arXiv:2305.03484v1 [physics.optics] 5 May 2023

带散射表面的三维自由曲面反射器设计

由 Kronberg,[1,*]*Martijn* Anthonissen,[1]*Jan* ten Thije Boonkkamp,[1] 和 *Wilbert* IJzerman[1,2]

[1]数学与计算机科学系，埃因霍温理工大学，邮政信箱 513，5600 MB 埃因霍温，荷兰[2]昕诺飞研究院，高科技园区 7 号，5656 AE 埃因霍温，荷兰[*]

v.c.e.kronberg@tue.nlhttps://www.win.tue.nl/~martijna/Optics/

关键词：表面散射 · 反射器设计 · 逆问题**物理学和天文学分类方案：**02.30.Z · 42.15.-i · z42.25.Fx · 42.79.Fm**美国数学学会分类：**78A05 · 78A45 · 78A46

摘要： 我们提出了一种计算具有散射表面的三维自由曲面反射器的新方法。该方法基于最优传输，并利用弗雷德霍姆积分方程来表示散射。通过采用类似反卷积的过程求解该积分方程（我们称之为“展开”），我们可以还原出典型的镜面设计问题。因此，我们将具有散射表面的自由曲面反射器设计视为一个两步过程：首先调整目标分布以考虑散射，然后求解由此得到的镜面问题。我们使用自定义光线追踪器验证了该方法；该追踪器实现了用于推导弗雷德霍姆积分的表面散射模型。

1. 引言

照明在当今社会中发挥着至关重要的作用。自发光二极管（LED）问世以来，光束整形光学元件日益普及。这部分是因为裸露LED封装发出的尖锐、点状光通常被认为不理想，部分是因为人们对美观且个性化照明的需求不断增加，例如RGB LED灯。这些光学元件通常采用迭代式且很大程度上依赖手动的流程进行设计，要求光学设计师具备丰富的经验和知识，同时也耗费大量时间 [1, 第1章。9]。镜面反射器可以将光塑造成所需的光分布，但不一定能降低光源的尖锐感，因为镜面可能会造成令人不适的眩光。散射元件有助于缓解眩光，例如具有散射作用的粗糙反射面，或与镜面反射器结合使用的透射散射元件 [1, 第1.8章。4]。在系统中引入散射通常意味着会失去部分光线控制能力，即无法保证先验地实现指定目标。本研究将表面散射以一致的方式纳入自由曲面逆向设计领域现有的镜面反射器计算框架，从而重新获得对光线的控制。

更具体地说，给定光源和目标分布后直接计算光学系统的问题，通常称为照明光学逆问题。过去几十年间，人们开发了许多求解反射体和透镜镜面逆问题的方法，例如，对于旋转对称或柱面对称系统，可通过求解一组耦合的常微分方程（ODE）来实现 [2]。对于三维自由曲面光学表面——即不具有任何整体对称性的表面——一种已证明行之有效的方法是求解蒙日-安培方程 [3–5]。

尽管镜面逆向设计问题已得到充分研究，但关于直接计算散射光学表面的文献却寥寥无几。我们找到的最佳参考文献是 Lin等人 [6], , 他们设计了一种透镜，其内表面为自由曲面散射内表面，外表面为球面。他们采用贝塞尔曲线表示自由曲面。随后，他们对初始形状进行迭代调整，以考虑指定目标分布与最终光线追迹分布之间的差异。

正如我们在 [7, 8], 中所展示的，计算具有散射表面的二维——即旋转对称或圆柱对称——反射体的问题，可归结为先进行反卷积，再求解镜面反射器设计问题。本文将把这些结果扩展到具有散射表面的三维自由曲面反射体的计算。为此，我们首先将建立如下数学关系：具有特定形状的完全光滑反射器所反射的光，与由散射材料制成的同一反射器产生的散射光之间存在对应关系。我们将证明，这一关系可表示为第一类弗雷德holm积分方程；随后还将说明如何求解这一积分关系，以获得可用于镜面设计问题的合适目标函数。因此，该方法类似于我们在 [7]中提出的二维方法。

本文的结构如下。首先，第2节基于最优传输理论中的思想推导散射模型。接下来，第3节将较为详细地讨论自由曲面镜面设计问题，随后在第4节概述我们如何验证上述模型。第5节给出两个数值示例——第一个示例展示我们如何提出在典型工作流程中使用该模型，第二个示例则展示散射程度的变化如何影响反射器形状。

2. 散射模型

本节阐述开发散射模型并将其应用于自由曲面反射器设计所需的理论基础。

2.1. 关键假设

在推导描述本模型中散射过程的弗雷德霍姆积分方程时，我们将采用若干假设。此处讨论关键假设；其他假设将在相关内容出现时再作说明。第一个假设是，光散射可用几何光学描述，即考虑入射光线、镜面反射光线和散射光线。从统计角度看，这等价于一种更符合物理实际的散射概念：一个入射方向对应多个出射方向。此外，假设光散射完全弹性，也就是说，入射能量在散射过程中不会被吸收或以其他方式损耗。还假设反射器周围的介质无损耗，且光只在反射器表面发生散射。最后，本文仅设计由零展度平行光照明、且具有远场目标的反射器。需要注意的是，散射模型的推导同样适用于零展度点光源，因为散射事件发生在表面上，与系统是否具有对称性无关。

2.2. 几何

假设我们在 $\mathbb{R}^3$ 中有一个笛卡尔 xyz 坐标系，其中一个平行光源（以下简称平行光源）位于以原点 $\mathcal{O}$ 为中心的 $\mathcal{S} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ xy-平面上的矩形区域内——见图 1。光源发出的光线（所谓光源光线 或入射光线）沿固定的“向上”方向传播，即具有正的 z 分量，该方向由单位向量 $\hat{\mathbf{s}}$ 给出（本文中，尖帽符号 $\hat{}$ 表示单位向量）。为简单起见，我们将光源光线与 z 轴对齐，即 $\hat{\mathbf{s}} \equiv \hat{\mathbf{e}}_z = (0,0,1)^\intercal$。

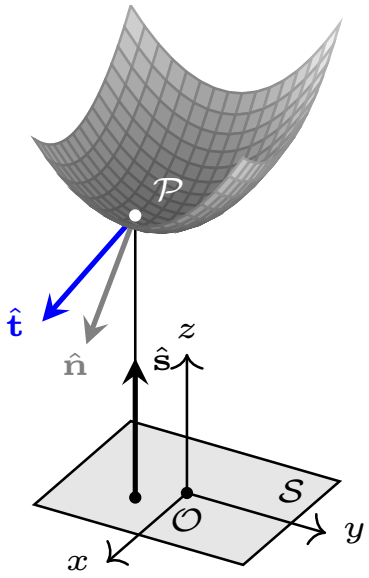


图1: 光滑反射器上的镜面反射。

镜面反射光线，即遵循熟知的镜面反射定律的光线（所谓的镜面反射光线 或反射光线），沿单位向量传播

$$\hat{\mathbf{t}} := \hat{\mathbf{t}}(\psi, \chi) := \big(\sin(\psi)\cos(\chi), \sin(\psi)\sin(\chi), \cos(\psi)\big)^\intercal, \tag{1}$$

其中 $\psi \in [0, \pi]$ 和 $\chi \in [0, 2\pi]$。注意，$\hat{\mathbf{t}}$ 由矢量反射定律（LoR）给出：

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{s}} - 2(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \tag{2}$$

其中，$\hat{\mathbf{n}}$ 是交点处的表面法线，$\mathcal{P}$。按照惯例，我们取$\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$，即指向光源的法线。注意，$\hat{\mathbf{s}}$、$\hat{\mathbf{n}}$ 和$\hat{\mathbf{t}}$ 共面；它们张成所谓的入射面。

离开表面的非镜面光线（即所谓的散射光线）沿单位向量传播

$$\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}(\gamma, \nu) := \big(\sin(\gamma)\cos(\nu), \sin(\gamma)\sin(\nu), \cos(\gamma)\big)^\intercal, \tag{3}$$

其中分别为 $\gamma \in [0, \pi]$ 和 $\nu \in [0, 2\pi]$。下一节将探讨散射方向与镜面反射方向之间的关系。

2.3. 模型推导

现在我们将详细考察散射模型。该模型基于数学中 Monge 提出的最优传输问题表述。接下来的几节将说明，这一设定及后续分析如何导出散射光的表达式，其形式为第一类弗雷德霍姆积分方程。

2.3.1. 映射

一般而言，可以证明，对于严格凸镜面（理想镜面反射器），光学映射是单射的 [9]。该映射将给定的入射方向 (ϑ, φ)（用于参数化 $\hat{\mathbf{s}}(\vartheta, \varphi)$）映射到相应的镜面反射方向 (ψ, χ)。也就是说，给定任意入射方向，其镜面反射方向 (ψ, χ) 都是唯一的。将此映射记为 $\mathbf{m}$，则 $(\psi, \chi) = \mathbf{m}(\vartheta, \varphi)$。

现在考虑一个粗糙反射器，即光线散射后沿某一方向传播 (γ, ν)，该方向通常不同于 (ψ, χ)。为了建立这两个方向之间的联系，我们先回到静态的 xyz 坐标系，并从定义基本旋转矩阵开始

$$\mathbf{R}_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{4}$$

and

$$\mathbf{R}_z(\phi) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

分别对应于绕 y 轴和 z 轴按右手定则旋转，也就是说，分别在 zx 平面内逆时针旋转以及在 xy 平面内逆时针旋转。因此，根据构造，$\hat{\mathbf{t}}(\psi, \chi) = \mathbf{R}_z(\chi)\mathbf{R}_y(\psi)\hat{\mathbf{e}}_z$，且 $\hat{\mathbf{u}}(\gamma, \nu) = \mathbf{R}_z(\nu)\mathbf{R}_y(\gamma)\hat{\mathbf{e}}_z$。

令 $\alpha \in [0, \pi/2]$ 和 $\beta \in [0, 2\pi]$ 分别为所谓圆锥向量的极角（倾角）和方位角。 ,

$$\hat{\mathbf{c}} := \hat{\mathbf{c}}(\alpha, \beta) := \big(\sin(\alpha)\cos(\beta), \sin(\alpha)\sin(\beta), \cos(\alpha)\big)^\intercal. \tag{6}$$

关于该名称的由来，请注意，对于固定的 $\alpha \in [0, \pi/2]$，由 $\hat{\mathbf{c}}(\alpha, \beta)$ $0 \leq \beta \leq 2\pi$ 描绘的参数曲线是单位球面上的一个圆，其圆心位于 $(0,0,\cos(\alpha))$，半径为 $\sin(\alpha)$——见图2。换句话说，向量 $\hat{\mathbf{c}}$ 位于一个与 z 轴同轴的圆锥面上，其底面半径为 $\sin(\alpha)$，高为 $\cos(\alpha)$。当然，这对任何用极角和方位角参数化的单位向量都成立，但这一观察将在稍后构造散射光线方向 $\hat{\mathbf{u}}$ 时派上用场。

