赋值环上的幂级数环的平坦维数

亚当·琼斯

2023年5月8日

arXiv:2305.03483v1 [math.AC] 5 May 2023

摘要

我们研究赋值环 R 上的幂级数环 $R[[X]]$ ，其中该赋值环的秩为 1，且其值群是适当的稠密值群。我们为 $R[[X]]$给出一个反例，反驳希尔伯特零化子定理：也就是说，存在一个 $R[[X]]$-模 C ，它在 R 上是平坦的，而在 $R[[X]]$上的平坦维数至少为 2，这与先前发表的结果相矛盾。我们构造中的关键在于考察 $R[[X]]$的赋值理论。我们还利用这一理论给出一个新证明，说明 $R[[X]]$ 不是相干环；这一事实对于我们构造模 C至关重要。

目录

1 引言 1 2 幂级数环的赋值理论 4 3 $R[[X]]$ 7的不相干性 4 $R[[X]]$ 8的局部化 5 $R[[X]]$-模的平坦维数 10

1 引言

理解环 R 上单变量幂级数环 $R[[X]]$ 的代数性质和同调性质，是一个困难且仍在研究中的问题，即使假设 R 是交换的也是如此。当 R 是诺特环时， $R[[X]]$ 是一个伴随分次环为 $R[Y]$ 的诺特环，因此其性质易于处理；但一般而言，几乎无法给出具体结论。即使在最理想的非诺特情形—— R 是赋值环——已知 $R[[X]]$ 甚至很少满足相干性这一较弱的性质。

关于同调性质，我们希望将多项式环 $R[X]$ 的一些基本结果推广开来。 [2],[4], [5], 等文献探讨的一项特别值得期待的性质是希尔伯特零化子定理。为提供一些背景，考虑以下众所周知的定义 [6, 定义 4.1.1、引理 4.1.6、引理 4.1.8]。

定义 1.1. 设 R 是一个环，我们称左 R-模 M 的投射维数为n （$\mathrm{proj.dim}_R(M) = n$），如果它满足以下两个等价定义之一：

- 存在一个投射分解 $0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$，且 M 的任意投射分解长度都至少为 n。
- $Ext_R^{n+1}(M, N) = 0$对于所有 R-模 N，以及 $Ext_R^n(M, N) \neq 0$对于某个 R-模N。

类似地，如果 M 满足以下任一等价条件，我们就称其具有平坦维数 n （$\mathrm{f.dim}_R(M) = n$）：

- 存在一个平坦分解 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$，并且对于 M 的任意平坦分解，其长度至少为 n。
- $Tor_{n+1}^R(M, N) = 0$对所有 R-模 N 均成立，并且 $Tor_n^R(M, N) \neq 0$对某个 R-模N成立。

如果不存在这样的 n ，则 $\mathrm{proj.dim}_R(M) = \infty$ ，且 $\mathrm{f.dim}_R(M) = \infty$。 R 的（左）整体维数 $\mathrm{gl.dim}(R) := \sup\{\mathrm{proj.dim}_R(M) : M$ 一个左 R-模$\}$，以及 R 的弱整体维数 $\mathrm{w.dim}(R) := \sup\{\mathrm{f.dim}_R(M) : M$ 一个左 R-模$\}$。

如果环 R 是诺特环，那么 $\mathrm{gl.dim}(R) = \mathrm{w.dim}(R)$ [6, 命题 4.1.5]，因此，对于非诺特环，这些概念才需要分别探讨。希尔伯特零化子定理指出，对于任意环 R，$\mathrm{gl.dim}(R[X]) = \mathrm{gl.dim}(R) + 1$ ，且 $\mathrm{w.dim}(R[X]) = \mathrm{w.dim}(R) + 1$，我们希望这一结果对幂级数环 $R[[X]]$ 也成立。当 R 是诺特环时， $R[[X]]$ 也是诺特环，并且确实有 $\mathrm{gl.dim}(R[[X]]) = \mathrm{gl.dim}(R) + 1$ [5, 定理 2]。我们希望在 R 是非诺特环时，也能为 $R[[X]]$ 的弱维数证明类似的结果。

已在 [4, 引理 1] 中证明，当 $R[[X]]$ 是一个相干环（参见下文定义 1.3）时，$\mathrm{w.dim}(R[[X]]) = \mathrm{w.dim}(R) + 1$，但遗憾的是，这种情况非常罕见。然而，在 [2, 推论 4.4] 中，Bouchiba 声称，只要系数环 R 是凝聚的，同样的结果确实成立。事实上，还建立了一个更强版本的零化子结论：如果 M 是一个 $R[[X]]$-模，那么 $\mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(M) \leq 1 + \mathrm{f.dim}_R(M)$ [2, 推论 3.2]。

然而，遗憾的是，这个论证存在一个小错误，具体来说，错误出在 [2, 定理 3.1]，的证明中。该定理声称，对于任意 $R[[X]]$-模 M，都存在一个 $R[[X]]$-模的正合列 $0 \to R[[X]] \otimes_R M \to R[[X]] \otimes_R M \to M \to 0$；这一点是通过将正合列 $0 \to R[[X]] \otimes_R R[[X]] \to R[[X]] \otimes_R R[[X]] \to R[[X]] \to 0$ 与 M 在 $R[[X]]$上张量化得到的。问题在于，后一个正合列只是右 $R[[X]]$-模的正合列，因此在右边与 M 张量化会破坏 $R[[X]]$-模结构，所以前一个列只是R-模的正合列，而不是 $R[[X]]$-模的正合列。

