arXiv:2305.03516v2 [math.CO] 5 Jun 2023

图与树中的边界独立广播

J. I. Hoepner、G. MacGillivray 和 C. M. Mynhardt 维多利亚大学数学与统计系 邮政信箱 1700，CSC 分局 维多利亚，不列颠哥伦比亚省，加拿大 V8W 2Y2julesihoepner@gmail.com,

kieka@uvic.ca,gmacgill@uvic.ca

2023年5月31日

摘要

连通图 G 上的广播是一个函数 f: $V(G) \to \{0, 1, ..., \text{diam}(G)\}$，其中该图的顶点集为 $V(G)$，且对于所有 $v \in V$，都有 $f(v) \leq e(v)$（v 的离心率）。若顶点 v 满足 $f(v) > 0$，则称其为广播顶点，所有此类顶点构成的集合记为 V_f^+。若顶点 u 满足 $d_G(u, v) \leq f(v)$，则称其从 $v \in V_f^+$ 听到 f。若没有任何广播顶点能听到另一个广播顶点的广播，则称广播 f 为听觉独立。此外，如果任何从多个广播顶点听到 f 的顶点 u 都满足：对于所有 $v \in V_f^+$， $f(v) \leq d_G(u, v)$，则称该广播为边界独立。

在 f 上的代价为 $\sigma(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$。图 G 上极大边界独立广播的最小代价称为下 *bn*-独立性数，记作 $i_{bn}(G)$。对于听觉独立广播，下 *h*-独立性数 $i_h(G)$ 也类似定义。我们证明，对于所有图 G， $i_{bn}(G) \leq i_h(G)$，并证明 $i_h(G)/i_{bn}(G)$有界。对于这两个参数，我们证明，任意连通图 G 的下 bn-独立性数（h-独立性数）等于其生成树中下 bn-独立性数（h-独立性数）的最小值。

我们进一步研究边界独立广播的最大代价，记作 $\alpha_{bn}(G)$。我们证明 $\alpha_{bn}(G)$ 可以用独立数 $\alpha(G)$来界定，并通过将独立集问题归约到最大 bn-独立广播问题的一个实例，证明最大 bn-独立广播问题是 NP-hard。

我们特别关注毛毛虫树，研究当 T 为一棵树时， $\alpha_{bn}(T)$ 关于其阶数以及度至少为 3 的顶点数量（称为 T的分支顶点）的界。最后，我们描述一种多项式时间算法，用于确定给定树 T 的 $\alpha_{bn}(T)$。

关键词： 广播支配；广播独立性；听觉独立性；边界独立**AMS 2010 学科分类号：** 05C69

1 引言

将独立集的概念推广到广播独立性有多种方法。如果要求广播顶点之间互相听不见，就得到 Erwin 在 [6], 中引入的代价独立广播；本文将其称为听觉独立广播，简称 h-独立。边界独立（或 bn-独立）广播的定义要求广播在边上不发生重叠，该定义由 Neilson [18] 以及 Mynhardt 和 Neilson [15] 提出，作为听觉独立性的另一种形式。我们进一步研究一般图和树上的下参数 $i_h(G)$ 和 $i_{bn}(G)$，证明这些参数的可比性，并获得比值 $i_h(G)/i_{bn}(G)$ 的一个上界。

我们将在第 2 节介绍广播的定义和已知结果，并在第 3 节给出初步结果和观察。在第 4 节中，我们确定对于任意连通图 G,

$$i_{bn}(G) = \min\{i_{bn}(T) : T \text{ is a spanning tree of G}\},$$

由此我们证明，对于任意图 G， $i_{bn}(G) \leq i_h(G)$。作为推论，通过沿用下边界独立数类似结果的证明，我们发现对于任意连通图 G,

$$i_h(G) = \min\{i_h(T) : T \text{ is a spanning tree of G}\}.$$

在第 5 节中，我们证明对于所有图 G， $\frac{i_h(G)}{i_{bn}(G)} \leq \frac{5}{4}$。

在本文后半部分，我们将重点转向边界独立性的上界参数。给定图 G 上的边界独立广播的最大代价称为其边界独立数，记为 $\alpha_{bn}(G)$。对于给定整数 $k \geq 0$，确定$\alpha_{bn}(G) \geq k$ 是否成立的问题称为最大 *bn*-独立广播问题。听觉独立数$\alpha_h(G)$和最大 *h*-独立广播问题 的定义类似。

由于任何边界独立广播都是听觉独立的，根据定义可知，对于所有图 G，$\alpha_{bn}(G) \leq \alpha_h(G)$。在 [15], 中，Mynhardt 和 Neilson 证明了 $\alpha_h(G)/\alpha_{bn}(G) < 2$，并且该界是渐近意义下的最佳可能界。他们提出了在 [17] 中研究比值 $\alpha_{bn}(G)/\alpha(G)$ 的问题。

问题1.1。 对于任意图 G， $\alpha_{bn}(G) < 2\alpha(G)$ 是否成立？

[15] 中已证明，对于所有阶数为 n 的图 G， $\alpha_{bn}(G) \leq n-1$，且当且仅当 G 是一条路径或一个广义蜘蛛图（恰有一个度大于 2 的顶点的树）时取等号。容易看出， $\alpha(G) \leq n - \delta(G)$，其中 $\delta(G)$ 表示 G 的顶点中的最小度。在 [16], 中，Mynhardt 和 Neilson 提出，最大边界独立数是否也存在类似的不等式。

问题1.2。 证明，对于任意阶数为 n 的图 G， $\alpha_{bn}(G) \leq n - \delta(G)$。

对于任意树 T，问题1.2中的界限可由界限 $\alpha_{bn}(T) \leq n-1$ 以及 $\delta(T) = 1$ 这一事实立即推出。

在第6节中，我们证明对于所有 G， $\alpha_{bn}(G) < 2\alpha(G)$，从而解决问题1.1。我们进一步证明，对于任意图 G， $\alpha_{bn}(G) \leq n - \delta(G)$，从而解决问题1.2。

在第 7 节中，通过考察从图的独立集到边界独立广播的变换，我们发现，判断给定整数 k 时 $\alpha_{bn}(G) \geq k$ 是否成立是 NP 完全的。在第8节中，我们研究树的最大边界独立数，并精确确定毛毛虫树族的 $\alpha_{bn}(G)$。

在第9节中，我们继续研究树上的最大边界独立广播。借鉴 Bessy 和 Rautenbach 在 [1], 中采用的证明技巧，我们推导出一种 $O(n^9)$ 时间算法，用于确定给定树 T 的 $\alpha_{bn}(T)$。

第 10 节讨论开放问题以及未来研究方向。

2 定义与背景

Erwin [6] 将非平凡连通图 G 上的一个广播 定义为函数 $f\colon V(G) \to \{0, 1, ..., \mathrm{diam}(G)\}$，满足对所有顶点 v， $f(v)$ 至多等于离心率 $e(v)$。如果顶点 v满足 $f(v) \geq 1$，我们称其为广播 顶点；并称 $f(v)$ 是 v处 f的强度 。 f的代价 或权重 为 $\sigma(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$。

给定图 G 上的广播 f以及一个广播顶点 v，如果 $d_G(u, v) \leq f(v)$，则顶点 u 能听到 来自 v的广播。我们将 v的 f-邻域 记为 $N_f(v)$，它是所有能听到来自 v的 f广播的顶点的集合（包括v 自身）。

v的 f-私有邻域记为 $PN_f(v)$，由那些只能从v听到 f的顶点组成。 v的 f-边界为 $B_f(v) = \{u \in N_f(v) \mid d(u, v) = f(v)\}$。 f-私有边界 $PB_f(v)$ 的定义类似。特别地， $PB_f(v) = PN_f(v) \cap B_f(v)$。若 $u \in N_f(v) \backslash B_f(v)$，则称 v以 k对 u过度支配，其中 $k = f(v) - d_G(u, v)$。不广播、也听不到任何广播顶点发出的 f的顶点称为未受支配顶点。

在本文中，我们将广播顶点集 V_f^+ 划分为 $V_f^1 = \{v \in V(G) \mid f(v) = 1\}$和 $V_f^{++} = \{v \in V(G) \mid f(v) > 1\}$。我们用 U_f表示未被支配的顶点集。若广播 f支配 $U_f = \emptyset$，则称其为支配广播。广播支配数 $\gamma_b(G)$ 是此类广播的最小权重。Henning 、 MacGillivray 和 Yang 在 [10] 中概述了图上的广播支配。

若 $u, v \in N_f(w)$ 且至少一个端点不位于 w的 f-边界上，则称边 $e = uv$ 听到 f或被.....覆盖 $w \in V_f^+$。如果不存在这样的顶点 w ，则 e 是 $uncovered$。未覆盖边的集合记作 U_f^E。

图 G 上的独立集是由两两不相邻的顶点组成的集合。极大独立集的最小基数称为 G的独立支配数，记作 $i(G)$。若对任意 $x, v \in V_f^+$， 均有 $x \notin N_f(v)$，则称广播 f为听觉独立。若对所有 $v \in V_f^+$ ，均有 $N_f(v) \backslash B_f(v) \subseteq PN_f(v)$，则称其为边界独立。

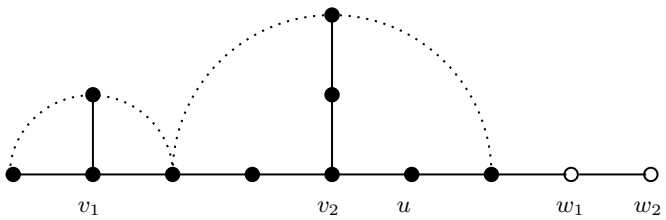


图 1：树上的一个边界独立广播 f。顶点 v_1 和 v_2 分别以强度 1 和 2 进行广播。顶点 v_2 以 1 的程度过度支配 u ，而 w_1 和 w_2 未被支配。

尽管对于每个图， [8], 中的高效广播支配问题已被证明可以在多项式时间内求解，但直到 Bessy 和 Rautenbach 在 [1] 中提出一种高效算法之前，即使对于树，听觉独立性问题的复杂性也仍然未知。

定理 2.1. [1] 对于任意一棵 T 阶数为 n 的树， $\alpha_h(T)$ 可以在 $O(n^9)$ 时间内确定。 .

极大独立广播是指：在不违反独立条件的情况下，无法增加任何顶点的广播强度。如果 f 和 g 是图 G 上的广播，我们称$g \leq f$，若对所有 $v \in V(G)$，均有 $g(v) \leq f(v)$。此外，若对某个 v，还有 $g(v) < f(v)$，则记作 $g < f$。边界独立广播 f 若不存在边界独立广播g使得 $g > f$，则称为极大边界独立。等价地，若对所有 $v \in V_f^+$，均有 $B_f(v) - PB_f(v) \neq \emptyset$，则 f是极大边界独立广播。Mynhardt 和 Neilson [15] 将 $i_{bn}(G)$定义为 G上极大边界独立广播的最小权重，即下边界独立数。极大听觉独立广播的最小权重记为 $i_h(G)$，或下听觉独立数。

Bessy 和 Rautenbach [2,3] 以及 Dunbar 等人 [5]进一步研究了听觉独立性。Mynhardt 和 Neilson 在 [14,16,17]以及 Marchessalt 和 Mynhardt 在 [13]继续开展了较新的边界独立广播研究。对于本文未定义的图论术语和一般概念，请参阅 Chartrand、Lesniak 和 Zhang [4]。

3 预备知识

注意，如果图 G上的广播 f 是 h-独立或 bn-独立的，但并非支配广播，那么可以通过从 $V(G)$中的未覆盖顶点依次以强度 1 进行广播，逐步将 f扩展为支配广播 g，直到不再有此类顶点为止。我们在下文陈述这一事实，以供参考。

观察 3.1。 如果 f 是极大边界独立广播或极大听觉独立广播，那么f 就是支配广播。

Mynhardt 和 Neilson 将观察 3.1 推广为边界独立广播成为极大边界独立广播的充要条件。

命题 3.2. [15] 设 f 是连通图 G上的边界独立广播。那么，当且仅当 f 是支配集且满足以下条件之一时，f 是极大 *bn*-独立的：

(i) $|V_f^+| = 1$，或者(ii) $B_f(v) - PB_f$
$(v) \neq \emptyset$对每个 $v \in V_f^+$均成立。

自然会想到极大听觉独立性的类似结果。

命题 3.3. 设 f 是连通图 G上的听觉独立广播。那么，当且仅当 f 是支配集且满足以下条件之一时，f 是极大听觉独立的：

(i) $|V_f^+| = 1$，或

(ii) 对每个 $v \in V_f^+$，均存在 $u \in B_f(v)$ 和 $w \in V_f^+ - \{v\}$，使得 $uw \in E(G)$，也就是说，每个广播顶点的边界上都有一个顶点与 V_f^+ 中的另一个顶点相邻。

为说明*(ii)*，注意图2中，支配性 h-独立广播 f 在 v处无法增大，否则与 $u \in B_f$相邻的顶点 $w \in V_f^+$（v）将听到来自 v的 f。同理，在强度为 1 的两个广播顶点处，f都无法增大。

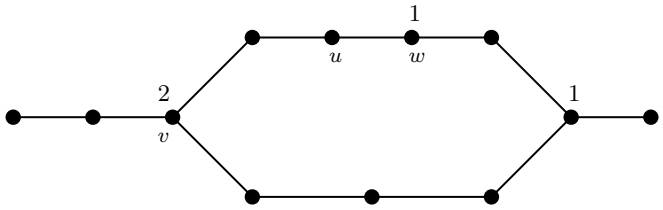


图2：具有 $|V_f^+| = 3$ 的支配性极大 h-独立广播 f。

证明。设 f 是 G上的一个极大 h-独立广播。根据观察 3.1， f 是支配的。假设存在 $v \in V_f^+$，使得对于所有 $u \in B_f(v)$ 和 $w \in V_f^+ - \{v\}$，都有 $uw \notin E(G)$。那么，要么 $|V_f^+| = 1$（此时 $f(v) = e(v)$，其中 $e(v)$ 表示 v的离心率），要么我们可以定义一个新的广播 f'，其中$f'(v) = f(v) + 1$，且对于所有 $x \neq v$， $f'(x) = f(x)$。由于 f'是支配的，且没有广播顶点能听到另一个广播顶点的声音， f'是 G上的 h-独立广播，这与 f的极大性矛盾。

反过来，设 f 是满足条件 (i) 或 (ii) 的支配性 h-独立广播。若 $|V_f^+| = 1$ 和$V_f^+ = \{v\}$，则 $f(v) = e(v)$，否则 f 将不具有支配性。反设满足条件 (ii) 的 f 不是极大 h-独立的。于是存在 $v \in V_f^+$，将 v 上广播的强度增加 1 后，会得到一个新的 h-独立广播 f'。根据条件 (ii)，由于 $v \in V_f^+$，存在与广播顶点 $w \in V_f^+ - \{v\}$ 相邻的 $u \in B_f(u)$。但这样一来， $w \in B_{f'}(v)$，矛盾。因此， f 是极大 h-独立的。

□

根据命题 3.3，我们推导出同时为 bn-独立广播的极大 h-独立广播所满足的条件。

推论 3.4. 设 f 是连通图 G 上的极大听觉独立广播。若 f 是边界独立的，则 $|V_f^+| = 1$，或者对于每个 $v \in V_f^+$，都存在一个与 V_f^1 中某个顶点相邻的 $u \in B_f(v)$。