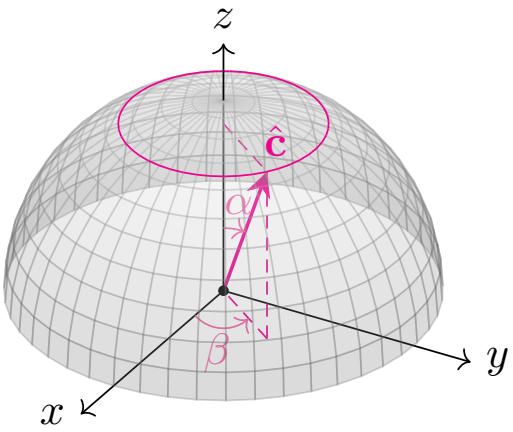


图 2： 对于固定的 α，圆锥向量 $\hat{\mathbf{c}}$ 在单位球面上描绘出一个圆。

注意，根据定义，$\hat{\mathbf{c}}(\alpha, \beta) = \mathbf{R}_z(\beta)\mathbf{R}_y(\alpha)\hat{\mathbf{e}}_z$。假设我们先将旋转矩阵 $\mathbf{R}_y(\psi)$，再将 $\mathbf{R}_z(\chi)$ 作用于 $\hat{\mathbf{c}}$。那么，对于固定的 $\alpha \in [0, \pi/2]$，通过令 $0 \leq \beta \leq 2\pi$，所得向量将描绘出一个与 $\mathbf{t}$ 同轴的倾斜圆锥，其底面半径为 $\sin(\alpha)$，高度为 $\cos(\alpha)$。这正是我们希望散射向量 $\hat{\mathbf{u}}$ 所具有的性质，即，

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_z(\chi)\mathbf{R}_y(\psi)\hat{\mathbf{c}}(\alpha, \beta) = \mathbf{R}_z(\chi)\mathbf{R}_y(\psi)\mathbf{R}_z(\beta)\mathbf{R}_y(\alpha)\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{7}$$

图3显示了固定 α 时的散射几何。通过令 β 从 0 变化到 2π，可以得到 $\hat{\mathbf{u}}$ 所描绘的圆。通过对 α 和 β 采样，我们便可以控制 $\hat{\mathbf{u}}$ 相对于 $\hat{\mathbf{t}}$ 的方向。注意，当 $\beta = 0$ 或 $\beta = 2\pi$ 时，$\hat{\mathbf{u}}$ 位于由 $\hat{\mathbf{s}}$、$\hat{\mathbf{t}}$ 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 张成的入射面内，因为 $\mathbf{R}_z(0) = \mathbf{R}_z(2\pi) = \mathbb{I}$，即单位矩阵，因此 $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_z(\chi)\mathbf{R}_y(\psi+\alpha)\hat{\mathbf{e}}_z$。类似地，当 $\beta = \pi$ 时，$\hat{\mathbf{u}}$ 也位于入射面内，因为 $\mathbf{R}_z(\pi)$ 在对角线上具有非零元素 $\{-1,-1,1\}$。还要注意，$\hat{\mathbf{u}}$ ψ z $-\chi$ ψ χ z = y $-\psi$ z $-\chi$ ψ χ

R ( )R (ψ)R (β)R ( )R ( )ˆt(,)，因为根据构造，ˆe R ( )R ( )ˆt(,)。这给出了固定 α 和 β 时镜面反射方向 $\mathbf{t}$ 与散射方向 $\hat{\mathbf{u}}$ 之间直接但繁琐的关系。

将式 (7) 中 $\hat{\mathbf{u}}$ 的表示与式 (3) 中的 $\hat{\mathbf{u}}(\gamma, \nu)$ 相等，即可针对任意给定的镜面反射方向 (ψ, χ) 和圆锥向量方向 (α, β)，求出 (γ, ν)。也就是说，我们可以找到一个所谓的散射映射 $\mathbf{s}$，使得 $\mathbf{s}(\psi, \chi, \alpha, \beta) = (\gamma, \nu)$。反过来，假设我们已知 (ψ, χ) 和 (γ, ν)，并希望求出 (α, β)。由此可得第三个映射，即所谓的圆锥映射，记为 $\mathbf{c}$，其

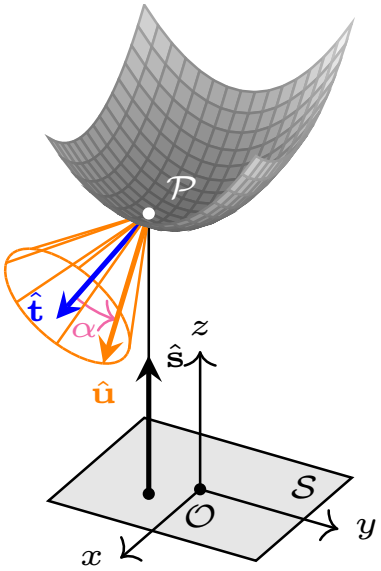


图 3： 粗糙反射器的散射。

满足 $\mathbf{c}(\psi, \chi, \gamma, \nu) = (\alpha, \beta)$。寻找 $\mathbf{s}(\psi, \chi)$ 和 $\mathbf{c}(\psi$ 这些关系总结于图 4。我们将 ll f把重点放在散射部分，即 h

求散射映射我们首先求散射映射 $\mathbf{s}$，它根据某个镜面反射方向 (ψ, χ) 和圆锥方向 (α, β)，返回散射方向 (γ, ν)。从 γ 开始，注意到根据构造，$\cos(\gamma) = u_3$，其中 u_3 是 $\hat{\mathbf{u}}$ 的第三个分量。因此，通过计算式 (7)，我们得到

$$\gamma(\psi, \chi, \alpha, \beta) = \arccos\big(\cos(\psi)\cos(\alpha) - \sin(\psi)\sin(\alpha)\cos(\beta)\big). \tag{8}$$

接下来，可以 ν 通过注意到 $\tan(\nu) = u_2/u_1$ 而求得。计算公式 $\hat{\mathbf{u}}$ 在式 (7) 中的分量可得

$$\nu(\psi, \chi, \alpha, \beta) = \arctan\big(x_\nu(\psi, \chi, \alpha, \beta), y_\nu(\psi, \chi, \alpha, \beta)\big), \tag{9}$$

其中，$\arctan(x, y)$ 是 y/x 的反正切值，并考虑点 (x, y) 所在的象限，其中

$$\begin{aligned} x_\nu &= \cos(\chi)\big(\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\psi) + \cos(\alpha)\sin(\psi)\big) \\ &\quad - \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\chi), \\ y_\nu &= \sin(\chi)\big(\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\psi) + \cos(\alpha)\sin(\psi)\big) \\ &\quad + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\chi). \end{aligned} \tag{10}$$

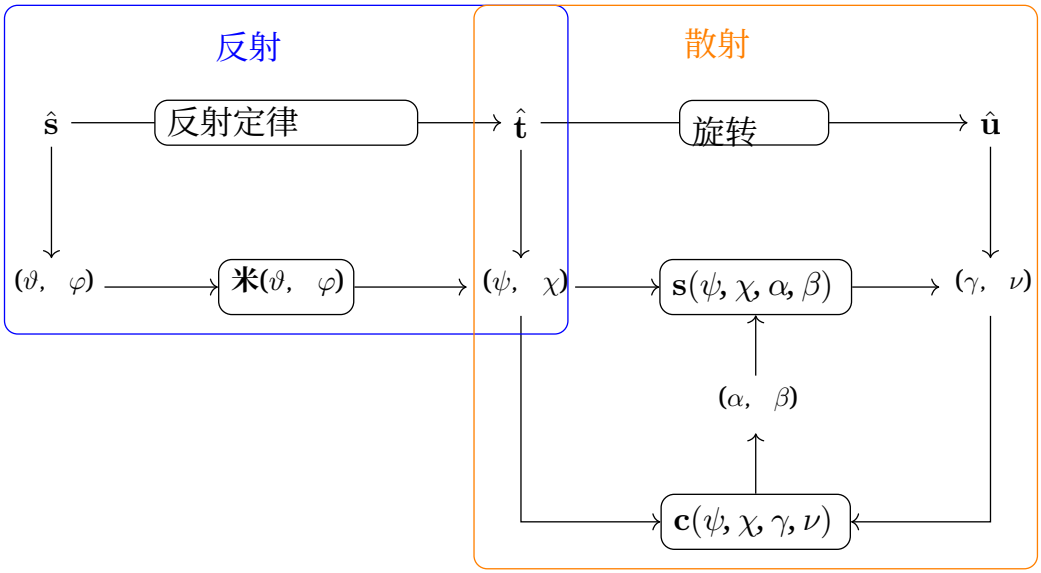


图4： 单位向量与相应球坐标之间的关系。

因此，散射映射为

$$\mathbf{s}(\psi,\chi,\alpha,\beta) = \big(\gamma(\psi,\chi,\alpha,\beta), \nu(\psi,\chi,\alpha,\beta)\big), \tag{11}$$

其中，γ 和 ν 分别由公式**(8)** 和**(9)**给出。

求圆锥映射现在我们来求圆锥映射$\mathbf{c}$，对于给定方向(ψ,χ)和(γ,ν)，它将给出(α,β)。从 α开始，注意到根据构造（回顾图3），$\cos(\alpha) = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{u}}$，因此，

$$\alpha(\psi,\chi,\gamma,\nu) = \arccos\big(\cos(\psi)\cos(\gamma) + \sin(\psi)\sin(\gamma)\cos(\nu-\chi)\big). \tag{12}$$

求 β 需要付出更多努力。从理论上讲，可以令公式**(3)** 和**(7)** 中$\hat{\mathbf{u}}$ 的两种表示相等，并求解 β；然而在实践中，这非常困难。由于本文后文将假设旋转对称性，这意味着不再需要 β 的显式表达式，因此我们仅简要概述其推导过程。首先，我们考虑用反射向量$\hat{\mathbf{t}}$ 的立体投影分量和$\hat{\mathbf{c}}$的分量来表示$\hat{\mathbf{u}}$ ，即$\mathbf{y}(\hat{\mathbf{t}})$、 c_1、 c_2和 c_3，其中$\mathbf{y}$ 是通过从北极进行立体投影，与单位向量$\mathbf{t}$ 关联的$\hat{}$二元组：

$$\mathbf{y}(\hat{\mathbf{t}}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-t_3}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \frac{\sin(\psi)}{1-\cos(\psi)}\begin{pmatrix} \cos(\chi) \\ \sin(\chi) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

这使我们能够用 y_1 和 y_2 表示 c_1 和 c_2；或者通过立体投影，用 ψ 和 χ 以及 γ 和 ν 表示它们。随后，我们利用按构造有 $\tan(\beta) = c_2/c_1$ 这一事实，以及式 **(11)** 中的散射映射，得出

$$\beta(\psi,\chi,\gamma,\nu) = \arctan\big(x_\beta(\psi,\chi,\gamma,\nu), y_\beta(\chi,\gamma,\nu)\big), \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} x_\beta &= \cos(\psi)\sin(\gamma)\cos(\nu-\chi) - \sin(\psi)\cos(\gamma), \\ y_\beta &= \sin(\gamma)\sin(\nu-\chi). \end{aligned} \tag{15}$$

因此，圆锥映射为

$$\mathbf{c}(\psi,\chi,\gamma,\nu) = \big(\alpha(\psi,\chi,\gamma,\nu), \beta(\psi,\chi,\gamma,\nu)\big), \tag{16}$$

其中 α 和 β 分别由式 **(12)** 和 **(14)** 给出。

2.3.2. 能量平衡

下面介绍与光源、镜面光和散射光相关的光分布。光源为平行光，即以出射度 $[\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$ 表示，记为 $f(x,\ y) > 0$，$(x,\ y) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$，其中 $\mathcal{S} = [a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$。反射光和散射光都可以用远场中的强度分布 $[\mathrm{W}\cdot\mathrm{sr}^{-1}]$ 描述。我们有：

