考虑尖端非孤立性时，场致电子发射电流对阴极表面发射体的焦耳热效应

M. Diachenko、S. Lebedynskyi 和 R. Kholodov乌克兰国家科学院应用物理研究所，乌克兰苏梅市彼得罗巴夫利夫斯卡街58号，邮编40000（*电子邮箱：mykhailo.m.diachenko@gmail.com）（日期：2023年5月8日）

arXiv:2305.03496v1 [physics.app-ph] 3 May 2023

本研究旨在研究场电子发射电流通过块体铜阴极表面的纳米发射体时，其热导率的非稳态问题。同时，考虑了体电阻率和热导率随温度的变化以及尺寸效应，并研究了诺丁汉效应的影响。得到了不同电场强度下，发射体顶端的平衡温度与场增强因子之间的关系。基于击穿初始阶段始于发射体顶端熔化这一假设，分析了真空击穿的发生条件以及诺丁汉效应的影响。

I. 引言

基本粒子加速器中可能发生的真空高压击穿，其物理本质相当复杂，尤其是在 CLIC（紧凑型直线对撞机，CERN）中。尽管已有大量研究，但这一过程的完整理论至今仍不存在。

阴极表面的电子发射通常是局部的，这是由于表面存在尖端形式的发射体及其他不均匀结构。这些结构的存在会导致电场强度局部增大、场致电子发射电流密度增加，并相应地由于焦耳能量耗散而使发射体升温。阴极表面发射体的电阻加热是真空高压击穿的重要阶段，因此与理论研究密切相关。

随着带电粒子现代加速器的发展，其中的梯度达到会在加速器结构内部引发高真空击穿的数值，尤其是直线正负电子对撞机中，近期出现了许多致力于研究这些过程的理论工作。因此，在文献1–7中，研究人员采用分子动力学方法考察了块状阴极表面纳米尺寸发射体的加热特性。具体而言，文献1建立了一个分子动力学模型，用于在原子分子动力学方法框架内描述发射体的演化。文献2建立了一个模型，用于描述电流导致的圆柱形尖端演化；该模型基于分子动力学方法，并纳入了电阻加热和电子热导率。同时还展示了所得模拟结果与解析表达式的一致性。文献3在考虑不同电子发射模式（热发射、场致发射和中间模式）的同时，提出了一种计算发射电流和诺丁汉效应的方法。文献4采用福勒–诺德海姆方法和考虑温度影响的广义发射形式，分析了场致电子发射电流与外加电场之间的关系。研究表明，通常的福勒–诺德海姆方程这会显著低估电子发射电流，并可能显著高估场增强因子，尤其是在电场相对较低的范围内。文献 5 研究了强电子发射条件下，截顶圆锥形金属纳米发射体的相关过程，其顶端呈半球形。研究还采用了多尺度模拟，同时考虑场致力、电子发射、诺丁汉效应和焦耳热。研究表明，尖端的大部分材料可能发生蒸发，这可以解释等离子体起始所需中性原子的来源。文献 6 结合分子动力学和电动力学方法，对高电场作用下纳米尖端的热蒸发进行了建模。该文研究了初始几何形状各异的铜发射体，模拟结果表明，发射体的长径比会显著影响热蒸发。文献 7 详细研究了复杂形状纳米级发射体中的诺丁汉效应。此外，还应注意文献 8–12，这些文献致力于模拟真空击穿发展初期发生的电极间过程。文献 8 提出了一种基于一维粒子网格（PIC）方法的物理模型，用于描述等离子体的形成；该模型假设阴极上初始存在一个能够增强电场的发射体。模型将场电子发射和中性原子蒸发作为等离子体起始机制，并考虑了若干表面过程及粒子间碰撞。模拟结果表明，当电流密度为 $0.5 – 1\,\mathrm{A/\mu m^2}$,、中性原子与发射电子之比为 $0.01 – 0.05$ 且时间尺度为 $1 – 10$ ns 时，等离子体有可能形成。文献 9 和 10 将此前的模型（文献 8）改进为二维 PIC 模型。这些研究考察了真空电弧的时间和空间演化；在阴极表面存在发射体的条件下，真空电弧会随之产生。研究对电弧的电流—电压特性进行了定性分析，并考察了其产生条件。研究还与类似程序的结果进行了比较

，结果显示两者吻合良好。文献 11 和 12 在改进二维 PIC 模型时，采用蒙特卡罗方法考虑了粒子间碰撞，并进一步考察了更精细的效应。还应提及文献 13–16，这些研究对碳纳米管的电流加热进行了分析和数值研究。具体而言，文献 13 和 14 研究了不同电子发射模式下碳纳米管沿轴向的温度分布，并考虑了亨德森冷却效应和诺丁汉加热效应。