证明。设 f 是 G 上的极大 h-独立广播，且 f 是边界独立的；也就是说， G 的任何一条边所听到的广播顶点都不超过一个。

由于 f 是支配的，根据命题 3.3 (ii)，或者$|V_f^+| = 1$，或者每个 $v \in V_f^+$ 都有一个位于其 f-边界上的顶点 u，且该顶点与另一个顶点 $w \in V_f^+$ 相邻。在后一种情形下，若 $f(w) \geq 2$，则 w 过度支配 u，因此 $N_f(v)$ 和 $N_f(w)$ 在一条边上相交。因此 $f(w) = 1$。 □

Marchessault 和 Mynhardt 的以下结果将在本节中反复用到。设 P 是树 T 中的一条路径，令 $d(v, P)$ 表示顶点 $v \in V(T)$ 到 P 上某个顶点的最小距离。

命题 3.5。[13] 设 P 是树 T 中的一条路径，f 是 T 上的一个广播。令 $Touch(P)$ 表示其 f-邻域与 P相交的广播顶点集合，并令 $Off(P)$ 表示其余广播顶点，即不向 P中的任何顶点广播的顶点。假设

$$\sigma_1 = \sum_{v \in \mathrm{Touch}(P)} d(v, P) \text{ and } \sigma_2 = \sum_{v \in \mathrm{Off}(P)} f(v).$$

Then

1. f至多覆盖 $2\left(\sum_{v \in \mathrm{Touch}(P)} f(v) - \sigma_1\right)$ 条边，其中 P，并且

2. 若 f 覆盖了 P 的 b 条边，则 $\sigma(f) \geq \lceil \frac{b}{2} \rceil + \sigma_1 + \sigma_2$。

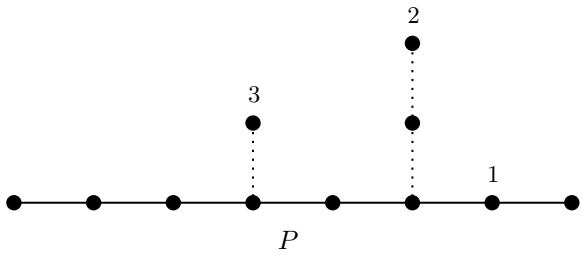


图3：树的一条路径 P 上的广播顶点。注意，每个广播顶点 v 最多覆盖 $f(v) - d(v, P)$ 条边。

特别地，若 D 是树 T 的直径路径，且 f 覆盖了 D 的每条边，则 $\sigma(f) \geq \text{rad}(T)$。回忆一下， U_f^E 表示广播 f 未覆盖的边集。

命题 3.6。[13] 设 f 是连通图 G 上的 ***bn*-独立广播，满足** $|V_f^+| \geq 2$。那么，***f*** **是极大** ***bn*-独立广播，当且仅当** $G - U_f^E$ **的每个连通分支都至少包含两个广播顶点。**

注意，如果 $G - U_f^E$的每个连通分支都至少包含一个广播顶点，那么 f就是支配集，因为 $G - U_f^E$是 G的生成子图。

显然，命题 3.6 的第一个方向对听觉独立性也成立，因为如果 f 是极大 h-独立的，且 $G - U_f^E$ 的某个连通分支 C 中只包含一个广播顶点 v，那么 $G - C$ 与 $B_f(v)$ 之间的所有边都未被覆盖。但此时将 v 的广播强度增加 1，就会得到一个代价更大的新 h- 独立广播，这与假设矛盾。

另一方面，若 f 是连通图 G 上的听觉独立广播，且 $|V_f^+| \geq 2$并且 $G - U_f^E$的所有连通分量都至少包含两个广播顶点，则 f 未必是极大听觉独立广播，因为同一连通分量内的广播可能在边上重叠。图4展示了这样一种广播。

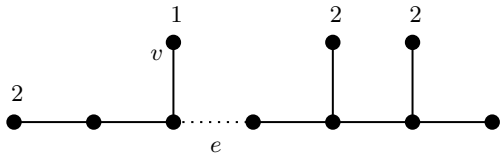


图4：听觉独立广播 f，移除未被 f覆盖的边 e 后会留下两个连通分量，每个连通分量都包含两个广播顶点。由于将广播 v 的强度增加 1 并不会导致任何广播顶点听见另一个广播顶点，因此 f 不是极大 h-独立的。

4 i_{bn} 与 i_h的可比性

若存在图 G、G'，使得 $p(G) < q(G)$ 且 $p(G') > q(G')$，则称两个图参数 p 和 q <style id='3'>不可比较 。我们将此记作 $p \diamond q$。在 [15], 中，Mynhardt 和 Neilson 注意到， $i \diamond i_{bn}$ 和 $i \diamond i_h$。

自然会提出这样的问题：是否存在满足 $i_h(G) < i_{bn}(G)$ 的图。假设存在一个图 G，其中有两个或更多个高阶顶点，并且只有当某些广播可能在边上重叠时，从这些顶点发出的广播才能覆盖 G 。假设无法通过从单个径向顶点进行广播来构造 i_{bn}-广播，那么设想这样一种情况似乎是合理的：某个极大 h-独立广播

的代价低于极大 bn-独立广播。接下来我们将证明这是不可能的，从而解决 [13] 中提出的一个未解决问题。

定理 4.1. 对于任意图 G, $i_{bn}(G) \leq i_h(G)$.

由于广播的代价等于其各连通分量上的广播代价之和，因此只需考虑连通图。我们首先证明广播或图的一些特殊情形，包括 G 为树的情形。定理 4.1 的证明见第 4.3 小节。

我们首先考虑没有任何顶点以大于 1 的强度进行广播的情形。

命题 4.2. 设 f 是 G 上的一个广播，满足 $|V_f^{++}| = 0$。那么， f 是极大边界独立的，当且仅当它是极大听觉独立的。

证明。 假设 f 是 G 上的极大 bn-独立或极大 h-独立（因而支配）广播，且 $V_f^+ = V_f^1$。若 $|V_f^+| = 1$，则根据命题 3.2 和 3.3 的第 (i) 部分， f 既是极大 bn-独立的，也是极大 h-独立的。

否则，假设 $|V_f^1| \geq 2$，并令 $v \in V_f^1$。那么 $B_f(v) - PB_f(v) \neq \emptyset$ 当且仅当 v 的边界上有一个顶点与另一个以强度 1 广播的顶点相邻。换言之，命题 3.2 (ii) 等价于命题 3.3 (ii)。因此， f 既是极大的 bn-独立集，也是极大的 h-独立集。

□

4.1 树

令 $\ell(P)$ 表示路径 P 的长度。以下结果是命题 3.5 的推论，现列出以便明确说明。

推论 4.3. Su 假设 f 是树 T 上的一个广播，且 $T - U_f^E$ 是连通的。那么 $\sigma(f) \geq$半径(T) .

证明。 如果 $T - U_f^E$ 连通，那么 T的每条边都被 f覆盖；否则，移除一条未覆盖的边就会使这棵树断开。令 D为 T的一条直径路径。由命题 3.5 的第 2 部分，取 $D = P$,$\sigma(f) \geq \left\lceil \frac{\ell(D)}{2} \right\rceil \geq$)半径$(T)$。

□

如命题 3.5 所示，给定树中的一条路径 P，令 $Touch(P)$ 表示其 f-邻域与 P 相交的广播顶点集合。回想一下，对于 $v \in Touch(P)$，我们用 $d(v, P)$ 表示从 v 到 P 上某个顶点的最小距离。

命题 4.4。令 P 为树 T 的一条路径，并令 f 为 T 上的一个广播。若 f 覆盖了 P 的 b 条边，且有 k 条边被重复覆盖，则 $\sigma(f) \geq \lceil \frac{b+k}{2} \rceil$。

证明。考虑 $v \in Touch(P)$，并令 u 为 P 上到 v 距离最小的顶点（可能是 $u = v$）。由于 T 是一棵树，因此存在唯一的 $u - v$ 路径 P_{uv}；根据 u 的选取，该路径仅在 u 处与 P 相交。因此， v 至多覆盖 P 的 $2(f(v) - d(u, v))$ 条边。由此可得

$$b + k \leq \sum_{v \in Touch(P)} 2(f(v) - d(v, P)) \leq \sum_{v \in Touch(P)} 2f(v) \leq \sum_{v \in V_f^+} 2f(v),$$

因此 $\sigma(f) \geq \frac{b+k}{2}$。由于 $\sigma(f)$ 是一个整数，我们有 $\sigma(f) \geq \lceil \frac{b+k}{2} \rceil$。 □

接下来我们证明定理 4.1 对树成立。

定理 4.5. 对于任意一棵树 T, $i_{bn}(T) \leq i_h(T)$。

证明。设 T 是一棵树，使得 $i_h(T) < i_{\mathrm{bn}}(T)$，并设 f 是 T上的一个 i_h-广播。根据推论 4.3，若 f覆盖了 T的每条边，则 $\sigma(f) \geq$半径(T)。由于 $i_{bn}(T) \leq$半径(T)， f的代价必须严格小于半径(T)，因此 T中存在一条未被覆盖的边。特别地， $T - U_f^E$至少包含两个连通分量。

设 T_1、T_2、...、T_k 为 $T - U_f^E$ 的连通分支，并令 f_i 表示 f 在 T_i 上的限制。根据命题 3.6，由于 f 是极大的 h-独立集，因此每个连通分支 T_i 都至少包含两个广播顶点。因此，如果 f_i 是 bn-独立的，那么命题 3.6 表明它是极大的 bn-独立集。由于 $i_h(T) < i_{\mathrm{bn}}(T)$，至少有一个受限广播 f_i 不是 bn-独立的。

不失一般性，假设 f_1 在 T_1 上不是 bn-独立的。那么，由于 T_1 的每条边都被覆盖，至少有一条边被多个广播顶点听到。如果这条边位于 T_1 的某条直径路径上，那么根据命题 4.4， $\sigma(f_1) \geq \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(T_1)}{2} + 1 \right\rceil$。如果直径路径上的~~每条边~~都没有被多个广播覆盖，那么直径路径之外的某个顶点就是广播顶点。根据命题 3.5 的第 2 部分，我们再次得到 $\sigma(f_1) \geq \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(T_1)}{2} \right\rceil + 1 \geq \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(T_1)}{2} + 1 \right\rceil$。

由于 $T - U_f^E$ 至少有两个连通分量，对于某个 $i \neq 1$，存在 $y \in V(T_i)$ 和 $x \in V(T_1)$，使得 $xy \in E(T)$。如果 $\left\lceil \frac{\mathrm{diam}(T_1)}{2} + 1 \right\rceil >$半径~~$(T_1)$，那么~~对于 T_1 的任意中心顶点 c， $d(c,x) \leq$半径$(T_1) < \sigma(f_1)$。在 $\left\lceil \frac{\mathrm{diam}(T_1)}{2} + 1 \right\rceil =$ 半径(T_1) 的情况下（如图 5 所示），diam(T_1) 为奇数，因此我们可以选择一个中心顶点 c，使得 $d(c, x) <$ 半径(T_1)。令 g_1 为定义在 T 上的广播，定义为$g_1 = (f - f_1) \cup \{(c, \sigma(f_1))\}$。注意到 $V(T_1) \subseteq N_{g_1}(c)$，并且根据 c 的选择，顶点 y 从 c 听到 g_1。

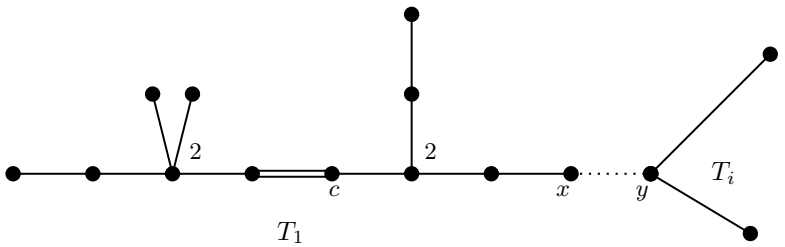


图 5：一个具有 σ（f_1） =半径（T_1） $= 4$ 的连通分支 T_1。从 c 发出的强度为 4 的广播覆盖了连接 T_1 和 T_i 的边 xy。

令 G_2 为包含 T_1的 $T - U_{g_1}^E$ 连通分支。由于 y 从 T_1中的一个顶点听到 g_1， G_2 也必须包含 $T - U_f^E$ 中包含 y的连通分支。因此， $T - U_{g_1}^E$的连通分量比 $T - U_f^E$少。

令 h_2 为 g_1 在 G_2上的限制。注意， h_2 覆盖了 G_2的所有边，而 $T - U_{g_1}^E$的所有其他连通分量都是树 T_i。特别是， $T - U_{g_1}^E$的每个连通分量都至少包含 $V_{g_1}^+$的两个顶点。由于$\sigma(g_1) = \sigma(f) < i_{\mathrm{bn}}(T)$， g_1不是 bn-独立的，因此至少存在一个包含一条能听到两个广播顶点的边的 $T - U_{g_1}^E$连通分量。不失一般性，假设 G_2 包含这样一条边。重复这一过程，我们再次得到 $\sigma(h_2) \geq \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(G_2)}{2} + 1 \right\rceil$。

由于 T 是有限的，我们可以重复此过程，直到最终获得一个在 T 上的广播 g_ℓ，使得对于 T 的某个中心顶点 c， $\sigma(g_\ell) = g_\ell(c) = \sigma(f) =$半径$(T)$，这就产生了矛盾。 □

4.2 生成树

本小节旨在证明，图G 的下广播独立支配数等于其所有生成树中这一参数的最小值。回顾一下，若顶点 G 的离心率等于图 G的直径，则称其为外围顶点 。若两个外围顶点 p 和 q 满足 $d(p, q) =$ diam(G)，则称它们互为对跖。

命题 4.6. 设 f 是连通图 G上的支配广播。若 $G - U_f^E$是连通的，则$\sigma(f) \geq$ 半径(G)。此外，若 G 的一条边听到来自多个顶点的广播，则对 G的任意外围顶点 p，存在 G上的支配广播 g_p，使得 $\sigma(g_p) = \sigma(f)$，$|V_{g_p}^+| = 1$并且g_p 过度支配 p。

证明。若 f是一个支配广播，使得 $|V_f^+| = 1$，则 $\sigma(f) \geq \text{rad}(G)$，因此假设 $|V_f^+| \geq 2$。假设 $H_0 = G - U_f^E$是连通的，并令 p为 G中任意选取的一个外围顶点。我们的目标是在 G上定义一个等成本支配广播序列 $f_0 = f, f_1, f_2, ..., f_k = g_p$，使得 $|V_{f_1}^+| > |V_{f_2}^+| > \cdots > |V_{f_k}^+| = 1$。

通过精心构造广播，我们将确保：若 G 的一条边从多个广播顶点处听到 f，则序列中的某个广播 f_i 会过度支配 p。此外，我们将证明，若 f_i中的 p 被过度支配，则对于所有 $i \leq j \leq k$，f_j 中的 p 也会被过度支配，从而得到的径向广播 f_k 会过度支配 p。

令 $u, w \in V_f^+$满足 $N_f(u) \cap N_f(w) \neq \emptyset$，并令 P_{uw}为 H_0中的一条 $u - w$测地线。则 $\ell(P_{uw}) \leq f(u) + f(w)$。若一条边同时从 u 和 w处听到 f，则 P_{uw} 包含这样一条边，此时$\ell(P_{uw}) < f(u) + f(w)$。

若 $p \in N_f(u) \cup N_f(w)$，不妨假设 $p \in N_f(w)$。否则，若 $p \notin N_f(u) \cup N_f(w)$，则 $|V_f^+| = 3$，因为 f 是支配集。由于 H_0 是连通的，$x \in N_f(u) \cup N_f(w)$ 中的某个顶点会听到顶点 $y \in V_f^+ \setminus \{u, w\}$。不妨假设 $x \in N_f(w)$。

