二维可压缩欧拉流的伴随与直接特征方程。

Kevin Ancourt[a]、Jacques Peter*、[a]、Olivier Atinault[b]

[a]法国国家航空航天研究局（*ONERA*）、巴黎萨克雷大学空气动力学、气动弹性与声学系（*DAAA*），法国沙蒂永，勒克莱尔师范团大道*29*号，*92322*[b]法国国家航空航天研究局（*ONERA*）、巴黎萨克雷大学空气动力学、气动弹性与声学系（*DAAA*），法国默东，*Vertugadins*街*8*号，*92190*

arXiv:2305.03499v1 [physics.flu-dyn] 5 May 2023

摘要

特征线法是理解偏微分方程解的一种经典方法。近年来，该方法已应用于二维欧拉方程的伴随方程。本文的首要目标是介绍一种线性代数分析方法，大幅简化对沿一族特征曲线满足的独立特征方程数量的讨论。该方法既适用于直接问题，也适用于伴随问题。我们的第二个目标是直接用守恒变量推导二维可压缩无黏流的特征方程。最后，我们通过采用经典格式及其对偶一致离散伴随的喷管流，对理论结果进行验证。

关键词： 连续伴随、无黏流、可压缩流、特征线法、特征方程、特征曲线

1. 引言

特征线法是研究偏微分方程（PDE）的一种众所周知的方法。其旨在确定输入域中的特定超曲面，使得所关注的偏微分方程的解在这些超曲面上满足常微分方程（ODE）。当应用于二维无黏可压缩流时，众所周知，仅依据入口流（而对于亚音速流，它只能提供部分信息）即可完整求解超音速区域 [1, 2, 3, 4]。借助这一技术，可以实现对各种流动（喷管内、台阶沿线以及曲壁附近流动）的理论理解和实际计算。

此外，离散伴随和连续伴随如今已成为形状优化 [5, 6, 7, 8, 9] 和目标导向网格自适应 [10, 11, 12]中广泛应用的方法。鉴于这些重要应用，人们一直致力于快速、安全地编写伴随模块 [13, 14, 15, 16] 以及高效求解伴随方程 [17, 18]。伴随方法同样适用于流动控制 [19, 20], 、元建模 [21, 22], 、受容性—敏感性—稳定性分析 [23, 24], 以及数据同化 [25, 26]。在最近的一篇论文中 [27] ，研究人员推导出了伴随二维欧拉方程的特征方程（CE）。

二维无黏可压缩流的经典直接特征方程（DCE）与近期提出的相应伴随特征方程（ACE）似乎存在关联；尤其是，对于这两个问题，特征曲线相同 [27]。第 2 节进一步研究了（ACE）与（DCE）之间的类比，并证明了一个包含（ACE）和（DCE）的一般方程组的若干性质。特别是，这种形式化的线性代数方法大大简化了确定沿两族特征曲线成立的独立兼容性方程（CE）数量的过程。

而（ACE）需要从柯西问题的完整 8x8 线性系统中推导得出——（DCE）则具有】【。

*通讯作者。电话： +33 1 46 73 41 84。电子邮箱：kevin.ancourt@onera.fr（Kevin Ancourt）、jacques.peter@onera.fr（Jacques Peter）、olivier.atinault@onera.fr（Olivier Atinault）

已基于各种力学假设和不同的变量集推导出这些方程。为全面理解起见，第 3 节将从完整的柯西问题出发，以守恒变量求解直接特征问题，并讨论所得的微分形式。

最后，第 4 节研究无黏超声速喷管流动，并对 (DCE) 和 (ACE) 进行数值评估。

2. 柯西直接问题与伴随问题线性系统的共同性质

2.1. 符号说明

我们用 $W=(\rho,\rho u\ \rho v\ \rho E)$ 表示守恒变量，其中 ρ为密度，(u,v) 为速度U的分量，e 表示内能，E 表示总能量。这里采用热学和量热学性质均为完全的气体状态方程。静压 p、总焓H 和熵S 表示为

$$p=(\gamma-1)\rho e=(\gamma-1)(\rho E-0.5\rho||\overline{U}||^2)$$

$$H=E+\frac{p}{\rho}\qquad\qquad S=c_v ln(\frac{p}{\rho^\gamma})$$

其中 $\gamma=1.4$ 为常数，定容热容c_v也为常数。下标i 用于表示经典滞止量 (ρ_i,p_i,T_i)。最后，所关注泛函输出的伴随向量记为$\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)$。

2.2. 通用柯西问题嵌入（*ACE*）和（*DCE*）

给定流体域中相邻的两点a 和b，记两点之间的位移为（dx，dy）$=\overrightarrow{ab}$。两点之间伴随分量的增量记为（$d\psi_1$，$d\psi_2$，$d\psi_3$，$d\psi_4$）=（$\psi_1^b-\psi_1^a$，$\psi_2^b-\psi_2^a$，$\psi_3^b-\psi_3^a$，$\psi_4^b-\psi_4^a$）。伴随向量的柯西问题旨在计算点a 处的一阶空间导数，而该问题的奇异性是寻找（兼容性方程）的核心。相应的 8×8 线性系统将一阶泰勒展开与二维伴随欧拉方程联系起来。其形式为

$$\begin{bmatrix} dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & - & A^T & & & - & B^T & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\partial\psi_1/\partial x) \\ (\partial\psi_2/\partial x) \\ (\partial\psi_3/\partial x) \\ (\partial\psi_4/\partial x) \\ (\partial\psi_1/\partial y) \\ (\partial\psi_2/\partial y) \\ (\partial\psi_3/\partial y) \\ (\partial\psi_4/\partial y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ d\psi_3 \\ d\psi_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，$-A^T$ 和 $-B^T$ 分别为欧拉通量的相反雅可比矩阵和转置雅可比矩阵。离散流场 W 的导数对应的类似表达式见方程（15）。通过考虑一个一般矩阵，可以证明关于方程（1）和（15）中矩阵的子式，以及当（dx,dy）使 8×8 矩阵变为奇异矩阵时，独立兼容性方程（CE）的数量的若干结论。

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & \mathbf{A} & & & & \mathbf{B} & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

其中（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）表示（$-A^T$，$-B^T$）或（A，B）。ψ或W的相应通用记法为 $\boldsymbol{\zeta}$。$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列分别记为 $\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3,\mathbf{A}_4\}$和 $\{\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3,\mathbf{B}_4\}$。需要强调的是，粗体字符因此对应于通用问题，而非更高的张量阶数。

2.3. (ACE) 和 *(DCE)* 的系数作为 4×4 行列式

已经观察到，直接问题和伴随问题具有相同的行列式，该行列式通过列的线性组合计算得出，如下所示。

$$|\mathbf{K}| = |-dx\mathbf{B}+dy\mathbf{A}| = (-v\,dx+u\,dy)^2(-v\,dx+u\,dy+c\,dl)(-v\,dx+u\,dy-c\,dl),$$

with

$$c=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},\quad dl=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

利用任意方向 [27] 上已知的欧拉通量雅可比矩阵的特征值。如果 $|\mathbf{K}|\neq 0$，则该柯西问题是适定的，其解可通过 $\mathbf{K}$ 的子式表示。这些子式记为 $\mathbf{K}^i_{jx}$ 和 $\mathbf{K}^i_{jy}$，其中指标分别对应所考虑的变量和微分方向。例如，$(\partial\boldsymbol{\zeta}_1/\partial x)$ 表示

$$(\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}_1}{\partial x}) = \frac{\begin{vmatrix} d\boldsymbol{\zeta}_1 & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0\\ d\boldsymbol{\zeta}_2 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0\\ d\boldsymbol{\zeta}_3 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0\\ d\boldsymbol{\zeta}_4 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy\\ | & | & | & | & | & | & | & |\\ 0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4\\ | & | & | & | & | & | & | & | \end{vmatrix}}{|\mathbf{K}|} \tag{2}$$

$$(\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}_1}{\partial x}) = \frac{\mathbf{K}^1_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_1-\mathbf{K}^2_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_2+\mathbf{K}^3_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_3-\mathbf{K}^4_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_4}{|\mathbf{K}|} \tag{3}$$

反之，当 $|\mathbf{K}|=0$ 时，广义柯西问题是不适定的，也就是说，沿着 S、C^+ 和 C^- 曲线时。 s:

$$-v\,dx+u\,dy = 0 \qquad S \text{ streamtraces} \qquad \text{(all Mach numbers)} \tag{4}$$

$$-v\,dx+u\,dy+c\,dl = 0 \qquad C^- \text{characteristics} \qquad \text{(supersonic flow only)} \tag{5}$$

$$-v\,dx+u\,dy-c\,dl = 0 \qquad C^+ \text{characteristics} \qquad \text{(supersonic flow only)} \tag{6}$$