- 虚拟镜面目标强度分布 $g(\psi,\ \chi) > 0$，$(\psi,\ \chi) \in \mathcal{T}$，
- 散射目标强度分布 $h(\gamma,\ \nu) > 0$，$(\gamma,\ \nu) \in \mathcal{U}$，

其中，$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{U}$ 是角度定义域，使得 $\hat{\mathbf{t}}$ 和 $\hat{\mathbf{u}}$ 位于 S^2 上。它们构成强度分布的支撑集，即 $g = h = 0$ 在这些定义域之外。镜面目标强度分布前加上虚拟一词，是因为粗糙反射器永远无法观测到 g。相反，给定的是 f 和 h，而 g 则通过某种我们尚待说明的方法计算得出；进而通过求解镜面设计问题，可以计算出粗糙自由曲面反射器的形状。

在讨论自由曲面设计问题之前，我们先建立 g 与 h之间的关系。为此，首先要指出，我们关于系统不存在损耗的假设导出了以下全局能量平衡：

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathcal{T}} g(\psi,\chi)\sin(\psi)\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\chi \\ &= \int_{\mathcal{U}} h(\gamma,\nu)\sin(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\nu,\end{aligned} \tag{17}$$

也就是说，光源分布 f 中的所有能量都包含在镜面光分布 g 和散射光分布 h中。

最优传输 假设我们固定 $\psi = \Psi$ 和 $\chi = \mathrm{X}$，使得 $(\Psi,\mathrm{X}) \in \mathcal{T}$。考虑完美镜面反射，即从完美镜面反射的情形。此时，α 消失，且 β 无关紧要，因此式 **(7)** 给出 $\hat{\mathbf{u}} \equiv \hat{\mathbf{t}}$。于是，$\gamma = \Gamma \equiv \Psi$ 和 $\nu = \mathrm{N} \equiv \mathrm{X}$，即 $\mathbf{s}(\Psi,\mathrm{X}\ \alpha,\beta)$ 对所有 $\alpha \in [0,\pi/2]$ 和 $\beta \in [0,2\pi]$ 都是恒等映射。这对任意 Ψ 和 X 都成立，因此得到图 5 中的曲线图。

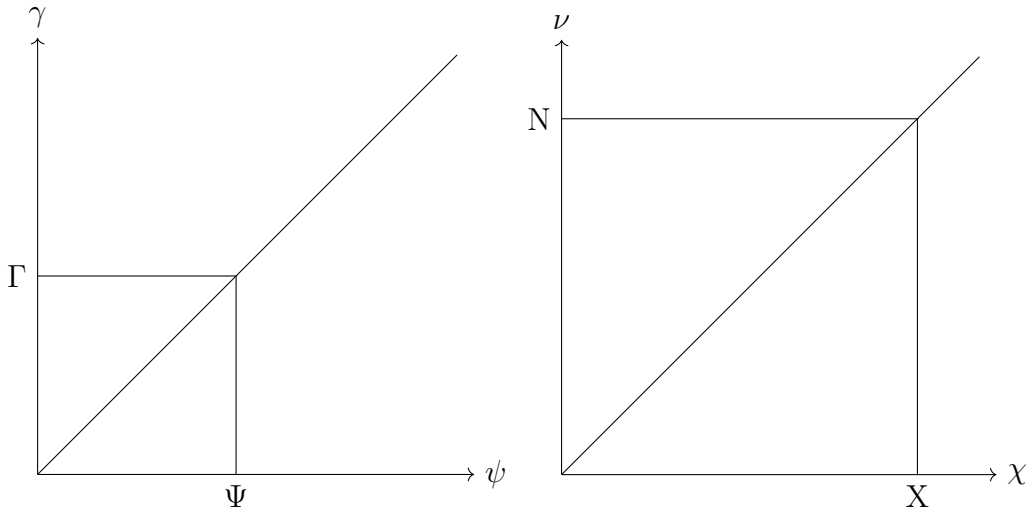


图 5： 具有固定点 $\Psi \to \Gamma$ 和 $\mathrm{X} \to \mathrm{N}$ 的镜面映射 $\psi \to \gamma$ 和 $\chi \to \nu$。

假设我们讨论的是来自粗糙表面的散射，那么 α 和 β 均不为零，图5中示意性展示的简单一一对应关系将被更为复杂的关系所取代。示意而言，我们可以将其想象为线条的展宽，这表明光线沿该方向传播的概率——参见图6。在这里，$[\Gamma_1,\Gamma_2]\times[\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2] \subseteq \mathcal{U}$表示方向（$\Psi$，$\mathrm{X}$）$\in \mathcal{T}$所映射到的非零区域。这种关系更加复杂，但这是一个直观的起点。

现在让我们探讨我们对散射进行建模的方法与最优传输之间的联系，尤其是所谓的 Monge-Kantorovich 问题 [10, 第 1]章。令 $\rho(\psi,\ \chi,\ \gamma,\ \nu) > 0$，$(\psi,\ \chi) \in \mathcal{T}$，$(\gamma,\ \nu) \in \mathcal{U}$表示一个密度，其具有以下性质

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}} \rho(\psi,\chi,\gamma,\nu)\sin(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\nu &= g(\psi,\chi), \\ \int_{\mathcal{T}} \rho(\psi,\chi,\gamma,\nu)\sin(\psi)\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\chi &= h(\gamma,\nu).\end{aligned} \tag{18}$$

若给定一个方向（$\psi,\ \chi$），对域 $\mathcal{U}$ 进行积分即可得到该方向上的镜面反射光。同理，对方向（$\gamma,\ \nu$）对应的域 $\mathcal{T}$ 进行积分，即可得到该方向上的散射光。通过直接代入下式中的关系，式 **(17)** 中的第二个能量平衡得以满足

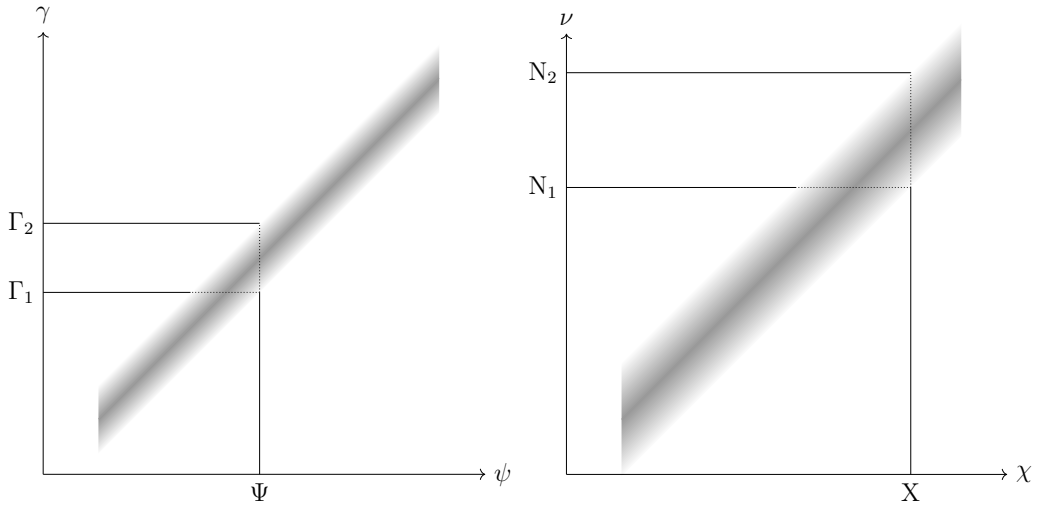


图6： 示意　　散射映射 $\psi \to \gamma$ 和 $\chi \to \nu$，其不动点为 $\Psi \to [\Gamma_1, \Gamma_2]$ 和 $\mathbf{X} \to [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$　　.

在交换积分次序后，式 **(18)** （注意， ρ 的支撑集有限，因此总是可以交换积分次序）：

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{U}} \rho(\psi, \chi, \gamma, \nu) \sin(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\nu\, \sin(\psi)\, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\chi \\ =&\int_{\mathcal{U}} \int_{\mathcal{T}} \rho(\psi, \chi, \gamma, \nu) \sin(\psi)\, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\chi\, \sin(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\nu. \end{aligned} \tag{19}$$

回到图6中的示意散射映射，作出以下假设似乎是合理的。设p 为单位球面上的概率密度函数，用以描述这些线条的展宽。那么，我们将选取的密度 ρ由以下乘积给出

$$\rho(\psi, \chi, \gamma, \nu) = p\big(\mathbf{c}(\psi, \chi, \gamma, \nu)\big) g(\psi, \chi), \tag{20}$$

因为这概括了散射导致光线从方向 $(\psi,\ \chi)$ 扩散开来的现象。将此密度代入方程 **(18)** 中的第二个关系式，并注意到 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{U}$ 构成了 ρ 的有限支撑，因此可以很方便地将积分范围扩展到整个单位球面，我们得到

$$h(\gamma, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p\big(\mathbf{c}(\psi, \chi, \gamma, \nu)\big) g(\psi, \chi) \sin(\psi)\, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\chi, \tag{21}$$

这进一步说明了我们选择该密度的理由。特别要注意的是，如果核函数仅取决于变量之间的偏移量，即满足 $\mathbf{c}(\psi,\ \chi,\ \gamma,\ \nu) = \tilde{\mathbf{c}}(\gamma - \psi,\ \nu - \chi)$，那么这个第一类弗雷德霍姆积分方程就会简化为二维卷积积分。因此，我们可以合理地预期它会起到类似的作用，也就是说，核函数p 会使函数 g“扩散开来”。这与光线被粗糙表面散射时图像会变模糊、而被完美镜面反射时图像不会模糊的现象一致 [1, 第1.8节。4], [11, 第 10]章。

如果我们将根据式**(20)** 所选的 ρ 代入式 **(18)**的第一个关系式，同时将积分限扩展到单位球面，则对于所有 $\psi \in [0, \pi]$ 和 $\chi \in [0, 2\pi]$，得到，

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p\big(\mathbf{c}(\psi, \chi, \gamma, \nu)\big) \sin(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\nu = 1. \tag{22}$$

变换　　将对 γ 和 ν 的积分范围扩展至 α 和 β，得到（请回顾图 **4** 中总结的关系。　　）

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(\alpha, \beta) \sin\big(\gamma(\psi, \chi, \alpha, \beta)\big) \left| \frac{\partial \mathbf{s}(\psi, \chi, \alpha, \beta)}{\partial(\alpha, \beta)} \right| \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = 1. \tag{23}$$

雅可比矩阵，$|\partial \mathbf{s}/\partial(\alpha, \beta)| = 1$，可直接由式 **(11)** 计算，而 $\sin(\gamma)$ 可使用式 **(8)** 求得。由此可得积分

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(\alpha, \beta) \sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = 1, \tag{24}$$

也就是说，我们看到 p 是单位球面上的概率密度函数（概率密度函数），符合要求。从物理上看，很明显（至少对于平坦的反射器表面而言），$\alpha \in [0, \pi/2)$ 和 $\beta \in [0, 2\pi]$，因此我们可以放心地对上半球积分，并保持能量守恒。请注意，α 通常远小于 $\pi/2$。在讨论第5节中的示例时，我们将回到这一点。