本文在热传导理论框架内，研究了阴极表面存在圆柱形纳米发射体时的模型问题。同时，考虑了场致电子发射电流引起的焦耳热、纳米尺寸尖端的电阻率随温度的变化、尺寸效应以及诺丁汉效应。结果表明，可以忽略发射体表面中性原子的蒸发过程。基于真空击穿始于发射体顶端熔化这一假设，对真空击穿发生的条件进行了分析，并研究了尖端非孤立性对这些条件的影响。

II. 理论背景

本节将讨论场致电子发射电流加热铜发射体的理论基础。我们将研究一种带有焦耳热热源的圆柱形尖端，同时考虑体电阻率随温度的变化以及尺寸效应。

纳米发射体将位于一个大型铜阴极上。对于圆柱形尖端，可以转化为一维情形，此时热传导方程如下

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+q(T), \tag{1}$$

其中，c 为比热容， ρ为尖端材料的密度，κ为热导率。

在式（1）中，q 表示热源功率；对于电流引起的焦耳热，q 的表达式为

$$q(T)=\rho_r(T)\,j^2. \tag{2}$$

其中， ρ_r 为电阻率，j 为电流密度。

在圆柱形纳米尺寸尖端的热导率问题中，当其直径小于电子的平均自由程时，还必须考虑尺寸效应。这些效应会显著影响物质的电阻率和热导率。根据参考文献 2，电阻率的表达式可写为以下形式。

$$\rho_r=\frac{\eta}{r}\frac{\rho_0}{T_0}T, \tag{3}$$

其中， ρ_0 为温度T_0, 下的电阻率，r为圆柱体的半径，$\eta=70$ 纳米。该表达式由计算机模拟结果得出，在0.5纳米 $<r<10$ 纳米的范围内，误差小于6%。

尺寸效应也会影响热导率系数，根据维德曼–弗朗茨–洛伦兹定律，可将其写为

$$\kappa=\frac{LT}{\rho}=\frac{rLT_0}{\eta\rho_0}, \tag{4}$$

其中，L 为洛伦兹数。

请注意，虽然电阻率和热导率存在更复杂的模型（参考文献1和2），但为了简化非稳态热传导方程的数值求解算法，本文仅采用上述关系。

金属表面上发射体的场致发射电流密度，是由电子隧穿金属-真空界面的势垒所产生的，可用 Murphy-Good 模型（参考文献17）描述:

$$j=\lambda_T\frac{a}{t^2(y)}\frac{F^2}{\varphi}\exp\left(-b\frac{\varphi^{3/2}}{F}\vartheta(y)\right), \tag{5}$$

其中，λ_T 为温度修正因子

$$\lambda_T=\frac{\pi ksT}{\sin(\pi ksT)},$$

并引入以下符号

$$s=\frac{3b\sqrt{\varphi}t(y)}{2F},\ y=d\frac{\sqrt{F}}{\varphi},\ a=\frac{e^3}{16\pi^2\hbar},\ b=\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e},$$

$d\approx 3.79\cdot 10^{-4}\text{eV cm}^{1/2}\text{V}^{-1/2}$。

式（5）还考虑了发射体顶端的电场局部增强，因此局部电场 $F=\beta E$，其中 E 为宏观电场， β 为增强因子。若发射体呈圆柱体形状，则近似认为该因子由发射体高度与半径之比确定，即 $\beta=h/r$。下文将采用这一近似来确定系数β。

对于数值计算，函数 t(y) 和 ϑ(y) 可近似取为以下形式（参考文献 18）

$$t(y)\approx 1+\frac{y^2}{9}(1-\ln y),\ \vartheta(y)\approx 1-y^2+\frac{y^2}{3}\ln y. \tag{6}$$

采用这组函数（6）所产生的误差，在 y 取值范围为 0 到 1 时小于 0.6%。本文进行的数值计算中，参数 y 的最大值为 0.78，处于相关取值范围内。

应当强调，福勒-诺德海姆公式是在金属温度为零的情况下获得的，但在实际条件下，由于场致电子发射电流对发射体的加热，温度并不为零，因此还应考虑温度对所研究过程的影响。但在本研究中，我们将忽略这种依赖性。