在这种情况下，$(\partial\boldsymbol{\zeta}_j/\partial x)$ $(\partial\boldsymbol{\zeta}_j/\partial y)$沿特征曲线的有界性及其在这些曲线之外的表达式导出了兼容性方程。通常，在特征曲线之外成立的方程（3）导出以下兼容性方程。

$$\mathbf{K}^1_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_1-\mathbf{K}^2_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_2+\mathbf{K}^3_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_3-\mathbf{K}^4_{1x}d\boldsymbol{\zeta}_4=0$$

沿着特征曲线。当然，另外七个兼容性方程（CE）可由 $(\partial\boldsymbol{\zeta}_2/\partial x)$ 的有界性推导得到。 .. （$\partial\boldsymbol{\zeta}_4/\partial y$），我们需要针对每种特征曲线确定一组最小的独立兼容性方程（CE）。为此，将$\mathbf{K}^i_{jx}$和$\mathbf{K}^i_{jy}$子式表示为 4×4 矩阵的行列式。根据方程（2）和（3），

$$\mathbf{K}^1_{1x} = \begin{vmatrix} dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0\\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0\\ 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy\\ | & | & | & | & | & | & |\\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4\\ | & | & | & | & | & | & | \end{vmatrix}$$

是$\mathbf{K}^1_{1x}$的基本公式。在全部 32 个对应表达式中，前三行的dy 项通过列的线性组合消去，然后沿这些行展开行列式。[1] 由此得到的子式

[1]我们假设$dx\neq0$ 引入$t=dy/dx$，并将在下文进一步考虑这一假设。为简洁起见，我们不讨论$dx=0$这一简单的特殊情形。

由 $(\partial\boldsymbol{\zeta}_1/\partial x)$ 的存在性导出的兼容性方程（CE）于是写作

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^1_{1x} &= dx^3 \quad |\mathbf{B}_1\ (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2) \quad (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3)\ (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4) \quad | \\
\mathbf{K}^2_{1x} &= -dx^2 dy \quad |\mathbf{A}_2\ \ \mathbf{B}_2 \quad (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3)\ (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4) \quad | \\
\mathbf{K}^3_{1x} &= -dx^2 dy \quad |\mathbf{A}_3\ (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2) \quad \mathbf{B}_3\ \ (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4) \quad | \\
\mathbf{K}^4_{1x} &= -dx^2 dy \quad |\mathbf{A}_4\ (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2) \quad (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3)\ \ \mathbf{B}_4 \quad |
\end{aligned}$$

以及对应的（$\partial\boldsymbol{\zeta}_1/\partial y$）表达式为

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^1_{1y} = \quad & -dx^3\ |\mathbf{A}_1 \quad (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2)\ (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3) \quad (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4)| \\
\mathbf{K}^2_{1y} = \quad & dx^3\ |\mathbf{A}_2 \quad \mathbf{B}_2\ \ (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3) \quad (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4)| \\
\mathbf{K}^3_{1y} = \quad & dx^3\ |\mathbf{A}_3 \quad (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2)\ \ \mathbf{B}_3 \quad (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4)| \\
\mathbf{K}^4_{1y} = \quad & dx^3\ |\mathbf{A}_4 \quad (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2)\ (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3) \quad \mathbf{B}_4\ \ |
\end{aligned}$$

显然。

$$\mathbf{K}^2_{1x} = -t\mathbf{K}^2_{1y} \qquad \mathbf{K}^3_{1x} = -t\mathbf{K}^3_{1y} \qquad \mathbf{K}^4_{1x} = -t\mathbf{K}^4_{1y}. \tag{7}$$

此外，沿矩阵的第一行展开 $|\mathbf{K}|$，结果为

$$|\mathbf{K}| = dx\mathbf{K}^1_{1x} + dy\mathbf{K}^1_{1y},$$

因此，沿着一条特征曲线，$\mathrm{K}^1_{1x} = -\mathrm{tK}^1_{1y}$。对于其他变量$\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{j}\ \mathrm{j} \geq 2$也可得到相应的方程：若 $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$，无论 $|\mathrm{K}|$ 取何值，均有 $\mathrm{K}^i_{jx} = -\mathrm{tK}^i_{jy}$；若 $|\mathrm{K}| = 0.$，则 $\mathrm{K}^j\,\mathrm{jx} = -\mathrm{tK}^j\,\mathrm{jy}$。如果这些子式不全为零，则可证明，由 $(\partial\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{k}/\partial\,\mathrm{x})$ 有界性导出的四个兼容性方程与由 $(\partial\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{k}/\partial\mathrm{y})$ 有界性导出的对应方程成比例，因此只需研究其中一组。此时，应分别讨论 S 曲线以及 C^+和 C^-曲线的情形。

2.4. 沿 C^+ 和 C^- 的独立兼容性方程数量

抽象线性代数的观点可以计算沿C^+和C^-曲线的特定情况下独立兼容性方程的数量。对于$dx \neq 0$，$\mathbf{K}$ 很容易得出等价于

$$\begin{bmatrix} dx\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} - t\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad \text{and then to} \quad \begin{bmatrix} dx\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} - t\mathbf{A} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

当t 取对应于 C^+或C^-的值时，对于伴随问题和直接问题，根据对欧拉方程通量雅可比矩阵进行特征值分析可知，$\mathbf{B}\ -t\mathbf{A}$ 的秩为 3。利用关于分块对角矩阵秩和等价矩阵秩的经典定理，可以很容易地证明$\mathbf{K}$ 的秩为 7，比其阶数小 1。在这种情况下，已知伴随矩阵的秩为 1。这意味着所有兼容性方程（其系数出现在伴随矩阵的各行中）彼此成比例，因而可归约为一个独立方程。这一结果非常有价值，因为根据子式代数表达式进行相应的显式计算十分繁琐。该结果已在 §3 中使用。

2.5. S 曲线上所有子式的零性

4×4 在 $\mathbf{K}^1_{1x}$ 的表达式中涉及的行列式为

$$|\mathbf{B}_1 \quad (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2) \quad (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3) \quad (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4)|. \tag{9}$$

沿一条流线$t = dy/dx = v/u$，且（$\mathbf{B} - t\mathbf{A}$）是一个秩为二的矩阵。由于其所有三阶子式均为零，按第一列展开计算的行列式（9）看起来为零。要让$\mathbf{K}^2_{1x}$、$\mathbf{K}^3_{1x}$和$\mathbf{K}^4_{1x}$也具有相同性质，需要进行直接改写。例如，$\mathbf{K}^2_{1x}$中的行列式为

$$|\mathbf{A}_2 \quad \mathbf{B}_2 \quad (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3) \quad (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4)| \text{ or possibly } |\mathbf{A}_2 \quad (\mathbf{B}_2 - t\mathbf{A}_2) \quad (\mathbf{B}_3 - t\mathbf{A}_3) \quad (\mathbf{B}_4 - t\mathbf{A}_4)|.$$

在这种最后的形式下，当 $(\mathbf{B} - t\mathbf{A})$ 的秩为二时，它显然为零。使用完全相同的论证，可以证明，当 $t = v/u$ 时，所有的 $\mathbf{K}^i_{jx}$ 和 $\mathbf{K}^i_{ix}$ 均为零。

此外，我们可以改变观察角度，将式 (9) 视为在固定 t 时关于 W的函数。显然，该函数是一个最高三次的多项式，且 v/u 是其一个根。因此，我们预期 $(t - v/u)$ 是所有$\mathbf{K}^i_{jx}$、$\mathbf{K}^i_{jy}$ 代数表达式的一个因子。兼容性方程（ACE）（见 [27]）和 DCE（见附录 A）的系数显式表达式证实了这一性质。

沿着S 曲线，运用上一小节所用的方法可知$\mathbf{K}$ 的秩为 6。如前所述，所有$\mathbf{K}^i_{jx}$ 和$\mathbf{K}^i_{jy}$ 均为零，且$\mathbf{K}$ 的伴随矩阵是零矩阵。因此，沿轨迹推导显式（兼容性方程）时，需要考虑（$-vdx + udy$）的二重重数，以及通过从相应$\mathbf{K}^i_{jx}$、$\mathbf{K}^i_{jy}$的表达式中消去（$-vdx + udy$）而得到的简化后的 $\bar{\mathbf{K}}^i_{jx}$、 $\bar{\mathbf{K}}^i_{jy}$ 系数。由（$\partial\boldsymbol{\zeta}_k/\partial x$）和（$\partial\boldsymbol{\zeta}_k/\partial y$）的有界性推导出的显式（兼容性方程）之间的比例关系是成立的，但依据（兼容性方程）的实际公式来展示会更简单——DCE 见 §3， [27]ACE 见 §2。

3. 推导　二维无黏可压缩流中使用守恒变量推导特征方程 .