此外，在本文中我们现在可以确认， [2, 推论 3.2]实际上是错误的；在某些 R 为相干整环的情形下，我们可以找到这样的 $R[[X]]$-模 M，使得 $\mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(M) > \mathrm{f.dim}_R(M) + 1$，这由我们的主要结果概括如下：

定理 A. 设 R 是一个秩 1 赋值环，其值群是 $\mathbb{R}$ 的一个真稠密子群。则存在一个 $R[[X]]$-模 C ，使得 $\mathrm{f.dim}_R(C) = 0$ 且 $\mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(C) \geq 2$。

在开始概述 C的构造之前，我们先回顾一些重要的定义和结果。

定义 1.2. 设 R 为任意环， Γ 为全序阿贝尔群。 R上的一个滤子是映射 $w\colon R\to\Gamma\cup\{\infty\}$，满足对所有 $r,s\in R$:

- $w(r+s)\geq$ 分钟$\{w(r)\ w(s)\}$.
- $w(rs)\geq w(r)+w(s)$.
- $w(1)=0$ 和 $w(0)=\infty$

此外，如果 w 满足 $w(r)=\infty$，则称 w 是分离的；如果 w 是分离的，且对于所有 r、$s\in R$，都有 $w(rs)=w(r)+w(s)$，则称 w 是赋值。

引理 1.2. 如果 R 是交换环， U 是 R 的乘法闭子集，那么局部化 R_U 是一个平坦的 R-模。此外，如果 R 带有赋值 w，那么 R 是整环，并且 w 唯一地扩张为 R_U 上的赋值。

证明。众所周知， R_U 是 R 上的平坦扩张（例如参见 $[6,$ 定理 3.2.2$]$）。若 $w:R\to\Gamma\cup\{\infty\}$是 R上的赋值，且对某个 r有 $rs=0$， $s\in R$，那么 $\infty=w(rs)=w(r)+w(s)$，因此 $w(r)=\infty$ 或 $w(s)=\infty$，即 $r=0$ 或 $s=0$，且 R 是一个整环。

此外，定义 $w'\colon R_U\to\Gamma\cup\{\infty\},ru^{-1}\mapsto w(r)-w(u)$。这是良定义的，因为若 $ru^{-1}=sv^{-1}$，则 $rv=su$，所以 $w(r)-w(u)=w(s)-w(v)$；并且不难证明它是一个赋值。这个扩张是唯一的，因为若 v 是 R_U上的任意赋值，且对所有 $r\in R$都有 $v(r)=w(r)$，那么对所有 $r\in R$， $u\in U$，都有 $v(ru^{-1})=v(r)-v(u)=w(r)-w(u)=w'(ru^{-1})$。 □

以下结果众所周知。

引理 1.3. 对于任意交换整环 R，以下条件等价。

- 存在一个域 F，满足 $R\subseteq F$，以及一个赋值 $v\colon F\to\Gamma\cup\{\infty\}$，使得 $R=\{x\in F\colon v(r)\geq 0\}$。
- 对于 R 的任意理想 I、J， $I\subseteq J$ 或 $J\subseteq I$。特别地，所有有限生成理想都是主理想。
- 对于所有 $x\in Q(R)$， $x\in R$ 或 $x^{-1}\in R$。

如果 R 满足这些条件中的任意一个，我们就称 R 为赋值环，并称群 $v(F\backslash\{0\})$ 为 R的值群。

众所周知，赋值环 R 的维数为 1，当且仅当其值群 $\mathbb{R}$ 是带有通常序的子集；此时我们称 R 的秩为 1。在这种情况下，值群要么是离散的，要么在 $\mathbb{R}$中稠密。显然，赋值环 R 是诺特环，当且仅当它的秩为 1 且值群是离散的；不过，所有赋值环都满足另一种相关性质：

定义 1.3. 若环 R 满足：对于其任意有限生成单边理想 I， I都是有限表示的，则称其为凝聚环；也就是说，存在一个 R-模的正合列 $R^m\to R^n\to I\to 0$，其中 m、$n\in\mathbb{N}$满足相应条件。

显然，任何诺特环都是凝聚环；又由于赋值环中的所有有限生成理想都是主理想，因此任何赋值环都是凝聚环。我们还知道，若 R 是赋值环，则多项式环 $R[X]$是凝聚的（定理 7.3）。3],但遗憾的是，幂级数环 $R[[X]]$并没有类似的结果。

已在 [4, 定理 1] 中证明，若 R 的秩大于 1，则 $R[[X]]$ 不是凝聚的；并在 [1, 推论第 3] 节中指出，若 R 的秩为 1，且值群在 $\mathbb{R}$中稠密但不等于 $\mathbb{R}$，则 $R[[X]]$ 也不是凝聚的。目前尚不清楚当 R 的值群为 $\mathbb{R}$时， $R[[X]]$ 是否可能是凝聚的。