设 b_1 为 P_{uw} 上距离 u 为 $f(w)$ 的顶点（因此其与 w 的距离至多为 $f(u)$）。注意，如果 $\ell(P_{uw}) < f(u) + f(w)$，那么 b_1 与 w 的距离至多为 $f(u) - 1$。定义广播 f_1 为

$$f_1(v) = \begin{cases} f(v) & \text{if } v \in V(G) \setminus \{u, w, b_1\} \\ 0 & \text{if } v \in \{u, w\} \\ f(u) + f(w) & \text{if } v = b_1. \end{cases}$$

显然，$\sigma(f_1) = \sigma(f)$。由于 f 是支配的，要证明 f_1 是支配的，只需证明 $N_f(u) \cup N_f(w)$中的每个顶点都能听到 f_1。对于任意 $v \in N_f(u)$,

$$d(v, b_1) \leq d(v, u) + d(u, b_1) \leq f(u) + f(w) = f_1(b_1),$$

因此，v 从 b_1处听到 f_1。类似地，$N_f(w)$中的任意顶点都能听到 b_1。

设 $H_1 = G - U_{f_1}^E$。注意，f_1覆盖了 H_1的所有边，并且如果 $v \in H_0$被 f过度支配，那么在 H_1中，v 也被 f_1 过度支配。

我们重复上述过程。在每一步 i，我们定义一个支配广播 f_i 和一个图$H_i = G - U_{f_i}^E$，使得 $\sigma(f_i) = \sigma(f_{i-1})$，$|V_{f_i}^+| < |V_{f_{i-1}}^+|$，并且如果一个顶点 v在 f_{i-1}下被过度支配，那么v 在 f_i中也被过度支配。最后，如果 H_{i-1} 是连通的，那么 H_i也是连通的。因此，如果 $|V_{f_i}^+| \geq 2$，我们总能找到广播顶点 u、$w \in V_{f_i}^+$，使得 $f_i(u) + f_i(w) \leq d(u, w)$。

令 k 为满足 $|V_{f_k}^+| = 1$ 的第一个 i，并考虑 f_{k-1}。令 $V_{f_{k-1}}^+ = \{u, w\}$，且不失一般性地假设 $p \in N_f(w)$。如果 H_{k-1} 的一条边从多个广播顶点听到 f_{k-1}，那么这条边位于一条 $u - w$ 测地线 P_{uw}上。根据 f_k的定义,

$$d(p, b_k) \leq d(p, w) + d(w, b_k) < f_{k-1}(w) + f_{k-1}(u) = f_k(b_k),$$

因此，p 被 b_k过度支配。

设 $g_p = f_k$。正弦 ce f_k 支配 H_k，并且由于 H_k 是 G的连通生成子图，我们有 tha t

$$\sigma(f) = \sigma(f_k) \geq \text{rad}(H_k) \geq \text{rad}(G),$$

因此， g_p 是 G上的支配广播。此外，如果 G 的一条边从多个广播顶点听到 f，那么 g_p 过度支配 p。 □

我们接下来证明，任意连通图 G 的下边界独立数等于其所有生成树的下边界独立数中的最小值。

定理 4.7. 对于任意连通图 G,

$$i_{bn}(G) = \min\{i_{bn}(T) : T \text{ is a spanning tree of } G\}.$$

证明。 假设存在一个树 T 生成 G，使得 $i_{\mathrm{bn}}(T) < i_{\mathrm{bn}}(G)$，并令 f 为 T 上的一个 i_{bn}-广播。

如果 $|V_f^+| = 1$，根据 $i_{bn}(T)$ 的极小性，对于某个中心顶点 v，有 $f(v) = \mathrm{rad}(T) = \sigma(f)$。因此，$i_{bn}(T) = \mathrm{rad}(T) \geq \mathrm{rad}(G) \geq i_{bn}(G)$，这与假设矛盾。反之，假设 $|V_f^+| \geq 2$ 且未覆盖边的集合 U_f^E 非空。那么 $T - U_f^E$ 是非连通的。根据命题 3.6， $T - U_f^E$ 的每个连通分支都至少包含两个广播顶点。

由于 f 是极大的， f 是 G 上的一个支配广播。然而，由于 $i_{bn}(T) < i_{bn}(G)$， f 在 G 上不是 bn-独立的，因此 G 包含一条边，该边从多个广播顶点处听到了 f。

任意地向 $G-T$ 添加 T 的边，直到添加某条边（例如 e_1）后，得到 G 的一个生成子图G_1，使得 f 在 G_1上不是 bn-独立。令 H_1 为 $G_1 - U_f^E$中包含 e_1的连通分支，并令 h_1 为 f 在 H_1上的限制。根据命题 4.6，存在 H_1上的一个支配广播 g_1，使得 $\sigma(g_1) = \sigma(h_1)$，且对于某个 $b_1 \in V(H_1)$，有 $V_{g_1}^+ = \{b_1\}$。特别地，如果 $G_1 - U_f^E$包含多个连通分量，则可以构造 g_1，使得 b_1 覆盖一条连接 H_1 与另一个连通分量的边。

在 G 上定义一个新的广播 f_1：

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in V(G) \setminus V(H_1) \\ 0 & \text{if } x \in V(H_1) - b_1 \\ \sigma(g_1) & \text{if } x = b_1. \end{cases}$$

于是 $\sigma(f_1) = \sigma(f)$，且 $G_1 - U_{f_1}^E$的连通分量数少于 $G_1 - U_f^E$。如果 f_1在 G_1上是 bn-独立的，由于 $\sigma(f_1) = \sigma(f) < i_{bn}(G)$，我们可以继续向 $G - G_1$ 添加 G_1 的边，直到添加 e_2 后，得到 G 的一个生成子图 G_2，使得 f_1 在 G_2上不是 bn-独立的。

根据命题 4.6，我们可以重复这一过程，直到得到一个广播 f_k，使得 $\sigma(f) = \sigma(f_k)$，且 $G - U_{f_k}^E$ 只有一个连通分支。由于所得广播是支配的，并且由覆盖边集诱导的 G 的生成子图是连通的，因此存在 G 上的一个支配广播 f'，使得 $\sigma(f') = \mathrm{rad}(G)$ 且 $|V_{f'}^+| = 1$。但此时 f' 是 G 上的极大 bn-独立广播，这与假设矛盾。

仍需证明存在一棵树 T 生成 G，使得 $i_{bn}(T) = i_{bn}(G)$。令 f 为 G 上的一个 i_{bn}-广播，并假设 $V_f^+ = \{v_1, ..., v_k\}$。对于 $i = 1$， ...， k，考虑由 $N_f(v_i)$ 诱导的 G 的子图 G_i。如果 G_i 是无环的，令 $T_i = G_i$；否则，依次删除位于 $N_f(v_i)$ 中的圈上的边，以获得一棵生成树 T_i。对于每个这样的圈，我们总能选择一条距离 v_i 最远的边，使得剩余的边由 v_i覆盖。因此，将 f 限制在 T_i上，记为 f_i，即可覆盖 T_i 的所有边。令 H为由 $\bigcup_{i=1}^k E(T_i)$ 诱导的 G 的子图。

假设 H 包含一个环 C。根据构造， C 的边由一组广播顶点 $V_C \subseteq V_f^+$ 覆盖，使得 $|V_C| \geq 2$。注意，每个 $v_i \in V_C$ 覆盖 C上的偶数条边。特别地，存在 v_i、 $v_j \in V_C$，使得 $B_f(v_i) \cap B_f(v_j)$包含一个顶点 $b \in V(C)$。令 a为 C上与 b相邻的顶点，且令 $H_1 = H - ab$。由于 $B_f(v_i) \cap C$至少包含两个顶点，因此存在

$b' \in V(B_f(v_i) \cap C)$ 位于 H_1 中另一个广播顶点的边界上。同样的结论也适用于 v_j。因此， f 在 H_1 上是极大的 bn-独立集。

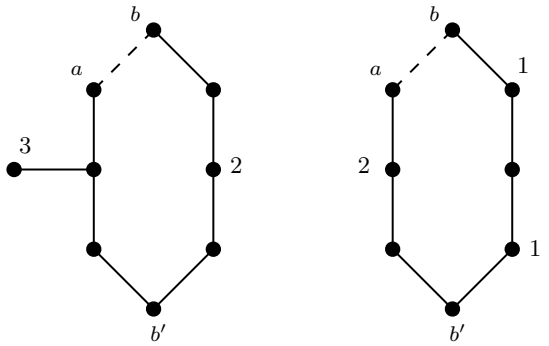


图 6：两条边由多个广播顶点覆盖的圈。我们总可以从这样的圈中移除一条边 ab，而不违反极大边界独立条件。

如果 H_1 中包含一个环，则重复这一过程，依次从环中移除边，直到得到的图 H_r 无环。如果 H_r 连通，则令 $T = H_r$。否则，由于 G 连通，我们可以向 H_r 添加 $G - H_r$ 中的边，将 H_r 的连通分量连接起来，且不产生环，直到得到一棵生成 G 的树 T。

由于 f 在 H_r上是极大 bn-独立的，该构造确保 f 是 T上的极大 bn-独立广播，因为对于每个 $v \in V_f^+$， $B_f(v) - PB_f(v) \neq \emptyset$在 H_r中。因此， $i_{\mathrm{bn}}(T) \leq \sigma(f) = i_{\mathrm{bn}}(G)$。但我们已经证明，对于 G 的任意生成树 T'， $i_{\mathrm{bn}}(G) \leq i_{\mathrm{bn}}(T')$。因此， $i_{\mathrm{bn}}(G) = i_{\mathrm{bn}}(T) =min\{i_{\mathrm{bn}}(T') : T'$是 $G\}$的生成树。

□

4.3 定理 4.1 的证明

应用定理 4.7，可将定理 4.5 推广到一般图。再次假设存在一个图 G，使得 $i_h(G) < i_{\mathrm{bn}}(G)$。那么 $i_h(G) <$ 半径(G)。设 f 是 G 上的一个听觉独立广播，满足 $|V_f^+| \geq 2$，且 G 的某条边能听到至少两个广播顶点。

若 V_f^+ 中的 u 和 v 是顶点，且 u 与 $B_f(v)$中的一个顶点相邻（图7），则记作 $u \to v$，并称 u 提供了一份证书，证明无法在 v处增大广播，简而言之，称 u 证明了 v。现在我们定义与 G 和 f相关的两个图和一个有向图。

- 邻域图 $\mathcal{N}_f(G)$的顶点集为 V_f^+，且当且仅当 $N_f(u) \cap N_f(v) \neq \emptyset$时，顶点 u和 $v \in V_f^+$ 在 $\mathcal{N}_f(G)$中相邻

- 认证有向图 $\mathcal{C}_f(G)$ 的顶点集为集合 V_f^+，当且仅当 $v \to u$ 时，(v, u) 是 $\mathcal{C}_f(G)$ 的一条弧。注意，如果 (v, u) 是 $\mathcal{C}_f(G)$ 的一条弧，那么 (u, v) 也可能是弧，也可能不是。我们称 (v, u) 为一条双向弧，如果 (u, v) 也是一条弧；否则，我们称 (v, u) 为一条单弧。注意，如果 (v, u) 是 $\mathcal{C}_f(G)$ 的一条弧，那么 (v, u) 是双向弧，当且仅当 $f(v) = f(u)$。

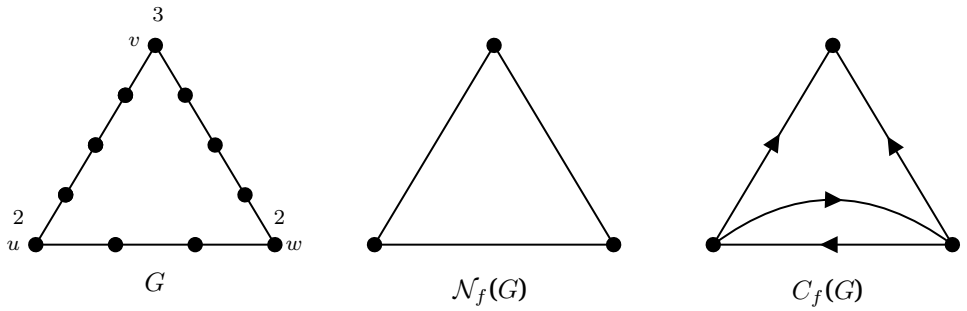


图7：图 G 上的一个极大 h-独立广播 f，以及相应的邻域图和认证有向图。注意，v 由 u 和 w 认证，而 u 和 w 彼此认证。

- $\mathcal{C}_f(G)$ 的底层图 （或 $\mathcal{C}_f(G)$ 的子图 $\mathcal{H}$ ）是通过将 $\mathcal{C}_f(G)$（或 $\mathcal{H}$）的弧替换为边并合并重边而得到的图。

图7所示示例中，$\mathcal{C}_f(G)$ 的底层图是一个三角形。请注意，$\mathcal{C}_f(G)$ 的底层图不一定包含 $\mathcal{N}_f(G)$ 的所有边。

命题4.8。如果 f 是 G 上的一个极大听觉独立广播，且满足 $|V_f^+| \geq 2$，那么每个顶点 $u \in V_f^+$ 在 $\mathcal{N}_f(G)$ 中都与一个顶点 $v \in V_f^+$ 相邻，该顶点满足 $f(v) \leq f(u)$。

证明。假设存在一个顶点 $u \in V_f^+$，使得对于所有 $v \in V_f^+ - \{u\}$，$d_G(u,v) \geq f(v) + 1 > f(u) + 1$。那么，将 u 处 f 的强度增加 1 所得到的广播也具有听觉独立性，这与 f 的极大性矛盾。

□

命题 4.9. 设 f 是 G 上的听觉独立广播，且 $|V_f^+| \geq 2$。那么，f 是极大听觉独立广播，当且仅当 f 是支配的，且 $\mathcal{C}_f(G)$ 的每个顶点的入度均为正。

证明。若某个 $v \in \mathcal{C}_f$（G）的入度为 0，则根据 $\mathcal{C}_f$（G）的定义，v 的 f 边界上没有顶点与 $V_f^+ - \{v\}$ 中的顶点相邻。由命题 3.3 的 (ii) 部分可知，f 不是极大的。

反之，若 f 是支配的，且 $\mathcal{C}_f$（G）的每个顶点的入度均为正，则根据命题 3.3 的 (ii) 部分，f 是极大的。 □

命题 4.10. 设 f 是 G 上的极大听觉独立广播，且 $|V_f^+| \geq 2$。假设 C 是 $\mathcal{C}_f(G)$ 的底层图中的一个环。那么，$\mathcal{C}_f(G)$ 中与 $E(C)$ 对应的弧所构成的子图包含一个长度至少为 *3* 的有向环，当且仅当 C 的每条边都对应一条双向弧。

证明。假设 $\mathcal{C}_f(G)$ 中对应于 C 的子图包含一个有向环。将 C 的顶点标记为 $v_1, v_2, ..., v_k$，使得对于所有 $1 \leq i \leq k-1$，v_i 都能证明 v_{i+1}，且 v_k 能证明 v_1。那么，对于所有 $1 \leq i \leq k-1$，$f(v_i) \leq f(v_{i+1})$，并且 $f(v_k) \leq f(v_1)$。