3.1. 流动性质、变量集，以及通常推导特征方程时得到的方程

经典的 DCE 推导采用一系列泰勒展开和力学方程，描述一组原始变量的变化。由此得到的方程关于原始变量的未知导数呈线性，其系数则是状态变量的非线性函数。通常在正交归一参考系（$\vec{\xi}, \vec{\eta}$）中表示这些变化。该参考系由其相对于局部流动所确定参考系的夹角定义，后者记为（$\vec{t}, \vec{n}$），其中 ϕ 是 $\vec{t}$ 相对于x 轴的夹角。这种方法使力学方程的表达式更为简洁。向量 ξ 的某些方向会使方程组不适定：对于所有流动状态，$\vec{\xi} = \vec{t}$ 均如此；若局部流动为超音速，则当$angle(\vec{\xi}, \vec{t}) = \varepsilon \arcsin(1/M)\ \varepsilon = \pm1,$ 时亦如此。在这些曲线上，每一点处的切向量相对于速度均具有上述特定方向；它们分别是前述流线S、C^+（对于 $\varepsilon = 1$）和C^-（对于 $\varepsilon = -1$）。沿这些曲线，仅含 $\vec{\xi}$导数的方程成立。这些常微分方程即经典的 DCE。

对于理想气体的二维流动（§2.1），不假设总焓恒定、熵恒定或涡量为零：（a）总焓和熵沿流线保持恒定；（b）沿C^+C^-[3]可得一个（DCE）。这个（DCE）用 ϕ、 $||U||$、 S 和H的变化量表示为：

$$\varepsilon d\phi - \sqrt{M^2-1}\frac{d||\overline{U}||}{||\overline{U}||} - \sqrt{M^2-1}\frac{TdS - dH}{||\overline{U}||^2} = 0, \tag{10}$$

其中，最后一项可用 Crocco 方程改写。如果H 在整个流体域内保持恒定，则（DCE）也可写为：

$$\varepsilon d\phi - \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M} - \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma r M^2}dS = 0. \tag{11}$$

如果 S 也为常数，根据 Crocco 定理，流动是无旋的，并且 (DCE) 表示为

$$\varepsilon d\phi - \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M} = 0. \tag{12}$$

该方程可通过普朗特–迈耶函数进行积分，

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)}\right) - \tan^{-1}(\sqrt{M^2-1}),$$

以及对（12）积分所得的最终代数方程为

$$k^- = \phi + \nu(M) \text{ is constant along a } \mathscr{C}^- \qquad k^+ = \phi - \nu(M) \text{ is constant along a } \mathscr{C}^+. \tag{13}$$

也可以使用其他原始变量组来推导（10）及其所得的简化方程 [28, 4]。还可以在平面映射中，而不是在上述参考系中，展示这些方程 [28]。

如果一开始就假设流动为无旋流，则可以利用速度势进行非常快速的推导——参见 [29] 或 [2, 30, 31]。二维势流的控制非线性方程为：

$$(1-\frac{u^2}{c^2})\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2uv}{c^2}\frac{\partial u}{\partial y} + (1-\frac{v^2}{c^2})\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

当然还有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

这将得到一个简单的（3×3）线性方程组，用于求解（$\partial u/\partial x$）、（$\partial v/\partial y$）和（$\partial u/\partial y$）（对于势流而言，它等于（$\partial v/\partial x$）），由此可以轻松推导出（12）和（13）。

3.2. 保守变量中特征方程的推导

柯西问题旨在根据两个相邻点a和b处W的值，求出导数 $(\partial W/\partial x)$ $(\partial W/\partial y)$。由欧拉方程和基本的一阶泰勒公式可得该问题的方程：

$$\begin{bmatrix} dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & A & & & & B & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\partial\rho/\partial x) \\ (\partial\rho u/\partial x) \\ (\partial\rho v/\partial x) \\ (\partial\rho E/\partial x) \\ (\partial\rho/\partial y) \\ (\partial\rho u/\partial y) \\ (\partial\rho v/\partial y) \\ (\partial\rho E/\partial y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\rho \\ d\rho u \\ d\rho v \\ d\rho E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中 (dx,dy) $=\overrightarrow{\text{ab}}$，(dρ,dρu, dρv, dρE) $=(\rho^b-\rho^a, \rho u^b-\rho u^a, \rho v^b-\rho v^a, \rho E^b-\rho E^a)$，A、B 为欧拉通量雅可比矩阵。行列式很容易计算为

$$D = \begin{vmatrix} dxI & dyI \\ A & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dxI & 0 \\ A & B-(dy/dx)A \end{vmatrix} = dx^4|B-(dy/dx)A| \tag{16}$$

当然，D $=|$dxB $-$ dyA$|=|-$ dxB $+$ dyA$|$，如第 §2.3 节所述，沿着 S、C^+、C^- 曲线问题是不适定的。柯西问题沿这些特定曲线是不适定的，而 $(\partial W/\partial x)$ 和 $(\partial W/\partial y)$ 实际上是有定义且有界的；这意味着，将克莱姆公式应用于式（15）时，分母不仅等于零，对应于未知量 $(\partial\rho/\partial x)$、$(\partial\rho u/\partial x)$、$(\partial\rho v/\partial x)$、$(\partial\rho E/\partial x)$ $(\partial\rho/\partial y)$、$(\partial\rho u/\partial y)$、$(\partial\rho v/\partial y)$、$(\partial\rho E/\partial y)$ 的八个分子也必须等于零。这正是该方法的原理

特征线方法，它能够沿特征曲线推导出常微分方程。
x 和y 方向上的欧拉通量雅可比矩阵A 和B等于

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 E_c-u^2 & (3-\gamma)u & -\gamma_1 v & \gamma_1 \\ -uv & v & u & 0 \\ (\gamma_1 E_c-H)u & H-\gamma_1 u^2 & -\gamma_1 uv & \gamma u \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \gamma_1 E_c-v^2 & -\gamma_1 u & (3-\gamma)v & \gamma_1 \\ (\gamma_1 E_c-H)v & -\gamma_1 uv & H-\gamma_1 v^2 & \gamma v \end{bmatrix}$$

（其中有 $\gamma_1=\gamma-1$），并引入以下符号：

$$t=\frac{dy}{dx}, \quad \kappa=ut-v.$$

雅可比矩阵的列记为 A_1 至 A_4，以及 B_1 至 B_4，因此 $A=[A_1|A_2|A_3|A_4], B=[B_1|B_2|B_3|B_4]$。这里回顾沿 S、C^+ 和 C^- 曲线满足的常微分方程的计算原理。对于变量 $(\partial\rho/\partial x)$，其有界性要求满足。

$$\begin{vmatrix} d\rho & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0 \\ d\rho u & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 \\ d\rho v & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 \\ d\rho E & 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ 0 & A_2 & A_3 & A_4 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ | & | & | & | & | & | & | & | \end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

按下一公式中的记号沿第一列展开行列式：

$$K^1_{1x}d\rho-K^2_{1x}d\rho u+K^3_{1x}d\rho v-K^4_{1x}d\rho E=0. \tag{18}$$

例如，在此方程中

$$K^4_{1x}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & dy & 0 \\ | & | & | & | & | & | & | \\ A_2 & A_3 & A_4 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & dy & 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ | & | & | & | & | & | & | \\ A_2 & A_3 & A_4 & B_1 & B_2-tA_2 & B_3-tA_3 & B_4 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{vmatrix} \tag{19}$$

最后

$$K^4_{1x}=dx^2dy\mid A_4\ \ (B_2-tA_2)\ \ (B_3-tA_3)\ \ (B_4)\ \mid=dx^2dy\ \kappa\ \gamma_1\ (tv+u) \tag{20}$$

在这一步中，没有对t相对于速度向量（u,v）的取值作任何假设。微分形式的其他项等于

$$\begin{aligned} K^1_{1x} &= -dx^3\ \kappa\ (v\ \kappa^2-\gamma_1\ v\ (1+t^2)\ H+\gamma_1\ (ut+v)\ E_c+2\ \gamma_1\ t^2\ v\ E_c) && (21)\\ K^2_{1x} &= -dx^2\ dy\ \kappa\ (\gamma\ \kappa\ v+2\ \gamma_1 E_c) && (22)\\ K^3_{1x} &= dx^2\ dy\ \kappa\ (-2\ t\ E_c+\gamma\ v\ (t\ v+u)) && (23) \end{aligned}$$

因此，特征方程（18）可改写为

$$\begin{aligned} &- dx^3\ \kappa\ (v\ \kappa^2-\gamma_1\ v\ (1+t^2)H+\gamma_1\ (ut+v)\ E_c+2\ \gamma_1\ t^2\ v\ E_c)\ d\rho \\ &+ dx^2\ dy\ \kappa\ (\gamma\ \kappa\ v+2\ \gamma_1\ E_c)\ d\rho u+dx^2\ dy\ \kappa\ (-2\ t\ E_c+\gamma\ v\ (t\ v+u))\ d\rho v \\ &- dx^2dy\ \kappa\ \gamma_1\ (tv+u)\ d\rho E=0 \end{aligned} \tag{24}$$