从现在起，我们假设所有滤子/赋值的取值都在 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 中。特别是，如果 R 是赋值环，我们将假设其秩为 1，并且通常假设其值群是 $\mathbb{R}$ 的真稠密子群。在第 2 节中，我们将探讨一些赋值理论，并证明 R 上的赋值存在一个到幂级数环 $R[[X]]$ 上的典范扩张。在第 3 节中，我们将利用这个赋值给出另一种证明，说明 $R[[X]]$ 不是相干环。

接下来，在第 4 节中，我们将考察 $R[[X]]$的一些性质良好的局部化，然后在第 5 节中运用这些局部化和一些同调代数，构造主定理所需的 $R[[X]]$-模 C；该模的构造将很大程度上依赖于 $R[[X]]$的非凝聚性。事实上，若这样的模 C 不存在，就可以推出 $R[[X]]$ 是凝聚的。

致谢：我非常感谢 Samir Bouchiba，感谢他就其论文 [2]中的论证与我进行了几次极有帮助且富有成效的交流。我还要感谢海尔布隆数学研究所为本研究提供经费并给予支持。

2 幂级数环的赋值理论

在本节中，我们令 R为任意交换环，并令 $v\colon R \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$为一个赋值，使得对所有 $r \in R$，都有 $v(r) \geq 0$ 。我们希望探讨将 v 延拓到幂级数环 $R[[X]]$的不同方法。

对于每个 $\lambda \geq 0$，定义一个映射:

$$v_\lambda : R[[X]] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n \mapsto \inf\{v(r_n) + \lambda n : n \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

引理 2.1. 若 $\lambda > 0$，则对于某个 n，有 $v_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n\right) = v(r_n) + \lambda n$，且这样的 n 只有有限多个。

证明. 取满足 $r_m \neq 0$ 的极小 m，并选取满足 $v(r_m) < (k-m)\lambda$ 的极小 $k > m$，于是对所有 $k' \geq k$，都有 $v(r_m) < (k'-m)\lambda$。

因此，对所有 $k' \geq k$，都有 $v(r_{k'}) + \lambda k' = v(r_{k'}) + \lambda(k'-m) + \lambda m > v(r_m) + \lambda m$，从而可得 $\inf\{v(r_n) + \lambda n : n \in \mathbb{N}\} = \min\{v(r_n) + \lambda n : m \leq n < k\}$。

此外，由于对所有 $k' \geq k$，$v(r'_k) + \lambda k' > v(r_m) + \lambda m \geq \min\{v(r_n) + \lambda n : m \leq n < k\}$，因此下确界只在有限集合 $\{n \in \mathbb{N} : m \leq n < k\}$ 中取到。 □

注意，如果 $\lambda = 0$ 和 v 不是离散的，则该引理不成立。

引理 2.2. 对每个 $\lambda \geq 0$, v_λ ，都是分离环滤过。

证明。我们需要证明，对于所有 $f, g \in R[[X]]$, $v_\lambda(f+g) \geq \min\{v_\lambda(f)\ v_\lambda(g)\}$ 且 $v_\lambda(fg) \geq v_\lambda(f) + v_\lambda(g)$。假设 $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n$ 且 $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n X^n$。那么 $v_\lambda(f+g) = v_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (r_n + s_n)X^n\right) = \inf\{v(r_n + s_n) + \lambda n :\ n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{\min\{v(r_n)\ v(s_n)\} + \lambda n :\ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\min\{v(r_n) + \lambda n, v(s_n) + \lambda n\} :\ n \in \mathbb{N}\}$

$$\geq \min\{\inf\{v(s_n) + \lambda n :\ n \in \mathbb{N}\}, \inf\{v(r_n) + \lambda n :\ n \in \mathbb{N}\}\} = \min\{v_\lambda(f)\ v_\lambda(g)\}.$$

$$\text{Also, } v_\lambda(fg) = v_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i+j=n} r_i s_j\right)X^n\right) = \inf\left\{v\left(\sum_{i+j=n} r_i s_j\right) + \lambda n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\geq \inf\{\min\{v(r_i) + v(s_j) : i + j = n\} + \lambda n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \inf\{\min\{v(r_i) + v(s_j) + \lambda n : i + j = n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\geq \inf\{\min\{v(r_i) + \lambda i + v(s_j) + \lambda j : i, j \in \mathbb{N}\}$$

$$= \inf\{\min\{v(r_i) + \lambda i : i \in \mathbb{N}\} + \inf\{\min\{v(s_j) + \lambda j : j \in \mathbb{N}\} = v_\lambda(f) + v_\lambda(g).$$

此外，对于所有 n, $v_\lambda(f) = \infty$ 当且仅当 $v(r_n) + \lambda n = \infty$；而这当且仅当对于所有 n 和 $f = 0$, $r_n = 0$，并且 $v_\lambda(1) = v(1) = 0$，因此 v_λ 是一个分离滤子。 □