不失一般性，反设 $v_1 \to v_2$ 但 $v_2 \not\to v_1$。由于 (v_1, v_2) 是单弧当且仅当 $f(v_1) < f(v_2)$，因此我们有

$$f(v_2) > f(v_1) \geq f(v_k) \geq f(v_{k-1}) \geq \cdots \geq f(v_2),$$

这是不可能的。

反过来显然成立。 □

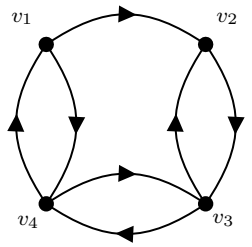


图 8：命题 4.10 所讨论情形的一个示例。由于 (v_1, v_2) 是一条单弧，我们有 $f(v_1) < f(v_2)$，这与沿双弧的 $f(v_2) = f(v_3) = f(v_4) = f(v_1)$ 矛盾。

推论 4.11。设 f 是 G 上的一个极大听觉独立广播，满足 $|V_f^+| \geq 2$，并设 C 是 $\mathcal{C}_f(G)$ 的底层图中的一个环。若 C 含有一条边 e，它不对应于 $\mathcal{C}_f(G)$ 中的一条双向弧，则 C 含有一条对应于单弧的边 e'，使得在 $\mathcal{C}_f(G)$ 的子图中，e 和 e' 的方向相反；该子图的弧对应于 C 的边。

证明。反之，假设不成立。那么 C 的顶点可以标记为 v_1、v_2、...、v_k，使得 e 对应于单弧 (v_k, v_1)，并且对于所有 $1 \leq i \leq k-1$，v_i 都能证明 v_{i+1}。但此时，$\mathcal{C}_f(G)$ 的子图包含一个有向环 $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$，这与命题 4.10 矛盾。 □

现在我们可以证明主要结果，为方便起见，在此重新表述。

定理 4.1。对于任意图 G，$i_{bn}(G) \leq i_h(G)$。

证明。设 f 是连通图 G 上的一个 i_h-广播。若 $\sigma(f) =$ 半径(G)，则由 $i_{bn}(G) \leq$ 半径(G) 这一事实可得结论。假设 $\sigma(f) <$ 半径(G)（此时 $|V_f^+| \geq 2$），并令 $G_0 = G - U_f^E$。根据 f 的极大性，G_0 的每个连通分支都至少包含两个广播顶点。

假设 $i_h(G) < i_{bn}(G)$。根据命题 3.3 (ii)，对于每个 $v \in V_f^+$，都存在 $u \in V_f^+$，使得 u 与 $B_f(v)$ 中的一个顶点相邻。令 $P_{u \to v}$ 表示 G_0 中任意选取的一条 $u-v$ 测地线；由于 u 与 v 之间最短路径上的每条边都被 f 覆盖，这条测地线必定存在。

我们的目标是找出一棵树 T，使其对每个 $v \in V_f^+$ 都包含至少一条测地线 $P_{u \to v}$，并且 T 张成 G，而 f 在 T 上的限制（记为 f_T）是 T 上的支配广播。于是，由于 $\sigma(f_T) <$ rad$(G) \leq$ rad(T)，命题 3.3 (ii) 将推出 f_T 是 T 上的极大 h-独立广播，且 $\sigma(f) = \sigma(f_T)$。接下来，我们可以沿用定理 4.5 的证明，并应用定理 4.7 得出矛盾。

考虑 G_0 的认证有向图，记为 $\mathcal{C}_f(G_0)$，并令 H_0 为其底层图。设 C_0 是 H_0 中的一个环。

如果 C_0 对应于 $\mathcal{C}_f(G_0)$ 中的一个有向环，那么根据命题 4.10，其中的每条弧都对应于一条双向弧。令 xy 为 C_0 中的任意一条边，并令 $\mathcal{H}_1$ 为从 $\mathcal{C}_f(G_0)$ 中删除弧 (x, y) 和 (y, x) 后得到的 $\mathcal{C}_f(G_0)$ 的子图。

如果 C_0 不对应有向环，那么根据推论 4.11，沿着对应于 C_0 的 $\mathcal{C}_f(G_0)$ 子图，存在两条方向相反的单弧 (x, y) 和 (x', y')。我们可以选取 (x, y) 和 (x', y')，使得 $y = y'$ 或者 y 与 y' 之间在 C_0 上的所有边都对应双弧，从而 y 和 y' 在 $\mathcal{C}_f(G_0)$ 中的入度都至少为 2。令 $\mathcal{H}_1$ 为删除 (x, y) 后得到的子图。根据命题 4.9，$\mathcal{C}_f(G_0)$ 的每个顶点都必须有正入度，因此对于某个 $w \in V_f^+ - \{x, y\}$（它可能位于 C_0 上，也可能不在其上），x 由 w 认证。

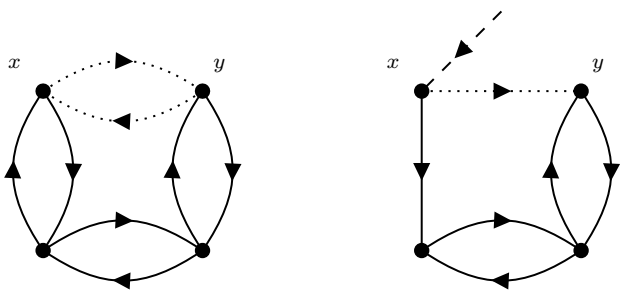


图 9: 所考察的两种情形。无论哪种情形， x 和 y 在 $\mathcal{H}_1$中都有正入度 .

重复这一过程：在每一步 i，如果 $\mathcal{H}_i$ 的底层图 H_i 含有一个环 C_i，就删除相应的弧，如 C_0 中所述。最终，我们得到 $\mathcal{C}_f(G_0)$ 的一个生成子图 $\mathcal{H}_k$，其底层图 H_k 是一棵树或森林。

按如下方式构造 T。对于 $\mathcal{H}_k$的每条弧 (u,v)，令 $P_{u\to v}$ 为 G中的一条 $u-v$ 测地线；若 (u,v) 是一条双向弧，则只选择这样的一条路径。由于 H_k 是无环的，因此通过删除 G 中不属于所选路径的所有边而得到的生成子图 T_0 也是无环的。

如果 H_k 是森林，那么 T_0 中至少有两个连通分量受 f 对 T_0的限制支配，记为f_{T_0}。如果存在一条边 $a_0b_0 \in E(G)$连接这两个连通分量，令 $T_1 = T_0 \cup \{a_0b_0\}$，并令 f_{T_1}表示 f 对 T_1的限制。重复此过程。在每一步 i，我们构造 G 的一个生成森林 T_i，使得对于某条连接两个受 f_{i-1}支配的连通分量的边 $a_{i-1}b_{i-1}$，有 $T_i = T_{i-1} \cup \{a_{i-1}b_{i-1}\}$。

假设 T_k 是序列中的第一个生成子图，该子图由一棵受 f_k 支配的树和一组孤立顶点 S 组成。若 $S=\emptyset$，令 $T_k = T$。否则，假设 $|S| = m$，并令 u_1、u_2、...、u_m 为 S 中顶点的一个排列，使得若 $i \le j$，则 $\max\{f(v) - d_G(v,u_i) \mid v \in V_f^+\} \le \max\{f(v) - d_G(v,u_j) \mid v \in V_f^+\}$。依次将每个顶点 $u_i \in S$ 连接到一个顶点 w，使得对某个 G 中的广播顶点 v，有 $d_G(w,v) < f(v)$；这样的顶点必定存在，因为 f 在 G 中支配 u_i。沿一条 $w-v$ 测地线继续添加边，直到 u_i 从 T_k 中的一个广播顶点处听到 f_k。对 S 的所有其余顶点重复此过程，并令 T 为由此得到的 G 的生成树。

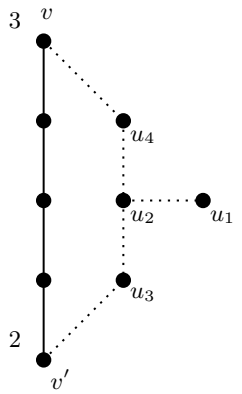


图 10：孤立顶点按其在G中被过度支配的程度从低到高依次由边连接。请注意，若在 u_1u_2之前将边 u_3v' 和 u_2u_3 加入 T_k，那么除非同时加入边 u_2u_4 和 u_4，否则 f_k 不会支配 u_1，而同时加入这两条边会形成一个环。

令 f_T为 f在 T上的限制。注意，对每个 $v \in V(G)$，$|V_{f_T}^+| = |V_f^+|$和 $f_T(v) = f(v)$。由于 f 是听觉独立且支配的，因此 f_T也如此。因此，由于 $\mathcal{H}_k$ 的每个顶点都有正入度，

命题 4.9 表明 f_T是极大听觉独立的。因此， i_h（T） $\leq \sigma$（f_T） $= \sigma$（f） $<$半径（T）。

考虑将 f_T限制到 $T - U_{f_T}^E$ 的每个连通分支上。由 f_T 的极大性可知，每个连通分支都至少包含两个广播顶点。若 f_T 是极大边界独立的，则 $i_{bn}(T) \leq \sigma(f_T) = i_h(G) < i_{bn}(G)$，这与定理 4.7 矛盾。因此，$T - U_{f_T}^E$ 的某个连通分支中的一条边会被多个广播顶点听到。按照定理 4.5 的证明，我们可以在 G 上得到一个支配广播 g_l，使得对于 G 的某个中心顶点 y， $\sigma(g_l) = g_l(y) = \sigma(f_T) \geq \mathrm{rad}(T)$，矛盾。

□

采用与定理 4.7 证明前半部分相同的方法，我们证明对于连通图 G 的任意生成树，均有 $i_h(T) \geq i_h(G)$。然后，我们可以将定理 4.1 作为推论，证明关于听觉独立性的、与定理 4.7 类似的结果。

定理 4.12. 对于任意连通图 G,

$$i_h(G) = \min\{i_h(T) : T \text{ is a spanning tree of } G\}.$$

证明。 假设存在一棵树 T，它是 G 的生成子图，且 $i_{\mathrm{h}}(T) < i_{\mathrm{h}}(G)$，并设 f 是T上的一个 i_{h}-广播。若 f 是 T上的极大边界独立集，则由定理 4.7， $\sigma(f) \leq i_h(T) \leq i_h(G)$；因此，不妨假设 T 中至少有一条边被多个广播顶点听到。

由此可得 $|V_f^+| \geq 2$。由于 T是一棵树，且 $i_h(T) < i_h(G) \leq$半径(G)，未覆盖边的集合 U_f^E非空。因此， $T - U_f^E$不连通。由 f的极大性， $T - U_f^E$的每个连通分支都至少包含两个广播顶点。

由于 f在 G上是支配的，但不是 h-独立的，因此存在顶点 u、 $v \in V_f^+$，使得 $d_G(u, v) \leq f(v)$。任意地将 $G - T$中的边加入 T，直到加入某条边（设为 e_1）会导致得到 G 的一个生成子图 G_1 ，使得 f 在 G_1 上不是 h-独立的。按照定理 4.7 的证明进行，可得到 G上的一个支配广播 f'，使得 $\sigma(f') =$半径(G) 且 $|V_{f'}^+| = 1$。然而，此时 f'是 G上的极大 h-独立集，矛盾。

为了证明存在一棵树 T，其生成 G，使得 $i_h(T) = i_h(G)$，令 f 为 G 上的一个 i_h-广播，并按照定理 4.1 的证明构造 T，使得其限制 f_T 在 T 上是极大听觉独立的。于是 $i_h(T) \leq \sigma(f_T) = \sigma(f) = i_h(G)$。但我们已经证明 $i_h(G) \leq i_h(T)$，因此 $i_h(T) = i_h(G)$。

□

在 [13],，Marchessault 和 Mynhardt 提出，差值 $i_h(G) - i_{bn}(G)$ 是否可能任意大。文献 [11] 给出了这样一个无限图族的构造。Marchessault 和 Mynhardt 还提出了一个问题：对于一般图，如何界定比值 $i_h(G)/i_{bn}(G)$；我们将在下一节讨论这个问题。

5 比值 i_h（G）$/i_{bn}$（G）

回忆一下， $i \diamond i_{bn}$ 和 $i \diamond i_h$。比值 $i(G)/i_{bn}(G)$ 和 $i(G)/i_h(G)$ 通常可能任意大：例如，$i(K_{n,n}) = n$ ，而 $i_{bn}(K_{n,n}) = i_h(K_{n,n}) = 2$ 对所有 $n \geq 2$ 都成立。在 [13],，Marchessault 和 Mynhardt 发现 $i_{bn}(G) \leq \lceil \frac{4i(G)}{3} \rceil$，并提出比值 $i_h(G)/i_{bn}(G)$ 是否也能以类似方式界定。

在上一节中，我们发现 i_h 和 i_{bn} 是可比较的。特别地，由于对于所有 G、 $i_{bn}(G) \leq i_h(G)$ (G) $i_h(G) \leq 1$。现在我们证明，对于所有图，$i_h(G)/i_{bn}(G) \leq \frac{5}{4}$ G.

命题 5.1。 [13] 如果 T' 是树 T的子树，则 i_{bn}（T'） $\leq i_{bn}$（T）。

回顾一下， P_n 表示一个包含 n 个顶点的路径。由于直径为 d 的树 T 包含路径 P_{d+1}作为子树，因此我们可以用 Neilson 在 [18]中精确确定的值 $i_{bn}(P_{d+1})$，给 $i_{bn}(T)$提供一个下界。

命题 5.2. [18] 对于任何 $n \neq 3$, $i_{bn}(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

例外是 P_3，它允许一个代价为 1 的极大 bn-独立广播。

定理 5.3。 对于任意图 G, $1 \leq i_h(G)/i_{bn}(G) \leq 5/4$。

证明。 由于 $i_{bn}(G)$ 等于 G 的所有连通分量上的 i_{bn}-广播的代价之和，因此只需考虑只有一个连通分量的图，故假设 G 连通。根据定理 4.7，存在一棵树 T，它是 G 的生成树，且 $i_{bn}(T) = i_{bn}(G)$。

设 $d = \text{diam}(T)$，并令$D \cong P_{d+1}$ 为 T的一条直径路径。由命题 5.1 和命题 5.2 可知 $i_{bn}(T) \geq \lceil \frac{2(d+1)}{5} \rceil \geq {}^{2}_{(d+1)\,5}$。由于 T张成 G，~~rad(G)~~ $\leq$rad(T)。最后，由于对任意连通图 G，$i_h(G) \leq$rad(G)，我们有 that

$$\frac{i_h(G)}{i_{bn}(G)} = \frac{i_h(G)}{i_{bn}(T)} \leq \frac{5 \cdot \text{rad}(G)}{2(d+1)} \leq \frac{5 \cdot \text{rad}(G)}{4 \cdot \text{rad}(T)} \leq \frac{5 \cdot \text{rad}(T)}{4 \cdot \text{rad}(T)} = \frac{5}{4}.$$

下界可由定理 4.1 得出。 □

6 上界与下界 $\alpha_{bn}(G)$

我们将关注与边界独立广播对应的上界参数。回顾一下， $\alpha_{bn}(G)$表示图 G 上边界独立广播的最大权重，称为边界独立数的上界，或简称为 G 的边界独立数。对应的参数 $\alpha_h(G)$表示听觉独立广播的最大权重，称为 G 的听觉独立数。本节重点是为一般图上的 $\alpha_{bn}(G)$ 建立界，并确定与 α_{bn} 相当的参数，以便将该参数纳入一系列不等式之中。

在 [3], Bessy 和 Rautenbach 发现了 $\alpha_h(G) < 4\alpha(G)$，他们改编了 Neilson 使用的证明技巧 [18]，以证明 $\alpha_h(G) < 2\alpha_{bn}(G)$。Mynhardt 和 Neilson 进一步研究了比值 ${}^{\alpha_{bn}(G)}_{\alpha(G)}$，~~并在~~ [17] 中提出，能否证明对于所有图 G，都有 ${}^{\alpha_{bn}(G)}_{\alpha(G)} < 2$ 。

定理 6.1。 对于任意图 G, $\alpha_{bn}(G) < 2\alpha(G)$.