若 $dx\neq 0$ 和 $\kappa\neq 0$，该方程还可以进一步简化：

$$\begin{aligned} &- (v\ \kappa^2-\gamma_1\ v\ (1+t^2)H+\gamma_1\ (ut+v)E_c+2\ \gamma_1\ t^2\ v\ E_c)\ d\rho \\ &+ t\ (\gamma\ \kappa\ v+2\ \gamma_1\ E_c)\ d\rho u+t\ (-2t\ E_c+\gamma\ v\ (t\ v+u))\ d\rho v \\ &- t\ \gamma_1\ (tv+u)\ d\rho E=0 \end{aligned} \tag{25}$$

当然，沿着 S 曲线， κ 为零，因此方程 (25) 似乎仅对 C^+ 和 C^- 曲线有效。实际上，由于 $(-vdx+udy=\kappa dx)$ 在行列式 D 中的重数为二，沿着 S 曲线存在 $(\partial\rho/\partial x)$ 也需要满足 (25)（见 §3.3）。

对于其他七个偏导数，兼容性方程（CE）系数的表达式见附录 A。此外，§2 中已证明，W_l 作为四个守恒变量之一，沿特征线对 $(\partial W_l/\partial x)$ 和 $(\partial W_l/\partial y)$ 有界的方程相差一个 $-t$ 因子。因此，下文仅给出方程 (25) 的对应方程，用于保证 $(\partial\rho u/\partial x)$、$(\partial\rho v/\partial x)$ 和 $(\partial\rho E/\partial x)$ 的存在：

$$\begin{aligned}
&- \quad \gamma_1\, t\, E_c(-\gamma_1\, H+(\gamma+1)\, E_c)\, d\rho\\
&+ \quad (\gamma_1(\gamma t u+\kappa)E_c+v^2\,\kappa+\gamma_1\,(v-\gamma_1\, t\, u)H)\, d\rho u\\
&- \quad t\,(u^2\kappa+\gamma_1(\kappa-\gamma v)E_c+\gamma_1(\gamma_1 v-ut)H)\, d\rho v\\
&+ \quad t\,\gamma_1(\gamma_1 H-(\gamma+1)E_c)\, d\rho E=0
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \gamma_1\, E_c\, t^2(\gamma_1\, H-(\gamma+1)\, E_c)\, d\rho\\
&- \quad t(-v^2\kappa-\gamma_1\kappa E_c-\gamma\gamma_1 tuE_c+\gamma_1(\gamma_1 tu-v)H)\, d\rho u\\
&+ \quad (-v^3+3tuv^2-2t^2u^2v+\gamma_1((2-\gamma)t^2v-\kappa)H+\gamma_1(\gamma t^2v+\kappa)E_c)\, d\rho v\\
&- \quad t^2\gamma_1(-\gamma_1\, H+(\gamma+1)E_c)\, d\rho E=0
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
&- \quad \gamma_1 t(u+tv)E_c(\gamma_1 E_c+(2-\gamma)H)\, d\rho\\
&+ \quad t(\gamma_1 u^2+v\kappa+\gamma_1 tuv)(\gamma_1 E_c+(2-\gamma)H)\, d\rho u\\
&- \quad t(u\kappa-\gamma_1 tv^2-\gamma_1 uv)(\gamma_1 E_c+(2-\gamma)H)\, d\rho v\\
&+ \quad (-v\kappa^2-\gamma_1((1+\gamma t^2)v+\gamma_1 tu)E_c+\gamma_1^2 t(u+tv)H-\gamma_1\kappa H)\, d\rho E=0
\end{aligned} \tag{28}$$

3.3. 沿 S 流线的常微分方程

沿轨迹，$udy-vdx=0$ 是克拉默公式分母的一个零点，重数为二。项 $\kappa dx=udy-vdx$ 似乎是所有 K^l_{mx} 的一个因子，从 K^l_{mx} 中去掉该项后得到的表达式记为 $\bar{}K^l_{mx}$。显然，在柯西问题定义良好的任何地方

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\bar{K}^1_{1x}d\rho-\bar{K}^2_{1x}d\rho u+\bar{K}^3_{1x}d\rho v-\bar{K}^4_{1x}d\rho E}{(-v\,dx+u\,dy)(-v\,dx+u\,dy+c\,dl)(-v\,dx+u\,dy-c\,dl)}. \tag{29}$$

如果点 a 固定不动，而相邻点 b 不断向 S_a 靠近，则 $(-v\,dx+u\,dy)\to 0$，且为了保证 $(\partial\rho/\partial x)$ 的有界性，要求式 (29) 的分子等于零：

$$\bar{K}^1_{1x}d\rho-\bar{K}^2_{1x}d\rho u+\bar{K}^3_{1x}d\rho v-\bar{K}^4_{1x}d\rho E=0. \tag{30}$$

¯由于 κ的零性，K 系数的表达式比 K 系数的表达式简单得多。可以通过手工计算或形式计算验证，表示(∂W$_l$/∂x)有界性的兼容性方程（CE）与其关于(∂W$_l$/∂y)的对应方程相差一个 –t因子。还可以验证 ¯K$^l_{lx}$ = –t ¯K$^l_{ly}$，然后利用 ¯K系数作为(W,dx,dy γ)的函数所具有的连续性，以及在簇udy − vdx =0之外 ¯K$^l_{mx}$ = –t ¯K$^l_{my}$ l <> m的有效性。我们将(γ$_1$E$_c$ +(2 − γ)H)记为G；完全化简后的微分形式如下。

$$\begin{aligned}
(2E_c-H)\, d\rho-u\, d\rho u-v\, d\rho v+d\rho E &= 0 &(31)\\
((\gamma+1)E_c-\gamma_1 H)\,(E_c d\rho+d\rho E)-(\gamma E_c+(2-\gamma)H)\,(ud\rho u+vd\rho v) &= 0 &(32)\\
-E_c G\, d\rho+uG\, d\rho u+vG\, d\rho v+(\gamma_1 H-\gamma E_c)\, d\rho E &= 0, &(33)
\end{aligned}$$

其中，方程 (32) 由两个动量分量的导数均存在这一条件得出两次。首先使用 Maple 软件计算了该矩阵的秩，不出所料，结果为二。通过手算也可以验证，$Ec\times$(31) 减去 (32) 恰好就是方程 (33)，最后，$d\rho$ 和 $d\rho E$ 列中

{(31),(32)} 未关联。
沿流线S，总焓H和熵S的导数应为零 [29]。在验证这些性质由前面刚刚得到的（兼容性方程）所保证之前，先计算p/ρ^γ 乘以 ρ^γ 的微分以及H 乘以 ρ 的微分：

$$\begin{aligned} \rho^\gamma d(p/\rho^\gamma) &= (2E_c - H)\, d\rho - u\, d\rho u - v\, d\rho v + d\rho E \qquad (34)\\ \rho dH &= (-\gamma E + 2(\gamma-1)E_c) d\rho - \gamma_1 u d\rho u - \gamma_1 v d\rho v + \gamma d\rho E \qquad (35)\end{aligned}$$

方程 (31) 与 $\rho^\gamma d(p/\rho^\gamma) = 0$完全相同。因此得到 $d(p/\rho^\gamma) = 0$，显然，推导出的（兼容性方程）包含沿流线熵恒定这一性质。此外，$G\times$(31) 加上 (33)，经公因子化简后得到 $-Gd\rho + d\rho E = 0$。最后，将此方程加到方程 (31) 的 γ_1 倍上，恰好得到 $\rho dH = 0$，因此，欧拉流沿轨迹的第二个预期性质也包含在推导出的（兼容性方程）中。

3.4. 沿 C^+C^- 的常微分方程

所有微分形式沿 C^+、C^- 成比例这一点已在 §2.4 中证明。方程 (25) 可作为相关的（DCE）保留。方程 (25) 中$d\rho$ 的因子相当复杂，但可利用t^+ 和 t^-所满足的二次方程推导出更简单的形式：这些曲线斜率定义为

$$t^\pm = \tan(\phi + \beta) \quad \text{with} \quad \tan\phi = \frac{v}{u} \quad \sin\beta = \pm\frac{1}{M}, \qquad (36)$$

或者也可通过其显式表达式 [27]:

$$t^\pm = \frac{uv \pm c\sqrt{u^2+v^2-c^2}}{u^2-c^2}. \qquad (37)$$

它们是以下二次方程的两个根 [27]

$$\gamma_1\,(1+t^2)\,H = \gamma_1\,(1+t^2)\,E_c + (tu-v)^2, \qquad (38)$$

这使得可以简化沿C^+或C^-的 (25) 式。最终的 (DCE) 为

$$\gamma_1 E_c(u+tv)d\rho - (\gamma u(u+tv) - 2E_c)d\rho u - (\gamma v(u+tv) - 2E_c t)d\rho v + \gamma_1(u+tv)d\rho E = 0 \qquad (39)$$