因此，对于每个 λ，令 $F^\lambda_\alpha R[[X]] := \{f \in R[[X]] :\ v_\lambda(f) \geq \alpha\}$，并令 $F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]] := \{f \in R[[X]] :\ v_\lambda(f) > \alpha\}$。那么 $F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]$ 是 $F^\lambda_\alpha R[[X]]$ 的一个加法子群，因此我们可以定义伴随分次环：

$$\mathrm{gr}_\lambda\ R[[X]] := \bigoplus_{\alpha\geq 0} \frac{F^\lambda_\alpha R[[X]]}{F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]} \tag{2}$$

这显然是一个 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次阿贝尔群，并且带有由 $(f + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]) \cdot (g + F^\lambda_{\beta^+} R[[X]]) = fg + F^\lambda_{(\alpha+\beta)^+} R[[X]]$ 定义的环结构。

命题 2.3. 对于每个 $\lambda > 0$，存在一个同构 $\Theta_\lambda : \mathrm{gr}_\lambda\ R[[X]] \to (\mathrm{gr}\ R)[Y]$，由此可知 v_λ 是一个赋值。

证明。定义 $\Theta_\lambda : \mathrm{gr}_\lambda\ R[[X]] \to (\mathrm{gr}\ R)[Y]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]] \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(r_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R\right) Y^n$.

那么，由于 $\lambda > 0$，根据引理 2.1，集合 Θ_λ 是良定义的。

$$\mathcal{X} := \left\{n \in \mathbb{N} : v_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n\right) = v(r_n) + \lambda n\right\}$$

非空且有限。因此，如果 $v\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n\right) \geq \alpha$，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $v(r_n) + \lambda n \geq \alpha$，所以 $r_n \in F_{(\alpha-\lambda n)} R$；并且 $r_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R \neq 0$ 当且仅当 $v_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n X^n\right) = \alpha$ 和 $n \in \mathcal{X}$，因此 $\sum \left(r_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R\right) Y^n$ 是一个有限和，所以它属于 $(\mathrm{gr}\ R)[Y]$。当然，

映射可扩展到分次部分的直和。

要证明 Θ_λ 是环同态，只需证明对于任意齐次的 A、$B \in \mathrm{gr}_\lambda R[[X]]$，若 A 和 B 次数相同，则 $\Theta_\lambda(A+B) = \Theta_\lambda(A) + \Theta_\lambda(B)$；而无论次数如何，$\Theta_\lambda(AB) = \Theta_\lambda(A)\Theta_\lambda(B)$。

假设对于某些 α、$\beta > 0$，$A = f + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]$ 和 $B = g + F^\lambda_{\beta^+} R[[X]]$，并且假设 $f = \sum r_n X^n$ 和 $g = \sum s_n X^n$。$n\in\mathbb{N}$ $n\in\mathbb{N}$

If $\alpha = \beta$ then $\Theta_\lambda(A+B) = \Theta_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (r_n + s_n)X^n + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(r_n + s_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R\right) Y^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(r_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R\right) Y^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(s_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R\right) Y^n = \Theta_\lambda(A) + \Theta_\lambda(B)$.

Also, $\Theta_\lambda(AB) = \Theta_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} r_i s_j\right) X^n + F^\lambda_{(\alpha+\beta)^+} R[[X]]\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} r_i s_j + F_{(\alpha+\beta-\lambda n)^+} R\right) Y^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} r_i s_j + F_{(\alpha-\lambda i+\beta-\lambda j)^+} R\right) Y^n = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \left(r_i + F_{(\alpha-\lambda i)^+} R\right) Y^i\right) \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(s_j + F_{(\beta-\lambda j)^+} R\right) Y^j\right) = \Theta_\lambda(A) \cdot \Theta_\lambda(B)$.

要证明 Θ_λ 是单射，假设 $\Theta_\lambda\left(\sum_{\alpha\geq 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_{\alpha,n} X^n + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]\right)\right) = 0$。那么 $\sum\sum \left(r_{\alpha,}$

$_n + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R\right) Y^n = 0$，所以对于所有 n，$\sum r_{\alpha,n} + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R = 0$。

$\alpha\geq 0 n\in\mathbb{N}$ $\alpha\geq 0$

因此，对于所有 α, n，$r_{\alpha,\ n} + F_{(\alpha-\lambda n)^+} R = 0$，所以 $v(r_{\alpha,\ n}) + \lambda n > \alpha$。因此，根据引理 2.1，这意味着对于所有 α，$v_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_{\alpha,\ n} X^n\right) > \alpha$，从而 $\sum_{\alpha\geq 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_{\alpha,\ n} X^n + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]\right) = 0$。

最后，若 $\sum A_n Y^n \in (\mathrm{gr}\ R)[Y]$，其中对每个 n都有 $A_n = r_n + F_{\alpha_n} R$，并且我们可以假-$n\in\mathbb{N}$ 设 $v(r_n) = \alpha_n$。对于每个 $\alpha > 0$，令 $B_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n + \lambda n = \alpha\}$，则 $\Theta_\lambda\left(\sum_{\alpha>0}\left(\sum_{n\in B_\alpha} r_n X^n + F^\lambda_{\alpha^+} R[[X]]\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n Y^n$，因此 Θ_λ 是满射。

环上的分离滤子是赋值，当且仅当其伴随分次环是整环，因此 $\mathrm{gr}\ R$ 是整环，进而 $(\mathrm{gr}\ R)[Y]$ 是整环。因此 $\mathrm{gr}_\lambda R[[X]] \cong (\mathrm{gr} R)[Y]$ 是整环，且 v_λ 是赋值。 □

