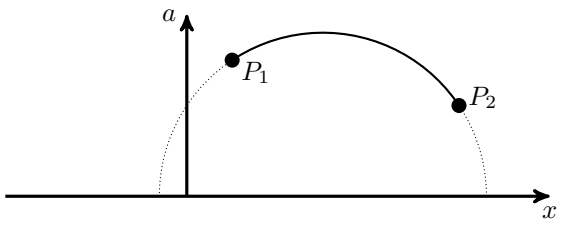


FIGURE 1. 和 P_1 与 P_2之间的测地线。

如果采用双曲平面的半平面模型$\{(x,a) : x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+\}$，这一凸性性质很容易看出，该模型对应于变量 $a = e^u$的变换。通过这一变量变换， G_ν 对应于开象限$\{(x,a) : x, a \in \mathbb{R}_+\}$。由于半平面模型中的测地线只是垂直于边界 $\{a = 0\}$ 的直线段或圆弧（参见例如 [5, 定理 9.3]），因此显然，连接 $\mathring{G}_\nu$ 中两点的测地线完全包含在 $\mathring{G}_\nu$ 中（见图 1）。□

从现在起，我们赋予 G_ν 命题 4.14 中的距离 ϱ。此外，对于所有 $(x,u) \in G_\nu$，我们设定

$$|(x,u)|_{G_\nu} := \varrho((0,0),(x,u)) = \operatorname{arccosh}(\cosh(u) + e^{-u}x^2/2),$$

并记 $B_{G_\nu}(0,r) = \{(x,u) \in G_\nu : |(x,u)|_{G_\nu} < r\}$ 对所有 $r > 0$ 均成立。若 G_ν 上的函数具有 $f(|\cdot|_{G_\nu})$ 的形式，即它只依赖于其自变量到 G_ν 的原点 (0,0) 的距离，则称该函数为径向函数。

下面关于 G_ν 上径向函数积分的命题，是对 [55, 命题 2.8 和 2.9] 的简单修改。

命题 4.15. 对任意博雷尔函数 $f\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，均有

$$\int_{G_\nu} f(|(x,u)|_{G_\nu})\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u = \int_{G_\nu} f(|(x,u)|_{G_\nu})\,e^{-\nu u}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u = c_\nu \int_0^\infty f(r)(\sinh t)^\nu\,\mathrm{d}r, \quad (4.32)$$

其中 $c_\nu = 2^{\nu-1}\mathrm{B}(\nu/2,\nu/2)$。此外，

$$\int_{G_\nu} f(|(x,u)|_{G_\nu}) e^{-u\nu} x^\nu\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u \lesssim_\nu \int_{G_\nu} f(|(x,u)|_{G\nu})\,|(x,u)|_{G_\nu}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u. \quad (4.33)$$

在考虑 Δ_ν 的函数演算中的算子时，径向函数自然会出现，但需与 (4.1) 的模函数 m 作一个扭曲。

推论 4.16. 对于所有有界函数 $F \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$，函数 $m^{1/2}K_{F(\Delta_\nu)}$ 在 G_ν 上是径向的。此外，对于所有 $r>0$,

$$\int_{B_{G_\nu}(0,r)} |K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})}(x,u)|^2 x^\nu\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u \lesssim_\nu r\int_{B_{G_\nu}(0,r)} |K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})}(x,u)|^2\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u.$$

证明。注意到，我们可以将 (4.16) 重写为

$$e^{\nu u/2}K_{e^{-t\Delta_\nu}}(x,u) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty \Psi_t(\xi)(2\xi)^{-\nu/2}\exp\left(-\frac{\cosh|(x,u)|_{G_\nu}}{\xi}\right)\mathrm{d}\xi.$$

这意味着，对于所有 $t>0$，$m^{1/2}K_{e^{-t\Delta_\nu}}$ 在 G_ν 上是径向的。由线性性可知，对于所有 $F\in\mathcal{J}$，$m^{1/2}K_{F(\Delta_\nu)}$ 也是径向的；再通过稠密性论证，如同 (4.30) 中那样，可将结果推广到所有有界 $F \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{[3/2,(\nu+1)/2]}\,\mathrm{d}_\lambda^\lambda)$。

现在，令 $r\geq 0$。将 (4.33) 和 (4.32) 应用于径向函数

$$f_r(x,u) = e^{\nu u}\,|K_{F(\Delta_\nu)}(x,u)|^2\ \mathbb{1}_{B_{G_\nu}(0,r)}(x,u)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B_{G_\nu}(0,r)} |K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})}(x,u)|^2 x^\nu\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u &= \int_{G_\nu} f_r(x,u)e^{-\nu u}x^\nu\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u\\ &\lesssim_\nu \int_{G_\nu} f_r(x,u)\,|(x,u)|_{G_\nu}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u\\ &\leq r\int_{G_\nu} f_r(x,u)\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u\\ &= r\int_{G_\nu} f_r(x,u)\,e^{-\nu u}\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u\\ &= r\int_{B_{G_\nu}(0,r)} |K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})}(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu_\nu(x)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

正如所需。 □

现在我们证明 Δ_ν 具有有限传播速度性质。与引言中一样，对于任意 $r>0$，我们定义

$$\mathcal{E}_r = \{F\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) : F \text{ even},\ \operatorname{supp}\hat{F}\subseteq[-r,r]\}. \quad (4.34)$$

引理 4.17。算子族 $\{\cos(t\sqrt{\Delta_\nu})\}_{t\in\mathbb{R}}$ 关于距离 ϱ 具有有限传播速度，即

$$\operatorname{supp}(\cos(t\sqrt{\Delta_\nu})f) \subseteq \{(x,u)\in G_\nu : \varrho((x,u),\operatorname{supp} f)\leq|t|\} \qquad \forall t\in\mathbb{R} \quad (4.35)$$

对所有 $f\in L^2(G_\nu)$ 均成立。此外，对所有 $r>0$,

$$\operatorname{supp} K_{F(\Delta_\nu)} \subseteq \overline{B_{G_\nu}}(0,r) \qquad \forall F\in\mathcal{E}_r.$$

证明。根据引理 4.3，我们可以对流形 $\mathring{G}_\nu$ 上具有诺伊曼定义域的算子 $\Delta_\nu = \nabla^+\nabla$ 应用命题 6.3，从而得到有限传播速度性质 (4.35)。具体而言，命题 6.3 给出的 (4.35) 的对应结果中，以 G_ν 代替 G_ν°，并相应地解释支集。不过，G_ν 是 G_ν 中一个稠密且测度全满的开子集；因此，对于任意 $f \in L^2(G_\nu) = L^2(\mathring{G}_\nu)$，$f$ 在 G_ν 中的支集是其在 G_ν 中的支集在 G_ν 中的闭包，于是 (4.35) 如所述成立。