证明。 设 f 是 G 上的一个 α_{bn}-广播。如果 $V_f^+ = V_f^1$， V_f^+ 是一个独立集，则假设存在 v，使得 $f(v) \geq 2$。令 $u \in B_f(v)$，并考虑由 u 以及从 u 到 $S = \{x \in V_f^+$ 中每个顶点的唯一测地线构成的子图 T_u: $u \in B_f(x)\}$，即所有被 u 听到的广播顶点的集合（如果 $u \in PB_f(v)$，$S = \{v\}$）。由于没有任何一条边能被两个不同的广播覆盖，因此 T_u 是一条诱导路径或蜘蛛图，故$|V(T_u)| = 1 + \sum_{w \in S} f(w)$。

考虑对 T_u 进行适当二染色，并通过删除 T_u 的叶节点上的所有广播，再从基数最大的颜色集中的每个顶点添加强度为一的广播，来定义一个新的边界独立广播（若它们的基数相同，则任意选择一个）。

由于广播仅在边界处重叠，因此所得 bn-独立广播的广播顶点构成一个基数至少为 $|V(T_u)|/2$ 的独立集。重复这一过程，直到不存在强度大于 1 的广播顶点为止，即可在 G 上得到一个独立集。由于 $|V(T_u)| < \sum_{w \in S} f(w)$,因此可得 $\alpha_{bn}(G)/2 < \alpha(G)$。

□

由于对于任意图 G， $\alpha_{bn}(G) \leq \alpha_h(G)$，Bessy 和 Rautenbach 的界可由 Neilson 的结果和定理 6.1 轻松推出。

推论 6.2。 对于任意图 G, $\alpha_h(G) < 4\alpha(G)$.

设 δ（G）表示 G 的最小度。容易看出， α（G）$\leq n - \delta$（G），因为将任意顶点加入独立集都会排除其邻点。我们确定了最大边界独立数的类似结果，从而解决了 [16] 中提出的一个未解决问题。

定理 6.3. 对于任意阶数为 n 的图 G， $\alpha_{bn}(G) \leq n - \delta(G)$。

证明。 如果 $|V(G)| = 1$，则结论显然成立。因此，假设该定理对所有满足 $|V(G)| \leq n-1$ 的 G 阶图均成立，并考虑一个阶数为 n 的图 G。设 f 是 G 上权重最大的一个 α_{bn}-广播。对于任意 $v \in V_f^{++}$，均有 $PB_f(v) = \emptyset$；否则，可以通过将 $f(v)$ 降低 1，并从 v 的 f-私有边界中的一个顶点以强度 1 进行广播，构造出一个权重相同的新边界独立广播。

对于某个 $v \in V_f^+$，考虑阶为 n' 的图 $G' = G - PN_f(v)$，并令 $f_{G'}$ 为限制在 G' 上的 f。根据归纳法， $\sigma(f_{G'}) \leq \alpha_{bn}(G') \leq n' - \delta(G')$，因此 $\alpha_{bn}(G) = \sigma(f_{G'}) + f(v) \leq f(v) + n' - \delta(G')$。

考虑 G' 中一个最小度顶点 u。首先，假设 $u \in B_f(v)$，并令 $k = |PN_f(v) \cap N_G(u)|$。令 P 为 G 中的一条测地线 $u - v$。由于 P 的长度为 $f(v)$，且 u 在 $PN_f(v) - V(P)$ 中与 $k-1$ 个顶点相邻，因此有 $k - 1 + f(v) \leq |PN_f(v)|$。特别地，若 $k + f(v) = |PN_f(v)| + 1$，则 $PN_f(v)$ 要么由一条包含 $f(v)$ 个顶点的路径构成（因而 $d(v) = 1$），要么 $f(v) = 2$ 且 $d_G(v) = k$。无论哪种情况，由于在 f 下， u 听到多个广播顶点，故 $\delta(G) < d_G(u)$。因此，

$$\alpha_{bn}(G) \leq f(v) + n' - \delta(G') \leq f(v) + n' - d_G(u) + k \leq n + 1 - d_G(u) \leq n - \delta(G).$$

否则，如果 $k + f(v) \leq |PN_f(v)|$,

$$\alpha_{bn}(G) \leq f(v) + n' - d_G(u) + k \leq n - \delta(G).$$

最后，如果 $u \notin B_f(v)$，那么 $d_G(u) = d_{G'}(u)$，因此 $\delta(G) \leq \delta(G')$ 且 $\alpha_{bn}(G) \leq n - \delta(G') \leq n - \delta(G)$，如所需。 □

7 判定 $\alpha_{bn}(G)$的困难性

给定一个图 G 和一个正整数 k，我们可以在多项式时间内验证图 G 上的代价至少为 k 的广播 f 是否为边界独立，只需检查对于每一对不同的广播顶点 u、 $v \in V_f^+$， $f(u) + f(v) \leq d_G(u, v)$。由此可知，最大 bn- 独立广播问题属于 NP。我们将通过从 G 上的独立集问题到相应图 C_G 上的最大 bn- 独立广播问题的变换，证明该问题是 NP 完全的；Karp [12], 已证明前者是 NP 完全的。

图 G 和 H 的冠积 $G \bigodot H$ 由 G 个 $n = |V(G)|$ 的副本构成，其中将 G 中的第i个顶点与 H的第 i个副本中的每个顶点通过边相连。令 $C_G = G \bigodot K_1$。

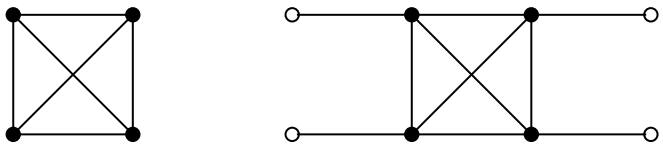


图 11：冠积 $K_4 \bigodot K_1$ 的构造。

命题 7.1。 设 G 是一个有 $n \geq 2$ 个顶点的连通图，且设 $C_G = G \bigodot K_1$。那么 $\alpha_{bn}(C_G) = n + \alpha(G)$。

证明。 设 $l_1, ..., l_n$ 是 C_G 的叶的标记，并设 $v_1, ..., v_n$ 是其余顶点的标记，使得对于所有 i， l_i 与 v_i 相邻。设 $S \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$ 是 C_G 中对应于 G 的子图上的一个最大独立集。

在 C_G 上定义广播 f 如下:

$$f(u) = \begin{cases} 2 & \text{if } u = l_i \text{ for some } i \text{ and } v_i \in S \\ 1 & \text{if } u = l_i \text{ for some } i \text{ and } v_i \notin S \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是 $\sum_u f(u) = n + \alpha(G)$。由于只有叶会广播，并且对于任意一对叶 $l_i \neq l_j$, f， $d_{C_G}(l_i, l_j) \leq f(l_i) + f(l_j)$, 因此这是边界独立的。所以 $\alpha_{bn}(C_G) \geq n + \alpha(G)$。

为证明 $\alpha_{bn}(C_G) \leq n + \alpha(G)$，设 f 是 C_G 上的一个 α_{bn}-广播。若某个顶点 v_i 正在广播，则在 C_G 上定义的 bn- 独立广播 f'，其中 $f'(l_i) = f(v_i) + 1$, $f'(v_i) = 0$，否则 $f'(u) = f(u)$，其代价大于 f，矛盾。因此 $V_f^+ \subseteq \{l_1, ..., l_n\}$。

假设某个叶子节点在 f 下以强度 $k \geq 3$ 进行广播 l_i。由于 $f(l_i) \leq e(l_i)$，至少存在 $k - 2$ 个叶子节点能够从距离大于 2 的位置听到 l_i。通过以下方式定义一个新的最大 bn-独立广播 f'：

$$f'(l_i) = \begin{cases} f(l_i) & \text{if } f(l_i) \in \{1, 2\} \\ 2 & \text{if } f(l_i) = k > 2 \\ 1 & \text{if } f(l_i) = 0 \end{cases}$$

并考虑 $R \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$，其中 $v_i \in R$ 当且仅当 $f'(l_i) = 2$。与以强度 2 广播的叶子相邻的两个顶点不能相邻，因此 R 是 C_G中对应于 G的子图上的独立集。由于在 f'下，每个叶子的广播强度为 1 或 2，因此有 $|R| = \alpha_{bn}(C_G) - n$。因此 $\alpha_{bn}(C_G) \leq n + |R| \leq n + \alpha(G)$。

□

推论 7.2。 设 G 是一个图， k 是一个正整数。判定 $\alpha_{bn}(G) \geq k$ 是否为 *NP* 完全的问题。

证明。 我们已经注意到，最大 bn-独立广播问题属于 NP。由于命题 7.1 中描述的变换可以在多项式时间内完成，因此该问题是 NP-完全的。

□

由此可知，对于任何满足 $G \in \mathcal{C}$ 蕴含 $C_G \in \mathcal{C}$ 的图类 $\mathcal{C}$，如果已知其中所有图上的独立集问题都是 NP 完全的，那么最大边界独立集问题也同样是 NP 完全的。

已知独立集问题在以下图类中是 NP 完全的，详见 [19]。具体而言，最大边界独立集问题在平面图和环面图、最大度为 $\Delta \in \{3, 4, 5, 6\}$ 的图、无三角形且无 C_n 的图（当 $n \in \{4, 5, 6\}$, K_n 时）、无 $n \in \{4, 6, 7\}$ 的图以及无屋图中均为 NP 完全。

8 树

设 T 为一棵树。其 分支-叶表示 $\mathcal{BL}(T)$，也称为 T 的同胚约简，是通过依次删除度为 2 的顶点，并在其两个邻点之间添加一条边，直到不再存在这样的顶点而得到的。删除所有叶后，得到 T 的分支表示，记作 $\mathcal{B}(T)$。

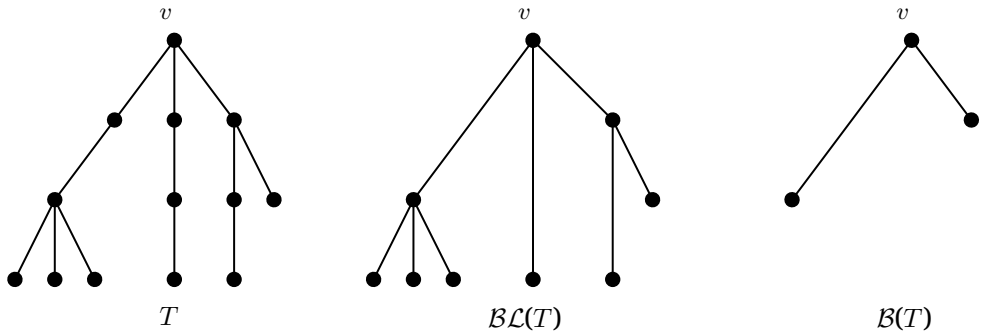


图 12：树的分支-叶表示和分支表示 T。

我们将 T 的顶点划分为集合 B_T、L_T 和 τ_T，其中 B_T 表示 T 的分支顶点集合，L_T 表示叶子集合，而 τ_T 表示度为 2 的顶点集合，称为 T 的主干顶点。我们进一步定义 B_T 的一个子集 R_T，该子集由在 $\mathcal{BL}$（T）中至多与一个叶子相邻的分支顶点组成。换句话说，如果存在至多一个叶子 $l \in L_T$，使得对于每个 $b' \in B_T - b$，唯一的 $b' - l$ 路径都包含 b，那么分支顶点 b 就属于 R_T。在上面的图 12 中，$|B_T| = 3$ 和 $R_T = \{v\}$。

Neilson 在 [18], 研究了树上的最大边界独立广播，并确定对于任意满足 $B_T \neq \emptyset$ 的树 T，都有 $\alpha_{bn}(T) \leq n - |B_T| + |R_T|$。Neilson 提出疑问：这个上界能否改进为 $\alpha_{bn}(T) \leq n - |B_T| + \alpha(T[R_T])$，其中 $T[R_T]$ 是由 R_T 在 T 中诱导出的子图。

毛毛虫树是一种具有直径路径 D 的树，其中每个顶点都位于 D 上，或与 D上的某个顶点相邻。接下来我们将证明，对于所有毛毛虫树 C，$\alpha_{bn}(C) \leq n - |B_C| + \alpha(C[R_C])$，并精确确定某些毛毛虫树子类的 $\alpha_{bn}(C)$。注意，如果 C 是毛毛虫树，那么 $C[R_C]$ 是一条路径或路径森林。

以下引理在本节中将发挥重要作用。

引理 8.1。 [18] 如果 f 是树 T上的一个 α_{bn}-广播，那么 T 的叶子不会听到任何非叶顶点发出的广播。

特别地，如果 f 是毛毛虫树上的最大边界独立广播，那么只有叶和主干顶点会发出广播。

给定一棵毛毛虫树 C，其主干是一条（任意选取的）直径路径。将 C 的叶子标记为l_1、...、l_m，使得 l_1和 l_m是主干的端点，并且对所有 $i \leq j$，$d_C(l_1, l_i) \leq d_C(l_1, l_j)$。称$l_2$、...、$l_{m-1}$为 C的内部叶。

引理 8.2. 设 f 是毛毛虫树 C 上的一个 α_{bn}-广播，使得 $|V_f^1|$ 达到最大值。那么 l_1，$l_m \in V_f^+$。

证明。 反设。若对于某个 $v \in V_f^+$，$l_1 \in N_f(v)$，则定义一个新的广播 f'，使得 $f'(v) = f(v-1)$、$f'(l_1) = 1$，并且对所有 $w \neq v, l_1$，$f'(w) = f(w)$。如果某个顶点 u听不到 f'，则从 u以强度 1 进行广播，会得到一个代价高于 f的边界独立广播，矛盾。因此，f'是 C上的一个 α_{bn}-广播。由引理 8.1，v是一个叶子，因此 $d_C(l_1, v) \geq 2$，从而 $v \notin V_f^1$。但这意味着$|V_{f'}^1| > |V_f^1|$，矛盾。

由此可得 $l_1 \in V_f^+$。类似地， $l_m \in V_f^+$。 □

定理 8.3. 如果 C 是一棵毛毛虫树，那么 $\alpha_{bn}(C) \leq n - |B_C| + \alpha(C[R_C])$。

证明。设 f 是 C 上的一个 α_{bn}-广播，使 $|V_f^1|$ 最大化，并设 l_i 是 C 的一个内部叶子，且与分支顶点 b_i 相邻。如果 $f(l_i) \geq 3$，那么由于 l_1 和 l_m 都在广播， l_i 在主干上至少覆盖 $2(f(l_i) - 1)$ 条边。

如果 $f(l_i)$ 是奇数，令 f' 为一个广播，定义为 $f'(l_i) = 1, f'(v) = 1$，其中所有 v 到 l_i 的距离为偶数，并且对所有 $v \notin N_f[l_i]$， $f'(v) = f(v)$。

如果 $f(l_i)$ 是偶数，则定义 f' 为 $f'(l_i) = 2, f'(v) = 1$，其中所有 v 到 l_i 的距离均为不小于 3 的奇数，并且对所有 $v \notin N_f[l_i]$， $f'(v) = f(v)$。

图 13 展示了 f' 的构造。

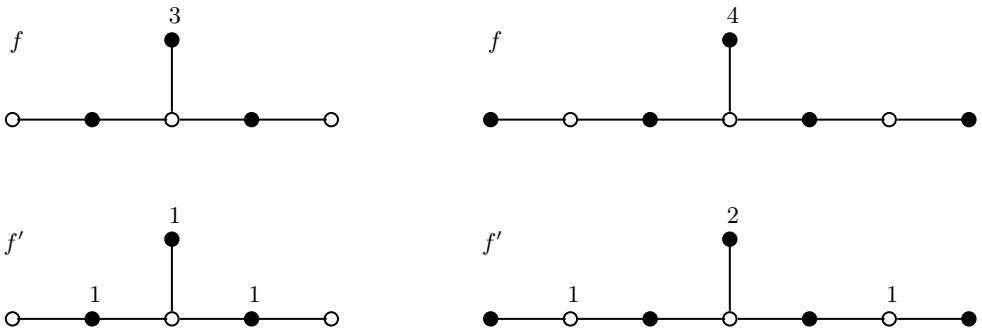


图 13：奇数和偶数情形。

由此可知， f' 是 C 上的边界独立广播，使得 $\sigma(f') = \sigma(f)$ 且 $|V_{f'}^1| > |V_f^1|$，这与假设矛盾。因此，对于每个内部叶子 l_i， $f(l_i) \leq 2$。由于 f 是边界独立的，与以强度 2 广播的叶子相邻的分支顶点所组成的集合必须是一个独立集。

由引理 8.1，在 f 下没有分支顶点广播。令 C' 表示从 C 中移除所有内部叶和分支顶点后诱导出的子图，并令 $f_{C'}$ 表示 f 在 C' 上的限制。由于 $f_{C'}$ 是边界独立的， $\sigma(f_{C'}) \leq \alpha_{bn}(C') \leq |V(C')| - \delta(C') = |V(C')| - 1$。对所有广播顶点求和，可得

$$\alpha_{bn}(C) \leq (|V(C')| - 1) + (L_C - 2) + \alpha(C[R_C]) \leq n - |B_C| + \alpha(C[R_C]).$$ □

推论 8.4。设 C 是一棵毛毛虫树，且 $|V(C)| \geq 3$。

i. 如果 $\tau_C = \emptyset$，则 $\alpha_{bn}(C) = |L_C| + \alpha(C[R_C])$。

ii. If C 没有两个相邻的主干顶点，也没有度为 *3* 的顶点，那么 $\alpha_{bn}(C) = |L_C| + |\tau_C \quad |$.