其中，对于 $t = t^+$，对应 C^+；对于 $t = t^-$，对应 C^-。
首先已检查，这种 C^+（分别为 C^-）微分形式与 $\{dk^+, dH, dS\}$（分别为 $\{dk^-, dH, dS\}$）相关，这与方程（10）一致。附录 B 中证明了这些用不同变量表示的兼容性方程是相同的。

4. 喷管流的直接特征方程与伴随特征方程的评估

4.1. 超音速喷管构型

用于评估 DCE 和 ACE 的测试案例是一个为以 1.6马赫飞行的飞机设计的超音速喷管。该几何构型是在 SENECA 欧盟项目 [32] 的框架下设计的。该喷管是一个经典的收敛 — 扩张管道。在亚音速注入平面，滞止条件固定，入口处远场流静压（分别为温度）与总压（分别为总温）的比值为$p_{i_{inl}}/p_{i_\infty} = 1.605$ 和$T_{i_{inl}}/T_{i_\infty} = 1.606$。由于计算的是无黏流，这两个条件和远场马赫数完全确定了流动。

原始几何形状是为圆形轴对称发动机设计的，二维几何形状则是直接从对称面上的喷管轮廓提取而来。因此，质量流率有所不同。由于沿x 坐标（入口及主流动方向）的面积变化规律不同，喷管中线上的流动也有所不同。尽管如此，沿此线的马赫数分布相似，喉部处为$M = 1$，且

$M \simeq 2.1$ 出口处。
关注的函数输出是推力T,

$$T = \int_{\Gamma_w} (p - p_\infty) ds_x + \int_{\Gamma_{inl}} (\rho u^2 + p) ds_x, \tag{40}$$

其中， Γ_w 为喷管内壁， Γ_{inl} 为喷射段， s_x 为表面向量的x分量（方向朝向流体域外部）。

图 1 展示了喷管和流体域，以及马赫数分布和用于评估（CE）的S、C^+和C^-曲线。流体域采用包含 320000 个单元的结构化 8 块网格进行离散。流动模拟使用 elsA 代码 [33]，并采用 Jameson-Schmidt-Turkel（JST）格式 [34]。推力的伴随计算使用*elsA* 代码 [35]的离散伴随模块，该代码兼用于研究 [36, 37, 12, 38] 和工程应用 [39, 40, 41]。文献 [38], 证明，在结构化网格上，JST 格式的离散伴随对于欧拉流具有对偶一致性，但边界相邻单元除外。流体域内部的这一伴随一致性性质对于数值评估连续伴随性质非常有价值。要在物理边界附近通过修改雅可比矩阵实现对偶一致性，在工业代码中实现起来较为复杂。本研究未采用这一方法，因此在边界附近观察到了伴随场的轻微振荡。为简化处理，考虑到网格密度，提取特征曲线时剔除了边界附近前两个单元内的点。图 3 展示了伴随场的第一个分量。预期推力的精确伴随在后向C^+特征线下游为零（在未绘制的对称域中，相应的C^-特征线亦然）；这是因为这些线下游的任何扰动都不会影响T 的作用范围内的流动（请注意，喷管扩张段内的速度为超音速）。离散伴随很好地满足了这一性质。

近期一系列出版物研究了欧拉升力伴随场和阻力伴随场的性质，特别是在壁面 [42, 43, 44, 45, 38]附近的性质。这些场与壁面压力积分相关联时的显著性质之一，是 ψ_1 和 ψ_4 之间按因子 H [46] 成比例，这一点在数值上得到了非常好的满足 [38]。除了验证论文中的结果外，我们还利用特定感兴趣函数 (40) 所提供的机会（该函数不仅依赖于静压），将 ψ_1 和 $H\psi_4$ 一起绘制出来——见图 3。这两个量似乎相似，未来的研究可以探讨感兴趣的输出泛函所需满足的条件，在这些条件下应当观察到 $\psi_1 = H\psi_4$。

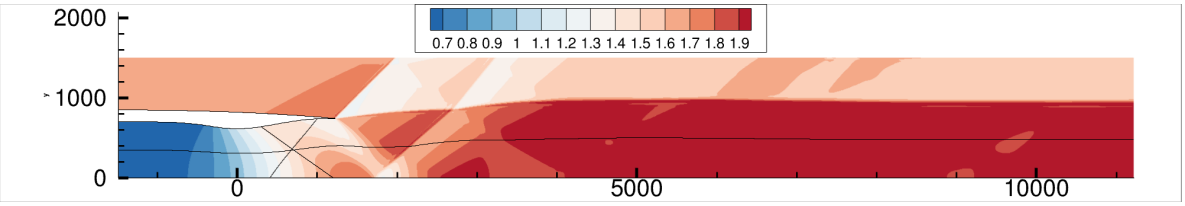


图 1：SENECA 喷管。等马赫数线。用于验证（DCE）和（ACE）的选定S、C^+和C^-

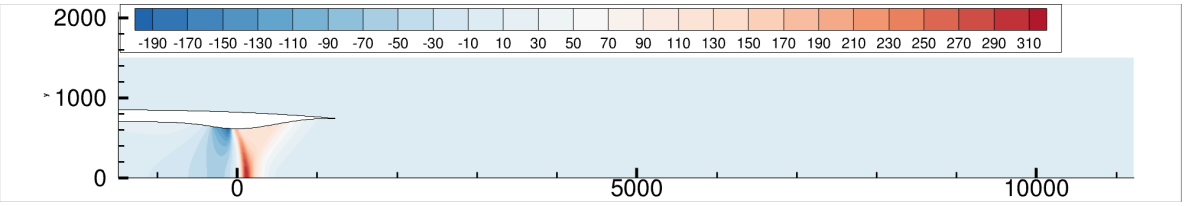


图 2：SENECA 喷管。推力离散伴随的等值线，分量 ψ_1 （质量流量残差的对偶）

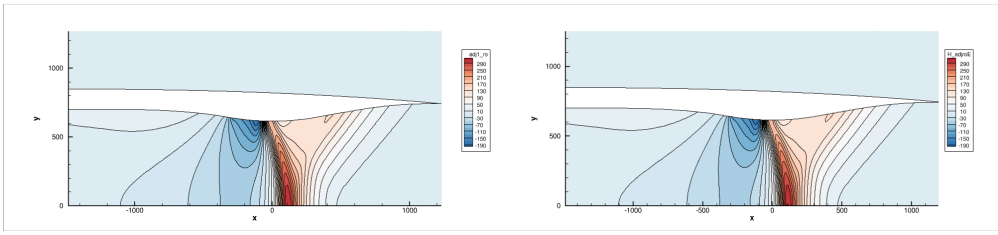


图 3：SENECA 喷管。相同等值水平的 Iso-ψ_1 （左）和 iso-(H$\times\psi_4$)

4.2. 对 *(CDE)* 的评估

数值评估方法是沿着前述细网格流动的特征曲线对（CDE）进行积分。更准确地说，对于C^+和C^-，计算以下积分。

$$\begin{aligned}\Xi C^+ &= \int_{\mathscr{C}^+}\left(\gamma_1 E_c(u+vt^+)\,\frac{d\rho}{ds}-(\gamma u(u+vt^+)-2E_c)\frac{d\rho u}{ds}-(\gamma v(u+vt^+)-2E_c t^+)\frac{d\rho v}{ds}+\gamma_1(u+vt^+)\frac{d\rho E}{ds}\right)ds\\ \Xi C^- &= \int_{\mathscr{C}^-}\left(\gamma_1 E_c(u+vt^-)\,\frac{d\rho}{ds}-(\gamma u(u+vt^-)-2E_c)\frac{d\rho u}{ds}-(\gamma v(u+vt^-)-2E_c t^-)\frac{d\rho v}{ds}+\gamma_1(u+vt^-)\frac{d\rho E}{ds}\right)ds,\end{aligned}$$

其中s曲线 特征曲线上的线性横坐标。还计算了 $\Xi C+$和 $\Xi C-$的子部分，以便避免误差 在讨论接近零的数值时出现尺度误差。例如，对于 ΞC^+，

$$\Xi C_1^+=\int_{\mathscr{C}^+}\left(\gamma_1 E_c(u+vt^+)\frac{d\rho}{ds}\right)ds \qquad \Xi C_2^+=-\int_{\mathscr{C}^+}\left((\gamma u(u+vt^+)-2E_c)\frac{d\rho u}{ds}\right)ds$$

$$\Xi C_3^+=-\int_{\mathscr{C}^+}\left((\gamma v(u+vt^+)-2E_c t^+)\frac{d\rho v}{ds}\right)ds \qquad \Xi C_4^+=\int_{\mathscr{C}^+}\left(\gamma_1(u+vt^+)\frac{d\rho E}{ds}\right)ds.$$

