arXiv:2305.03523v1 [math.CA] 5 May 2023

平面上简单非凸域的贝尔曼函数

PaataIvanisvili Dmitriy Stolyarov Vasily Vasyunin Pavel Zatitskii

摘要

本文推广了作者此前关于有界平均振荡空间上的积分泛函的贝尔曼函数的研究。这些贝尔曼函数是平面上抛物线条带上的最小局部凹函数。现在，我们介绍一种算法，用于构造定义在一个平面区域上的最小局部凹函数，该平面区域是两个无界凸区域之差。由此可得出许多针对有界平均振荡空间、 A_p 或盖林类等函数类中的函数的尖锐估计。

本研究得到俄罗斯科学基金会项目 19-71-10023 的资助

目录

1 引言 3

1.1 研究动机、示例及与经典主题的联系.3 1.1.1 BMO情形.4 1.1.2 TheA_{p_1,p_2} 类.5 1.1.3 单调重排与贝尔曼函数的几何性质.6 1.1.4 若干直接应用.7 1.1.5 与矩方法和微分几何的关系.7 1.2 内容概述.8 1.3 相关问题.9 1.3.1 有界 Ω 的情形.9 1.3.2 高维情形.10

2 设置　　与证明概要　　1

2.1 设置.11

2.1.1 定义域.11 2.1.2 极值问题与贝尔曼函数.14 2.1.3 关于 f 的条件.15 2.1.4 光滑性条件.17

2.2 局部凹函数.17

2.2.1 Monge–Amp`ere 方程与直纹曲面.17 2.2.2 优化函数.18 2.2.3 一般原理与结果描述.19

3 模式　　贝尔曼候选函数　　20

3.1 预备知识.20 3.2 围栏.21 3.3 切线域.23 3.4 弦域.26 3.5 杯形区域周边.28 3.5.1 微分.28 3.5.2 杯形区域构造.31 3.5.3 如何从单弦生长出弦域.34 3.6 力.37 3.6.1 篱笆拼接.38 3.6.2 力与尾部.38 3.6.3 力的性质.40 3.7 线性区域.41 3.7.1 角.41

3.7.2 固定边界上有两个点的线性区域.41 3.7.3 基本域的图形表示.46 3.7.4 多图形.48 3.8 叶状结构的组合性质.51 3.8.1 拼接复合图形.51 3.8.2 一般叶状结构.54

4 贝尔曼候选对象的演化 **57**

4.1 简单图景.57 4.2 演化准备.61 4.2.1 弦的结构引理.61 4.2.2 尾部增长引理.62 4.2.3 平衡方程引理.65 4.3 局部演化定理.65 4.4 全局演化.73

5 优化函数 **77**

5.1 抽象理论.77 5.2 优化器的局部行为.80 5.2.1 切线区域上的优化器.80 5.2.2 其他所有图形上的优化器.86 5.3 全局优化器.91 5.4 关于全局条件的注.92 5.4.1 在 $-\infty$ 上的行为.92 5.4.2 情形$(\mathbf{A})$: $\int_{-\infty}^{v}\lambda$ 收敛.94 5.4.3 情形$(\mathbf{B})$: $\int_{-\infty}^{v}\lambda=+\infty,\quad \vartheta_1(-\infty)>0$.96 5.4.4 情形$(\mathbf{C})$: $\int_{-\infty}^{v}\lambda=+\infty,\quad \vartheta_1(-\infty)=0,\quad \vartheta_2(-\infty)\neq 0$.97 5.4.5 在 $+\infty$ 上的行为.99 5.4.6 当 $\boldsymbol{B}=+\infty$时?.99 5.4.7 定义域示例.100

参考文献 **103**

第 1 章

引言

贝尔曼函数及其概率论中的对应物——伯克霍尔德函数——在现代调和分析和概率论中发挥着重要作用。事实上，这两个名称指的是同一个对象。相关基础由开创性论文 [4] 和 [28] 奠定（另见 [27] ）；关于该领域的概述，请参阅专著 [34] 和 [57]；较短的入门介绍见 [29]和 [40]。

粗略地说，这一领域可分为两个部分。第一部分将贝尔曼函数作为工具，用于证明不等式，而不关注其是否尖锐。在这种情况下，通常需要构造一个足够好的贝尔曼上解。第二部分旨在为贝尔曼优化问题提供尖锐解。这大大缩小了其应用范围，因为精确的贝尔曼函数往往极难描述。不过，所得结果通常不仅给出相关不等式的尖锐常数，也有助于深入理解最优函数。