旋转对称散射 假设式 **(21)** 中的概率密度函数 p 呈旋转对称，即对于所有 $\beta \in [0, 2\pi]$，$p(\alpha, \beta) = p(\alpha)$。在这种情况下，式 **(21)** 可简化为

$$h(\gamma, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p\big(\alpha(\psi, \chi, \gamma, \nu)\big) g(\psi, \chi) \sin(\psi) \, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\chi, \tag{25}$$

其中，$\alpha(\psi, \chi, \gamma, \nu)$由式（**12**）给出，而 p 满足归一化条件

$$2\pi \int_0^{\pi/2} p(\alpha) \sin(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = 1. \tag{26}$$

注意，式**(25)** 仍是一个弗雷德霍姆积分方程。为简单起见，接下来的数值示例部分（第5节）将重点讨论满足以下条件的概率密度函数：$p(\alpha, \beta) = p(\alpha)$。从物理上说，这意味着散射光线绕镜面反射方向的任何旋转都具有相同的可能性，而只有极角的偏差会受到调制——参见图3。具体而言，我们将选择 p 使得 α 的最可能值从其峰值$\alpha = 0$开始下降，这与所谓的光泽反射中观察到的现象类似 [12, 第 18]。

现在让我们回到图6中的示意性散射映射。特别是，将这些示意图与图7进行比较，后者展示了第5节示例 #1中的核函数 p。由于核函数通过映射 $\alpha(\psi, \chi, \gamma, \nu)$ 是一个四维量，因此我们只考虑固定两个角度的切片—— χ 和 ν或 ψ和 γ。观察顶排可以清楚地看到，对于方位角 χ 和 ν相等的切片，映射 $\psi \to \chi$ 不会变化。然而，当 $\chi \neq \nu$时，映射会显著不同。特别是，接近极点的值更可能仍然靠近极点，无法轻易到达例如赤道的位置。与此同时，映射 $\chi \to \nu$ （底排）的情况则大不相同。首先，注意到该映射在 $\chi = 2\pi$和 $\nu = 2\pi$ 处自然呈周期性，因为这是球面的周期。其次，请注意，对于极角 ψ 和 γ 相等的切片，这些映射确实会变化。这与根据旋转对称散射概率密度函数所预期的情况一致，因为我们选择了 $p(\alpha)$，使其在靠近 $\alpha = 0$ （即$\psi = \gamma$）时最显著，随后相对迅速地下降至接近零的值——参见第5节示例 #1。

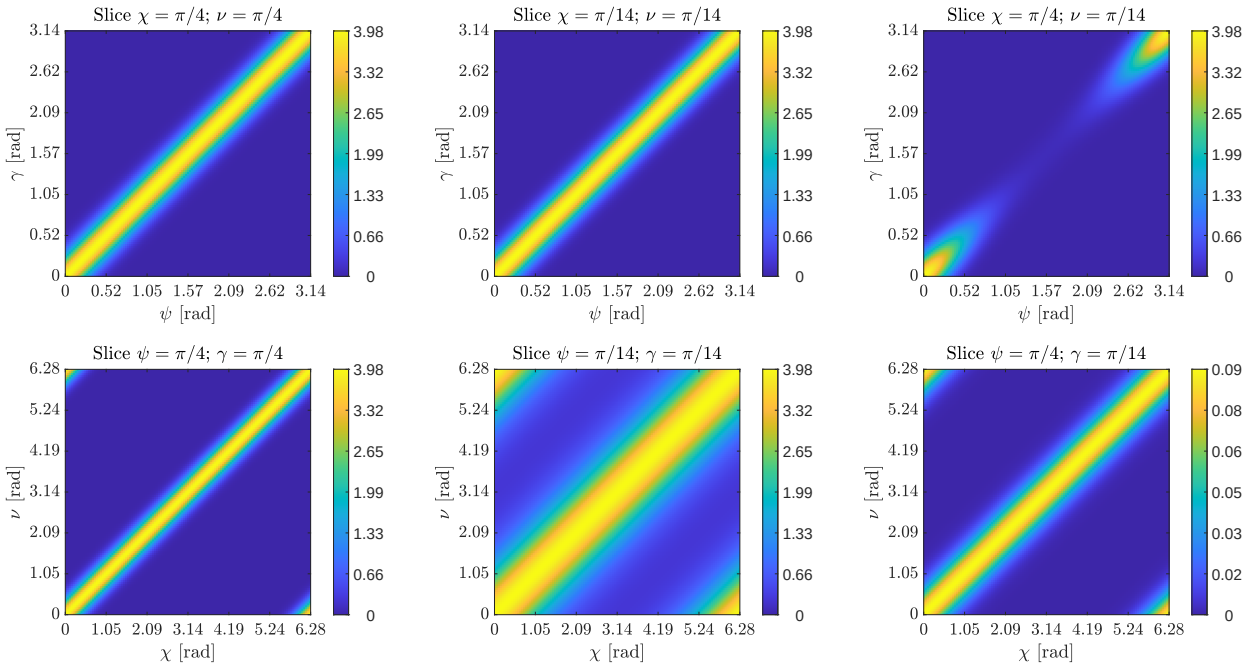


图 7： 第5节示例 #1 中，χ 和 ν 或 ψ 和 γ 取不同固定值时的散射映射 $\psi \to \gamma$ 和 $\chi \to \nu$。

2.3.3. 展开弗雷德霍姆积分方程

假设我们想求解逆问题：给定目标强度分布 h 和散射函数 p，能否计算出虚拟镜面分布 g? 如果散射方程是卷积积分，那么求解逆问题就称为反卷积。由于它们是弗雷德霍姆积分，出于历史原因，我们将这一过程称为展开 ——参见例如 [13]。形式上，在某些受限情形下，展开弗雷德霍姆积分方程时可以构造出唯一的闭式解析解 [14, 第 12], 章；但我们关注的是更通用的数值方法，以求得 g 的近似值。

我们将对弗雷德霍姆积分问题应用理查森-露西反卷积。该方法基于极大似然论证；理查森和露西分别独立地提出了一种比值反卷积方法，这是为了满足望远镜图像去模糊的需求，以及荧光显微镜领域的需要 [15, 16]。具体而言，理查森采用了贝叶斯统计，并假设模糊是由条件概率造成的；而露西则考虑在解空间内最大化观测样本的似然。我们不会正式证明理查森-露西反卷积适用于展开我们的弗雷德霍姆积分方程。不过，露西在 [16] 中的推导非常通用，只需假设模糊是通过泊松过程产生的即可。

在给出最终的 Richardson-Lucy 表达式之前，我们先对式 **(21)** 中的弗雷德霍姆积分方程进行离散化（对于式 **(25)**中的旋转对称情况，处理方式类似）。固定一个包含 $N_1 \times N_2$ 个点的矩形网格，并令 $\mathbf{h}$ 为 h 的矩阵表示，其分量为 $h_{ij} = h(\gamma_i, \nu_j)$，其中 $i \in [1, N_1]$ 和$j \in [1, N_2]$。类似地，令 $\mathbf{g}$ 为 g 的矩阵表示，使得 $g_{kl} = g(\psi_k, \chi_l)\sin(\psi_k)$，其中 $k \in [1, N_1]$和 $l \in [1, N_2]$。最后，令 $\mathbf{p}$ 为 p 的张量表示，使得 $p_{ij}^{kl} = p(\mathbf{c}(\psi_k, \chi_l, \gamma_i, \nu_j))$，其中$i, k \in [1, N_1]$ 和 $j, l \in [1, N_2]$。于是，弗雷德霍姆积分可写为

$$\mathbf{h} = \mathbf{pg}, \tag{27}$$

或者，逐元素表示为

$$h_{ij} = p_{ij}^{kl} g_{kl}, \tag{28}$$

其中默认采用爱因斯坦求和约定。

现在将两个方阵$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$的逐元素乘法（即 Hadamard 积）记作$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$，其中 $\dim(\mathbf{A}) = \dim(\mathbf{B})$。所得矩阵的元素为

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{ij} := A_{ij} B_{ij}. \tag{29}$$

类似物 与前文相同，逐元素除法（即哈达玛除法）表示为 $\mathbf{A} \oslash \mathbf{B}$，矩阵元素曾道人 ts

$$(\mathbf{A} \oslash \mathbf{B})_{ij} := \frac{A_{ij}}{B_{ij}}, \tag{30}$$

其中 $B_{ij} \neq 0$。在弗雷德霍姆积分方程的语境下，Richardson-Lucy 方法可写为

$$\mathbf{g}_{\text{uf}}^{(n+1)} = \mathbf{g}_{\text{uf}}^{(n)} \odot \left[\mathbf{p}\left(\mathbf{h} \oslash \left(\mathbf{p}\mathbf{g}_{\text{uf}}^{(n)} \right) \right) \right], \tag{31}$$

其中， $n \in \mathbb{N}$ 是迭代变量，$\mathbf{g}_{\text{uf}}$ 是对 g的近似的离散矩阵表示。作为迭代的初始值，我们取$\mathbf{g}^{(0)}{}_{\text{uf}} = \mathbf{h}$，并不采用解收敛等正式的停止准则，而是在经过固定次数的迭代后停止；对于该方法而言，这个次数足以使其收敛。涉及$\mathbf{p}$ 的张量乘法按式**(28)**中的方式进行。

值得注意的是，对弗雷德霍姆积分进行展开与反卷积类似，都是不适定问题 [14,第12章。12]在某些情况下，可以证明反卷积方法会收敛 [17, 章 5], ，但这些方法限制过多，无法用于我们的目的，当然也不适用于使用迭代反卷积方法展开弗雷德霍姆积分方程。我们将在讨论第5节中的数值示例时，再探讨这种方法的效果。

3. 自由曲面镜面反射器设计

现在我们将讨论如何在考虑光散射的情况下，计算能够产生所需目标光分布的反射器表面。首先，对公式**(25)**进行离散化，然后使用公式**(31)**中的 Richardson-Lucy 方法对其进行展开，从而得到虚拟镜面目标分布$\mathbf{g}_{\text{uf}}$。接下来，我们计算出满足由此得到的镜面 问题的反射器。为此，我们采用了数值 Monge-Ampère 求解器，该求解器最初由 Prins [3] 在本研究小组中提出，随后由 Yadav [4]和 Romijn [5]进一步完善。详细内容超出了本文的讨论范围，下面仅作概要介绍。

3.1. 立体投影坐标

由于某些方程在立体投影坐标中更易处理，因此计算反射器表面的代码采用了这种坐标。具体而言，我们必须将镜面目标强度$\mathbf{g}_{\text{uf}}$ [W $\cdot$sr^{-1}]转换为以立体投影坐标定义的强度。考虑连续情形，其中 $g_{\text{uf}}(\psi, \chi)$。为简化记号，本节将省略 g 上的下标$_{\text{uf}}$ 。

设 $f(\mathbf{x}) > 0$ 为光源的出射度分布，设 $g(\psi, \chi)$ 为镜面目标强度（我们稍后再讨论其定义域）。回顾图 1 中的几何：平行光线从$\mathcal{S}$ 域沿 xy平面射出，平行于 z轴正方向，并照射到一个反射器上；该反射器由某个高度函数$z = u(\mathbf{x}) > 0$、$\mathbf{x} \in \mathcal{S}$参数化。因此，求解逆问题归结为寻找 $u(\mathbf{x})$，使得 f 转换为 g。