为求解方程（1），还必须指定初始和边界条件。在本工作中，发射体的初始温度为 $T_0 = 293.15$ K，尖端的下底部（与阴极的接触点）将保持恒定温度，该温度与初始温度 T_0 重合。对于上底部，我们将考虑两种情况：一种是其处于隔离状态（热流不会通过尖端的上底部），另一种是由于升华过程和诺丁汉效应而未处于隔离状态。对于第一种情况，问题的初始和边界条件如下

$$T|_{t=0} = T_0, \;\; T|_{x=0} = T_0, \;\; \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=h} = 0. \tag{7}$$

首先考虑稳态情况，此时可以忽略温度随时间的变化，那么热传导方程式 (1) 可改写为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \zeta T = 0, \tag{8}$$

其中 $\zeta = q/(\kappa T)$。在这种情况下，边界条件的形式如式 (7) 所示。

温度分布可由方程 (8) 求得，形式如下

$$T(x) = T_0 \left[\cos(\sqrt{\zeta}x) + tg(\sqrt{\zeta}h)\sin(\sqrt{\zeta}x)\right]. \tag{9}$$

根据式 (9)，圆柱上底面的温度可确定为

$$T|_{x=h} = \frac{T_0}{\cos(\sqrt{\zeta}h)}. \tag{10}$$

考虑公式 (10)，可以得到尖端发生熔化时的电流密度表达式。为此，需要将熔化温度 T_m 代入式 (10) 左侧，并求解电流密度。由此可得

$$j_m = \frac{T_0\sqrt{L}}{\eta\rho_0\beta}\arccos\frac{T_0}{T_m}, \tag{11}$$

其中，T_m 为熔点，j_m 为尖端温度达到熔点时的电流密度。

III. 数值计算

本节将研究密度为 (5) 的电流引起焦耳热时圆柱形尖端的热导率非稳态问题。我们将使用隐式欧拉格式和托马斯算法对方程 (1) 进行数值求解。为此，我们引入以下无量纲量，将热导率方程化为无量纲形式

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_0}, \;\; \tilde{x} = \frac{x}{h}, \;\; \tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \;\; t_0 = \frac{\eta\rho_0 c\rho h^2}{rLT_0}. \tag{12}$$

考虑引入的无量纲量 (12)，热导率方程可改写为以下形式

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{t}} = \frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{x}^2} + Q\tilde{T}, \tag{13}$$

其中

$$Q = \frac{1}{L}\left(\frac{\eta\rho_0}{T_0}\beta j\right)^2.$$

A. 孤立尖端顶点的情况

首先，考虑发射体顶端处于孤立状态的情况。我们将采用式（7）所示的初始和边界条件。同时，这些条件可用无量纲量改写如下：

$$\tilde{T}|_{\tilde{t}=0} = 1, \;\; \tilde{T}|_{\tilde{x}=0} = 1, \;\; \left.\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{x}}\right|_{\tilde{x}=1} = 0. \tag{14}$$

采用欧拉隐式格式，热传导方程可写为

$$\frac{\tilde{T}_i^{n+1} - \tilde{T}_i^n}{\delta\tilde{t}} = \frac{\tilde{T}_{i+1}^{n+1} - 2\tilde{T}_i^{n+1} + \tilde{T}_{i-1}^{n+1}}{\delta\tilde{x}^2} + Q\tilde{T}_i^{n+1}, \tag{15}$$

其中 $\delta\tilde{}x$、$\delta\tilde{}t$ 分别是坐标和时间步长，索引 n 对应时间网格节点编号，索引 i 对应坐标网格节点编号。

方程（15）可以改写为更便于应用托马斯算法的形式。

$$\tilde{T}_{i+1}^{n+1} - B_i\tilde{T}_i^{n+1} + \tilde{T}_{i-1}^{n+1} = G_i. \tag{16}$$

表达式 (16) 中的符号含义如下：

$$G_i = -\frac{\delta\tilde{x}^2}{\delta\tilde{t}}\tilde{T}_i^n, \;\; B_i = 2 + \frac{\delta\tilde{x}^2}{\delta\tilde{t}} - Q\delta\tilde{x}^2.$$

作为托马斯算法的一部分，假设存在这样两组数 α_i 和 ξ_i，使得等式成立。

$$\tilde{T}_i^{n+1} = \alpha_i\tilde{T}_{i+1}^{n+1} + \xi_i. \tag{17}$$

根据表达式 (16)，我们可以求出这些系数的递推关系。

$$\alpha_i = \frac{1}{B_i - \alpha_{i-1}}, \;\; \xi_i = \frac{\xi_{i-1} - G_i}{B_i - \alpha_{i-1}}. \tag{18}$$