当然， $\Xi C^+=\Xi C_1^+ +\Xi C_2^+ +\Xi C_3^+ +\Xi C_4^+$（分别为 $\Xi C^-=\Xi C_1^- +\Xi C_2^- +\Xi C_3^- +\Xi C_4^-$）之和预计远小于其各个组成部分。积分沿图 1 所示选定的C^+和选定的C^-，按照信息传播方向（x递增）进行。确实观测到 ΞC^+ 和 ΞC^- 的值几乎为零——见图 4。为评估 (31) 和

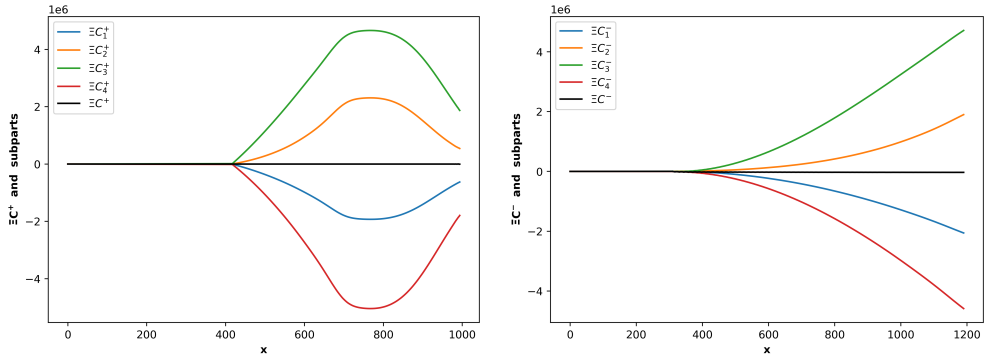


图 4：对 (DCE) (39) 的数值评估。 ΞC^+ （左）、 ΞC^- （右）及其各组成部分沿选定的C^+C^-积分。验证方法：黑色曲线理想情况下应与x 轴重合。

(32)。为简洁起见，此处不予展示。这两条流线（DCE）等价于$dS=0$和$dH=0$，如 §3.3 所述。作为补充验证，计算了H （沿整条流线）的相对变化以及S （截至第一个激波）的相对变化。所得相对误差为 $3e^{-6}$ 和 $4e^{-6}$ 。

4.3. 推力伴随的（*ACE*）评估

对于推力伴随场，评估方法相同，不同之处在于，针对伴随方程，(ACE) 以正向方式积分，也就是说，从泛函输出的支撑区域出发，沿流动方向的反方向积分

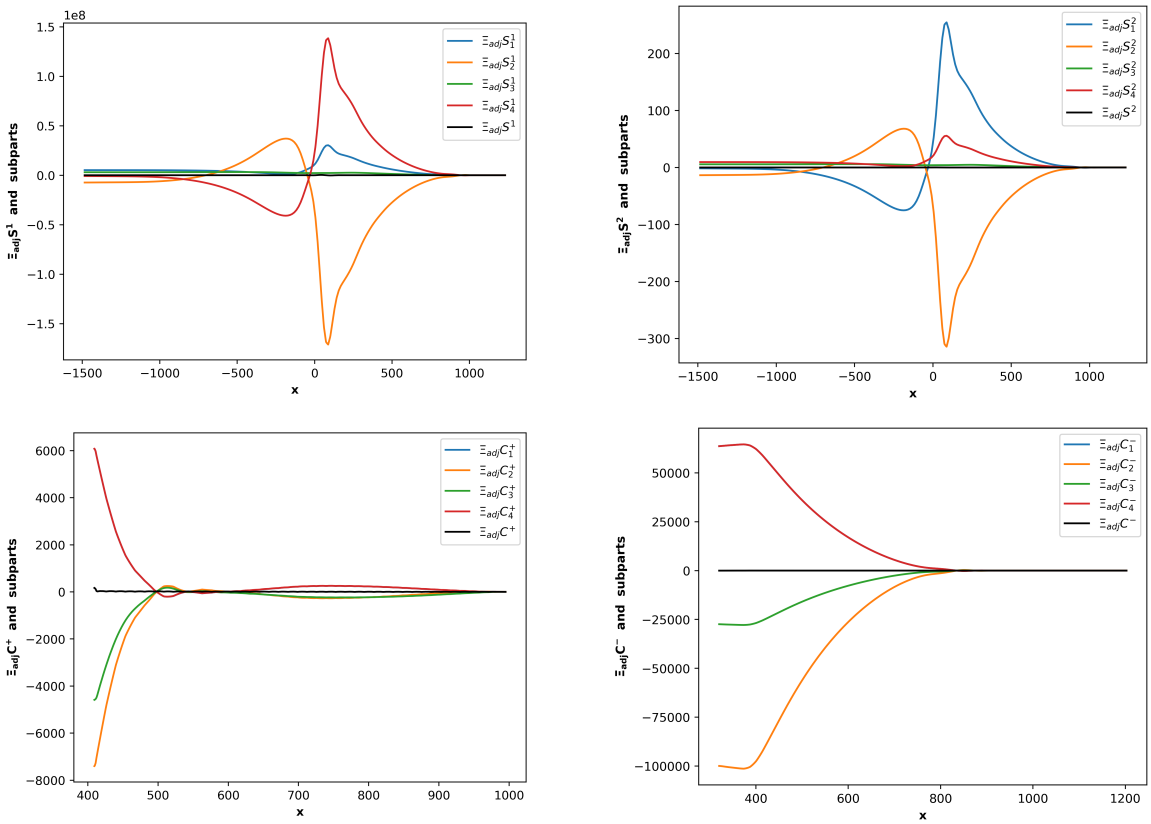


图5：数值值评估 (ACE)[27]。$\Xi_{adj}S^1$（左上），$\Xi_{adj}S^2$（右上），$\Xi_{adj}C^+$（左下），$\Xi_{adj}C^-$（右下）以及其子部分沿所选取的积分积分到S、C^+和C^-上。验证方法：黑色曲线理想情况下应与x轴重合。

信息传播。需要根据离散流动场和推力伴随场计算的积分（及其子项）为[27]:

$$\Xi_{adj}S^1 = \int_{\mathscr{S}} \left(E_c \frac{d\psi_1}{ds} + H(u \frac{d\psi_2}{ds} + v \frac{d\psi_3}{ds}) + H^2 \frac{d\psi_4}{ds} \right) ds \tag{41}$$

$$\Xi_{adj}S^2 = \int_{\mathscr{S}} \left(\frac{d\psi_1}{ds} + u \frac{d\psi_2}{ds} + v \frac{d\psi_3}{ds} + E_c \frac{d\psi_4}{ds} \right) ds \tag{42}$$

$$\Xi_{adj}C^+ = \int_{\mathscr{C}^+} \left((u+vt^+) \frac{d\psi_1}{ds} + (u^2+v^2)(\frac{d\psi_2}{ds} + t^+ \frac{d\psi_3}{ds}) + H(u+vt^+) \frac{d\psi_4}{ds} \right) ds \tag{43}$$

$$\Xi_{adj}C^- = \int_{\mathscr{C}^-} \left((u+vt^-) \frac{d\psi_1}{ds} + (u^2+v^2)(\frac{d\psi_2}{ds} + t^- \frac{d\psi_3}{ds}) + H(u+vt^-) \frac{d\psi_4}{ds} \right) ds. \tag{44}$$

与§4.2相同，通过检查沿特征曲线的整个范围内，$\Xi_{adj}S^1$、$\Xi_{adj}S^2$、$\Xi_{adj}C^+$ 和 $\Xi_{adj}C^-$ 均远小于其子项，对（CE）进行数值评估。正如图5所示，这一性质得到了很好的满足。

5. 结论

几年前，一些作者直觉地认为，二维无黏流超音速区域的升力和阻力伴随场与特征曲线 [20, 47] 相关联。这一点最近通过将特征理论扩展到二维欧拉流的连续伴随方程 [27] 得到了证实。本文的应用部分对这些方程进行了第二次数值评估。

此外， [27] 中 (ACE) 的推导需要对一个 8×8 柯西问题矩阵的子式进行解析计算。此前从未采用过类似的证明来寻找流动的 (CE)（通常的做法是分析一组处于随局部速度移动的参考系中的物理方程）。在原始参考系中寻找以守恒变量表示的 (DCE) 似乎是可行的，而且并不复杂。本文所述的代数性质大大简化了相应的推导；这些性质是寻找 (DCE) 和 (ACE) 时所涉及的柯西问题线性系统共有的。

补充材料

三个 Python 文件用于检查 K^l_{mx}、K^l_{my}、 $\bar{K}^l_{mx}$、 $\bar{K}^l_{my}$ 的公式。两个 Maple 文件用于检查沿S 和 C^+曲线的微分形式的秩。

资助

第4节中研究的喷管是在 SENECA项目框架下设计的，该项目由欧盟的地平线2020研究与创新计划资助，资助协议编号为101006742，项目名称为SENECA（超音速飞机的起飞和着陆噪声与排放）。