回想一下，$\hat{\mathbf{t}}(\psi, \chi)$ 是镜面反射光线的方向，而$\mathbf{y}$ 是式(13)中定义的$\hat{\mathbf{t}}$ 的二元组立体投影表示。我们选择从北极进行立体投影，因为反射器表面位于平行光源上方，这意味着反射光线通常朝“下方”传播，即沿负 z方向。请注意，从北极进行的立体投影在北极处无定义，即我们考虑 $t_3 \neq 1$ 和 $\psi \neq 0$。相应的反立体投影为

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ \|y\|^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

3.2. 能量守恒

令 $\tilde{g}$ 为 $g(\psi, \chi)$ 的立体投影表示，使得 $\tilde{g}(\mathbf{y}) = g\big(\psi(\mathbf{y}) \ \chi(\mathbf{y})\big)$。令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ 为光源域的一个（子）集。于是，远场近似下的局部能量守恒表明

$$\int_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\hat{\mathbf{t}}(\mathcal{A})} g(\psi, \chi) \, \mathrm{d}\mathbf{S}(\psi, \chi), \tag{33}$$

其中 $\mathrm{d}\mathbf{S}(\psi, \ \chi) = \sin(\psi) \, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\chi$，且 $\hat{\mathbf{t}}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{S}^2$ 是 $\mathcal{A}$ 在单位球面上的所谓像集。对于局部能量守恒，有 $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$；而对于全局能量守恒，有 $\mathcal{A} \equiv \mathcal{S}$，因此 $\hat{\mathbf{t}}(\mathcal{A}) \equiv \hat{\mathbf{t}}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$。将单位球面一部分上的积分转换为相应立体投影域上的积分，并回顾 $\tilde{g}(\mathbf{y})$ 的定义，可得

$$\int_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbf{y}\left(\hat{\mathbf{t}}(\mathcal{A})\right)} \tilde{g}(\mathbf{y}) \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_2} \right| \mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{34}$$

其中，$\mathbf{y}\big(\hat{\mathbf{t}}(\mathcal{A})\big)$ 构成像集 $\hat{\mathbf{t}}(\mathcal{A})$ 的立体投影。利用式 (32) 可直接求得雅可比矩阵：

$$\left| \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_2} \right| = \frac{4}{\big(1 + \|\mathbf{y}\|^2\big)^2}. \tag{35}$$

设立体投影坐标中的光学映射为 $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$（回忆一下，$(\psi, \ \chi) = \mathbf{m}(\mathbf{x})$ 是球坐标中的光学映射）。那么，式 (34) 变为（代入并转换为关于 $\mathbf{x}$ 的积分后）：

$$\int_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathcal{A}} \tilde{g}\big(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\big) \frac{4}{\big(1 + \|\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\|^2\big)^2} \det\big(\mathrm{D}\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\big) \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{36}$$

其中，行列式周围省略绝对值表示我们将自身限制在正雅可比矩阵 $\det\big(\mathrm{D}\ \tilde{}\mathbf{m}(\mathbf{x})\big)$的情形，并且 $\mathrm{D}\ \tilde{}\mathbf{m}(\mathbf{x})$ 表示关于 $\mathbf{x}$ 的雅可比矩阵。由于上述关系对每个 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ 都成立，因此逐点可得，

$$\det\big(\mathrm{D}\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\big) = \frac{1}{4}\big(1 + \|\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\|^2\big)^2 \frac{f(\mathbf{x})}{\tilde{g}\big(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\big)}. \tag{37}$$

最后，对于平行入射光和远场目标的情形，映射 $\tilde{}\mathbf{m} = \boldsymbol{\nabla} u$ 见 [5, 第 3 节。2]由此，我们得到所谓的标准蒙日-安培方程

$$\det\big(\mathrm{D}^2 u(\mathbf{x})\big) = \frac{1}{4}\big(1 + \|\boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{x})\|^2\big)^2 \frac{f(\mathbf{x})}{\tilde{g}\big(\boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{x})\big)}, \tag{38}$$

其中，$\mathrm{D}^2 u(\mathbf{x})$ 表示海森矩阵。为了求得反射器，必须针对高度函数 u 求解这一非线性偏微分方程。

3.3. 蒙日-安培方程的数值解

求解式(38) 中的标准蒙日-安培方程并非易事，因此我们选择了数值最小二乘法。要详细说明该方法，我们需要进一步超出本文的讨论范围。因此，我们请读者参阅 Prins、Yadav 和 Romijn 的著作 [3–5]。不过请注意，我们始终计算严格凸解，使得$\mathbf{m}$ 和 $\tilde{}\mathbf{m}$ 均为单射映射。

4. 验证

本节介绍我们如何在第5节中对模型进行数值验证。具体而言，按照第3节所述的方法计算出反射体后，我们对其进行了光线追迹，并将所得分布与模型预测的分布进行了比较。

4.1. 光线追迹

为此，我们编写了一个自定义光线追踪器，直接实现第 2 节中提出的散射模型。我们没有使用 LightTools 等现有光线追迹软件，而是选择了这种方法，以便完全控制散射行为，从而可靠地验证模型。

4.1.1. 实现

光线追踪器是在 Matlab 中实现的，其工作原理如下。首先，使用 Matlab 的 surfnorm 程序计算矩形网格上每个采样点处反射器的法线。接下来，使用 Matlab 的 rand 命令从光源分布中采样一条方向为 $\hat{\mathbf{s}} \equiv (0,0,1)^{\mathsf{T}}$ 的光线（为简便起见，我们始终使用恒定光源）。然后，使用 Matlab 的 interp2 程序，通过分段线性插值求出交点处的法线 $\hat{\mathbf{n}}$，即假设法向量的每个分量在初始矩形网格上距离最近的已知法线之间呈线性变化。根据矢量反射定律，即公式 **(2)**，计算与该光源光线对应的反射方向 $\hat{\mathbf{t}}(\psi,\chi)$。接下来，通过使用来自 $\hat{\mathbf{t}}$ 的 ψ 和 χ，并通过从适当的概率密度函数 p 中采样获得 α 和 β，应用公式 **(7)** 计算散射光线——有关此采样的详细信息，请参见下一段。

我们对定义域 $\mathcal{S}$、$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{U}$ 进行离散化，以收集光源光线、镜面光线和散射光线，并形成所谓的“分箱”。接下来，我们应用 Matlab 的 dsearchn 最近点搜索例程，并将返回的分箱中的光线数量加一。

追踪到所需数量的光线后，将每个分箱中的光线计数转换为出射度或强度，以便与 f、g 或 h进行比较。例如，假设我们有一个由分箱组成的 $N_1 \times N_2$ 网格。那么，光源的出射度可通过 ($i \in [1, N_1]$, $j \in [1, N_2]$) 估算

$$E_{ij} = \frac{\Pr(x_{i-1} \le x < x_i \;\&\; y_{j-1} \le y < y_j)}{\Delta x\, \Delta y} \times \int_{\mathcal{S}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{39}$$

其中，$\Pr(x_{i-1} \le x < x_i \;\&\; y_{j-1} \le y < y_j)$ 表示 ij个分箱中光线的数量除以追踪的光线总数，即落入 ij个分箱的概率。式 **(39)** 中的积分表示光源的总通量，而 $\Delta x\, \Delta y$ 是分箱的大小。类似地，镜面强度分布可通过以下方式估算

$$I_{ij} = \frac{\Pr(\psi_{i-1} \le \psi < \psi_i \;\&\; \chi_{j-1} \le \chi < \chi_j)}{\sin(\psi_i)\, \Delta\psi\, \Delta\chi} \times \int_{\mathcal{S}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{40}$$

其中各符号的含义与前文类似。散射强度也使用式 **(40)** 进行估算，其中 ψ 和 χ 分别替换为 γ 和 ν。关于这种光线追迹方法的更多详情，请参见 [18, 第 34]。

对 α 和 β 的采样现在我们来考虑在光线追踪器中对 α 和 β 进行采样的问题。我们已经提到，β 将在 $[0, 2\pi]$ 上均匀采样，因此我们只需考虑如何对 α 进行采样。例如，假设我们想要一个“球面上的旋转对称高斯分布”。这是一个模糊的定义，可以有多种解释。例如，我们可以通过一种称为逆变换采样的过程，从常规的一维高斯分布中选取 α，然后均匀地选取 β；或者，我们可以使用广义分布在球面上选取正态分布点，例如地质学和生物信息学中使用的肯特分布 [19]。

我们采用了以下方法。首先，选取两个相互独立且服从正态分布的变量$q_1 \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$和 $q_2 \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$，其中 $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$是均值为 μ、标准差为 σ的正态分布。平面$\mathbf{q} := (q_1, q_2)^{\mathsf{T}}$中的点 $\in \mathbb{R}^2$ 从旋转对称的二维正态分布中选取。随后对$\mathbf{q}$ 进行从南极出发的反立体投影，得到单位球面上的一个点，该点表示圆锥向量$\hat{\mathbf{c}}$的方向。也就是说，

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 1 - \|\mathbf{q}\|^2 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

这样，我们便能得到用$\mathbf{q}$表示的 α 和 β 的闭式表达式：

$$\begin{aligned}\alpha(q_1,q_2) &= \arccos\left(\frac{\|\mathbf{q}\|-1}{\|\mathbf{q}\|+1}\right),\\ \beta(q_1,q_2) &= \arctan(q_1,q_2).\end{aligned} \tag{42}$$

可以证明（参见附录第 7 节），与这种选取α 和 β 的方法相关联的概率密度函数 $p(\alpha;\sigma)$ 为

$$p(\alpha;\sigma)=\frac{1}{8\pi\sigma^2}\,\sec^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right). \tag{43}$$

因此，光线追踪器通过对 $q_1\sim\mathcal{N}(0,\ \sigma)$ 和 $q_2\sim\mathcal{N}(0,\ \sigma)$ 进行采样，并应用公式 （**42**），来选取 α 和 β。与此同时，将公式 （43）中的 p 代入公式 （**25**），并计算公式 （**28**）中的离散形式，即可得到预测的散射光分布。

4.2. 均方根误差

均方根（RMS）误差用于量化光线追迹分布与精确分布之间的误差。对于网格间隔为 $N_1\times N_2$ 的离散化网格，即包含 N_1 个极角和 N_2 个方位角时，$\mathbf{h}$ 与光线追迹$\mathbf{h}^*$ 之间的均方根误差定义为

$$\varepsilon(\mathbf{h},\mathbf{h}^*):=\sqrt{\frac{1}{N_1N_2}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\left|h_{ij}-h_{ij}^*\right|^2}. \tag{44}$$

请注意，今后上标星号（*）表示光线追迹分布。

5. 数值示例

本节讨论两个数值示例，以展示本文概述的设计流程，以及不同程度的表面散射对计算所得自由曲面反射体形状的影响。令

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(x,y;\mu_x,\mu_y,\sigma_x,\sigma_y):=\\ &\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{45}$$

为均值分别为 μ_x 和 μ_y 、标准差分别为 σ_x 和 σ_y 的二维正态分布（高斯分布）。

5.1. 示例 *#1*：重叠高斯分布

下面概述我们考虑的第一个示例，其中 $p(\alpha;\sigma)$ 可见式 **(43)**：

光源域： $\mathcal{S}=[-1,1]\times[-1,1]$
目标域：见正文
光源分布： $f(x,\ y)\ =\ \dfrac{1}{4}$
散射目标分布：

$$\begin{aligned}h(\gamma,\nu)=\frac{1}{1.8202}\Bigg[&\mathcal{N}\left(\gamma,\nu;\frac{41\pi}{60},\frac{5\pi}{6},0.3,0.4\right)\\ &+\mathcal{N}\left(\gamma,\nu;\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6},0.25,0.45\right)+0.3\mathcal{N}\left(\gamma,\nu;\frac{19\pi}{24},\pi,0.2,0.4\right)\Bigg]\end{aligned}$$