证明。假设 $\tau_C = \emptyset$，因此 C 中的每个顶点不是分支顶点就是叶子。由定理 8.3， $\alpha_{bn}(C) \leq n - |B_C| + \alpha(C[R_C]) = |L_C| + \alpha(C[R_C])$。注意到 $C[R_C]$ 是一个路径森林，并令 S 为 $C[R_C]$ 的最大独立集。在 C 上定义一个广播 f，如下：

$$f(v) = \begin{cases} 2 & \text{if } v \in L_T \text{ and } v \text{ is adjacent to a vertex in } S \\ 1 & \text{if } v \in L_T \text{ and } v \text{ is not adjacent to a vertex in } S \\ 0 & \text{if } v \notin L_T. \end{cases}$$

由于只有叶子进行广播，来自 l_i 和 l_j 的两个广播只有在其中一个或两个顶点以强度 2 广播时才可能重叠。假设确实如此。不失一般性，设 $f(l_i) = 2$。令 b_i 为 S中 l_i的邻点。但由于 b_i 只有一个叶子，$f(l_j) = 2$ 且 $b_j \in S$，因此 $d(l_i, l_j) \geq 4$。由此可知，f是 C上的边界独立广播。因此，$\sigma(f) = |L_C| + \alpha(C[R_C]) \leq \alpha_{bn}(C)$。

反之，假设 C 没有两个相邻的树干，也没有度为 3 的顶点。由于根据定理 8.3，$R_C = \emptyset$, $\alpha_{bn}(C) \leq n - |B_C| + \alpha(C[R_C]) = |L_C| + \tau_C$。在 C 上定义广播 f如下：

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v \in L_C \text{ or } v \in \tau_C \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据定义，任意两个广播顶点都不相邻。因此，f 是边界独立广播，故 $\sigma(f) = |L_C| + |\tau_C| \leq \alpha_{bn}(C)$。

□

9 树的多项式时间算法

在第 7 节中，我们发现，确定一般图 G 上 bn-独立广播的代价这一问题是 NP 完全的。然而，树上的边界独立问题的复杂性尚不清楚。

在 [1], , Bessy 和 Rautenbach 证明，树 T 的听觉独立数 $\alpha_h(T)$ 可以在 $O(n^9)$ 时间内确定。本节中，我们将说明，他们的算法可以修改为在 $O(n^9)$ 时间内确定边界独立数 $\alpha_{bn}(T)$。

A 有根树（T，r）是一种树，其中指定顶点 r 作为所有顶点的参考点，T即是如此。若顶点 v 位于唯一的 $r - v$ 路径上，则称其为 u 的后代；此时，u 是 v的祖先。与 u 相邻的后代称为 u的子节点。

9.1 定义与符号约定

设 T 是一棵阶为 $n \geq 3$ 的树，其中任意一个非叶顶点 r 被选为根。对于每个 $u \in V$（T），在其子节点上固定一个任意的线性序。若 v_1、...、v_k 是 u 按此线性序排列的子节点，则将 $T_{u,\,i}$ 定义为由 T 以及所有满足其唯一 $u - w$ 路径包含 v_1、...、v_i 中某一个的顶点 w 诱导的子树（见图 14）。此外，将 $T_{u,\,0}$ 定义为仅由顶点 u 构成的子树。如果 c_T（v）表示以 r 为根的 T 中 u 的子节点数，则总共至多有

$$\sum_{u \in V(T)} (c_T(u) + 1) = deg(r) + 1 + \sum_{u \in V(T) \setminus \{r\}} deg(u) = 2n - 1 = O(n) \tag{1}$$

此类子树 $T_{u,i}$ 。（注意，如果 u 是叶子，那么 $c_T(u) = 0$，且唯一计数的子树是 $T_{u,\,0} = \{u\}$） .

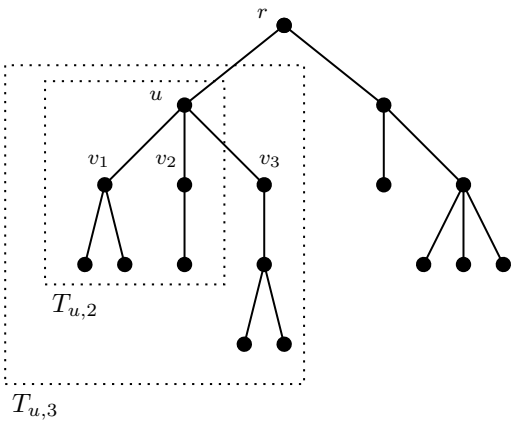


图 14：以 r 为根的树 T，以及一个有三个子节点的顶点 u。

Bessy 和 Rautenbach 的算法基于动态规划，依次考虑子树 $T_{u,\ i}$，其中顶点 u 按照与根 r的距离非递增排列。

给定 T 上的边界独立广播 f，其在 $T_{u,\ i}$ 上的限制满足以下条件:

(C1) $f(x) \leq e_T(x)$，对所有 $x \in V(T_{u,\ i})$ 均成立

(C2) $d_T(x,y) \geq f(x) + f(y)$，对任意两个不同的广播顶点 $x,y \in V(T_{u,\ i})$ 均成立。

如 [1], 中所示，我们发现，若对于某个 $y \in V(T \backslash T_{u,\ i})$，$f(y) > 0$，则 y 会对所有 $x \in V(T_{u,\ i})$ 的 $f(x)$ 施加上界。具体而言，根据 C2，若 $d_T(x,y) \leq f(y)$，则 $x \in N_f(y)$，因此 $f(x) = 0$。若 $f(y) < d_T(x,y)$，则 $f(x) \leq d_T(x,y) - f(y)$。

我们可以将这个上界表示为函数 $g_{p,q}(d_T(u,x))$，如下所示。首先，考虑函数$h_t: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$，使得 $h_t(d) = \max\{0, d-t\}$。

对于顶点 $y \in V_f^+$，令 $q = f(y)$、$p = f(y) - d_T(u,y)$，并定义 $g_{p,q}: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$，使得 $g_{p,q}(d) = \max\{0, d-p\}$。注意，$g_{p,q}$在限制 $t = f(y) - d_T(u,y)$ 下等价于 h_t，因此我们有上界$f(x) \leq g_{p,q}(d_T(u,x))$。下方的图15说明了选择 p 和 q. 的理由

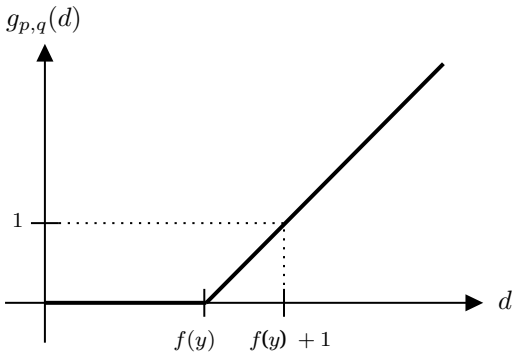


图15：当 $d = d_T(x,y) \geq f(y) + 1$ 时，由 $g_{p,q}(d)$ 施加的 $f(x)$ 上界随 d 线性增加。

按如下方式定义整数 p_{in}、q_{in} 和 y_{in}。若 $V_f^+ \backslash V(T_{u,\ i})$ 为空，则令 $p_{in} = -n$ 和 $q_{in} = 1$。否则，令 $p_{in} = \max\{p = f(y) - d_T(u,y) : y \in V_f^+ \backslash V(T_{u,\ i})\}$。令 $y_{in} \in V_f^+ \backslash V(T_{u,\ i})$ 为使该最大值成立的一个顶点。

若 y_{in} 过度支配 u，则根据 bn-独立性， y_{in} 是唯一这样的顶点；否则，这样的顶点可能不止一个，我们任意选取 y_{in}。令 $q_{in} = f(y_{in})$。注意，

$$(p_{in}, q_{in}) = \begin{cases} (-n, 1) & \text{if } V_f^+ \cap V(T \setminus T_{u,i}) = \varnothing \\ (f(y_{in}) - d_T(u, y_{in}), f(y_{in})) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

由于 $d_T(u, y_{in}) \geq 0$，因此在两种情况下都有 $p_{in} \leq q_{in}$。

在 $T \backslash T_{u,\,i}$, y_{in} 中的所有广播顶点中， y_{in} 对所有 $x \in T_{u,\,i}$ 的 $f(x)$ 施加了最严格的上界。也就是说，对于所有 $x \in V(T_{u,\,i})$ 以及所有 $q = f(y)$，其中 $y \in V_f^+ \backslash V(T_{u,\,i})$，我们有 $f(x) \leq g_{p_{in},\,q_{in}}(d_T(u, x)) \leq g_{p,\,q}(d_T(u, x))$。

p_{in} 和 q_{in} 的存在意味着，对于所有 $x \in V(T_{u,\,i})$， $f(x)$ 的界限仅用这两个值即可表示。对称地，$T_{u,\,i}$ 中的广播顶点对 $T \backslash T_{u,\,i}$ 的顶点上的 f 可能取值所施加的上界，同样表示为距 u 在 T 中的距离的函数，也可以用两个整数 p_{out} 和 q_{out} 表示。也就是说，如果 $V_f^+ \cap V(T_{u,\,i}) = \varnothing$，令 $p_{out} = -n$ 和 $q_{out} = 1$；否则，令 $p_{out} = \max\{p : y \in V_f^+ \cap V(T_{u,\,i})\}$，并选择与 y_{in} 类似的 y_{out}。然后

$$(p_{out}, q_{out}) = \begin{cases} (-n, 1) & \text{if } V_f^+ \cap V(T_{u,i}) = \varnothing \\ (f(y_{out}) - d_T(u, y_{out}), f(y_{out})) & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3}$$

且在两种情况下均为 $p_{out} \leq q_{out}$。

对于 $O(n^4)$ 种可能的 p_{in}、q_{in}、p_{out}、q_{out} 选择，满足 $-n \leq p_{in}$、$p_{out} \leq n$ 和 $1 \leq q_{in}$、$q_{out} \leq n$，该算法确定最大贡献 $\sum_{x \in V(T_u}$ 满足条件的 $f(x)$: $_{i)}$ $_{,}$

(C3) $f(x) \leq g_{p_{in},\,q_{in}}(d_T(u, x))$ 对于 $T_{u,\,i}$ 的每个顶点 x。

(C4) 如果对于$_{,i}$中的某个顶点 y， $f(y) > 0$，那么对于每个正整数 d， $g_{p_{out},q_{out}}(d) \leq g_{f(y)-d_T(u,y)\ f(y)}(d)$。

9.2 算法

下面的引理表明，对于给定的顶点 y，我们可以在线性时间内检查 C4。

引理 9.1. 若 t, f 和 距离 均为整数，且 $-n \leq t \leq n$ 和 f, 距离 $\in [n]$，那么对于每个正整数 d， $h_t(d) \leq h_{f-\mathrm{dist}}(d)$当且仅当 距离 $\geq$ 最大值$\{f, f-t\}$。

证明。 假设 $t \leq 0$。由于 d 为正数， $d \geq t+1$，因此 $h_t(d) = d - t$。此外，

$$h_{f-\mathrm{dist}}(d) = \begin{cases} 0 \text{ if } d \leq f - \mathrm{dist} \\ d - f + \mathrm{dist} \text{ if } d \geq f - \mathrm{dist} + 1. \end{cases}$$

因此， $h_t(d) \leq h_{f-\mathrm{dist}}(d)$ 当且仅当

(i) $d \geq f -$ 距离 $+ 1$，以及

(ii) $d - t \leq d - f +$距离

对所有正整数 d均成立。由 $d = 1$，(i) 变为 距离 $\geq f$。因此，(i) 和 (ii) 合起来等价于 距离 $\geq$ 最大值 $\{f, f-t\}$。

反之，假设 $t \geq 1$。当 $d \geq t+1$, $h_t(d)$ 为正时，我们再次得到 $d \geq f$ –dist $+1$ 和 $d - t \leq d - f +$ dist。由于对于每个正整数 d，我们都要求 $h_t(d) \leq h_{f-\mathrm{dist}}(d)$，因此再次可知 dist $\geq f$ 和 dist $\geq f - t$，引理得证。 □

因此，我们可以利用引理 9.1，通过 $t = p_{out}$, $f = f(y)$ 和 dist $= d_T(u, y)$ 来验证 C4。

给定 $u \in V(T)$ 和 $i \in [k]_0$，设 p_{in}、p_{out}、q_{in}、q_{out} 为整数，满足 $-n \le p_{in}$、$p_{out} \le n$ 和 $1 \le q_{in}$、$q_{out} \le n$。一个函数

$$f : V(T_{u_i}) \to \mathbb{N}_0 \text{ is } ((p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))\text{-}compatible$$

如果在 f 下满足条件 C1、C2、C3 和 C4。令 $\alpha_{bn}(T_{u,i}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$ 表示此类函数的最大权重。

引理 9.2。对于 T 的任何非叶子根 r，$\alpha_{bn}(T) = \alpha_{bn}(T_{r,c_T(r)}, (-n, 1), (n, 1))$。

证明。根据定义，$T_{r,\ c_T(r)} = T$。由于 $g_{-n,\ 1}(d) = d + n$ 对所有非负整数 d，$g_{-n,\ 1}(d) \ge n$ 均成立。因此，由于对所有 $x \in V(T)$，$f(x) \le e_T(x) \le n$，根据 C1，条件 C3 成立。同理，由于，$_1(d) = 0$ 对所有非负整数 d 均成立，根据 C1 和引理 9.1（取 $t = p_{out}$），C4 成立。 □

现在说明如何递归地确定对于所有 $O(n^5)$ 种 $(u, i), p_{in}, q_{in}, p_{out}$ 和 q_{out} 的选择，$\alpha_{bn}(T_{u,\ i}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$。回忆一下，$T_{u,\ 0}$ 仅由单个顶点 u 构成。

下 述引理适用于 T 的所有顶点 u，但在 u 是一片叶子时尤其有用 .