现在固定某个 $r > 0$ 的 $F \in \mathcal{E}_r(\mathbb{R})$。由傅里叶反演公式（参见 [13,引理 2.1]），

$$F(\sqrt{\Delta_\nu}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{F}(t)\cos(t\sqrt{\Delta_\nu})\,\mathrm{d}t, \tag{4.36}$$

因此，由 (4.35)，

$$\operatorname{supp} F(\sqrt{\Delta_\nu})f \subseteq \{z \in G_\nu : \varrho(z, \operatorname{supp} f) \le r\}, \qquad f \in L^2(G_\nu). \tag{4.37}$$

由于 $F(\sqrt{\Delta_\nu})$ 是一个 $\diamond_\nu$-卷积算子，它也是 G_ν 上的积分算子，其积分核 K 与 (4.21) 中的情形大致相同，由下式给出

$$K((x,u),(y,v)) = e^{-\nu v}\ell_{(y,v)^-}K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})}(x,u). \tag{4.38}$$

现在注意到，(4.37) 可以等价地表述为

$$\operatorname{supp} K \subseteq \{((x,u),(y,v)) \in G_\nu \times G_\nu : \varrho((x,u),(y,v)) \le r\}.$$

记 $K_{(y,v)}(x,u) = K((x,u),(y,v))$。于是，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，

$$\operatorname{supp} K_{(y,v)} \subseteq \overline{B_{G_\nu}}(0, r+\varepsilon) \qquad \text{for almost all } (y,v) \in B_{G_\nu}(0,\varepsilon).$$

现在，由 (4.38) 和引理 4.2 可容易得出，

$$K_{(y,v)} \to K_{(0,0)} = K_{F(\sqrt{\Delta_\nu})} \text{ in } L^2(G_\nu) \text{ as } (y,v) \to (0,0),$$

由此我们推得，对于任意 $\varepsilon > 0$，均有 $\operatorname{supp} K_{(0,0)} \subseteq \overline{B_{G_\nu}}(0, r+\varepsilon)$，因此 $\operatorname{supp} K_{(0,0)} \subseteq \overline{B_{G_\nu}}(0,r)$，这正是所需结论。□

5. The multiplier theorem

这里我们回到第 2 节的设定。因此，N 是一个如 (2.8) 所示的二步分层群，即由阿贝尔群 $N^{(0)}$ 与 M´etivier 群 $N^{(1)},\dots,N$ 的直积构成，而 $G = N \rtimes \mathbb{R}$ 是它的半直积扩张。回顾一下，$\vec{d}_1$ 和 d_2 分别是 M´etivier 群 $N^{(j)}$，$j = 1,\dots,\ell$ 的第一层和第二层的维数向量，而 $d^{(0)}$ 是 $N(0)$ 的维数；特别地，$d = d^{(0)} + |\vec{d}_1| + |\vec{d}_2|$ 和 $Q = d^{(0)} + |\vec{d}_1| + 2|\vec{d}_2|$ 分别是 N 的拓扑维数和齐次维数。

我们的目标是将命题 2.5 中关于 N 的加权估计“提升”到半直积 G上。为此，我们首先比较 Δ_N 的函数演算中卷积核的加权范数与贝塞尔算子 L_ν的函数演算中相应的范数，其中 ν取适当的值。

命题 5.1。设 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d}_2$ 和 $\beta \ge 0$。对于任意 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，

$$\int_N |K_{F(\Delta_N)}(z)|^2 |z|_N^\beta \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j}\,\mathrm{d}z \lesssim_\alpha \int_0^\infty |K_{F(L_{Q-|\alpha|})}(x)|^2 x^\beta\,\mathrm{d}\mu_{Q-|\alpha|}(x).$$

证明。证明主要依赖于 [74]中的一些想法。

固定 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d}_2$、$\beta \ge 0$ 和 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。根据（3.18），$\beta = 0$ 的情形已由命题 2.5 涵盖，因此我们可以假设 $\beta > 0$。记作 $\nu = Q - |\alpha|$；注意到 $\nu > Q - |\vec{d}_2| = d \ge 3$，因为 N 是一个非阿贝尔二步群。

定义 $G \in \mathcal{S}_e(\mathbb{R}_+)$ 为 $G(\lambda) = F(\lambda^2)$，并且，对于 $r > 0$,

$$G_r := H_\nu(\mathbb{1}_{[0,r)} H_\nu^{-1} G), \qquad G^r := H_\nu(\mathbb{1}_{[r,\infty)} H_\nu^{-1} G).$$

因此， $G = G_r + G^r$。此外，由 (3.17),

$$K_{G_r(\sqrt{L_\nu})} = K_{G(\sqrt{L_\nu})\,\mathbb{1}_{[0,r)}}, \qquad K_{G^r(\sqrt{L_\nu})} = K_{G(\sqrt{L_\nu})\,\mathbb{1}_{[r,\infty)}}.$$

由 (3.6) 和 [17, 式 (10.9.4)],

$$j_x^\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\nu/2-3/2} e^{ixy\xi} \,\mathrm{d}\xi, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

因此，若 $\mathcal{F}$ 表示在 $\mathbb{R}$上的欧几里得傅里叶变换,

$$\mathcal{F}(j_x^\nu)(\xi) = \frac{2\sqrt{\pi}}{x} \left(1 - \left|\frac{\xi}{x}\right|^2\right)_+^{(\nu-3)/2}. \tag{5.1}$$

~记 G_r 为 G_r 在 $\mathbb{R}$上的偶延拓；也就是说，由 (3.5),

$$\widetilde{G}_r(y) = \int_0^r H_\nu^{-1} G(x)\, j_x^\nu(y) \,\mathrm{d}\mu_\nu(x)$$

对所有 $y \in \mathbb{R}$ （回忆一下， j_x^ν 是偶函数）。由于 $\nu > 3$，由 (5.1) 得到

$$\mathcal{F}(\widetilde{G}_r)(\xi) = 2\sqrt{\pi} \int_0^r H_\nu^{-1} G(x) \left(1 - \left|\frac{\xi}{x}\right|^2\right)_+^{(\nu-3)/2} x^{\nu-2} \,\mathrm{d}x;$$

注意到，在上述积分中， $|\xi| \le x \le r$ 否则被积函数为零。~因此，$\operatorname{supp} \mathcal{F}(G_r) \subseteq [-r, r]$。