为了确定系数 α_i, ξ_i (18)，需要求出 α_0 和 ξ_0，它们可由下边界条件得到。

$$\alpha_0 = 0, \;\; \xi_0 = 1. \tag{19}$$

由于该计算方案在 $\delta\tilde{}x$ 方面具有二阶精度，因此需要以 $O\left(\delta\tilde{}x^2\right)$ 精度对上边界条件进行离散化。为此，需要将

将函数 $\tilde{T}(x)$ 在点 $\tilde{x}=1$ 处展开为关于 $\delta\tilde{x}$ 的二阶泰勒级数。

$$\tilde{T}_{N-2}^{n+1}=\tilde{T}_{N-1}^{n+1}-\delta\tilde{x}\left.\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{x}}\right|_{N-1}^{n+1}+\frac{\delta\tilde{x}^2}{2}\left.\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{x}^2}\right|_{N-1}^{n+1}. \tag{20}$$

考虑上边界条件，即尖端上底面的隔离，以及热传导方程（13），可以写出以下关系式

$$\tilde{T}_{N-2}^{n+1}=\tilde{T}_{N-1}^{n+1}+\frac{\delta\tilde{x}^2}{2}\left(\frac{\tilde{T}_{N-1}^{n+1}-\tilde{T}_{N-1}^{n}}{\delta\tilde{t}}-Q\tilde{T}_{N-1}^{n+1}\right). \tag{21}$$

因此，根据公式 (21)，坐标网格节点 $N-2$ 在时刻 $n+1$ 的温度由最后一个节点 $N-1$处的温度值确定。$\tilde{T}_{N-2}^{n+1}$ 的表达式也可以用托马斯算法系数写成如下形式

$$\tilde{T}_{N-2}^{n+1}=\alpha_{N-2}T_{N-1}^{n+1}+\xi_{N-2}. \tag{22}$$

考虑到表达式 (21) 和 (22)，我们可以得出

$$\tilde{T}_{N-1}^{n+1}=\frac{\xi_{N-2}+\frac{\delta\tilde{x}^2}{2\delta\tilde{t}}\tilde{T}_{N-1}^{n}}{1-\alpha_{N-2}+\frac{\delta\tilde{x}^2}{2\delta\tilde{t}}-\frac{\delta\tilde{x}^2}{2}Q}. \tag{23}$$

这样，采用托马斯算法求解热传导方程 (13) 可分为以下几个步骤。首先，根据下边界条件计算系数α_0 和 ξ_0，然后通过正向追赶求出 α_i 和 ξ_i（$i=1,2,\ldots,N-1$）；最后，根据公式 (17)，通过反向回代求出其他节点的温度 T_i^{n+1}（$i=N-2,N-3,\ldots,1$）。这就是一次时间迭代的过程。

首先，根据上述方案进行数值计算时，我们将选择以下问题参数：$r=2.2$ nm，$h=100$ nm，$E=170$ MV/m，初始和边界条件取为式（7）。本文还将考虑由无氧电子铜（C10100）制成的发射体，其参数见参考文献19。需要指出的是，在这些计算中，我们没有考虑式（5）中电流密度对温度的依赖关系，因为主要任务是将数值结果与稳态情况下的解析解进行比较。然而，在后续计算中将考虑温度效应。图1展示了数值计算结果，从中可以看出，对于给定参数，最大的加热出现在尖端顶点处，并且温度分布随时间推移逐渐趋于不变。图2展示了发射体顶端温度随时间的变化关系。从该图可以看出，经过约 t_0，的时间后，温度达到稳态，并与稳态情况下的解析值（10）一致。需要指出的是，对于给定的计算参数，$t_0\approx 2.8$ ns。图3展示了达到稳态后（$t=30\,t_0$）温度随坐标的变化关系。该图同样表明，数值计算结果与解析表达式吻合良好。