引理 9.3. 对于 T 的任意顶点 u，

$$\alpha_{bn}(T_{u,0}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) = \begin{cases} 0 & \text{if } q_{out} > p_{out} \\ \min\{e_T(u), g_{p_{in},q_{in}}(0), p_{out}\} & \text{if } q_{out} \le p_{out}. \end{cases}$$

证明。首先假设 $q_{out} > p_{out}$。根据 (3)，要么 $V_f^+ \cap V(T_{u,\ 0}) = \varnothing$，因此 $f(u) = 0$；要么 y_{out} 是 $T_{u,\ 0}$ 的一个顶点，使得 $d_T(u, y_{out}) > 0$，这不可能，因为 $V(T_{u,\ 0}) = \{u\}$。因此 $f(u) = 0$，且 $\alpha_{bn}(T_{u,\ 0}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) = 0$。

现在假设 $q_{out} \le p_{out}$。那么（如上所述）$q_{out} = p_{out}$，并且由（3）可得，$V_f^+ \cap V(T_{u,i}) \ne \varnothing$，且 $d_T(u, y_{out}) = 0$；也就是说，$u = y_{out}$，且 $f(u) = f(y_{out}) = q_{out} > 0$。由 C1，$f(u) \le e_T(u)$；由 C3，$f(u) \le g_{p_{in},q_{in}}(0)$。因此，$\alpha_{bn}(T_u, 0, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) = \min\{e_T(u)\ g_{p_{in},q_{in}}(0)\ p_{out}\}$。 □

下面的技术性引理描述了算法的关键递归步骤。参见图16。

引理 *9.4.* 设给定 $u \in V(T)$ 和 $i \in [k]$，并令 $v_1, ..., v_k$ 表示 u 的子节点。假设 v_i 有 k_i 个子节点。函数 $f: V(T_{u,i}) \to \mathbb{N}_0$ 是 $((p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$-相容的，当且仅当存在整数 $p^{(0)}$ *in* $p^{(0)}$ *out* $p^{(1)}$ *in* $p^{(1)}$ *out* $q^{(0)}$ *in* $q^{(0)}$ *out* $q^{(1)}$ *in* $q^{(1)}$ *out*，满足 $-n \le p^{(0)}$ *in* $p^{(0)}$ *out* $p^{(1)}$ *in* $p^{(1)}$ *out* $\le n$ 且 $1 \le q^{(0)}$ *in* $q^{(0)}$ *out* $q^{(1)}$ *in* $q^{(1)}$ *out* $\le n$，并满足以下条件：

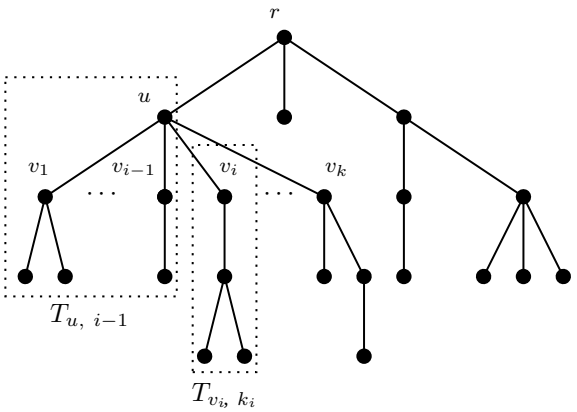
(i) f 到 $V(T_{u,\ i-1})$ 的限制与 $((p_{in}^{(0)},\ q_{in}^{(0)}),\ (p^{(0)}{}_{\text{out}} q^{(0)}{}_{\text{out}}))$ 相容；*(ii)* f 到 $V(T_{v_i,\ k_i})$ 的限制与 $((p_{in}^{(1)},\ q_{in}^{(1)}),\ (p_{out}^{(1)},\ q_{out}^{(1)}))$ 相容；

并且对于每个非负整数 d：

(iii) $g_{p_{in}^{(0)},\ q_{in}^{(0)}}(d) =$ 最小值$\{g_{p_{in},q_{in}}(d)\ g_{p_{out}^{(1)},\ q_{out}^{(1)}}(d+1)\}$；

(iv) $g_{p_{in}^{(1)},\ q_{in}^{(1)}}(d) =$ 最小值$\{g_{p_{in},q_{in}}(d+1)\ g_{p_{out}^{(0)},\ q_{out}^{(0)}}(d+1)\}$；

(v) $g_{p_{out},\ q_{out}}(d) \le$ 最小值$\{g_{p_{out}^{(0)},q_{out}^{(0)}}(d)\ g_{p_{out}^{(1)},\ q_{out}^{(1)}}(d+1)\}$。



Fi图 16：一棵有根树及一个顶点 u ，它有 k 个子节点，其中 $T_{u,i-1}$ 和 T_{v_i,k_i} 如图所示 .

证明。首先，假设 f 是 $((p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$-相容的。参照式（2）和（3），相对于 $T_{u,\ i-1}$ 定义 $p_{in}^{(0)}$、$q_{in}^{(0)}$、$p_{out}^{(0)}$、$q_{out}^{(0)}$。类似地，相对于 $T_{v_i,\ k_i}$ 定义 $p_{in}^{(1)}$、$q_{in}^{(1)}$、$p_{out}^{(1)}$、$q_{out}^{(1)}$。给定一个顶点 $w \in V(T \backslash T_{u,\ i})$，从 w 到 v_i 的距离比从 w 到 u 的距离多一。因此，根据 C4，(v) 成立。

令 $y_{in}^{(0)}$ 为任意选取的一个顶点，使得 $f(y_{in}^{(0)}) = q_{in}^{(0)}$ 且 $f(y_{in}) - d_T(u, y_{in}) = p_{in}^{(0)}$。若 $y_{in}^{(0)}$ 位于 $V(T \backslash T_{u,i})$ 中，则 p_{in} 对所有 $x \in V(T_{u,i})$ 的 $f(x)$ 施加的界，与 $p_{in}^{(0)}$ 对 $T_{u,i-1}$ 的顶点施加的界相同，因此 $(p_{in}^{(0)}, q_{in}^{(0)}) = (p_{in}, q_{in})$。否则，$y_{in}^{(0)}$ 位于 $V(T_{v_i,k_i})$ 中。由于当 $q \geq 1$, $g_{p_{in}^{(0)},q_{in}^{(0)}}(d) = g_{p_{in}^{(1)},q_{in}^{(1)}}(d+1)$ 时，$g_{p,q}(d+1) = g_{p-1,q}(d)$。因此，对每个非负整数 d，$g_{p_{in}^{(0)},q_{in}^{(0)}}(d) = \min\{g_{p_{in},q_{in}}(d), g_{p_{out}^{(1)},q_{out}^{(1)}}(d+1)\}$。同样，$(iv)$ 中的最小值等于 $g_{p_{in}^{(1)},q_{in}^{(1)}}(d)$。因此 (iii) 和 (iv) 成立。

由于 f 是 $((p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$-相容的，因此对于所有 $x \in V(T_{u,i-1})$，$f(x) \leq g_{p_{in},q_{in}}(d_T(u, x))$。此外，由 C2 可得，$f(x) \leq d_T(x, v_i) - f(v_i) \leq g_{p_{out}^{(1)},q_{out}^{(1)}}(d_T(v_i, x)) = g_{p_{out}^{(1)},q_{out}^{(1)}}(d_T(u, x) + 1)$，因此对于 (d) 中的 $g_{p^{(0)}}$，(i) 如 (iii) 所示成立。同理，对于 (d) 中的 $g_{p^{(1)}}$，(ii) 如 (iv) 所示成立。

反过来，假设存在整数

$$p_{\text{in}}^{(0)}, p_{\text{out}}^{(0)}, p_{\text{in}}^{(1)}, p_{\text{out}}^{(1)}, q_{\text{in}}^{(0)}, q_{\text{out}}^{(0)}, q_{\text{in}}^{(1)}, q_{\text{out}}^{(1)}$$

其中 $-n \leq p^{(0)}$ 属于 $p^{(0)}$ out $p^{(1)}$，属于 $p^{(1)}$ out $\leq n$，并且 $1 \leq q^{(0)}$ 属于 $q^{(0)}$ out $q^{(1)}$，属于 $q^{(1)}$ out $\leq n$，满足 $(i) - (v)$。

由（i）以及（ii），f 满足 C1；也就是说，对于所有 $x \in V(T_{u,\ i-1})$ 和 $x \in V(T_{v_i,\ k_i})$，$f(x) \leq e_T(x)$.

条件（i）和（ii）进一步表明，对于任意 x、$y \in V(T_{u,\ i-1})$ 以及任意 x、$y \in V(T_{v_i,\ k_i})$，C2 都成立。因此，为证明 f 满足 C2，只需证明：对于所有满足 $f(x)\ f(y) > 0$ 的 $x \in V(T_{u,\ i-1})$ 和 $y \in V(T_{v_i,\ k_i})$，$f(x) + f(y) \leq d_T(x, y)$。

由（i），f 在 $V(T_{u,\ i-1})$ 上的限制满足 C3；也就是说，$f(x) \leq g_{p_{in}^{(0)},\ q_{in}^{(0)}}(d_T(u, x))$。由（$iii$），

$$f(x) \leq g_{p_{out}^{(1)},q_{out}^{(1)}}(d_T(u, x) + 1).$$

因此，由（ii）和 C4，

$$\begin{aligned} f(x) &\leq g_{f(y)-d_T(u,y),f(y)}(d_T(u, x) + 1) \\ &= g_{f(y)-d_T(v_i,y),f(y)}(d_T(v_i, x)) \\ &\leq \min\{0, d_T(x, y) - f(y)\}. \end{aligned}$$

由于 x 是广播，$f(x) > 0$，因此 $f(x) \leq d_T(x, y) - f(y)$，满足 C2。

根据（iii），$g_{p_{in}^{(0)},\ q_{in}^{(0)}}(d) \leq g_{p_{\text{in}},\ q_{\text{in}}}(d)$，并且根据（$iv$），对于每个非负整数 d，$g_{p^{(1)}\text{在}\ q^{(1)}\text{在}}(d) \leq g_{p_{\text{in}},\ q_{\text{in}}}(d+1)$。因此，$f$ 满足（C3）。

最后，考虑 $y \in V(T_{u,\ i})$，使得 $f(y) > 0$。若 $y \in V(T_{u,\ i-1})$，则由 (v)，

$$g_{p_{out},q_{out}}(d) \le g_{p_{out}^{(0)},q_{out}^{(0)}}(d)$$

对所有正整数 d 均成立。再次根据 (i)，我们可以将 C4 应用于 f 到 $T_{u,\ i-1}$ 的限制，得到

$$g_{p_{out},q_{out}}(d) \le g_{f(y)-d_T(u,y),f(y)}(d).$$

类似地，如果对于某个 $y \in V$，$f(y) > 0 (T_{v_i,\ k_i})$，那么

$$\begin{aligned} g_{p_{out},q_{out}}(d) &\le g_{p_{out}^{(1)},q_{out}^{(1)}}(d+1) \\ &\le g_{f(y)-d_T(v_i,y),f(y)}(d+1). \\ &= g_{f(y)-d_T(u,y),f(y)}(d) \end{aligned}$$

对每个正整数 d 均成立。因此，f 满足 $C1-C4$。 □

注意，对于任意 $i \in [k]$，$V(T_{u,\ i-1}) \cup V(T_{v_i,\ k_i}) = V(T_{u,\ i})$。以下结论是引理 9.4 的推论。

推论 9.5。设 $u \in V(T)$ 有 k 个子节点。令 $i \in [k]$ 给定，并设 v_i 有 k_i 个子节点。则

$$\begin{aligned} &\alpha_{bn}(T_{u,i}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) \\ &= \max\{\alpha_{bn}(T_{u,i-1}, (p_{in}^{(0)}, q_{in}^{(0)}), (p_{out}^{(0)}, q_{out}^{(0)})) + \alpha_{bn}(T_{v_i,k_i}, (p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))\} \end{aligned} \tag{4}$$

遍历所有满足引理 *9.4* 的条件 *(iii)*、*(iv)* 和 *(v)* 的选择：$p^{(0)}$ 属于 $p^{(0)}$，$p^{(1)}$ 属于 $p^{(1)}$，$q^{(0)}$ 属于 $q^{(0)}$，$q^{(1)}$ 属于 $q^{(1)}$，其中 $-n \le p^{(0)}$ 属于 $p^{(0)}$，$p^{(1)}$ 属于 $p^{(1)}$，$\le n$ 且 $1 \le q^{(0)}$ 属于 $q^{(0)}$，$q^{(1)}$ 属于 $q^{(1)}$，$\le n$。

证明。设 $p^{(0)}\text{in}\ p^{(0)}\text{out}\ p^{(1)}\text{in}\ p^{(1)}\text{out}\ q^{(0)}\text{in}\ q^{(0)}\text{out}\ q^{(1)}\text{in}\ q^{(1)}\text{out}$ 为满足引理条件且使（4）中的最大值达到的整数。设 f 为一个广播，使得 f 在 $T_{u,i-1}$ 和 T_{v_i,k_i} 上的限制分别对应于 $\alpha_{bn}(T_{u,i-1}, (p_{in}^{(0)}, q_{in}^{(0)}), (p_{out}^{(0)}, q_{out}^{(0)}))$ 和 $\alpha_{bn}(T_{v_i,k_i}, (p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))$。根据定义，这些限制是 $((p_{in}^{(0)}, q_{in}^{(0)}), (p^{(0)}\text{out}\, q^{(0)}\text{out}))$-兼容的以及 $((p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))$-兼容的，因此，引理 9.4 的陈述中的条件（$i$）和（$ii$）均得到满足。因此，根据引理 9.4，$f$ 在 $T_{u,i}$ 上的限制是边界独立的。

□

现在我们可以证明本节的主要定理。

定理 9.6。给定一棵有 $n \ge 3$ 个顶点的树 T，其边界独立广播数 $\alpha_{bn}(T)$ 可在 $O(n^9)$ 时间内确定。

证明。选择一个非叶顶点 r 作为根，并按到 r 的距离非递增的顺序处理 T 的顶点。回想根据 (1)，(u,i) 有 $O(n)$ 种选择。假设已给定 u 和 i。对于 p_{in}、q_{in}、p_{out} 和 q_{out} 的 $O(n^4)$ 种选择中的每一种，值 $\alpha_{bn}(T_{u,\ i}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$ 可按如下方式在线性时间内确定。如果 $i = 0$，则应用引理 9.3，以线性时间求出 $\alpha_{bn}(T_{u,\ i}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$。否则：

- 对于四个整数 $p^{(0)}\text{out}$ $p^{(1)}\text{out}$ $q^{(0)}\text{out}$ 和 $q^{(1)}\text{out}$ 的 $O(n^4)$ 种可能选择中的每一种，都在常数时间内检查引理 9.4 中的条件（v）。
- 给定 $p_{in}, q_{in}, p^{(0)}\text{出}\ p^{(1)}\text{out}, q^{(0)}\text{出}$，以及 $q^{(1)}\text{出}$，，在常数时间内应用引理 9.4 的条件（iii）和（iv），以确定 $p^{(0)}\text{入}$ $p^{(1)}\text{入}$ $q^{(0)}\text{入}$，以及 $q^{(1)}\text{入}$。