由 (2.1) 可知， Δ_N 具有有限传播速度。与 (4.36) 中的推导类似，由~$\operatorname{supp} \mathcal{F}(G_r) \subseteq [-r, r]$ 可得

$$\operatorname{supp} K_{G_r(\sqrt{\Delta_N})} \subseteq \{z \in N : |z|_N \le r\}.$$

因此，对于 $|z|_N > r$，有 $K_{G^r(\sqrt{\Delta_N})}(z) = K_{G(\sqrt{\Delta_N})}(z)$。于是,

$$\begin{aligned}
&\int_N |K_{G(\sqrt{\Delta_N})}(z)|^2 |z|_N^\beta \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \beta r^{\beta-1} \int_{|z|_N > r} |K_{G(\sqrt{\Delta_N})}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \\
&\le \int_0^\infty \beta r^{\beta-1} \int_N |K_{G^r(\sqrt{\Delta_N})}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

回想一下， $\nu = Q - |\alpha|$。应用命题 2.5 和 (3.18)，得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \beta r^{\beta-1} \int_N |K_{G^r(\sqrt{\Delta_N})}(z)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \\
&\lesssim \int_0^\infty \beta r^{\beta-1} \int_0^\infty |K_{G^r(\sqrt{L_\nu})}(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu_\nu(x) \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \beta r^{\beta-1} \int_r^\infty |K_{G(\sqrt{L_\nu})}(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu_\nu(x) \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty |K_{G(\sqrt{L_\nu})}(x)|^2 x^\beta \,\mathrm{d}\mu_\nu(x).
\end{aligned}$$

结合以上结果，证明得证。 □

现在我们可以将前面的不等式提升到 G 和 G_ν。

推论 5.2。设 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d_2}$ 和 $\beta \geq 0$。对于任意 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_G |K_{F(\Delta)}(z,u)|^2 |z|_N^\beta \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u \lesssim \int_{G_{Q-|\alpha|}} |K_{F(\Delta_{Q-|\alpha|})}(x,u)|^2 x^\beta \,\mathrm{d}\mu_{Q-|\alpha|}(x) \,\mathrm{d}u. \quad (5.2)$$

证明。注意到引理 4.13 意味着

$$\int_{G_{Q-|\alpha|}} |K_{F(\Delta_{Q-|\alpha|})}(x,u)|^2 x^\beta \,\mathrm{d}\mu_{Q-|\alpha|}(x) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |K_{(\Phi F)_u(L_{Q-|\alpha|})}(x)|^2 x^\beta \,\mathrm{d}\mu_{Q-|\alpha|}(x) \,\mathrm{d}u. \quad (5.3)$$

此外，将 Δ 和 Δ_N 替换 Δ_ν 和 L_ν，引理 4.13 的类似结论仍然成立：

$$K_{F(\Delta)}(z,u) = K_{(\Phi F)_u(\Delta_N)}(z)$$

对于几乎所有的 $(z,u) \in G$；这可以采用与引理 4.13 中基本相同的方法加以证明，并且在 [55, 推论 4.5] 中已隐式使用。由此得到

$$\int_{G_Q} |K_{F(\Delta)}(z,u)|^2 |z|_N^\beta \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \int_N |K_{(\Phi F)_u(\Delta_N)}(z)|^2 |z|_N^\beta \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u. \quad (5.4)$$

现在，命题 5.1 使我们能够比较（5.3）和（5.4）的右侧，从而推导出所需的不等式。□

在 $\beta = 0$ 的情形下，根据命题 4.12，(5.2) 的右端可以转化为 F 的加权L^2范数，从而得到引言中讨论的 G 上的加权Plancherel估计 (1.9)。

我们现在将先前关于 G 的加权估计与有限传播速度结合起来，从而推导出以下 $L^1 \to L^2$ 界，该界对应于 (1.6)。这改进了 [55, 命题5.1], ，其中证明了上述估计在 $\nu = Q$ 情形下的成立；当然，这一改进依赖于我们对 N 所作的假设，而这些假设比 [55] 中的假设更为严格。

回顾式 (4.34) 中 $\mathcal{E}_r$的定义。

命题 5.3. 设 $\nu \in (d, Q]$。令 $F \in \mathcal{E}_r$ 对于某个 $r > 0$。那么，

$$\int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)| \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u \lesssim_\nu r^{[(\nu+1)/2,3/2]} \left(\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[3,\nu+1]} \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

证明。由于 $\nu \in (d, Q]$，我们可以选择 α，使得 $\vec{0} \preccurlyeq \alpha \prec \vec{d_2}$ 和 $\nu = Q - |\alpha|$ 成立。回顾 (2.17)， Δ 满足有限传播速度，因此 supp $K_{F(\Delta)} \subseteq \overline{B_G}(0_G, r)$。我们先考虑 $r \leq 1$ 的情形。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^1(G)} \leq \left(\int_{B_G(0_G,r)} \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{-\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u \right)^{1/2} \left(\int_G |K_{F(\Delta)}(z,u)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}u \right)^{1/2}.$$

$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$回顾一下，根据 (2.12) 有 $\alpha \prec d_2 \prec d_1$。因此，推论 2.7、取 $\beta = 0$ 时的推论 5.2，以及取 $\nu = Q - |\alpha|$ 时的命题 4.12 给出

$$\|K_{F(\sqrt{\Delta})}\|_{L^1(G)} \lesssim_\nu r^{(\nu+1)/2} \left(\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[3,\nu+1]} \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

对于 $r > 1$，注意到，根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned} \left(\int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)| \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \right)^2 \leq \int_{B_G(0_G,r)} (1 + |z|_N^{Q-|\alpha|})^{-1} \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{-\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \\ \times \left(\int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \right. \\ \left. + \int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)|^2 |z|_N^{Q-|\alpha|} \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \right). \end{aligned}$$

现在，与上文一样，

$$\int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)|^2 \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \lesssim_\nu \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[3,\nu+1]} \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

此外，根据推论 2.7，

$$\int_{B_G(0,r)} (1 + |z|_N^{Q-|\alpha|})^{-1} \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{-\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \lesssim_\nu r^2.$$

进一步地，根据推论 5.2 和 $\beta = Q - |\alpha| = \nu$，

$$\int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)|^2 |z|_N^{Q-|\alpha|} \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \lesssim_\nu \int_{G_\nu} |K_{F(\Delta_\nu)}(x,u)|^2 x^\nu \, \mathrm{d}\mu_\nu(x) \, \mathrm{d}u.$$

由引理 4.17 可知 $\operatorname{supp} K_{F(\Delta_\nu)} \subseteq \overline{B_{G_\nu}}(0,r)$。因此，推论 4.16 和命题 4.12 推出

$$\int_G |K_{F(\sqrt{\Delta})}(z,u)|^2 |z|_N^{Q-|\alpha|} \prod_{j=1}^{\ell} |z_j'|^{\alpha_j} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \lesssim_\nu r \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, \lambda^{[3,\nu+1]} \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