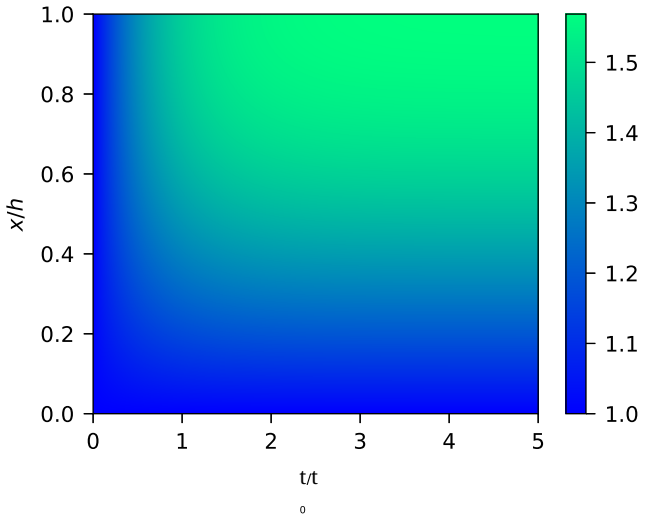

图1. 孤立顶点情况下尖端温度随坐标和时间的变化。

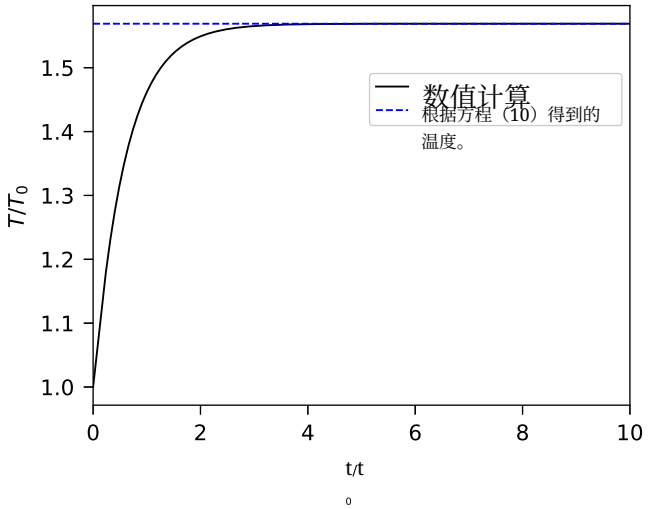

图2. 尖端顶点温度随时间的变化。

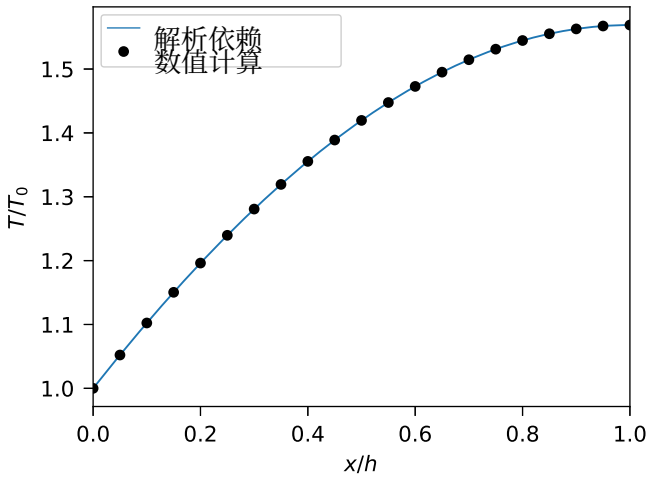

图3. 加热10t_0时间后的坐标方向温度分布。

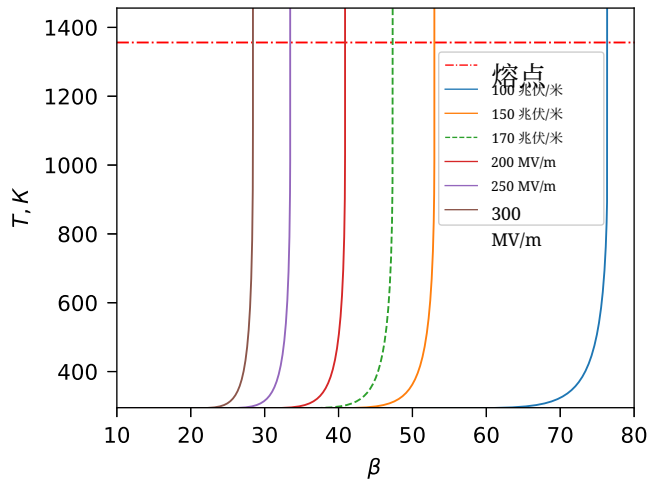

图4. 在不同外加电场下，发射体顶端的平衡温度与 β 的关系。

还研究了在不同电场强度下，发射体顶端温度对场增强因子 β 的依赖关系，即在高度固定时，温度随尖端半径的变化关系。数值计算结果如图4所示。假设当发射体顶端达到熔点时真空击穿开始发生，则可以求出不同电场强度下击穿开始时的 β 系数。图6展示了这种依赖关系。可以看出，当电场强度为100 MV /m时，增强因子为76.3；在较低的电场强度下，不会发生击穿。当电场强度为170 MV /m时，该系数为47.4，这与实验结果（参考文献20）一致，其中在给定电场强度下，该系数约为50。根据图4中给出的插值关系，还可以确定其他电场强度下的 β。