注意，这个命题高度依赖于 $\lambda > 0$ 这一假设，并且当 $\lambda = 0$ 时，不存在类似的同构。现在，我们希望利用这一结果来证明 v_0 也是一个赋值。

固定 $f \in R[[X]]$，并定义一个映射 $\chi_f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ $\lambda \mapsto v_\lambda$({v6)。

命题 2.4. χ_f 在 $[0,\infty)$ 上单调递增，并且在彩票娱乐 *0.*
证明。如果 $f = \sum r_n X^n$和 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\chi_f(\lambda_j) = \inf\{v(r_n) + \lambda_j n : n \in \mathbb{N}\}$ for$_{n\in\mathbb{N}} j = 1, 2$。

因此，如果 $\chi_f(\lambda_2) < \chi_f(\lambda_1)$，那么存在 $n \in \mathbb{N}$使得对所有 m，$v(r_n) + \lambda_2 n < v(r_m) + \lambda_1 m$。特别地，$v(r_n) + \lambda_2 n < v(r_n) + \lambda_1 n$，因此 $(\lambda_2 - \lambda_1)n < 0$，这就是

这是不可能的，因为 $\lambda_2 \geq \lambda_1$。

因此 $\chi_f(\lambda_1) \leq \chi_f(\lambda_2)$，所以 χ_f 是单调递增的。要证明 χ_f 在 0 处连续，我们需要证明对于所有 $\varepsilon > 0$，当 λ足够小时，$|\chi_f(\lambda) - \chi_f(0)| < \varepsilon$。

由于 χ_f单调递增，我们知道，对于所有λ，$|\chi_f(\lambda) - \chi_f(0)| = \chi_f(\lambda) - \chi_f(0)$；并且若对某个 λ'有 $\chi_f(\lambda') - \chi_f(0) < \varepsilon$，则对所有 $\lambda \leq \lambda'$，可推出 $\chi_f(\lambda) - \chi_f(0) \leq \chi_f(\lambda') - \chi_f(0) < \varepsilon$。因此，只需证明：对所有 $\varepsilon > 0$，存在某个 $\lambda > 0$使得 $\chi_f(\lambda) - \chi_f(0) < \varepsilon$。

反设存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 λ，$\chi_f(\lambda) \geq \varepsilon + \chi_f(0)$，即对所有 $\lambda > 0$，$v(r_n) + \lambda n \geq \varepsilon + \chi_f(0)$，$n \in \mathbb{N}$。

但是 $\chi_f(0) = v_0(f) = \inf\{v(r_n) : n \in \mathbb{N}\}$，因此由于 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$使得$\chi_f(0) \leq v(r_n) < \varepsilon + \chi_f(0)$，并且 $n > 0$因为否则 $v(r_0) + \lambda 0 = v(r_0) < \varepsilon + \chi_f(0)$。因此，取 $\lambda > 0$使得 $\lambda < \frac{\varepsilon + \chi_f(0) - v(r_n)}{n}$，于是可得 $v(r_n) + \lambda n < \varepsilon + \chi_f(0)$——矛盾。□

推论 2.5. v_0 是 $R[[X]]$上的一个赋值。

证明。给定 $f, g \in R[[X]]$，我们需要证明 $v_0(fg) = v_0(f) + v_0(g)$。根据命题 2.3，我们知道对所有 $\lambda > 0$，v_λ都是一个赋值，因此 $v_\lambda(fg) = v_\lambda(f) + v_\lambda(g)$。此外，根据命题 2.4，我们知道 χ_f, χ_g 在零点连续，因此可得：

$$
\begin{aligned}
v_0(fg) &= \chi_{fg}(0) = \lim_{\lambda \to 0} \chi_{fg}(\lambda) \text{ (since } \chi_{fg} \text{ is continuous at } 0) \\
&= \lim_{\lambda \to 0} v_\lambda(fg) = \lim_{\lambda \to 0} v_\lambda(f) + v_\lambda(g) \text{ (since } v_\lambda \text{ is a valuation for } \lambda > 0) \\
&= \lim_{\lambda \to 0} v_\lambda(f) + \lim_{\lambda \to 0} v_\lambda(g) = \lim_{\lambda \to 0} \chi_f(\lambda) + \lim_{\lambda \to 0} \chi_g(\lambda) = \chi_f(0) + \chi_g(0) = v_0(f) + v_0(g). \qquad \square
\end{aligned}
$$

3 $R[[X]]$ 的非相干性

从现在起，设 F 是一个域，设 $v: F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是一个赋值，并设 $R := \{x \in F : v(x) \geq 0\}$。那么 R 是一个秩 1 赋值环，并且我们假设其值群 $v(F \backslash 0)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个真稠密子群。利用推论 2.5，R 上的赋值 v 可扩张为 $R[[X]]$ 的一个赋值 v_0，其定义为 $v_0\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n X^n\right) = \inf\{v(r_n) : n \in \mathbb{N}\}$。
我们知道 R 是相干环，但 [1, 的推论第 3] 节证明了 $R[[X]]$ 从来不是相干环；在本节中，我们将利用已建立的赋值理论给出另一种（尽管类似的）证明。