所需的估计由此得出。 □

现在我们可以得到对 [55, 命题 5.3 和 5.5] 的如下改进。

命题 5.4. 设 $F \in L^2(\mathbb{R})$ 的支撑位于 $[-4,4]$。那么

$$\sup_{z \in G} \int_G |K_{F(t\Delta)}(y,z)| \, (1 + t^{-1/2} \varrho(y,z))^\varepsilon \, \mathrm{d}y \lesssim_{s,\varepsilon} \|F\|_{L^2_s}$$

对于所有 $\varepsilon \geq 0$，以及满足以下任一条件的 s、$t > 0$：

- $t \geq 1$ 和 $s > 3/2 + \varepsilon$；
- $t \leq 1$ 和 $s > d/2 + \varepsilon$。

此外，

$$\int_G |K_{F(t\Delta)}(x,y) - K_{F(t\Delta)}(x,z)| \, \mathrm{d}x \lesssim_s t^{-1/2} \varrho(y,z) \|F\|_{L^2_s}$$

对于所有满足上述条件且满足 $\varepsilon = 0$ 的 y、$z \in G$ 和 s、$t > 0$。

证明。 $t \geq 1$ 的情形已包含在 [55]中。对于 $t \leq 1$，我们选取 $\nu \in (d, Q]$使得 $s > \nu/2 + \varepsilon$；然后证明过程与 [55], 中的完全相同，只需将命题 5.3 用于替代 [55, 命题 5.1]。

我们指出，由 [55, 引理 5.2] 给出的 $f(\lambda) = F$的频率分解所产生的函数 f_ℓ (λ^2) 属于施瓦茨类：事实上，从 [31, 引理 (1.3)] 的原始证明中可以看出，对于适当的截断函数$\chi_\ell \in C_c^\infty(\mathbb{R})$， $f_\ell = \chi_\ell f$，而且 f 是解析的，因为 f 是紧支撑的。因此，这里命题 5.3 中谱乘子的施瓦茨类假设（在 $\mathcal{E}_r$的定义中隐含）并不构成障碍。□

基于上述内容，我们可以完成主要结果的证明。

定理 1.2 的证明。证明过程与 [55, 定理 1.1], 的证明完全相同，只需用命题 5.4 代替 [55, 命题 5.3 和 5.5], ，并依赖 [33, 55]中发展起来的 Calder´ón–Zygmund 理论。□

6. Appendix: Boundary conditions and finite propagation speed

本节回顾光滑流形上散度形式的光滑二阶微分算子的自伴扩张相关的一些基本术语和结果，这些内容将在全文中使用。虽然我们的主要应用是作用于标量函数的二阶算子，但其散度形式的表达自然会引出对一阶算子的考察，例如作用于向量值函数或更一般的向量丛截面上的梯度和散度。因此，我们认为，直接在向量丛截面空间之间的算子这一框架下开展讨论更为自然。

我们将看到，这使我们能够以统一且相对简单的方式讨论若干关于自伴性和定义域的结果，并基于 [57] 的一阶方法，给出狄利克雷或诺伊曼条件下有限传播速度性质的一般推导。

我们介绍 [12], 中的一些框架和记号，更多细节可参见该文。设 M 是一个配备光滑测度的光滑流形（无边界）。取两个光滑向量丛 $\mathscr{E}$、$\mathscr{F}$，它们定义在 M 上并配备纤维内积。我们使用诸如 $C^\infty(\mathscr{E})$、 $C_c^\infty(\mathscr{E})$、 $L^2(\mathscr{E})$ 这样的记号，分别表示 $\mathscr{E}$ 的光滑截面、光滑紧支撑截面和平方可积截面空间。设 $\nabla\colon C^\infty(\mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{F})$ 为一阶微分算子，且 $\nabla^+\colon C^\infty(\mathscr{F}) \to C^\infty(\mathscr{E})$ 为其形式伴随算子。照例，我们可以将 ∇ 和 ∇^+ 扩张到分布空间上。

我们为 ∇ 上的 $L^2(\mathscr{E})$ 定义最大定义域和最小定义域:

$$\mathfrak{D}_{\max}(\nabla) = \{f \in L^2(\mathscr{E}) : \nabla f \in L^2(\mathscr{F})\}, \qquad \mathfrak{D}_{\min}(\nabla) = \overline{C_c^\infty(\mathscr{E})}^{\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)}, \tag{6.1}$$

其中， $\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)$ 配备了 ∇ 的图范数。通过标准的磨光技术（参见例如 [12, Propositions 5.5 and 6.1]），可以看出,

$$\mathfrak{D}_{\min}(\nabla) = \overline{\mathfrak{D}_{\max,c}(\nabla)}^{\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)}, \tag{6.2}$$

其中 $\mathfrak{D}_{\max,c}(\nabla)$ 是 $\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)$ 中紧支集元素的集合。对形式伴随算子 ∇^+ 也有类似的考虑。此外，形式伴随算子与希尔伯特空间伴随之间的关系如下:

$$(\nabla|_{\mathfrak{D}_{\min}(\nabla)})^* = \nabla^+|_{\mathfrak{D}_{\max}(\nabla^+)} \qquad \text{and} \qquad (\nabla|_{\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)})^* = \nabla^+|_{\mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+)}. \tag{6.3}$$

我们关注与 ∇相关联的二阶散度型算子 $\nabla^+\nabla$。我们将 $\nabla^+\nabla$ 的狄利克雷定义域和诺伊曼定义域定义为

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\mathrm{Dir}}(\nabla^+\nabla) &= \{f \in \mathfrak{D}_{\min}(\nabla) : \nabla f \in \mathfrak{D}_{\max}(\nabla^+)\}, \\ \mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(\nabla^+\nabla) &= \{f \in \mathfrak{D}_{\max}(\nabla) : \nabla f \in \mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+)\}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

根据 (6.3) 和 [73, 定理 X.25], , $\nabla^+\nabla|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Dir}}(\nabla^+\nabla)}$ 和 $\nabla^+\nabla|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(\nabla^+\nabla)}$都是 $L^2(\mathscr{E})$ 上的非负自伴算子。由于 $(\nabla^+)^+ = \nabla$，类似的考虑也适用于算子 $\nabla\nabla^+$。

注 6.1。(6.4) 中的狄利克雷定义域与 $\nabla^+\nabla|_{C_c^\infty(\mathscr{E})}$ 的弗里德里希斯扩张的定义域相同（参见 [73, 定理 X.23 和 X.25]）。当然，当 $\nabla^+\nabla|_{C_c^\infty(\mathscr{E})}$ 本质自伴时，狄利克雷定义域与诺伊曼定义域相同；不过，我们也关注本质自伴性可能不成立的情形。