B. 非孤立尖端顶端的情况

在之前的计算中，我们采用了发射体处于孤立状态的近似。接下来，我们将考虑诺丁汉效应导致其顶端非孤立的情况。我们将证明，在所研究的条件下，升华过程可以忽略不计。为求解热传导方程，我们将采用与上一小节相同的计算方案；但为了考虑尖端上底面的边界条件，我们还将采用逐次迭代法。

1. 升华

为了评估升华过程的影响，我们将计算尖端在熔化温度下蒸发的物质质量。我们将使用赫兹-克努森方程，根据该方程，中性粒子的升华速率

从阴极表面逸出的原子数量按如下方式确定

$$w_{evap} = \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}p, \tag{24}$$

其中，M 为该物质的摩尔质量，R 为普适气体常数，p 为饱和蒸气压，它是温度的函数，可由如下形式的经验公式确定（参考文献 21）

$$\lg \tilde{p} = A + \frac{B}{\tilde{T}} + C\lg \tilde{T} + D\tilde{T}\cdot 10^{-3}. \tag{25}$$

需要指出的是，本文考虑的是发射体熔化前的加热过程，因此在表达式（25）中，我们将使用该物质固相的经验参数，其取值为（参考文献 21）A $= 7.810$，B $= -17687$，C $= -0.2638$，D $= -0.1486$。

我们来计算在 $10t_0$ 时间内，升华过程导致的物质蒸发质量。根据表达式（25），该过程的速率为 $w_{evap} \approx 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg/m^2 s}$。于是 $m_{evap} \approx 1.4\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg}$，这远小于一个铜原子的质量。因此，在考虑尖端开始熔化前的加热过程时，可以忽略升华过程。此后，数值计算中将不考虑中性原子的蒸发。

2. 诺丁汉效应

在本小节中，我们将考虑诺丁汉效应。它是指从阴极内部深处到达其表面的电子与离开阴极的电子之间平均能量的差异。同时，如果阴极表面的温度低于反转温度，那么离开表面的电子平均能量将低于来自金属内部深处的电子能量，并会观察到尖端顶点加热（诺丁汉加热）。相反，如果温度高于反转温度，则会出现亨德森冷却。反转温度由以下表达式确定

$$T_{inver} = 5.67\cdot 10^{-5}\frac{\beta E}{\sqrt{\varphi}}, \tag{26}$$

其中，E 是以 V /cm 为单位的电场强度，φ 是以 eV 为单位的电子功函数，T_{inver} 是以 K 为单位的反转温度。

让我们根据问题参数估算温度 (26)。因此，当电场 E $= 170\,\mathrm{MV/m}$、增强因子为 $\beta = 50$、电子功函数为 $\varphi = 4.5$ eV 时，我们得到 $T_{inver} \approx 2272$ K。由此可见，反转温度远高于铜的熔化温度，因此我们只考虑发生诺丁汉加热的情况。