为方便起见，我们将分别用 $v(F)$ 和 $v(R)$ 表示 $v(F \backslash 0)$ 和 $v(R \backslash 0)$。由于 $v(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个真稠密子集，因此可知 $v(R) = \{\alpha \in v(F) : \alpha \geq 0\}$ 是 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的一个稠密子集，且不等于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$。因此，存在一个元素 $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\alpha \notin v(R)$；并且存在一个元素序列 $\alpha_n \in v(R)$，使得对于所有 n，均有 $\alpha_n \geq \alpha_{n+1} > \alpha$，且当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n \to \alpha$。

固定满足以下条件的元素 $r_n \in R$：对于所有 n，均有 $v(r_n) = \alpha_n$，并令 $f := \sum r_n X^n \in R[[X]]$。那么$_{n\in\mathbb{N}} v_0(f) = \inf\{v(r_n) : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha$。

现在，任取 $r \in R$ 使得 $v(r) > \alpha$，并考虑理想 $J := R[[X]]f + R[[X]]r$。这显然是 $R[[X]]$ 的有限生成理想。

定理 3.1. J 不是有限表示的，因此 $R[[X]]$ 不是相干环。

证明。首先，考虑理想：

$$I := \{g \in R[[X]] : v_0(g) \geq v(r) - \alpha\}.$$

然后，如果 $h \in R[[X]]f \cap R[[X]]r$，那么对于某个 g，有 $h = gf = yr$，$y \in R[[X]]$。因此，由于 v_0 是一个赋值，我们有 $v_0(h) = v_0(g) + v_0(f) = v_0(y) + v_0(r)$。又由于 $v_0(f) = \alpha$ 且 $v_0(r) = v(r)$，因此可推出 $v_0(g) = v_0(y) + v(r) - \alpha \geq v(r) - \alpha$，从而得到 $g \in I$。

反过来，如果 $g \in I$那么 $v_0(gf) = v_0(g) + \alpha \geq v(r) - \alpha + \alpha = v(r)$，因此如果 $gf = \sum t_n X^n{}_{n\in\mathbb{N}}$那么对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $v(t_n) \geq v(r)$。所以，由于 R 是一个赋值环，这意味着对所有 $n \in \mathbb{N}$，r 整除t_n，也就是说 $gf = ry$，其中 $y = \sum(r^{-1}t_n)X^n \in R[[X]]$，所以$_{n\in\mathbb{N}}$
$gf \in R[[X]]f \cap R[[X]]r.$

因此，$R[[X]]f \cap R[[X]]r = If$，所以如果交集是有限生成的，那么 If也是有限生成的。但由于 $R[[X]]$ 是整环，可知如果 $\{g_1 f, \ldots, g_m f\}$ 是 If的生成集，那么 $\{g_1, \ldots, g_m\}$就是 I的生成集。因此，如果 $g_i := \sum r_{i,\ n} X^n{}_{n\in\mathbb{N}}$
那么令 $\beta := \min\{v(r_{i,\ 0}) : i = 1, \ldots, m\}$，由此可知，对每个 $g = \sum r_n X^n \in I$，$_{n\in\mathbb{N}} v(r_0) \geq \beta$，并且显然 $\beta \geq \min\{\inf\{v(r_{i,\ n}) : n \in \mathbb{N}\} : i = 1, \ldots, m\} \geq v(r) - \alpha$。

但由于 $\alpha \notin v(R)$，可知 $v(r) - \alpha \notin v(R)$，所以既然 $\beta \in v(R)$，我们就看到$\beta > v(r) - \alpha$。但 $v(R)$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$中稠密，因此我们可以找到 $t \in R$ 使得 $\beta > v(t) > v(r) - \alpha$，从而 $t = tX^0 \in I$，但 $v_0(t) = v(t) < \beta$——矛盾。

因此，$R[[X]]f \cap R[[X]]r$ 不是有限生成的。因此，考虑正合列
$0 \to R[[X]]f \cap R[[X]]r \to R[[X]]^2 \to J \to 0$，由于核不是有限生成的，由 [3, 引理 2.1.1] 可知，J 不是有限表示的。 □

4 R[[X]] 的局部化

本节中，我们将运用赋值理论来研究 $R[[X]]$ 的一个具有有用性质的局部化。令 $U := \{f \in R[[X]] : v_0(f) = 0\}$，由于 v_0 是一个赋值，U 是 $R[[X]]$的乘法封闭子集。因此，由于 $R[[X]]$ 是交换的，我们可以考虑 $R[[X]]$ 在 U处的局部化 $T := R[[X]]_U$。

命题 4.1. T 是一个赋值环。

证明。令 $V := \{ru : r \in R\backslash\{0\}, u \in U\}$。那么 V是$R[[X]]$的一个乘法封闭子集，因此令 $K := R[[X]]_V$。由于 $U \subseteq V$，显然 T 是 K的一个子环。

由引理 1.2 可知，赋值 v_0 唯一地扩张到 $R[[X]]$ 的任意局部化，因此 K 和 T 都带有赋值，且这些赋值在 $R[[X]]$ 上限制为 v_0。我们将证明