与 ∇ 相关的控制距离 ϱ_∇ 可定义为（参见 [12, 第 175] 页）

$$\varrho_\nabla(x,y) = \inf\left\{\int_0^1 P_\nabla^*(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t : \gamma \in \mathrm{AC}([0,1];M),\ \gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y\right\}$$

对所有 x、$y \in M$，其中我们用 $\mathrm{AC}([0,1];M)$ 表示 M 中定义域为 $[0,1]$, 的绝对连续曲线集合，并用 P_Δ 表示与 ∇ 相关的 T^*M 上的纤维半范数，即，

$$P_\nabla(\xi) = |\sigma_1(\nabla)(\xi)|_{\mathrm{op}}, \qquad \xi \in T^*M,$$

其中 $\sigma_1(\nabla) \in C^\infty(\mathrm{Hom}(T^*M, \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})))$ 是 ∇ 的符号，而 P_∇^* 表示 TM 上与 P_∇ 对偶的扩展纤维范数（详情参见 [12, 第 153] 页）。

注 6.2. 如 [12, 第 8.5], 节所述，对于 ∇ 的适当选择，控制距离ϱ_∇ 的定义包括 M 上的黎曼距离和次黎曼距离。特别地，假设丛 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 是秩分别为 1 和 r 的平凡丛，而 ∇ 具有如下形式

$$\nabla = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$$

设 M 上有一个由 X_1、.....、X_r 构成的线性无关的光滑实向量场系。如果 M 的维数为 $r =$，且 g 是 M 上的黎曼度量张量，使得 X_1、.....、X_r 构成一个正交归一标架，那么对于所有 $v \in TM$，$P_\nabla^*(v) = \sqrt{g(v,v)}$，而 ϱ_∇ 是由 g 在 M 上诱导的黎曼距离。更一般地，如果 M 的维数为 $r \leq$，且向量场 X_1、.....、X_r 是括号生成的，那么 ϱ_∇ 就是与该向量场系相关的 Carnot–Carath´eodory 距离（另见 [62, 82]）。在这些情形下，控制距离 ϱ_∇ 在 M 上诱导出流形拓扑（关于这一点，另见 [12,命题 4.23]）。

我们称一族作用于 $L^2(\mathscr{E})$ 上的有界算子 $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 相对于 ϱ_∇ 具有有限传播速度，如果

$$\operatorname{supp} W_t f \subseteq \{x \in M : \varrho_\nabla(x, \operatorname{supp} f) \leq |t|\} \qquad \forall f \in L^2(\mathscr{E}),\ t \in \mathbb{R}. \tag{6.5}$$

我们尤其关注 $W_t = \cos(t\sqrt{\nabla^+\nabla})$ 的情形，它对应于与 $\nabla^+\nabla$ 相关的波传播算子；在此情形下，当（6.5）成立时，我们还称 $\nabla^+\nabla$ 满足有限传播速度性质。

当然，只有在为 $\nabla^+\nabla$ 选定自伴扩张之后，基于 $L^2(\mathscr{E})$ 上的谱演算来定义余弦族 $\{\cos(t\sqrt{\nabla^+\nabla})\}_{t\in\mathbb{R}}$ 才有意义；而且，有限传播速度性质是否成立确实可能取决于这一选择。例如，取带有勒贝格测度的区间 $M = (0,1)$ 上的 $\nabla = -\partial_x$，并考虑具有周期边界条件的 $\nabla^+\nabla = -\partial_x^2$，就很容易看出这一点：此时有限传播速度不成立，因为粗略地说，由于周期性，波一旦越过区间的一个端点，就会立即从另一个端点重新进入，实际上以无限速度传播（参见 [73, 第 X.1 节，例 1]）。

或许是为了避免这类问题，文献中关于有限传播速度的若干结果，要么是在底层（次）黎曼流形满足某种完备性假设的条件下给出的（例如参见 [58] ，或 [76, 第 4-8] 节中的例子），这实际上阻止了具有紧支撑初始数据的解在有限时间内到达边界；要么只在依赖于初始数据的有限时间区间内得到证明（例如参见 [12, 第 7] 节）。

相比之下， [57] 的一般方法可直接用于推导任意二阶散度型算子具有有限传播速度；通过适当选择自伴扩张，无需对流形作任何完备性假设。（事实上， [57] 的结果远远超出了我们的设定，因为它们既不要求自伴性或光滑系数，也适用于 L^p 上的算子$p \neq 2$。） [57, 第 5] 节所举的例子仅考虑椭圆微分算子；然而，正如下一个命题所示，椭圆性可以由对控制距离较弱的拓扑假设取代，而这一假设适用范围更广，包括次椭圆算子（见注 6.2）。

命题 6.3。假设与 ∇ 相关的控制距离在 M上诱导出流形拓扑。考虑带有诺伊曼定义域或狄利克雷定义域的 $\nabla^+\nabla$ 。那么， $\{\cos(t\sqrt{\nabla^+\nabla})\}_{t\in\mathbb{R}}$ 相对于该控制距离具有有限传播速度。

证明。我们将从 [57,定理 3.1]推导出有限传播速度性质。为此，粗略地说，我们将把二阶算子 $\nabla^+\nabla$ 写成一阶微分算子的平方。

更准确地说，我们通过以下方式定义一个“矩阵算子”$\mathcal{D}$： $C^\infty(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F}) \to C^\infty(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$。

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla^+ \\ \nabla & 0 \end{pmatrix}.$$

显然， $\mathcal{D}$ 是形式自伴的，即$\mathcal{D}^+ =\mathcal{D}$，而且

$$\mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} \nabla^+\nabla & 0 \\ 0 & \nabla\nabla^+ \end{pmatrix}.$$

我们现在构造一个适当的 $\mathcal{D}$ 的自伴扩张。令

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D}) = \mathfrak{D}_{\max}(\nabla) \oplus \mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+). \tag{6.6}$$

由（6.3）式可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D})})^* = \begin{pmatrix} 0 & \nabla^+|_{\mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+)} \\ \nabla_{\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)} & 0 \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla^+|_{\mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+)} \\ \nabla_{\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D})}.\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D})}$ 是自伴的。因此，平方算子 $\mathcal{D}^2|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D}^2)}$ 同样是自伴的（参见 [73, 定理 X.25]） ，其中