对于 $T_{emis} < 1.2\cdot T_{inver}$ 的情况，离开金属表面的电子与从阴极深处而来的电子之间的平均能量差为

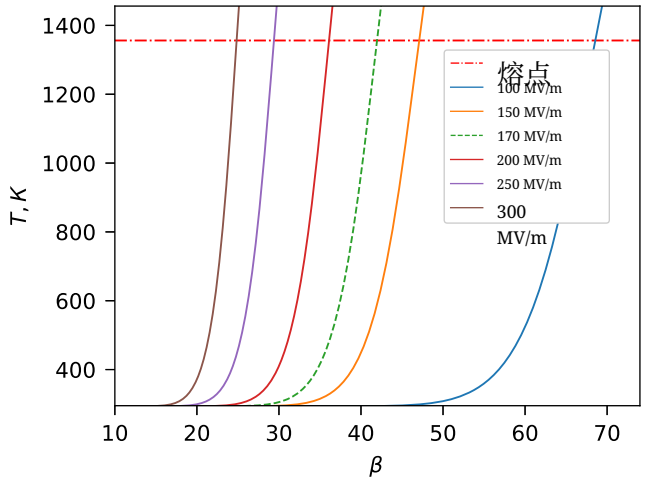

图5. 考虑诺丁汉效应后，加热时间为 $30t_0$，时沿坐标的温度分布。

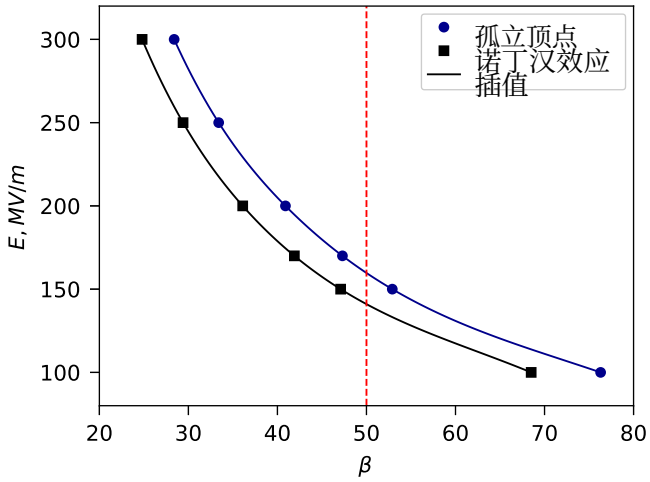

图6. 在孤立发射体顶端的情况下以及考虑诺丁汉加热时，击穿电场强度对场增强因子 β 的依赖关系。

（参考文献 22）

$$\Delta\varepsilon = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{kT_{emis}}{\varepsilon_F}\right)^2 \varepsilon_F + 2k\pi T_{emis} ctg\frac{\pi T_{emis}}{2T_{inver}}, \qquad (27)$$

其中 ε_F 是费米能。

考虑诺丁汉效应时，发射体上底面的边界条件形式如下

$$\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\tilde{x}=1} = \frac{j}{e}\Delta\varepsilon\frac{h}{\kappa T_0}, \qquad (28)$$

其中 e 为电子电荷。

在第二次近似中，沿坐标网格步进，根据边界条件（28）可得如下关系

$$\tilde{T}_{N-1}^{n+1} = \frac{\xi_{N-2} + \frac{\delta\tilde{x}^2}{2\delta\tilde{t}}\tilde{T}_{N-1}^{n} + V\Delta\varepsilon(\tilde{T}_{N-1}^{n+1})\delta\tilde{x}}{1 - \alpha_{N-2} + \frac{\delta\tilde{x}^2}{2\delta\tilde{t}} - Q\frac{\delta\tilde{x}^2}{2}}. \qquad (29)$$

图 5 和图 6 给出了考虑诺丁汉效应后热传导方程的数值计算结果。从图 5 可以看出，与孤立针尖的情况相比，曲线的斜率较小，且曲线与熔化温度的交点向左移动。图 6 也呈现了这一现象。若假设击穿的初始阶段发生于尖端顶点开始熔化时，那么考虑诺丁汉效应会使击穿电场降低，这一点可从图 6 中看出。例如，当 $\beta = 50$ 时，降幅约为 10%。

IV. 结论

本文研究了位于块体铜阴极上的圆柱形纳米发射体在电流焦耳热作用下的非稳态热传导问题，研究了阴极表面发射体在场致电子发射电流作用下的焦耳热效应。同时，考虑了电阻率和热导率随温度的变化关系，以及尺寸效应。

获得了不同电场强度下发射体顶端温度与场增强因子之间的关系。基于真空击穿始于发射体顶端熔化这一假设，分析了真空击穿发生的条件。结果表明，对于孤立的铜发射体，当电场强度为 100 MV /m 时，增强因子为 76.3，对应的半径为 1.3 nm、高度为 100 nm；半径更大时，不会发生击穿。如果 E =170 MV /m，则该因子为 47.3，这与实验和理论结果（参考文献 2）一致；在给定电场强度下，该因子约为 50。

结果表明，在发射体顶端熔化之前，可以忽略中性原子的升华。数值结果表明，考虑诺廷汉效应会导致击穿电场强度降低，因此对于 $\beta = 50$，降低幅度约为 12%。

致谢

本出版物基于乌克兰国家科学院（NASU）为乌克兰国家科学院青年科学家研究实验室/团队提供的科研资助，该资助用于开展2021—2022年科学技术优先发展领域的研究，合同编号为16/01-2021（3）。