K 是一个域，且 $T := \{x \in K : v_0(x) \geq 0\}$，由引理 1.3 可知 T 是一个赋值环。

要证明 K 是一个域，只需证明 $R[[X]]$ 的每个非零元素都是 K中的单位。假设 $0 \neq f \in R[[X]]$ 和 $v_0(f) = \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们将证明 f 是 $K = R[[X]]_V$中的单位：

首先，若 $\alpha \in v(R)$，则存在某个 $r \in R\backslash 0$使得 $\alpha = v(r)$；若 $f = \sum r_n X^n$，则 $v(r) = _{n\in\mathbb{N}}\alpha = v_0(f) = \inf\{v(r_n) : n \in \mathbb{N}\}$，因此对所有 n 和 $r^{-1}r_n \in R$，都有 $v(r_n) \geq v(r)$。于是设$u := \sum(r^{-1}r_n)X^n \in R[[X]]$，则 $f = ru$；若 $v_0(u) > 0$，那么存在 $\varepsilon > 0$，使得 $_{n\in\mathbb{N}}$满足对所有 n都有 $v(r^{-1}r_n) \geq \epsilon$，因此 $v(r_n) \geq v(r) + \epsilon$，于是 $v_0(f) \geq v(r) + \epsilon > v(r) = \alpha = v_0(f)$——矛盾。因此 $v_0(u) = 0$且 $u \in U$，所以 $f = ru \in V$是$K = R[[X]]_V$中的单位。

另一方面，如果 $\alpha \notin v(R)$，那么取满足 $\beta > \alpha$ 的 $\beta \in v(R)$。由于 $v(R)$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 中稠密，存在一个由 $v(R)$ 中元素构成的序列 (γ_n)，使得对每个 n 都有 $\gamma_n \geq \gamma_{n+1} > \beta - \alpha$，且当 $n \to \infty$ 时 $\gamma_n \to \beta - \alpha$。因此，取 $s_n \in R$ 使得对每个 n 都有 $v(s_n) = \gamma_n$，并令 $g := \sum s_n X^n$，则 $v_0(g) = \inf\{v(s_n) : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\} = \beta - \alpha$。因此，$_{n\in\mathbb{N}}v_0(fg) = v_0(f) + v_0(g) = \alpha + \beta - \alpha = \beta \in v(R)$，所以根据上文，$fg$ 是 K 中的单位，从而 f 是 K 中的单位。

最后，显然，对任意 $x = fu^{-1} \in T$，$v_0(x) = v_0(f) - v_0(u) = v_0(f) \geq 0$，因此只需证明：若 $x \in K$ 且 $v_0(x) \geq 0$，则 $x \in T$。于是，对某个$r \in R$，$x = f(ru)^{-1}$，$u \in U$，且 $v_0(x) = v_0(f) - v_0(ru) \geq 0$，也就是说，$v_0(f) \geq v(r)$。因此，若 $f = \sum r_n X^n$，则$_{n\in\mathbb{N}}$ $v_0(f) = \inf\{v(r_n) : n \in \mathbb{N}\} \geq v(r)$，因此对于所有 n 和 $r^{-1}r_n \in R$，$v(r_n) \geq v(r)$。于是令 $g := \sum(r^{-1}r_n)X^n \in R[[X]]$，则 $f = rg$，因此 $x = f(ru)^{-1} = fr^{-1}u^{-1} = gu^{-1} \in R[[X]]_U = T_{n\in\mathbb{N}}$，如所需。 □

现在回忆一下，根据 [3]，如果 S 是一个交换环，且 M 是一个 S-模，那么 M 的子模 N 是纯子模，当且仅当对于任意 S-模 L，自然映射 $N \otimes_S L \to M \otimes_S L$ 是单射。由 [3, 定理 1.2.14(5)] 可知，如果 M 是平坦 S-模，且 N 是纯子模，那么 M/N 是平坦 S-模。

命题 4.2. $R[[X]]$ 是 T的一个纯 R子模；更一般地，对于任意指标集 I，直积 $R[[X]]^I$是 T^I 的一个纯 R子模。

证明。由 [3, 定理 1.2.14(5)],，我们只需证明：对于 R的任意有限生成理想 J，$JT^I \cap R[[X]]^I = JR[[X]]^I$。由于 R是赋值环，$J = aR$对某个$a \in R$成立，因此我们只需证明 $aT^I \cap R[[X]]^I = aR[[X]]^I$。

事实上，若我们证明了 $R[[X]]$ 是 T的纯子模，即 $aT \cap R[[X]] = aR[[X]]$，那么如果 $(x_i)_{i\in I} \in aT^I \cap R[[X]]^I$，则对每个 i都有 $x_i \in aT \cap R[[X]] = aR[[X]]$，从而 $(x_i)_{i\in I} \in (aR[[X]])^I = aR[[X]]^I$，因此 $R[[X]]^I$是 T^I的一个纯 R子模。

因此，假设 $f \in aT \cap R[[X]]$，那么 $f \in R[[X]]$和 $f = agu^{-1}$对某些 $g \in R[[X]], u \in U$成立，故 $ag = fu$。由于 $v_0(u) = 0$，我们看到 $v_0(f) = v_0(f) + v_0(u) = v_0(fu) = v_0(ag) = v_0(a) + v_0(g) \geq v_0(a) = v(a)$。