表面散射函数： $p(\alpha;\,0.1)$

图8展示了规定的分布，其中我们选择将 p 绘制在单位球面上，以便与图2进行比较。请注意，圆锥向量最可能出现的位置接近 z轴，即相对较小的小角度散射，并且我们可以确信 $\alpha<\pi/2$。除了伪彩色图之外，我们

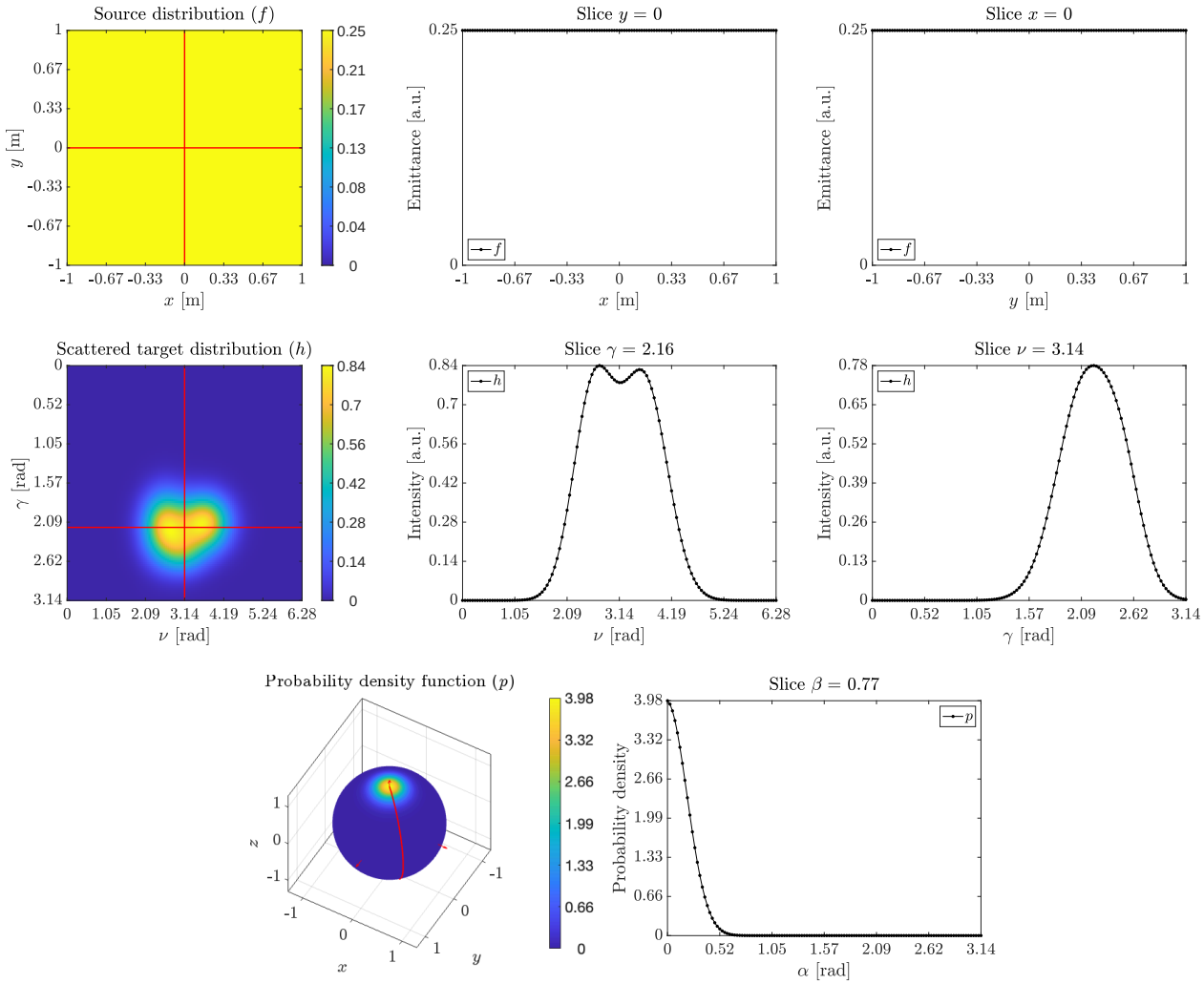


图 8： 示例 #1 中的指定分布； 128^2 采样点。

还沿红线对每个分布进行了“切片”，并在相应伪彩色图的右侧给出了对应的图。请注意，我们选择 f 和 h ，使得（能量守恒）

$$\int_{\mathcal{S}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{U}} h(\gamma,\nu)\sin(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\nu = 1, \tag{46}$$

其中， $\mathcal{U}$ 是按照下文所述的方法求得的 . 这就是乘法因子 $1/1$的来源 .8202 在 h 。接下来，我们使用 1000 次 Richardson-Lucy 迭代计算了“展开后”的分布 g_{uf} ，也就是说，将式 (31) 应用了 1000 次。由此得到图 9 中的分布。请注意，由于这个问题的精确解未知，因此我们无法将 g_{uf}与任何结果直接比较。因此，我们计算了所谓的“折叠回去的”$\mathbf{h}_{\mathrm{rf}} := \mathbf{p}\mathbf{g}_{\mathrm{uf}}$，它表示使用 g_{uf}设计的反射器所产生的散射分布。结果如图 10 所示。可以看到， h 与 h_{rf} 非常相似，这意味着 g_{uf} 能够很好地表示“真实的” g ——至少就反射器预测的散射分布会接近指定目标分布而言。这表明，对于展开我们的 Fredholm 积分这一更一般的问题，Richardson-Lucy 反卷积方法效果良好。

接下来，给定作为光源的 f ，我们计算了在远场实现 g_{uf} 的镜面反射器。由于最小二乘算法的工作方式，我们必须在目标域中指定一个边界，并确保该边界内的 $\tilde{g}_{\mathrm{uf}}$ 数值不会过于接近零——请回顾式 (38) 。由于我们的初始散射目标分布由重叠的高斯函数组成， g_{uf} 的支撑集并非有限。因此，我们选取某个 ϵ 作为截断值，并通过以下方式求得勾勒出镜面目标域的边界

$$\mathcal{T} = \{(\psi,\chi) \mid g_{\mathrm{uf}}(\psi,\chi) \geq \epsilon\}. \tag{47}$$

这一过程的结果如图 11 所示，其中 $\epsilon = 0.1\max(g_{\mathrm{uf}})$；引入边界后，我们对 g_{uf} 重新归一化，以保持能量守恒。白色轮廓显示了目标域 $\mathcal{T}$ 的边界，即 g_{uf} 的支撑集。

由于我们通过赋予 g_{uf} 有限定义域并对其重新归一化对其进行了修改，因此自然必须相应地更新预测的散射光分布，也就是说，使用新的 g_{uf} 再次应用弗雷德霍姆积分方程，将其作为

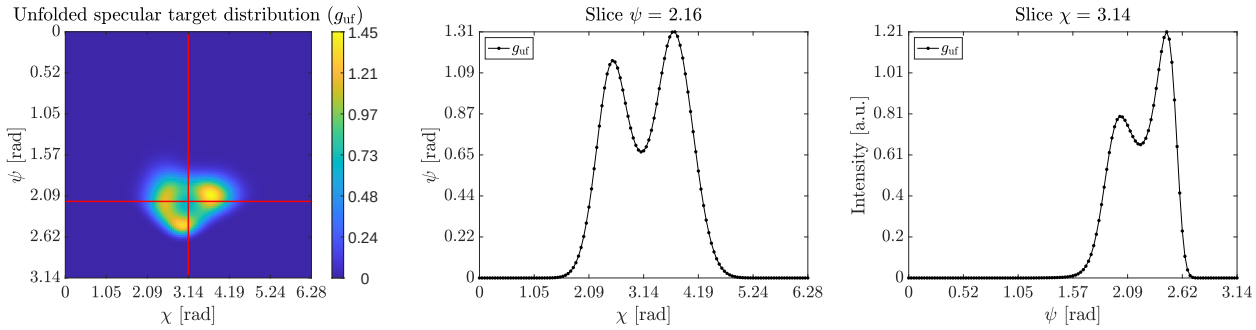


图 9： 示例 #1 中展开的镜面目标分布 g_{uf}； 128^2 采样点，1000 次 Richardson-Lucy 迭代。

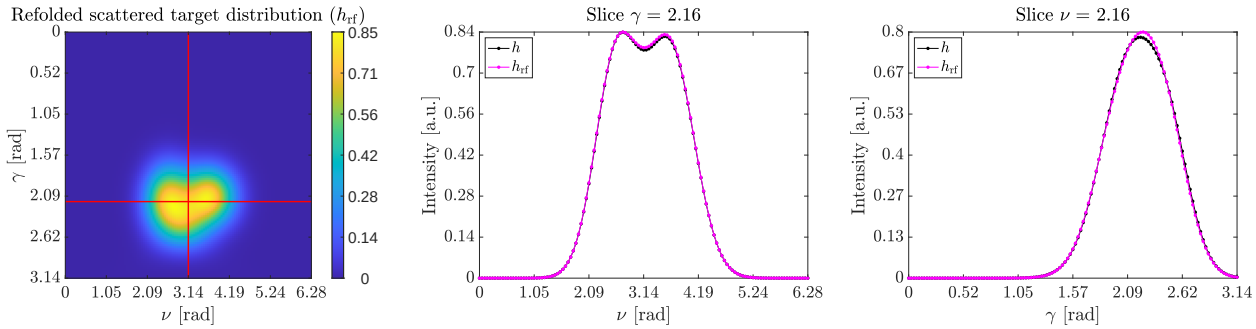


图10： 示例 #1 中折叠后的散射目标分布 h_{rf}； 128^2 采样点。

镜面目标分布。结果如图 12 所示，可以看到，最终预测的 h_{rf} 与原始 h非常相似，但由于镜面目标 g_{uf}的尾部被截去，中心附近的数值略有增加，而更远处的数值则有所降低。