本研究部分得到了法国民航总局（DGAC）资助的SONICE项目的支持。

致谢

§4 中使用的 elsA V5.0 是 ONERA-Safran 的专有软件。

作者衷心感谢 Sébastien Heib、Sana Amri、Sébastien Bourasseau、Thomas Hennion 和 Antoine Dumont 的诸多富有成效的讨论。

作者贡献

调查，K.Ancourt，J.Peter；软件，J.Peter；验证，K.Ancourt，O.Atinault；撰写，J.Peter，K.Ancourt，O.Atinault；形式分析，K.Ancourt。

附录 A

- 以下给出了K_l2_x 系数的表达式

$$\begin{aligned}
K^1_{2x} &= -dx^3\ \gamma_1\ t\ E_c\ \kappa\ (\gamma_1\ H-(\gamma+1)E_c)\\
K^2_{2x} &= dx^3\kappa(\gamma_1^2 tuE_c+\gamma_1 E_c\kappa+v^2\kappa+\gamma_1 Hv-\gamma_1^2\ Htu+\gamma_1 tuE_c)\\
K^3_{2x} &= -dx^3\ t\ \kappa\ (-u^2\ \kappa+\gamma_1\ ((\gamma+1)\ v-t\ u)\ E_c+\gamma_1\ H\ (t\ u-\gamma_1\ v))\\
K^4_{2x} &= -dx^3\ \gamma_1\ t\ \kappa\ (-\gamma_1\ H+(\gamma+1)E_c)
\end{aligned}$$

- 以下给出了K_l3_x 系数

$$\begin{aligned}
K^1_{3x} &= -dx^3\ \gamma_1\ t^2\ E_c\ \kappa\ (-\gamma_1\ H+(\gamma+1)E_c)\\
K^2_{3x} &= -dx^3\ t\ \kappa\ (\gamma_1\ ((\gamma+1)\ t\ u-v)\ E_c+v^2\ \kappa+\gamma_1\ H\ (v-\gamma_1\ t\ u))\\
K^3_{3x} &= dx^3\ \kappa\ (-v^3+3\ t\ u\ v^2-\gamma_1\ H\ \kappa-2\ t^2\ u^2\ v+\gamma_1^2\ t^2\ v\ E_c+\gamma_1\ H\ t^2\ v\\
&- \gamma_1^2\ H\ t^2\ v+\gamma_1\ t^2\ v\ E_c+\gamma_1\ E_c\ \kappa)\\
K^4_{3x} &= -dx^3\ \gamma_1\ t^2\ \kappa\ (\gamma_1\ H-(\gamma+1)\ E_c)
\end{aligned}$$

- 以下给出了K_i4_x 系数

$$\begin{aligned}
K^1_{4x} &= dx^3\ \gamma_1\ t\ E_c\ \ \kappa\ (u+t\ v)\ (\gamma_1\ E_c+(2-\gamma)\ H)\\
K^2_{4x} &= dx^3\ t\ \kappa\ (2\ \gamma_1\ E_c+\gamma\ \kappa\ v)\ (\gamma_1\ E_c+(2-\gamma)H)\\
K^3_{4x} &= -dx^3\ t\ \kappa\ (-u\ \kappa+\gamma_1\ t\ v^2+\gamma_1\ u\ v)\ (\gamma_1\ E_c+(2-\gamma)H)\\
K^4_{4x} &= dx^3\kappa(-\gamma_1 H\kappa-\gamma_1 vE_c-v\kappa^2-\gamma_1^2 tuE_c-\gamma_1 t^2 vE_c\\
&- \gamma_1^2 t^2 vE_c+\gamma_1^2 Htu+\gamma_1^2 Ht^2 v)
\end{aligned}$$

- 下面给出了K_i1_y 系数

$$\begin{aligned}
K^1_{1y} &= dx^3\ \kappa\ (u\ \kappa^2+2\gamma_1\ u\ E_c+\gamma_1\ t\ v\ E_c+\gamma_1\ t^2\ u\ E_c-\gamma_1\ H\ (1+t^2)\ u)\\
K^2_{1y} &= dx^3\ \kappa\ (\gamma\ \kappa\ v+2\ \gamma_1\ E_c)\\
K^3_{1y} &= dx^3\ \kappa\ (-\gamma_1\ v\ (t\ v+u)+\kappa\ u)\\
K^4_{1y} &= -dx^3\ \gamma_1\ \kappa\ (t\ v+u)
\end{aligned}$$

- 下面给出了K_i2_y 系数

$$\begin{aligned}
K^1_{2y} &= dx^3\ \gamma_1\ E_c\ \kappa\ (\gamma_1\ H-(\gamma+1)\ E_c)\\
K^2_{2y} &= dx^3\ \kappa(\gamma_1\ E_c\ (t\kappa-\gamma\ u)+t^2\ u^3+2uv^2-3\ t\ u^2\ v+\gamma_1\ H\ ((\gamma-2)u-t\kappa))\\
K^3_{2y} &= dx^3\ \kappa\ (-u^2\ \kappa+\gamma_1\ ((\gamma+1)\ v-t\ u)\ E_c+\gamma_1\ H\ (t\ u-\gamma_1\ v))\\
K^4_{2y} &= dx^3\ \gamma_1\ \kappa\ (-\gamma_1\ H+(\gamma+1)\ E_c)
\end{aligned}$$

- 下面给出了K_i3_y 系数

$$\begin{aligned}
K^1_{3y} &= dx^3\ \gamma_1\ E_c\ \kappa\ t\ (-\gamma_1\ H+(\gamma+1)\ E_c)\\
K^2_{3y} &= dx^3\ \kappa\ (\gamma_1\ ((\gamma+1)\ t\ u-v)\ E_c+v^2\ \kappa+\gamma_1\ H\ (v-\gamma_1\ t\ u))\\
K^3_{3y} &= dx^3\ \kappa\ t\ (\gamma_1\ H\ (\gamma_1\ v-t\ u)-2\ \gamma_1\ v\ E_c-\gamma_1^2\ v\ E_c+u^2\ \kappa+\gamma_1\ t\ u\ E_c)\\
K^4_{3y} &= dx^3\ \gamma_1\ \kappa\ t\ (\gamma_1\ H-(\gamma+1)\ E_c)
\end{aligned}$$

- 下面给出了K_i4_y 系数

$$\begin{aligned}
K^1_{4y} &= -dx^3\ \gamma_1\ E_c\ \ \kappa\ (u+t\ v)\ (\gamma_1\ E_c+(2-\gamma)\ H)\\
K^2_{4y} &= -dx^3\ \kappa\ (2\ \gamma_1\ E_c+\gamma\ \kappa\ v)\ (\gamma_1\ E_c+(2-\gamma)\ H)\\
K^3_{4y} &= dx^3\ \kappa\ (-u\ \kappa+\gamma_1\ t\ v^2+\gamma_1\ u\ v)\ (\gamma_1\ E_c+(2-\gamma)\ H)\\
K^4_{4y} &= dx^3\ \kappa\ (u\ \kappa^2+\gamma\ \gamma_1\ u\ E_c+\gamma_1\ t^2\ u\ E_c+\gamma_1^2\ t\ v\ E_c-\gamma_1^2\ H\ u-\gamma_1^2\ H\ t\ v\\
&- \gamma_1\ H\ t^2\ u+\gamma_1\ H\ t\ v)
\end{aligned}$$

附录 B

下面证明在C^+情形下，(10) 与 (39) 等价。方程 (10) 写作

$$d\phi-\sqrt{M^2-1}\frac{d||\overline{U}||}{||\overline{U}||}-\sqrt{M^2-1}\frac{TdS-dH}{||\overline{U}||^2}=0,$$

with

$$\phi=\arctan\left(\frac{\rho v}{\rho u}\right)\qquad\text{and}\qquad T=\frac{p}{\rho r}\quad\text{so that}\quad TdS=\frac{p}{\rho\gamma_1}d(ln(\frac{p}{\rho^\gamma}))=\frac{p}{\rho\gamma_1}(\frac{dp}{p}-\gamma\frac{d\rho}{\rho}).$$

从对原始变量的微分转为对守恒变量的微分得到

$$\gamma_1 E_c \sqrt{M^2-1}\, d\rho - (v+\gamma_1 u \sqrt{M^2-1})\, d\rho u + (u-\gamma_1 v \sqrt{M^2-1})\, d\rho v + \gamma_1 \sqrt{M^2-1}\, d\rho E = 0. \tag{45}$$

此外，方程（39）可写为

$$\gamma_1 E_c (u+t^+ v)\, d\rho - (\gamma u(u+t^+ v) - 2E_c)\, d\rho u - (\gamma v(u+t^+ v) - 2E_c t^+)\, d\rho v + \gamma_1 (u+t^+ v)\, d\rho E = 0$$