因此，若 $f = \sum r_n X^n$，则 $v_0(f) = \inf\{v(r_n) : n \in \mathbb{N}\} \geq v(a)$，所以 $v(r_n) \geq v(a)$ 对于$_{n\in\mathbb{N}}$所有 n均成立，这意味着 $a^{-1}r_n \in R$ 对所有 n均成立。令 $h := \sum(a^{-1}r_n)$ $X^n \in R[[X]]$，并且$_{n\in\mathbb{N}} f = ah \in aR[[X]]$ ，如所需。

□

5 $R[[X]]$-模的平坦维数

本节将证明我们的主要结果，给出一个 $R[[X]]$-模C 的例子：它在 R上是平坦的，但在 $R[[X]]$上的平坦维数至少为 2，从而与 [2,推论 3.2]矛盾。证明受到 [3, 定理 7.2.2]证明的很大启发。

利用定理 3.1，我们知道 $R[[X]]$不是相干环，因此根据 [3,定理 2.3.2(4)] ，存在一个指标集 I ，使得直积 $R[[X]]^I$ 在 $R[[X]]$上不平坦。与上一节一样，我们令 $T := R[[X]]_U$ ，其中 $U = \{f \in R[[X]] : v_0(f) = 0\}$，并令 $C := T^I/R[[X]]^I$。

引理 5.1. T^I 在 $R[[X]]$ 和 R上平坦，而 C 在 R上平坦。

证明。根据命题 4.1，我们知道 T 是一个赋值环，因此它是凝聚的。于是，根据 [3, 定理 2.3.2(4)], T^I 是一个平坦的 T-模。但是， T 是 $R[[X]]$ 的一个局部化，因此根据引理 1.2， T 在 $R[[X]]$ 上是平坦的，从而 T^I 在 $R[[X]]$ 上是平坦的。

此外，由于 R 是凝聚的，并且作为一个 R-模， $R[[X]] \cong \prod R$ 是凝聚的，根据 [3, 定理 2.3.2(4)], , $R[[X]]$ 是一个平坦的 $_{n\in\mathbb{N}}R$-模，因此 T^I 是一个平坦的 R-模。

由于 T^I 在 R 上是平坦的，并且根据命题 4.2， $R[[X]]^I$ 是 T^I 的一个纯 R-子模，因此由 [3, 定理 1.2.14(5)] 可知， $C = T^I/R[[X]]^I$ 是一个平坦的 R-模。 □

现在我们可以证明主定理了：

定理 A 的证明。由引理 5.1 可知， C 在 R 上是平坦的，因此显然 $\mathrm{f.dim}_R(C) = 0$。反设 $\mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(C) \leq 1$，即对所有 $R[[X]]$-模 N，都有 $Tor_2^{R[[X]]}(C, N) = 0$。于是存在一个长正合列：

$$0 \to Tor_1^{R[[X]]}(R[[X]]^I, N) \to Tor_1^{R[[X]]}(T^I, N) \to Tor_1^{R[[X]]}(C, N)$$

$$\to R[[X]]^I \otimes_{R[[X]]} N \to T^I \otimes_{R[[X]]} N \to C \otimes_{R[[X]]} N \to 0$$

但由引理 5.1 可知， T^I在 $R[[X]]$上是平坦的，因此 $Tor_1^{R[[X]]}(T^I, N) = 0$，从而可得 $Tor_1^{R[[X]]}(R[[X]]^I, N) = 0$。由于这对所有 $R[[X]]$-模 N都成立，因此 $R[[X]]^I$ 在 $R[[X]]$上是平坦的，这与我们最初的假设矛盾。 □

事实上，我们可以用相同的论证证明，对于所有 i和 N， $Tor_{i+1}^{R[[X]]}(C, N) \cong Tor_i^{R[[X]]}(R[[X]]^I, N)$，因此 $\mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(C) = \mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(R[[X]]^I) + 1$。所以，如果我们能够证明存在一个指标集 I ，使得 $\mathrm{f.dim}_{R[[X]]}(R[[X]]^I) > \mathrm{w.dim}(R)$，就可以推出 $\mathrm{w.dim}(R[[X]]) > \mathrm{w.dim}(R) + 1$，从而表明弱希尔伯特零化子定理对于相干环上的幂级数并不成立，即使系数环是秩 1 赋值环也是如此。

参考文献

[1] M. Anderson；J. Watkins，《伪 Bézout 整环上的幂级数环的相干性》，Journal of Algebra 107，187–194（1987）。[2] S. Bouchiba，《幂级数环的整体维数》，Journal of Pure and Applied Algebra 209，5149–5157（2015）。[3] S. Glaz，《交换相干环》，Lecture Notes in Mathematics 1317，Springer-Verlag（1989）。[4] S. Jondrup；L.W. Small，《相干环上的幂级数》，Math. Scand. 35，21–24（1974）。[5] L.W. Small，《环变换定理》，Proc. Am. Math. Soc. 19，662–666（1968）。[6] C.A. Weibel，《同调代数导论》，Cambridge University Press（1994）。