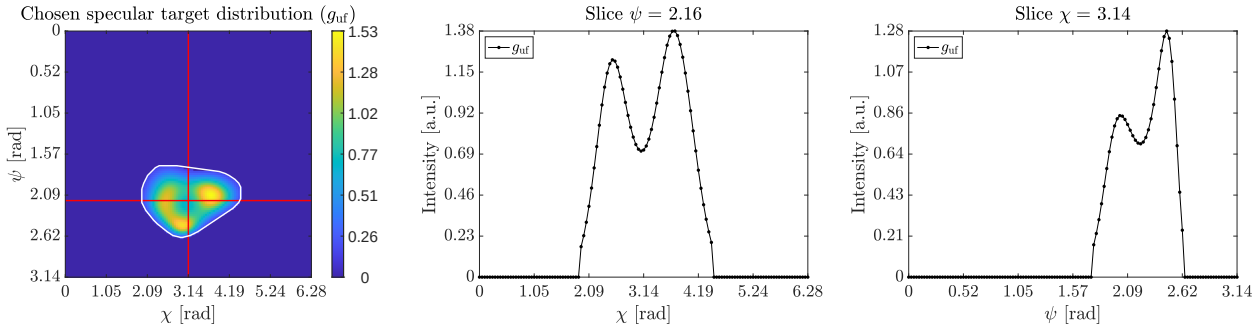


图11： 示例 #1 中的镜面目标及其支撑范围，包含 g_{uf} 个 128^2 采样点。

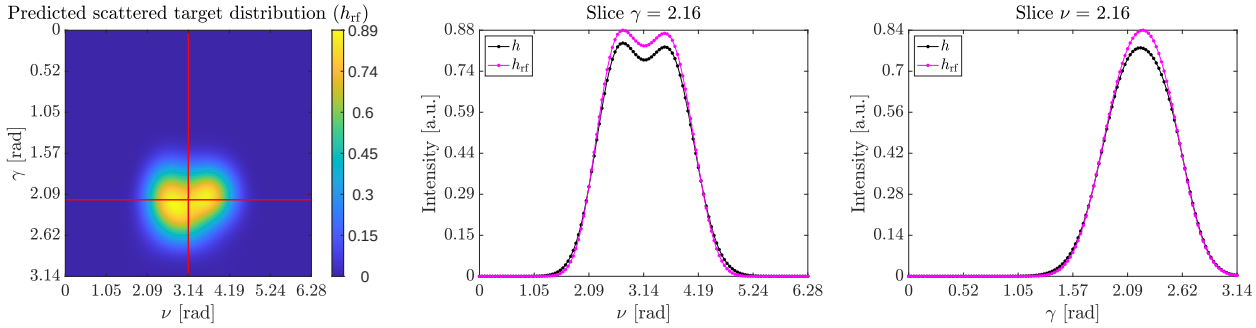


图12： 示例 #1 中最终预测的散射分布； 128^2 采样点

s.

接下来，使用最小二乘求解器计算反射器，然后使用自定义光线追踪器验证表面形状和我们的散射模型。追踪 10^7 条光线后的结果如图 13 所示，可以看到，光源采样是均匀的，且散射光分布与我们的预测非常

接近，这一点也得到了均方根误差基本遵循预期 $N_r^{-1/2}$趋势的证实，其中 N_r 是追踪的光线数 [18, p。 9]。镜面分布在某些位置确实偏离了指定目标，切片最能体现这一点——尤其是靠近 $\mathcal{T}$ 边界的数据点，以及靠近峰值的数据点。这些差异源于用于计算反射器表面的数值最小二乘求解器，也可能是均方根误差斜率略微偏离理论值的原因。采用更细网格或许可以改善结果。然而，关键在于，这些差异并未显著影响散射光，而这正是本文关注的重点——显然，我们对散射光的预测与光线追踪器得到的结果非常吻合。

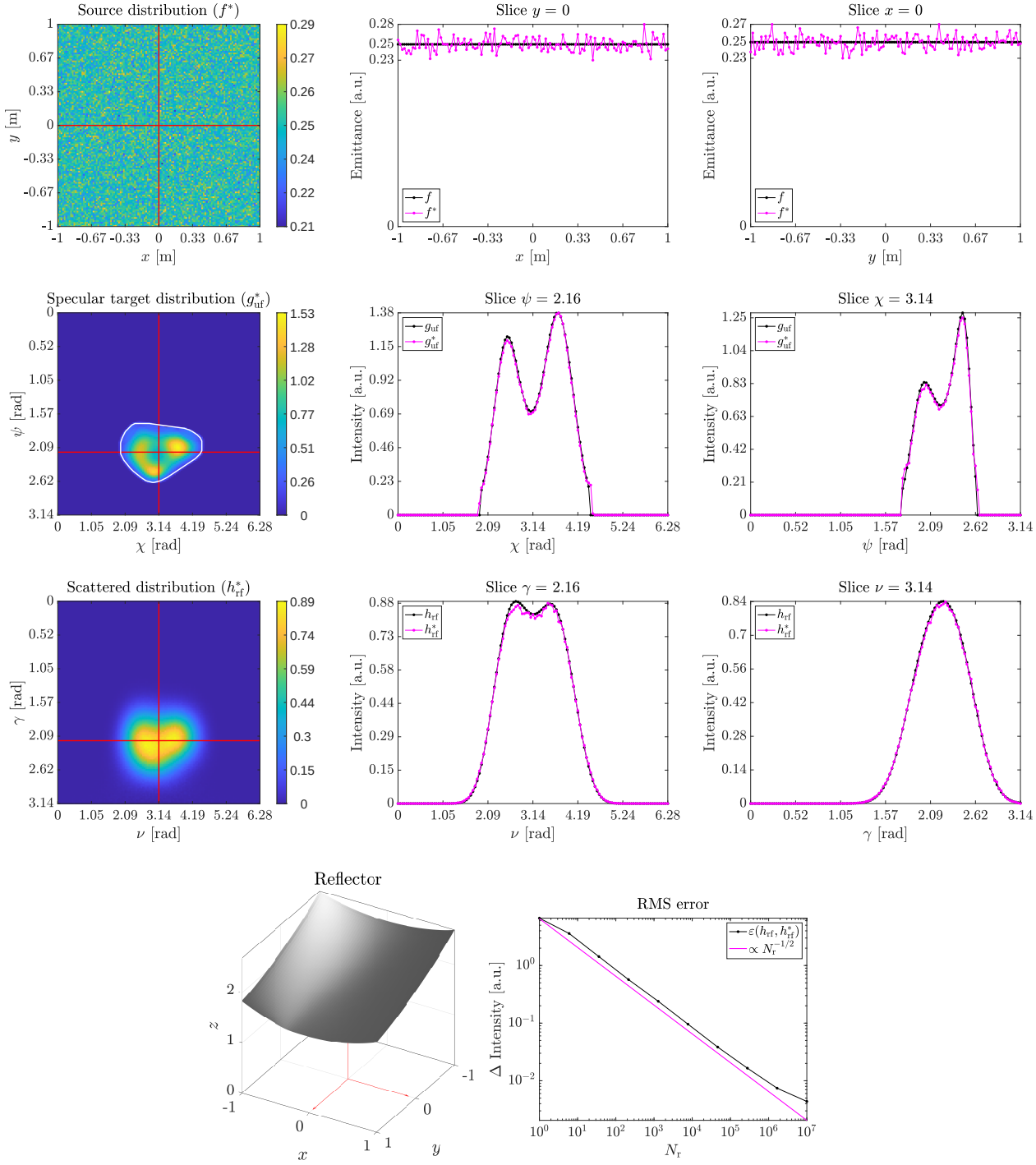


图13: R aytraced 分布和示例 #1 中的反射器； 128^2 个采样点， 10^7 条追踪的光线 .

5.2. 示例 *#2*：不同程度的散射

在第二个示例中，我们希望直观展示并量化表面散射程度变化所导致的反射器形状差异。问题如下所述，其中我们再次施加能量守恒条件，使光源分布和目标分布的积分均为 1。表面散射函数 p 可见式 **(43)**，其中 σ变化，即系统中的散射程度不同。此处，$\sigma = 0$ 表示一个光滑的镜面反射器。

光源域：$\mathcal{S} = [-1,1] \times [-1,1]$目标域：见正文 光源分布：$f(x,\ y) = \frac{1}{4}$ –

散射目标分布：

$$h(\gamma,\nu) = \frac{1}{0.685389}\mathcal{N}\left(\gamma,\nu;\frac{3\pi}{4},\pi,0.25,0.75\right)$$

表面散射函数：$p(\alpha;\ \sigma)\quad \sigma \in \{0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1\}$

图 14 显示了 p 取非零值时的概率密度函数以及相应的镜面目标分布，同时还显示了通过固定 $\epsilon = 0.1\max(g_{\text{uf}})$ 找到的 $\mathcal{T}$ 边界。逐步增大 σ 会使目标变得更加“尖锐”；目标域缩小，最大值增大。

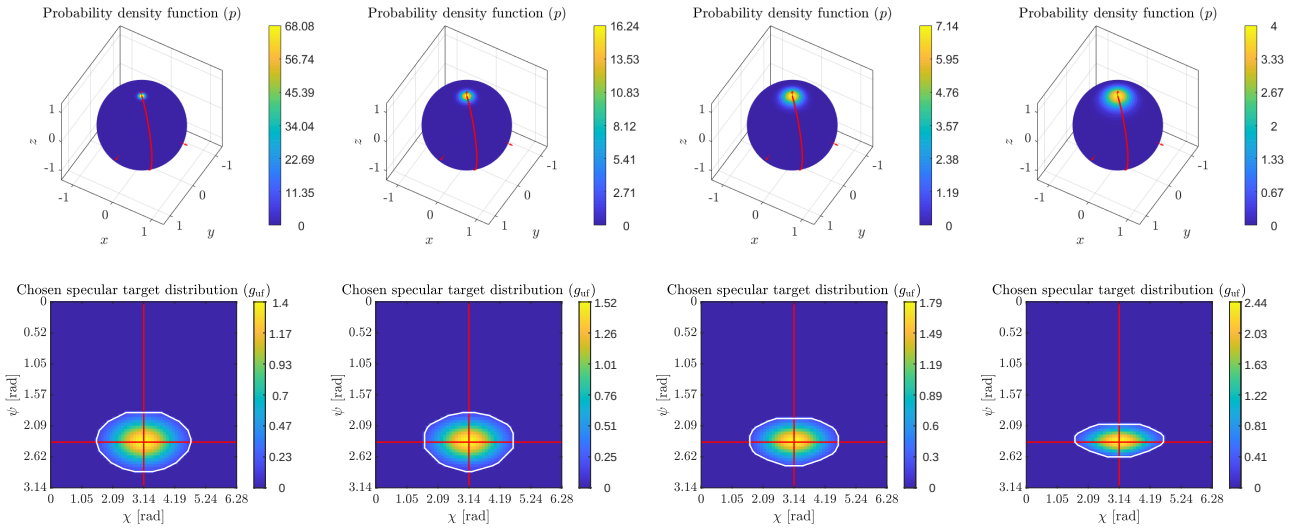


图14： 示例 #2 中的概率密度函数和镜面目标分布；$\sigma \in \{0.025, 0.05, 0.075, 0.1\}$ 从左到右；64^2 采样点。

图 15 显示了散射对反射器的影响，其中基准反射器取为达到 h 给定 f的镜面反射器，即 $\sigma = 0$ 使得 p 为狄拉克δ函数，且 $g \equiv h$。后续反射器的 σ值逐渐增大，对应的散射也越来越强，直至 $\sigma = 0.1$。正如预期，散射越强，反射器相对于基准反射器所需的改动就越大；我们看到高度变化可达反射体尺寸的几个百分点，这与我们此前在二维情形中的观察一致[8]。如前所述，这种量级的变化通常被认为是可制造的。