最后两个方程的系数似乎成比例:

$$\frac{\gamma_1 E_c (u+t^+ v)}{\gamma_1 E_c \sqrt{M^2-1}} = \frac{-(\gamma u(u+t^+ v) - 2E_c)}{-(v+\gamma_1 u \sqrt{M^2-1})} = \frac{-(\gamma v(u+t^+ v) - 2E_c t^+)}{(u-\gamma_1 v \sqrt{M^2-1})} = \frac{\gamma_1 (u+t^+ v)}{\gamma_1 \sqrt{M^2-1}} = (u+t^+ v)\, \tan\beta. \tag{46}$$

参考文献

参考文献

[1] Ferri, A. 特征线法在超音速旋转流中的应用。TR 841，NASA，（1946）。[2] Shapiro, A.《可压缩流体流动的动力学与热力学》。The Ronald Press Company，（1954）。[3] Bonnet, A. 和 Luneau, J.《空气动力学：流体动力学理论》。Cepadues，（1989）。[4] Délery, J.《可压缩空气动力学论》。第3卷。流体力学丛书。Lavoisier – Hermés Science，（2008）。[5] Jameson, A. 通过控制理论进行气动设计。《Journal of Scientific Computing》3(3)，233–260（1988）。[6] Brezillon, J. 和 Gauger, N. 使用伴随方法进行二维和三维气动外形优化。《Aerospace Science and Technology Journal》8(8)，715–727（2004）。[7] Brezillon, T. 和 Dwight, R. 用于气动外形优化的纳维 - 斯托克斯方程离散伴随。载于 EUROGEN 2005，慕尼黑，（2005）。[8] Peter, J. 和 Dwight, R. 气动优化的数值敏感性分析：方法综述。《计算机与流体》39，373–391（2010）。[9] Schmidt, S.、Ilic, C.、Schultz, V. 和 Gauger, N. 基于形状微积分的大规模三维气动外形优化。《美国航空航天学会会刊》51(11)，2615–2627（2013）。[10] Venditti, D. 和 Darmofal, D. 面向泛函输出的网格自适应：在二维无黏流中的应用。《计算物理学杂志》176，40–69（2002）。[11] Dwight, R. 有限体积格式中耗散误差的启发式后验估计及其在网格自适应中的应用。《计算物理学杂志》227，2845–2863（2008）。[12] Todarello, G.、Vonck, F.、Bourasseau, S.、Peter, J. 和 Désidéri, J.-A. 利用关于节点坐标的泛函导数进行有限体积目标导向网格自适应。《计算物理学杂志》313，799–819（2016）。[13] Giles, M.、Duta, M. 和 Müller, J.-D. 使用精确离散方法开发伴随代码。载于《AIAA论文集》，论文编号2001-2596。（2001）。[14] Giles, M.、Duta, M.、Müller, J.-D. 和 Pierce, N. 离散伴随方法的算法开发。《美国航空航天学会会刊》41(2)（2003）。[15] Economon, T.、Alonso, J.、Albring, T. 和 Gauger, N. SU2中基准气动设计案例的伴随公式研究。载于《AIAA论文集》，论文编号2017-4363。（2017）。[16] Sagebaum, M.、Albring, T. 和 Gauger, N. 使用 codipack 进行高性能导数计算。《ACM数学软件汇刊》45(4)，1–26（2019）。[17] Pinel, X. 和 Montagnac, M. 用于气动设计优化中求解伴随问题的块 Krylov 方法。《美国航空航天学会会刊》51(9)，2183–2189（2013）。[18] Xu, S.、Radford, D.、Meyer, M. 和 Müller, J.-D. 离散定常伴随求解器的稳定化。《计算物理学杂志》299，175–195（2015）。[19] Lions, J. L.《由偏微分方程支配的系统的最优控制》。数学研究。巴黎：Dunod，Gauthier-Villars，（1968）。[20] Sartor, F.、Mettot, C. 和 Sipp, D. 翼型跨音速抖振流动的稳定性、受纳性与敏感性分析。《美国航空航天学会会刊》53(7)，1980–1993（2015）。[21] Laurenceau, J. 用于形状优化的克里金响应面。博士论文，图卢兹国立综合理工学院，（2008）。[22] de Baar, J.、Scholcz, T. 和 Dwight, R. 技术札记：在高维元模型中利用伴随导数。《美国航空航天学会会刊》53(5)，1391–1395（2015）。[23] Sipp, D.、Marquet, O.、Meliga, P. 和 Barbagallo, A. 开放流中的全局不稳定性动力学与控制：线性化方法。《应用力学评论》63(3)，04（2010）。[24] Luchini, P. 和 Bottaro, A. 稳定性分析中的伴随方程。《流体力学年评》46(1)，493–517（2014）。[25] Parish, E. 和 Duraisamy, K. 一种利用场反演与机器学习进行数据驱动预测建模的范式。《计算物理学杂志》305，758–774（2016）。[26] Talagrand, O. 和 Courtier, P. 利用伴随涡量方程对气象观测进行变分同化。I：理论。《Q. J. R. Meteorol. Soc.》113(478)，1311–1328（1987）。

[27] Peter, J. 和 Désidéri, J.-A. 伴随欧拉方程的常微分方程。《流体物理》34，086113，799–819（2022）。 [28] Meyer, R. 和 Goldstein, S. 特征线法在涉及两个独立变量的可压缩流问题中的应用：第一部分，一般理论。《力学与应用数学季刊》1(1)，196–219（1948）。 [29] Anderson, J.《现代可压缩流》（第三版）。麦格劳-希尔航空与航天工程丛书，（2003）。 [30] Liepmann, H.W. 和 Roshko, A.《气体动力学基础》。多佛出版社，（1956）。 [31] Grossman, B.《真实气体动力学基础概念》。弗吉尼亚理工学院暨州立大学，1月（2000）。 [32] Mourouzidis, M. 下一代1.6马赫超音速公务机初步设计：研究起降（LTO）噪声与排放。载于第12届EASN创新与太空会议“开拓新视野”，巴塞罗那，（2022）。 [33] Cambier, L.、Heib, S. 和 Plot, S. elsA计算流体力学软件：研究成果与行业反馈。《力学与工业》14(3)，159–174（2013）。 [34] Jameson, A.、Schmidt, W. 和 Turkel, E. 使用Runge-Kutta时间推进格式，通过有限体积法求解欧拉方程。《AIAA论文集》，论文编号1981-1259。（1981）。 [35] Peter, J.、Renac, F.、Dumont, A. 和 Méheut, M. elsA代码中用于形状优化和网格自适应的离散伴随法：现状与挑战。载于第50届3AF应用空气动力学研讨会，图卢兹，（2015）。 [36] Peter, J.、Drullion, F. 和 Pham, C.-T. 对气动外形优化中离散隐式梯度与离散伴随法的贡献。载于ECCOMAS会议，于韦斯屈莱，7月（2004）。 [37] Peter, J.、Nguyen-Dinh, M. 和 Trontin, P. 利用气动函数关于网格坐标的全导数进行目标导向网格自适应——应用于欧拉流。《计算机与流体》66，194–214（2012）。 [38] Peter, J.、Renac, F. 和 Labbé, C. 二维可压缩欧拉流的有限体积离散伴随场分析。《计算物理学杂志》449，110811（2022）。 [39] Carrier, G.、Destarac, D.、Dumont, A.、Méheut, M.、Salah el Din, I.、Peter, J.、Ben Khelil, S.、Brezillon, J. 和 Pestana, M. 使用elsA软件进行基于梯度的优化。载于《AIAA论文集》，论文编号2014-0568。（2014）。 [40] Méheut, M.、Destarac, D.、Ben Khelil, S.、Carrier, G.、Dumont, A. 和 Peter, J. 使用elsA软件进行基于梯度的单点与多点优化。载于《AIAA论文集》，论文编号2015-0263。（2015）。 [41] Méheut, M.、Carrier, G.、Dumont, A. 和 Peter, J. 通过雷诺平均纳维-斯托克斯伴随技术，对CRM单机翼及机翼-机身-尾翼构型进行基于梯度的优化。载于《AIAA论文集》，论文编号2016-1293。（2016）。 [42] Lozano, C. 关于无黏气动外形优化中基于离散伴随的梯度所涉及的网格敏感性与边界公式。《计算物理学杂志》346，403–436（2017）。 [43] Lozano, C. 伴随欧拉方程的奇异与不连续解。《美国航空航天学会会刊》56(11)，4437–4451（2018）。 [44] Lozano, C. 注意伴随解！无黏伴随解缺乏网格收敛性。《美国航空航天学会会刊》57(9)，3991–4006（2019）。 [45] Peter, J. 气动领域中用于形状优化和目标导向网格自适应的离散伴随方法研究。南特大学。研究指导资格认证论文，（2020）。 [46] Giles, M. 和 Pierce, N. 准一维欧拉方程的解析伴随解。《流体力学杂志》426，327–345（2001）。 [47] Lozano, C. 关于二维伴随欧拉方程解的性质。载于EUROGEN 2017，马德里，（2017）。