• 最后，添加 $\alpha_{bn}(T_{u,\ i-1}, (p_{(0)\,in}, q_{(0)\,in}), (p_{(0)\,out}, q_{(0)\,out}))$ 和 $\alpha_{bn}(T_{v_i,\ k_i}, (p_{(1)\,in}, q_{(1)\,in}), (p_{(1)\,out}, q_{(1)\,out}))$，并应用推论 9.5。

由于 (u, i) 有 $O(n)$ 种选择，因此可以在 $O(n^9)$ 时间内确定 $\alpha_{bn}(T_{r,\ c_T(r)}, (-n, 1), (n, 1))$。根据引理 9.2，该值等于边界独立广播数 $\alpha_{bn}(T)$。 □

我们用一个简单的例子来说明该算法。考虑下面的树 T，其中两个非叶子顶点之一被任意指定为根。其余顶点依次标记为 u_1 至 u_4，使得当 $i > j$ 时，$d_T(u_i, r) \leq d_T(u_j, r)$。

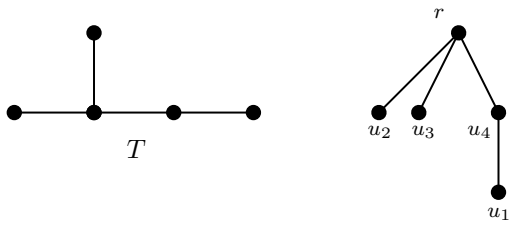


图 17：树 T 及其有根结构。

注意，对于 $i \in \{1, 2, 3\}$，$e_T(u_i) = 3$。根据引理 9.3，对于每个 $1 \leq i \leq 3$，我们有

$$\alpha_{bn}(T_{u_i,0}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) = \begin{cases} 0 \text{ if } q_{out} > p_{out} \\ \min\{3, g_{p_{in},q_{in}}(0), p_{out}\} \text{ if } q_{out} \leq p_{out} \end{cases}$$

对满足 $-5 \leq p_{in}, p_{out} \leq 5$ 和 $1 \leq q_{in}, q_{out} \leq 5$ 的 p_{in}、q_{in}、p_{out} 和 q_{out} 的所有选择取值。注意，由于 $T_{u_i,\ 0}$ 只包含一个顶点，因此当且仅当 $q_{out} = p_{out}$ 时，u_i 才进行广播。于是，当 $p_{in} \geq 0$ 时，$\alpha_{bn}(T_{u_i,\ 0}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) = 0$；当 $p_{in} < 0$ 时，$\alpha_{bn}(T_{u_i,\ 0}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) \in \{1, 2, 3\}$。

否则，$q_{out} > p_{out}$，在这种情况下，$\alpha_{bn}(T_{u_i,\ 0}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) = 0$ 正如预期的那样。

回忆一下，根据引理 8.1，给定一棵树 T 和 T 上的一个 α_{bn}-广播 f，T 中没有叶子能听到来自非叶子的 f。

特别地，与叶子相邻的顶点中没有一个属于 V_f^+，因此 α_{bn}-广播 f to$T_{u_4,\ 0} = \{u_4\}$ 的权重为 0。根据引理 9.5，我们有

$$\begin{aligned} &\alpha_{bn}(T_{u_4,1}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out})) \\ &= \max\{\alpha_{bn}(T_{u_4,0}, (p_{in}^{(0)}, q_{in}^{(0)}), (p_{out}^{(0)}, q_{out}^{(0)})) + \alpha_{bn}(T_{u_1,0}, (p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))\} \\ &= \max\{\alpha_{bn}(T_{u_1,0}, (p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))\} \end{aligned}$$

遍历所有满足引理 9.4 的条件 (iii)、(iv) 和 (v) 的 $p^{(0)}{}_{入}\, p^{(0)}{}_{出}\, p^{(1)}{}_{入}\, p^{(1)}{}_{出}\, q^{(0)}{}_{入}\, q^{(0)}{}_{出}\, q^{(1)}{}_{入}\, q^{(1)}{}_{出}$ 组合，其中 $-5 \leq p^{(0)}{}_{入}\, p^{(0)}{}_{出}\, p^{(1)}{}_{入}\, p^{(1)}{}_{出} \leq 5$，且 $1 \leq q^{(0)}{}_{入} q^{(0)}{}_{出}\, q^{(1)}{}_{入} q^{(1)}{}_{出} \leq 5$。

我们可以类似地计算 $\alpha_{bn}(T_{r,1}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$，即 $\max\{\alpha_{bn}(T_{u_2,0}, (p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))\}$。因此，要确定 $\alpha_{bn}(T_{r,2}, (p_{in}, q_{in}), (p_{out}, q_{out}))$，我们只需考虑子树 $T_{u_2,0}$ 和 $T_{u_3,0}$。

最后，根据引理 9.2 和 9.5，我们可以计算 $\alpha_{bn}(T)$，得到

$$\begin{aligned} &\alpha_{bn}(T_{r,3}, (-n, 1), (n, 1)) \\ &= \max\{\alpha_{bn}(T_{r,2}, (p_{in}^{(0)}, q_{in}^{(0)}), (p_{out}^{(0)}, q_{out}^{(0)})) + \alpha_{bn}(T_{u_4,1}, (p_{in}^{(1)}, q_{in}^{(1)}), (p_{out}^{(1)}, q_{out}^{(1)}))\} \end{aligned} \tag{5}$$

再次遍历满足引理 9.4 的所有 $p^{(0)}_{内}\,p^{(0)}_{外}\,p^{(1)}_{内}p^{(1)}_{外}\,q^{(0)}_{内}\,q^{(0)}_{外}\,q^{(1)}_{内}\,q^{(1)}_{外}$ 选择，其中 $-5 \le p^{(0)}_{内}\,p^{(0)}_{外}\,p^{(1)}_{内}\,p^{(1)}_{外} \le 5$ 且 $1 \le q^{(0)}_{内}\,q^{(0)}_{外}\,q^{(1)}_{内}\,q^{(1)}_{外} \le 5$。

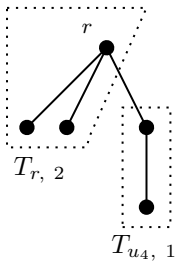


图 18：在 5 中考虑的 T 的划分

重复计算表明，当 $\alpha_{bn}(T_{r,2}, (p^{(0)}_{in}, q^{(0)}_{in}), (p^{(0)}_{out}, q^{(0)}_{out})) = 2$且 $\alpha_{bn}(T_{u_4,1}, (p^{(1)}_{in}, q^{(1)}_{in}), (p^{(1)}_{out}, q^{(1)}_{out})) = 2$时，该最大值可以达到。由于在 α_{bn}-广播 f下，$f(r) = f(u_4) = 0$，我们发现，当 $f(u_1) = 2$且 $f(u_2) = f(u_3) = 1$时，可以达到最大边界独立数。因此，$\alpha_{bn}(T) = 4$。

10 个开放问题

目前尚不清楚是否存在一个图 G，使得 $i_{h(G)}\,i_{bn(G)} = \frac{5}{4}$。由于存在满足 $i_{bn}(G) = 5$和 $i_h(G) = 6$ 的图（图 19），因此 $i_{h(G)}\,i_{bn(G)}$ 的紧上界必定位于 $6\,5$ 和 $5\,4$之间。

问题 10.1. 改进界 $i_{h(G)}\,i_{bn(G)} \le \frac{5}{4}$，或证明它对某个无限图族是最佳的。

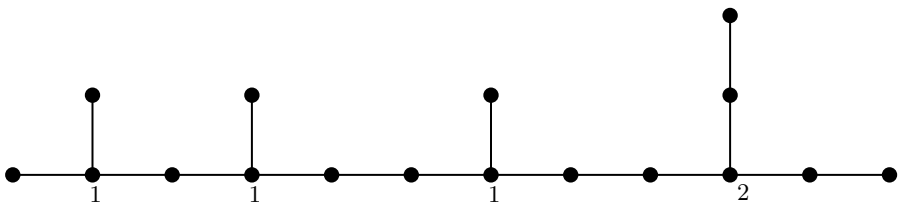


图 19：一棵满足 $i_{bn}(T) = 5$ 且 $i_h(T) = \mathrm{rad}(T) = 6$ 的树。

回顾一下，$\gamma_b(G)$ 表示图 G 上支配广播的最小代价。Neilson 在 [18] 中证明，对于所有图 G，都有 $\gamma_b(G) \le i_{bn}(G)$。由于 $i_{bn}(G) \le i_h(G) \le \mathrm{rad}(G)$，因此对于所有满足 $\gamma_b(G) = \mathrm{rad}(G)$ 的 G，都有 $i_{bn}(G) = i_h(G)$；这类图称为径向图。Herke 和 Mynhardt 在 [9] 中刻画了径向树。

设 f 是图 G 上的一个 i_{bn}-广播。如果 $|V^+_f| = 1$，或者如果 $V^+_f = V^1_f$，那么 $i_h(G) = i_{bn}(G)$，且 f 是 G 上的一个 i_h- 广播。特别地，对于路径和环，$i_{bn}(G) = i_h(G)$。对于满足 $\mathrm{rad}(G) \le 5$ 的图 G，等号也成立：如果 f 是一个满足 $\sigma(f) \le 4$ 的 i_{bn}-广播，那么 $G - U^E_f$ 由一个或两个连通分支组成；若只有一个连通分支，则 $\sigma(f) = \mathrm{rad}(G)$；若有两个连通分支，则每个分支上各有两个强度为 1 的广播。进一步分类这类参数相等的图，将会很有意义。

问题10.2。对于哪些图，G 是 $i_{bn}(G) = i_h(G)$？

恰有一个分支顶点的树称为广义蜘蛛。广义蜘蛛 $S = S(n_1, n_2, ..., n_k)$由一个度为 k的分支顶点 b 以及 $k \ge 3$ 条路径或“腿” $L_1, ..., L_k$组成，每条路径都有一个

端点位于 b，使得对所有 $1 \le i \le k$， $\ell(L_i) = n_i$。文献 [11] 证明了广义蜘蛛满足问题10.2中的等式。

定理 em 10.3. [11] 设 $S = S(n_1, n_2, ..., n_k)$ 为一张广义蜘蛛图。那么 $i_{bn}(S) = i_h(S$).

然而，用于确定这些参数精确值的闭式公式仍然未知。

问题 10.4。 确定 $i_{bn}(S)$ 所有广义蜘蛛 S 的取值。

对于给定的图 G，确定 $\gamma(G)$ 的问题已知是 NP 完全的 [7]。然而，在 [8]，中，Heggernes 和 Lokshtanov 证明，所有图的最小广播支配问题都可以在多项式时间内求解。

问题 10.5. 研究对于树或其他图类，确定 $i_{bn}(G)$ 和 $i_h(G)$ 的计算复杂度。

在 [18], Neilson 证明，对于至少包含一个分支顶点的所有树， $\alpha_{bn}(T) \le n - |B_T| + |R_T|$ 均成立；我们进一步将这一结果改进为：对于毛毛虫树， $\alpha_{bn}(C) \le n - |B_C| + \alpha(C[R_C])$。目前尚不清楚这一结果能否推广到所有树。

问题 10.6。对于任意一棵阶为 n 且至少有一个分支顶点的树 T，是否有 $\alpha_{bn}(T) \le n - |B_T| + \alpha(C[R_T])$?

特别地，我们发现，对于没有主干顶点的毛毛虫树 C，以及没有度为 3 的分枝且不存在两个相邻主干顶点的毛毛虫树，当 $|V(C)| \ge 3$ 时，等号成立。

问题 10.7。 刻画满足 $\alpha_{bn}(T) = n - |B_T| + \alpha(C[R_T])$ 的树 T。

问题 10.8。 求出一个闭式公式，以精确确定毛毛虫树或其他树类的 α_{bn}（C）。

在第9节中，我们证明了所有树上的最大 bn-独立问题都可以在多项式时间内求解。未来的研究可以探讨：与听觉独立性相比，在考虑边界独立性的额外约束时，是否能够设计出更高效的算法。

问题10.9。 改进定理 *9.6* 中的运行时间，或者证明该运行时间已是最优的。

参考文献

[1] S. Bessy 和 D. Rautenbach。广播独立性的算法方面。离散应用数学，314 (2022)，142–149。[2] S. Bessy 和 D. Rautenbach。围长、最小度、独立性与广播独立性。Com- mun. Comb. Optim. 4 (2019)，131–139。[3] S. Bessy 和 D. Rautenbach。广播独立性与独立性的关系。Discrete Math. 342 (2019)，文章编号 111589。[4] G. Chartrand、L. Lesniak 和 P. Zhang。《图与有向图》，第 6 版，CRC出版社，纽约，2016。[5] J. E. Dunbar、D. J. Erwin、T. W. Haynes、S. M. Hedetniemi 和 S. T. Hedetniemi。图中的广播。离散应用数学，154 (2006)，59–75。[6] D. Erwin。图中的成本支配。博士学位论文，西密歇根大学，美国密歇根州卡拉马祖，2001。https://scholarworks.wmich.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2367&context=dissertations&httpsredir=1&referer=。[7]M. R. Garey 和 D.S. Johnson。《计算机与不可解性：NP 完全性理论指南》，W. H. Freeman & Co.，美国纽约州纽约，1979。[8] P. Heggernes 和 D. Lokshtanov。多项式时间内的最优广播支配。Discrete Mathe-matics，36 (2006)，3267-3280。[9] S. Herke 和 C. M. Mynhardt。径向树。Discrete Math.，309 (2009)，5950–5962[10] M. A. Henning、G. MacGillivray 和 F. Yang。图中的广播支配。载于 T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning 编，《图中的支配结构》，第 15–46 页。施普林格国际出版，查姆，瑞士，2021。[11] J. I. Hoepner。图中的边界独立广播。研究生学位论文，维多利亚大学，加拿大不列颠哥伦比亚省维多利亚，2022。http://hdl.handle.net/1828/14556。[12] R. M. Karp。组合问题之间的可归约性。载于 R. E. Miller 和 J. W. Thatcher 编，《计算机计算的复杂性》，第 85–103 页。普莱enum出版社，纽约，1972 [13] E. Marchessault 和 C. M. Mynhardt。树中的下边界独立广播。讨论数学与图论，即将发表。2021年9月12日接受。https://doi.org/10.7151/dmgt.2434。[14] C. M. Mynhardt 和 L. Neilson。树的边界独立广播数的紧上界。arXiv:2104.02266v2，2021。[15] C. M. Mynhardt 和 L. Neilson。图中的边界独立广播。J. Combin. Math. Combin. Comput.，116 (2021)，79-100。[16] C. M. Mynhardt 和 L. Neilson。比较图的上广播支配数与边界独立数。组合学汇刊，即将发表。arXiv:2104.02257，2021。[17] C. M. Mynhardt 和 L. Neilson。树的边界独立广播数的下界与精确值。arXiv:2105.02312v1，2021。

[18] L. Neilson. 图中的广播独立性。博士学位论文，维多利亚大学，加拿大不列颠哥伦比亚省维多利亚，2019。https://dspace.library.uvic.ca/bitstream/handle/1828/11084/Neilson_Linda_PhD_2019.pdf.

[19] H. N. de Ridder 等人。ISGCI：图类及其包含关系信息系统——根据独立集问题的难度对图类进行分类。https://www.graphclasses.org/classes/problem_Independent_set.html。