作者声明

利益冲突

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

数据可用性

支持本研究结论的数据可根据合理请求向通讯作者获取。

参考文献

[1]F. Djurabekova、S. Parviainen、A. Pohjonen 和 K. Nordlund，“电场下金属表面的原子级建模：将电场直接耦合至分子动力学算法”，Phys. Rev. E 83，026704（2011）。[2]S. Parviainen、F. Djurabekova、H. Timko 和 K. Nordlund，“电场下纳米尺度金属尖端分子动力学模拟中的电子过程”，Comput. Mater. Sci. 50，2075–2079（2011）。[3]A. Kyritsakis 和 F. Djurabekova，“场致发射纳米尖端中电子发射和热效应的通用计算方法”，Comput. Mater. Sci. 128，15–21（2017）。[4]K. Eimre、S. Parviainen、A. Aabloo、F. Djurabekova 和 V. Zadin，“应用通用热场模型模拟纳米尺度铜场发射体的行为”，J. Appl. Phys. 118，033303（2015）。[5]A. Kyritsakis、M. Veske、K. Eimre、V. Zadin 和 F Djurabekova，“强烈电子发射期间金属纳米尖端的热失控”，J. Phys. D: Appl. Phys. 51，225203（2018）。[6]X. Gao、A. Kyritsakis、M. Veske、W. Sun、B. Xiao、G. Meng、Y. Cheng 和 F. Djurabekova，“铜纳米尖端热蒸发和临界电场的分子动力学模拟”，J. Phys. D: Appl. Phys. 53, 365202 2020( )。[7]D. Mofakhami、B. Seznec、T. Minea、R. Landfried、P. Teste 和 P. Dessante，“揭示难熔金属微突起热场发射过程中的诺丁汉反转不稳定性”，Sci. Rep. 11，15182（2021）。[8]H. Timko、K. Matyash、R. Schneider、F. Djurabekova、K. Nordlund、A. Hansen、A. Descoeudres、J. Kovermann、A. Grudiev、W. Wuensch、S. Calatroni 和 M. Taborelli，《真空电弧中等离子体形成的一维粒子模拟模型》，Contrib. to Plasma Phys. 51, 5–21 (2011)。[9]H. Timko，《真空电弧建模：从等离子体起始到表面相互作用》，博士学位论文，赫尔辛基大学 (2011)。[10]H. Timko、P. S. Crozier、M. M. Hopkins、K. Matyash 和 R. Schneider，《为何进行代码间比较：真空电弧放电模拟案例研究》，Contrib. to Plasma Phys. 52, 295–308 (2012)。[11]G. A. Bird，《分子气体动力学与气体流动的直接模拟》，（Clarendon Press，牛津，1994 年）第 458 页。[12]H. Ejiri、T. Fujii、A. Kumada 和 K. Hidaka，《真空中击穿现象的粒子模拟》，IEEJ Trans. Fundam. Mater. 140, 318 324 2020– ( )。[13]G. Tripathi、J. Ludwick、M. Cahay 和 K. L. Jensen，《热场致发射过程中碳纳米管沿线温度分布的空间依赖性》，J. Appl. Phys. 128, 025107 (2020)。[14]J. Ludwick、N. Hernandez、G. Tripathi、M. Cahay、T. C. Backand 和 K. L. Jensen，《接触电阻对碳纳米管场致发射特性的影响》，J. Vac. Sci. Technol. B 40, 042804 (2022)。[15]K. L. Jensen、J. J. Petillo、J. Connelly、J. Burke、G. Tripathi、J. Ludwick 和 M. Cahay，《碳纤维热场致发射体的半解析模型》，J. Appl. Phys. 129, 095107 (2021)。[16]K. L. Jensen、M. Cahay、M. McDonald、J. R. Harris、D. A. Shiffler 和 J. J. Petillo，《复合热场致发射体及其模拟的解析模型》，J. Appl. Phys. 126, 245301 (2019)。[17] E. L. Murphy 和 R. H. Good，《热电子发射、场致发射及其过渡区域》，Phys. Rev. 102, 1464 (1956)。[18]R. G. Forbes，《Schottky-Nordheim 势垒标准 Fowler-Nordheim 隧穿理论中特殊椭圆函数的简明高精度近似》，Appl. Phys. Lett. 89, 113122 (2006)。[19]J. R. Davis，《ASM 专业手册：铜及铜合金（ASM 专业手册）》，（ASM International，2001 年）第 600 页。[20]A. Descoeudres、T. Ramsvik、S. Calatroni、M. Taborelli 和 W. Wuensch，《超高真空下金属及金属合金的直流击穿调理与击穿率》，Phys. Rev. ST Accel. Beams 12, 032001 (2009)。[21]C. B. Alcock、V. P. Itkin 和 M. K. Horrigan，Canadian Metallurgical Quarterly 23, 309–313 (1984)。[22]E. A. Litvinov、G. A. Mesyats 和 D. I. Proskurovskii, Sov. Phys. Uspekhi 26, 138 (1983)。