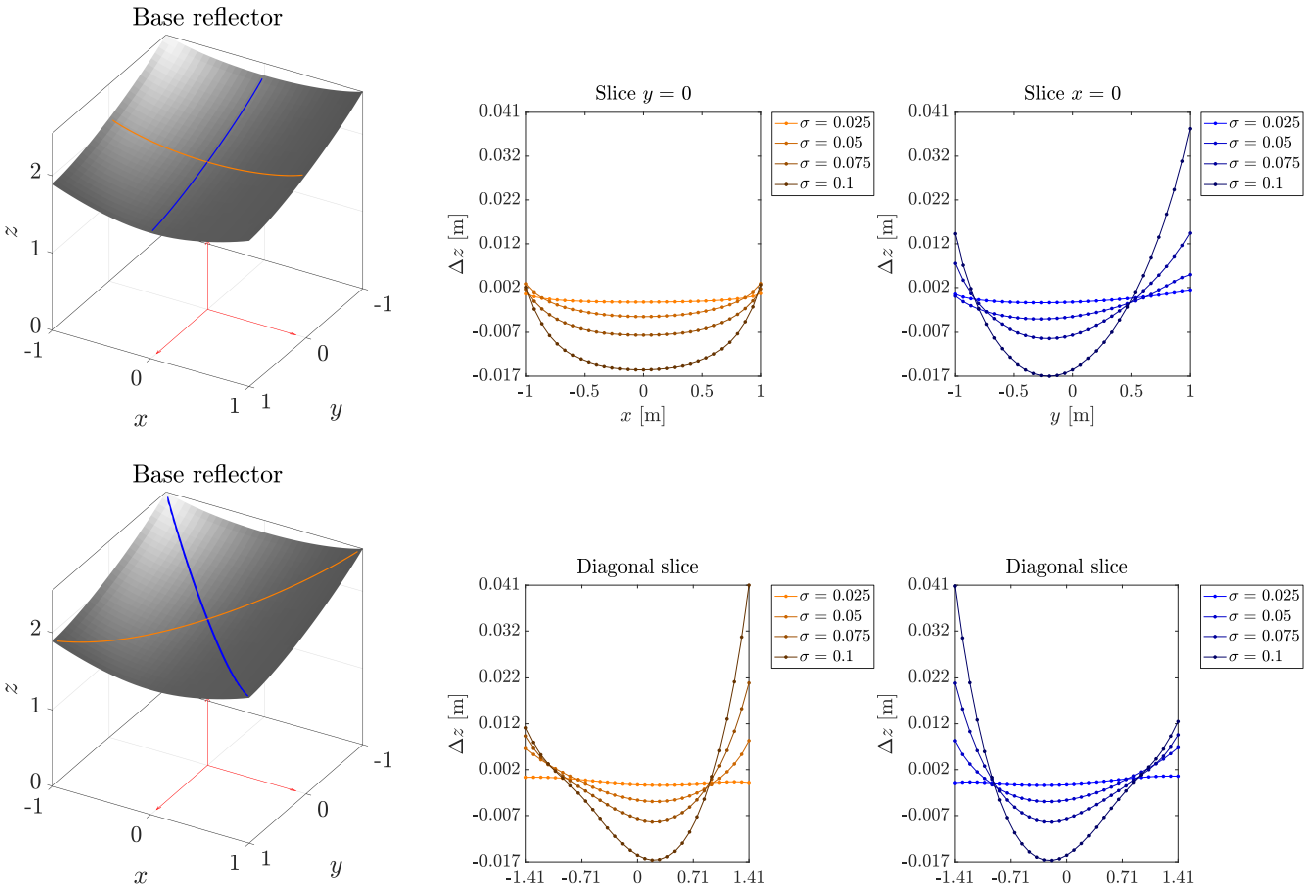


图 15： 沿所示线的切片，适用于表面散射量不同且均满足示例 #2 中问题的反射体； 32^2 采样点。

6. 结论

我们提出了一种受最优传输启发、用于计算具有散射表面的自由曲面反射器的新方法。该方法采用具有特定性质的密度函数，由此得到一个第一类弗雷德霍姆积分方程。根据定义表面散射特性和镜面分布的概率密度函数（概率密度函数），该方程可提供远场散射光的信息。通过展开弗雷德霍姆积分，我们可以构造一个虚拟镜面目标分布。随后，在求解照明光学逆问题（即计算反射器）时，可将该虚拟分布用作目标。采用这种方法，即使考虑表面散射，也能确保实现指定目标。

因此，设计具有散射表面的自由曲面反射器可分为两个步骤。首先，通过展开描述模型中散射过程的弗雷德霍姆积分方程来修正目标分布。然后，使用现有方法计算相应的镜面反射器。

我们未来的目标是将本文提出的方法扩展 [8] 至三维情形。在先前的工作中，我们利用微表面来模拟导致光散射的粗糙表面。此外，增强模型适用性的一种方法是消除目前对各向同性表面的限制。

资助： 本研究部分由荷兰研究理事会（荷兰语： Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO)）通过资助项目 P15-36 提供支持。**利益冲突声明：** 作者声明不存在任何利益冲突。**数据可用性：** 目前无法公开获取本文所述结果所依据的数据，但可应要求向作者索取。

参考文献

[1] R. J. Koshel, 《照明工程：采用非成像光学进行设计》（IEEE Press；Wiley，美国新泽西州皮斯卡塔韦：新泽西州霍博肯，2013），ISBN：978-0-470-91140-2。[2] M. Maes, 《反射器设计的数学方法》（荷兰皇家图书馆编目数据，海牙，1997），ISBN：90-74445-36-5。[3] C. Prins, 《照明光学的逆向方法》（埃因霍温理工大学，2014），ISBN：978- 90-386-3662-7。[4] N. Yadav, 《具有非二次代价函数的 Monge-Ampère 问题：在自由曲面光学中的应用》（埃因霍温理工大学，2018年9月），ISBN：978-90-386-4574-2。[5] L. B. Romijn, 《自由曲面光学设计中的生成雅可比方程：数学理论与数值计算》（埃因霍温理工大学，2021年10月），ISBN：978-94-6416-694-1。[6] R. J. Lin、M.-S. Tsai 和 C.-C. Sun，“用于 LED 筒灯照明的具有光散射自由曲面内表面的新型光学透镜设计”，《光学快报》23，16715，ISSN：1094-4087（2015）10.1364/OE. 23.016715，（访问日期：2022年9月9日）。[7] V. C. E. Kronberg、M. J. H. Anthonissen、J. H. M. ten Thije Boonkkamp 和 W. L. IJzerman，“用于二维反射器逆向设计的表面光散射建模”，《欧洲光学学会期刊——快速出版》19，编者：C. Sibilia、A. Belardini 和 G. Pauliat，18，ISSN：1990-2573（2023）10.1051/jeos/2023014，（访问日期：2023年5月1日）。[8] V. C. E. Kronberg、M. J. H. Anthonissen、J. H. M. ten Thije Boonkkamp 和 W. L. IJzerman，“具有散射表面的二维自由曲面反射器设计”，《美国光学学会杂志 A》40，661，ISSN：1084-7529、1520-8532（2023）10.1364/JOSAA.479001，（访问日期：2023年3月13日）。[9] L. B. Romijn、J. H. M. ten Thije Boonkkamp 和 W. L. IJzerman，“点光源与远场目标的逆向反射器设计”，《计算物理学杂志》408，109283–109283（2020）10.1016/j.jcp.2020.109283。[10] C. Villani, 《最优传输专题》，数学研究生丛书58（美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2003），ISBN：978-0-8218-3312-4。[11] J. C. Stover，《光散射：测量与分析》，第3版（SPIE Press，2012），ISBN：978-1-62841-840-8 978-0-8194-9251-7。[12] R. Fernando，编，《GPU Gems：实时图形编程技巧、诀窍与窍门》（Addison-Wesley，波士顿，2004），ISBN：978-0-321-22832-1。[13] G. Di Cola、A. Rota 和 G. Bertolini，“积分探测器获得的贝塔能谱展开数值方法分析”，《IEEE核科学汇刊》14，640–653，ISSN：0018-9499（1967）10.1109/TNS.1967.4324482，（访问日期：2023年3月28日）。

[14] A. D. Polyanin 和 A. V. Manzhirov，《积分方程手册》，第2版（Chapman & Hall/CRC，美国佛罗里达州博卡拉顿，2008），ISBN：978-1-4200-1055-8。[15] W. H. Richardson，“基于贝叶斯的图像复原迭代方法”，《美国光学学会杂志》62，55，ISSN：0030-3941（1972）10.1364/JOSA.62.000055，（访问日期：2023年3月24日）。[16] L. B. Lucy，“一种校正观测分布的迭代技术”，《天文学杂志》79，745，ISSN：00046256（1974）10.1086/111605，（访问日期：2023年3月24日）。[17] P. A. Jansson，编，《图像与光谱的反卷积》，第2版，多佛版（Dover Publications，美国纽约州米尼奥拉，2012），ISBN：978-0-486-45325-5。[18] C. Filosa，《照明光学的相空间光线追迹》（埃因霍温理工大学，2018），ISBN：978-90-386-4504-9。[19] J. T. Kent，“球面上的 Fisher-Bingham 分布”，《英国皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》44，71–80，ISSN：00359246（1982）10.1111/j.2517-6161.1982.tb01189.x，（访问日期：2023年3月27日）。

7. 附录：求解 $p(\alpha;\sigma)$

假设我们从以立体投影平面中的原点为中心的旋转对称高斯分布中选取 α 和 β。回顾式**(45)**中的二维正态分布，可得立体投影坐标$\mathbf{q}_{\mathsf{T}}:=(q_1,q_2)$中的概率密度函数为

$$p_{\mathrm{ster}}(\mathbf{q};\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\!\left(-\frac{\|\mathbf{q}\|^2}{2\sigma^2}\right), \tag{48}$$

其中 σ 是t q_1 和 q_2中的标准差。由于 p_{ster} 是概率密度函数，因此对于所有 $\sigma\in$ $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} p_{\mathrm{ster}}(\mathbf{q};\sigma)\,\mathrm{d}\mathbf{q}=1. \tag{49}$$

从南极到公式**(13)**和**(32)**中映射的相应立体投影映射和逆立体投影映射为

$$\mathbf{q}(\hat{\mathbf{c}})=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=\frac{1}{1+c_3}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\\sin(\beta)\end{pmatrix}, \tag{50}$$

and

$$\hat{\mathbf{c}}(\mathbf{q})=\frac{1}{1+\|\mathbf{q}\|^2}\begin{pmatrix}2q_1\\2q_2\\1-\|\mathbf{q}\|^2\end{pmatrix}, \tag{51}$$

其中$\mathbf{q}$ 是 ˆ**c**的二元组立体投影表示。

将式 **(49)** 转换为角坐标可得

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p_{\mathrm{ster}}(\mathbf{q}(\alpha,\beta);\sigma)\left|\frac{\partial\mathbf{q}(\alpha,\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}\right|\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=1. \tag{52}$$

雅可比矩阵， $\partial\mathbf{q}/\partial(\alpha,\beta)$，可直接使用式 **(50)** 求得:

$$\frac{\partial\mathbf{q}(\alpha,\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{\tan(\alpha/2)}{1+\cos(\alpha)}. \tag{53}$$

最后，令

$$p(\alpha;\sigma):=p_{\mathrm{ster}}(\mathbf{q}(\alpha,\beta);\sigma)\frac{\tan(\alpha/2)}{1+\cos(\alpha)}\frac{1}{\sin(\alpha)}, \tag{54}$$

以便

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p(\alpha;\sigma)\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=1, \tag{55}$$

得出 式 **(43)** 中 $p(\alpha;\sigma)$ 的表达式，因为 $p_{\mathrm{ster}}(\mathbf{q}(\alpha,\beta);\sigma)$ 中对 β 的依赖消失了 t.