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D}^2) \\ &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D}) : \mathcal{D}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D}) \right\} \\ &= \{ f \in \mathfrak{D}_{\max}(\nabla) : \nabla f \in \mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+) \} \oplus \{ g \in \mathfrak{D}_{\min}(\nabla^+) : \nabla^+ g \in \mathfrak{D}_{\max}(\nabla) \} \\ &= \mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(\nabla^+\nabla) \oplus \mathfrak{D}_{\mathrm{Dir}}(\nabla\nabla^+),\end{aligned}$$

由 (6.6)、(6.4) 及$\mathcal{D}$的定义可得。因此，

$$\mathcal{D}^2|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\mathcal{D}^2)} = \begin{pmatrix} \nabla^+\nabla|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(\nabla^+\nabla)} & 0 \\ 0 & \nabla\nabla^+|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Dir}}(\nabla\nabla^+)} \end{pmatrix},$$

从而

$$\cos\left(t\not{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})}\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(t\sqrt{\nabla^{+}\nabla|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(\nabla^{+}\nabla)}}\right) & 0\\ 0 & \cos\left(t\sqrt{\nabla\nabla^{+}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Dir}}(\nabla\nabla^{+})}}\right)\end{pmatrix},\tag{6.7}$$

因为 $\cos(t\cdot)$ 是一个偶解析函数。

我们希望将 [57, 定理 3.1] 应用于算子 $\not{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})}$ 在 $L^2(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ 上的情形，其中底层流形 M 配备了距离 ϱ_{∇}。由于 $\not{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})}$是自伴的，因此它生成了 $L^2(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ 上由酉算子构成的 C_0 群 $(e^{it\not{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})}})_{t\in\mathbb{R}}$，从而满足该定理的第一个假设。

现在我们来验证 [57, Theorem 3.1] 的第二个假设。令 $\mathrm{Lip}(M)$ 表示有界实值 ϱ_{∇}-Lipschitz 函数空间；换言之，当且仅当 $\eta\in L^{\infty}(M;\mathbb{R})$ 且 $\eta\in\mathrm{Lip}(M)$。

$$\|\eta\|_{\mathrm{Lip}}:=\sup_{x,y\in M,\,x\neq y}\frac{|\eta(x)-\eta(y)|}{\varrho_{\nabla}(x,y)}<\infty.$$

由于 ϱ_{∇} 是簇态的，即 ϱ_{∇} 诱导流形 M 上的拓扑，由 [12, 命题 5.2 和 5.4] 可得等价刻画

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(M)&=\{\eta\in L^{\infty}(M;\mathbb{R}):\nabla^{\sigma}\eta\in L^{\infty}(\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F}))\},\\ \|\eta\|_{\mathrm{Lip}}&=\|\nabla^{\sigma}\eta\|_{L^{\infty}}\qquad\forall\eta\in\mathrm{Lip}(M),\end{aligned}\tag{6.8}$$

其中，∇^{σ} 表示“符号算子”（参见 [12, 第 2 节2]），即在 ∇的 Leibniz法则中出现的一阶微分算子：

$$\nabla(\eta f)=(\nabla^{\sigma}\eta)f+\eta\nabla f,\tag{6.9}$$

其中，η 是一个标量值函数，f 是 $\mathscr{E}$的一个截面，具有适当的可微性和可积性 [12, 命题 3.7]。根据 (6.1)、(6.8) 和 (6.9)，我们可以推导出

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(M)\cdot\mathfrak{D}_{\max}(\nabla)&\subseteq\mathfrak{D}_{\max}(\nabla),\\ \mathrm{Lip}(M)\cdot\mathfrak{D}_{\max,c}(\nabla)&\subseteq\mathfrak{D}_{\max,c}(\nabla),\end{aligned}$$

因此，由（6.2）可得

$$\mathrm{Lip}(M)\cdot\mathfrak{D}_{\min}(\nabla)\subseteq\mathfrak{D}_{\min}(\nabla).$$

由于与三个算子 ∇、∇^{+}、$\not{D}$ 相关联的控制距离相同（见 [12, 第 181] 页），相应的 Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}(M)$ 也相同，因此对 ∇^{+} 也有类似的包含关系。由此，根据 (6.6) 可得

$$\mathrm{Lip}(M)\cdot\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})\subseteq\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D}).$$

特别地，对于所有 $\eta\in\mathrm{Lip}(M)$ 和 $f\in\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})$，我们有 $\eta f\in\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})$；此外，由 (6.9) 和 (6.8) 可得，

$$\|[\eta,\not{D}]f\|_{L^2}=\|(\not{D}^{\sigma}\eta)f\|_{L^2}\leq\|\not{D}^{\sigma}\eta\|_{L^{\infty}}\|f\|_{L^2}=\|\eta\|_{\mathrm{Lip}}\|f\|_{L^2},$$

最后还有 $[\eta,[\eta,\not{D}]]=[\eta,\not{D}^{\sigma}\eta]=0$，因为标量乘法算子 η 与矩阵乘法算子$\not{D}^{\sigma}\eta$可交换。

因此，我们可以将 [57, 定理 3.1] 应用于定义域为 $\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})$ 的 $\not{D}$，并由此推出单参数群 $\{e^{it\not{D}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{mix}}(\not{D})}}\}_{t\in\mathbb{R}}$具有有限传播速度。由于$e^{it\not{D}}+e^{-it\not{D}}=2\cos(t\not{D})$，根据 (6.7)，我们得到余弦族 $\left\{\cos\left(t\sqrt{\nabla^{+}\nabla|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Neu}}(\nabla^{+}\nabla)}}\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$和 $\left\{\cos\left(t\sqrt{\nabla\nabla^{+}|_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Dir}}(\nabla^{+}\nabla)}}\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$具有有限传播速度。这就得到了定义域为诺伊曼定义域的 $\nabla^{+}\nabla$ 所需的结果；在上述论证中交换∇ 和 ∇^{+} 的作用，我们也可以得到定义域为狄利克雷定义域的 $\nabla^{+}\nabla$ 的结果。□

References

[1] A. Achour 和 K. Trim`eche, 《与 $(0,\infty)$ 上的奇异微分算子相关的 Littlewood–Paley g-函数》, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 33 (1983), 203–226。[2] G. Alexopoulos, 《多项式增长李群上的谱乘子》, *Proc. Amer. Math.* ( ), –。

Soc. 120 1994 973 979

[3] W.R. Bloom 和 H. Heyer, *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, De Gruyter 数学研究丛书 20, Walter de Gruyter, 柏林, 1995。[4] M. Calzi, 《二步分层群上的谱乘子, I》, *J. Four. Anal. Appl.* 26 (2020), art.no. 35。[5] J.W. Cannon、W.J. Floyd、R. Kenyon 和 W.R. Parry, 《双曲几何》, 载于: *Flavors of Geometry* 31, 1997, , MSRI

出版物, 第 Cambridge University Press 卷, 剑桥, 第 59–115 页。[6] V. Casarino、P. Ciatti 和 A. Martini, 《超球格鲁申算子的加权谱簇界与尖锐乘子定理》, *Int. Math. Res. Not. (IMRN)* 2022 (2022), 9202–9274。[7] H. Chebli, 《与]0 上 Sturm–Liouville 算子的谱分解相关的 Paley–Wiener 定理》, $\infty[$, *J. Funct. Anal.* 17 (1974), 447–461。[8] M. Christ, 《幂零群上谱乘子的 L^p *Trans. Amer. Math. Soc.* 界》, ( ),

328 1991 73 81

–。[9] M. Christ 和 D. M L^p *Geom. Funct.* uller, *Anal.* 6 1996 860 876

《关于可解李群上的谱乘子》, ( ), –。[10] L. Colzani、A. Crespi、G. Travaglini 和 M. Vignati, 《Fourier-Bessel 展开的等收敛定理及其在欧几里得与非欧几里得空间中径向函数调和分析上的应用》, *Trans. Amer. Math. Soc.* 338 (1993), 43–55。[11] M.G. Cowling、S. Giulini、A. Hulanicki 和 G. Mauceri, 《某些指数增长群上一个特定拉普拉斯算子的谱乘子》, *Studia Math.* 111 (1994), 103–121。[12] M.G. Cowling 和 A. Martini, 《次芬斯勒几何与有限传播速度》, 载于: *Trends in Harmonic Analysis* 2013, 147 205 , 施普林

格, 米兰, –。[13] M.G. Cowling 和 A. Sikora, 《SU(2) 上次拉普拉斯算子的谱乘子定理》, *Math. Z.* 238 (2001), 1–36。[14] G.M. Dall'Ara 和 A. Martini, 《平面上格鲁申算子的最优乘子定理, I》, *Rev. Mat. Iberoam.* (在线发表于 2022 年), `doi:10.4171/RMI/1374`。[15] E.B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*, 《剑桥数学丛书》92。剑桥大学出版社, 剑桥, 1989。[16] L. De Michele 和 G. Mauceri, 《分层群上的 H^p *Ann. Mat. Pura Appl.* 乘子》, *(4)* 148 1987 353 366

( ), –。[17] 数学函数数字图书馆, `https://dlmf.nist.gov`。[18] X.T. Duong、E.M. Ouhabaz 和 A. Sikora, 《Plancherel 型估计与尖锐谱乘子》, *J. Funct. Anal.* 196 (2002), 443–485。[19] A.F.M ter Elst 和 D.W. Robinson。《正 Rockland 算子的谱估计》, 载于: *Algebraic groups and Lie groups*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser. 第 9 卷, 第 195–213 页。剑桥大学出版社, 剑桥, 1997。[20] G.B. Folland 和 E.M. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*, 《数学札记丛书》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1982。[21] G. Garrig´os 和 A. Seeger, 《Hankel 乘子的刻画》, *Math. Ann.* 342 (2008), 31–68。[22] D. Gilbarg 和 N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 1998 年版重印本, 《数学经典丛书》, 施普林格出版社, 柏林, 2001。[23] M. Gnewuch, 《某些非交换算子和的可微 L^p-函数演算》, *Colloq. Math.* 105 (2006), 105–125。[24] J. Gosselin 和 K. Stempak, 《Fourier–Bessel 乘子的弱型估计》, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 655–662。[25] D.L. Guy, 《Hankel 乘子变换与加权 p *Trans. Amer. Math.* -范数》, *Soc.* 95 1960 137 189

( ), –。[26] D.T. Haimo, 《与 Hankel 卷积相关的积分方程》, *Trans. Amer. Math.* ( ), –。

Soc 116 1965 330 375

[27] A. Hassell 和 A. Sikora, 《一维 Riesz 变换》, *Indiana Univ. Math. J.* 58 (2009), 823–852。[28] W. Hebisch, 《广义海森堡群上的乘子定理》, *Colloq. Math.* 65 (1993), 231–239。

[29] W. Hebisch，由拉普拉斯算子生成的
L^1 AN *Proc. Amer. Math.* ( )子代数，
Soc. 1993 547 549
( )，–。[30] W. Hebisch， *Functional calculus for slowly decaying kernels*，预印本（1995）。可访问 `http://www.math.uni.wroc.pl/~hebisch/`。[31] W. Hebisch，
Analysis of Laplacians on solvable Lie groups，《李群与偏微分方程分析》ICMS 教学会议笔记（爱丁堡，1999年4月）。可访问 `http://www.math.uni.wroc.pl/~hebisch/`。[32] W. Hebisch、J. Ludwig 和 D. M¨uller，指数可解群上的全纯 L^p型次拉普拉斯算子， *J. London Math. Soc. (2)* 72 (2005)，364–390。[33] W. Hebisch 和 T. Steger，指数增长群上的乘子与奇异积分，*Math. Z.* 245 (2003)，37–61。[34] W. Hebisch 和 J. Zienkiewicz，广义海森堡群上的乘子定理 II，*Colloq. Math.* 69 (1995)，29–36。[35] B. Helffer 和 J. Nourrigat，幂零分次李群上左不变齐´次`拟椭圆算子的特征，( )，–[36]

H. Heyer 和 S. Kawakami，半直积超群表示的不可约性定理， *J. Lie Theory* 24 (2014)，159–178。[37] I.I. Hirschman，小，变差递减汉克尔变换， *J. Anal. Math.* 8 (1960/61)，307–336。[38] L. H¨ ormander， L^p 空间上平移不变算子的估计， *Acta Math.* 104 (1960)，93–140。[39] A. Hulanicki，幂零李群上 Rockland 算子的函数演算，
Studia
Math. 78 1984 253 266 ( )，–。

[40] A. Hulanicki 和 J.W. Jenkins，幂零流形上的几乎处处可和性，
Trans. ( )，–。
Amer. Math. Soc. 278 1983 703 715
[41] R. Jewett，具有抽象测度卷积的空间， *Adv. Math.* 18 (1975)，1–101。[42] A. Kaplan，关于海森堡型群的几何， *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983)，35–42。[43] C.E. Kenig、R.J. Stanton 和 P.A. Tomas，特征函数展开的散度，
J. Funct. ( )，–。
Anal. 46 1982 28 44
[44] J.F.C. Kingman，具有球面对称性的随机游走， *Acta Math.* 109 (1963)，11–53。[45] A. Klein 和 B. Russo，Weyl 算子与海森堡群的尖锐不等式，
Math. ( )，–。
Ann. 235 1978 175 194
[46] P. Macaulay-Owen，汉克尔变换的帕塞瓦尔定理，
Proc. London Math. Soc. (3) ( )，–。
45 1939 458 474
[47] A. Martini， *Algebras of Differential Operators on Lie Groups and Spectral Multipliers*，博士论文，Scuola Normale Superiore，2010。 `arXiv:1007.1119`。[48] A. Martini，李群上微分算子交换代数的谱理论，*J. Funct. Anal.* 260 (2011)，2767–2814。[49] A. Martini，多项式增长李群上的联合谱乘子分析，
Ann. ( )，–。
Inst. Fourier (Grenoble) 62 2012 1215 1263
[50] A. Martini，海森堡–Reiter 群及相关群上的谱乘子，
Ann. Mat. Pura ( )，–。
Appl. 194 2015 1135 1155
[51] A. Martini，球面上 Kohn 拉普拉斯算子的联合函数演算与尖锐乘子定理， *Math. Z.* 286 (2017)，1539–1574。[52] A. Martini 和 D. M¨uller，新型二步分层群上的欧氏型谱乘子定理，
Proc. London Math. Soc. (3) 109 (2014)，1229–1263。[53] A. Martini 和 D. M¨uller，二步群上的谱乘子：拓扑维数与齐次维数， *Geom. Funct. Anal.* 26 (2016)，680–702。[54] A. Martini、D. M¨uller 和 S. Nicolussi Golo，次拉普拉斯算子的谱乘子与波动方程：欧氏型较低正则性界， *J. Eur. Math. Soc.* 25 (2023年)，785–843。[55] A. Martini、A. Ottazzi 和 M. Vallarino，可解分层群上次拉普拉斯算子的谱乘子， *J. Anal. Math.* 136 (2018)，357–397。[56] G. Mauceri 和 S. Meda，分层群上的向量值乘子，
Rev. Mat. Iberoam. ( )，–。
6 1990 141 154
[57] A. McIntosh 和 A.J. Morris，一阶系统的有限传播速度与双曲方程的惠更斯原理，
Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013)，3515–3527。[58] R.B. Melrose，正次椭圆二阶微分算子的波群传播，载于： *Hyperbolic equations and related topics (Katata/Kyoto, 1984)*，《数学调查与专著》，学术出版社，波士顿，MA，1986年，第181–192页。

[59] G. M ´ ´ 2 *Duke Math. J.* 47 1980 195 221
etivier，秩为 的幂零群上的解析拟椭圆性，( )，–。[60] S.G. Mihlin，关于傅里叶积分的乘子，
Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 109 (1956)，701–703。[61] A. Miyachi，关于
L^p H^p *J. Fac. Sci. Univ.* 和 中波动
Tokyo Sect. IA Math. 27 1980 331 354
方程的某些估计，( )，–。[62] R. Montgomery，
A Tour of Sub-Riemannian Geometries Their Geodesics and Applica-，[63] ，
tions
《数学调查与专著》第91卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2002年。
¨ *Proceedings of the* D. M[64]
International Congress of Mathematicians Vol. II (Berlin, 1998) 1998，
uller，李群上的函数演算与波传播，载于：，，《文献数学》增刊 II，第679–689页。¨D. M
Israel J. Math. 141 uller 和 A. Seeger，一类二步幂零李群上的奇异球面极大算子，[65] (2004)，315–
340。¨D. M L^p uller 和 A. Seeger，Heisenberg 型群上波动方程的尖锐 *Anal. PDE* 8 界，[66] (2015)，
1051–1100。
¨ *J.* D. M[67]
Math. Pures Appl. 73 1994 413 440
uller 和 E.M. Stein，关于海森堡群及相关群上的谱乘子，( )，–。
¨ $ax + b$ *Studia* D. M[68]
Math. 179 2007 117 118
uller 和 C. Thiele，群上的波动方程与乘子估计，( )，–。¨D. M*J. Four. Anal. Appl.* 16 uller 和 M.
Vallarino，Damek–Ricci 空间上的波动方程与乘子估计，[69] (2010)，204–232。´S. Mustapha，某类非
幺模群的 Mikhlin 乘子， *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，48（1998），957–966。[70] L. Pavel，超群
L_p空间的乘子， *Rocky Mountain J. Math.* 37 (2007)，987–1000。[71] J.C. Peral，波动方程的 L^p 估计，
J. Funct. Anal. 36 (1980)，114–145。[72] M. Reed 和 B. Simon，
Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis，学术出版社，纽约–伦敦，1972年。
[73] M. Reed 和 B. Simon， *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis*，
Self-Adjointness 1975 ，学术出
版社，纽约–伦敦，。[74] A. Sikora，与齐性群上的次拉普拉斯算子相关的乘子，( )，–。
´ ` *C. R.* A.
Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315 1992 417 419
Sikora，齐性群上“拟齐次”算子的谱乘子的[75] 范数， $L^2 \to L^\infty$ (1999)，3743–3755。
Trans. Amer. Math. Soc. 351 A. Sikora，Riesz变换、高斯界与波动方程方法，[76] ( )，–。
Math. Z. K.
247 2004 643 662
Stempak，关于 Zemanian空间的注记，[77] (1997)，33–40。 *Extracta Math.* 12 E.M. Stein，线性算子
插值，[78] (1956)，482–492。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 83 M.E. Taylor，[79] ，讲义。可访问
Bessel Functions and Hankel Transforms。
`https://mtaylor.web.unc.edu/notes/special-functions/`M. Vallarino，Damek–Ricci 空间上的谱乘
子，[80] ，17（2007），163–189。 *J. Lie Theory*M. Vallarino，[81] 空间与 H^1 群上的 BMO， $ax + b$
(2009)，277–295。 *Collect. Math.* 60 N.T. Varopoulos、L. Saloff-Coste、T. Coulhon，[82] ，《剑桥数
学论丛》第100卷，剑桥大学出版社，剑桥，1992年。 *Analysis and Geometry on Groups*G.N.
Watson，[83] ，剑桥大学出版社，剑桥，1922年。 *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*B.
Willson，可和超群及相关代数的构形与不变网，[84] (2014)，5087–5112。
Trans. Amer. Math. Soc. 366 H. Zeuner，一维超群，[85] (1989)，1–18。（A. Martini）
Adv. Math. 76 ，

Dipartimento di Scienze Matematiche “G.L. Lagrange”
Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, Italy
Email address: `alessio.martini@polito.it`

(P. Plewa) Dipartimento di Scienze Matematiche “G.L. Lagrange”, Politecnico di Torino, and Department of Pure and Applied Mathematics, Wrocław University of Science and Technology
Email address: `pawel.plewa@polito.it`