本卷给出了 [15] 中公布结果的证明。我们将重点研究一类特殊的优化问题，这类问题旨在考察有界平均振荡（BMO）或 A_p 等函数类中函数的可和性。关于符合我们研究范围且已解决的具体问题，我们请读者参阅 [15] 以及下文第 1.1.1 和 1.1.2 小节，其中列出了大量实例。从某种意义上说，我们的主要目标是为解决一种非常特殊类型的优化问题提供理论；这仅涵盖了少数可用贝尔曼函数方法处理的不等式。然而，这一小领域中产生的构造和思想具有普适性，也应用于其他更复杂的贝尔曼问题；参见下文第 1.1.3、1.1.4 和 1.1.5 小节。在下一节中，我们将简要说明本研究的动机，描述这一领域，并概述主要实例。我们还将展示本书的许多内容如何为相关问题提供有用的工具，并阐释其与经典矩方法及微分几何相关主题之间的联系。第 1.2 节介绍本文的安排。第 1.3 节讨论本卷未涉及的一些相关问题。

1.1 动机、示例及与经典主题的联系

设 Ξ_0 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个严格凸无界开真子集。设 Ξ_1 是另一个严格凸无界开集，其闭包完全包含于 Ξ_0 中；我们令 Ω = 闭包 $\Xi_0 \setminus \Xi_1$。设 I 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间。考虑类 $\boldsymbol{A}_\Omega(I)$，它由取值于 $\mathbb{R}^2$ 的可求和函数 $\varphi\colon I \to \partial\Xi_0$ 组成，且对任意子区间 $J \subset I$，点 $\langle\varphi\rangle_J$ 都不属于 Ξ_1；此处及下文中，符号 $\langle\psi\rangle_E$ 表示局部可求和函数 ψ 在非零测度集合 E 上的平均值：

$$\langle\psi\rangle_E = \frac{1}{|E|}\int_E \psi(t)\,dt, \quad |E| \text{ stands for the Lebesgue measure of } E \subset \mathbb{R}.$$

我们假设 Ξ_0 和 Ξ_1 的边界都可以用第一个坐标参数化。换言之，它们是标准坐标系中凸函数的图像。

设 $\mathrm{f}\colon \partial\Xi_0 \to \mathbb{R}$ 是一个函数。假设 f 可测，且在无穷远处的增长不会过快。我们要研究如何在条件 $\varphi \in \boldsymbol{A}_\Omega(I)$ 和 $\langle\varphi\rangle_I = x$ 下，对量 $\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_I$ 给出尖锐估计。这一问题自然引出了贝尔曼函数

$$\boldsymbol{B}_\Omega(x;\mathrm{f}) = \sup\Big\{\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_I \;\Big|\; \langle\varphi\rangle_I = x,\quad \varphi\in\boldsymbol{A}_\Omega(I)\Big\},\qquad x\in\Omega. \tag{1.1.1}$$

利用平均值的伸缩不变性，可以证明 $\boldsymbol{B}$ 的定义与 I的具体选择无关。主要有两类例子：与 BMO空间和 Muckenhoupt 类 A_p相关的例子。

1.1.1 有界平均振荡情形

考虑如下情形：

$$\Omega = \Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2+1\Big\},$$

对应于在 BMO空间单位球上优化积分泛函 $\langle f(\varphi)\rangle_I$。这里我们选择了

$$\Xi_0 = \Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1^2 < x_2\Big\} \quad\text{and}\quad \Xi_1 = \Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1^2+1 < x_2\Big\}.$$

注意到　若 $\varphi\colon I\to\partial\Xi_0$ 属于 $\boldsymbol{A}_\Omega(I)$，则其第一个坐标 $\varphi_1\colon I\to\mathbb{R}$ 满足不等式

$$\langle\varphi_1^2\rangle_J - (\langle\varphi_1\rangle_J)^2 \leqslant 1$$

对任意子区间 $J\subset I$。这可以改写为

$$\big\langle\big|\varphi_1 - \langle\varphi_1\rangle_J\big|^2\big\rangle_J \leqslant 1,\qquad \forall\ J \text{ subinterval } I.$$

若赋予空间 BMO(I) 二次半范数，则这等价于不等式 $\|\varphi_1\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1$。一般的 BMO_p 半范数为

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO}_p(I)} = \sup\Big\{\Big(\langle|\psi-\langle\psi\rangle_J|^p\rangle_J\Big)^{\frac{1}{p}} \;\Big|\; J \text{ is a subinterval of } I\Big\}.$$

对于我们的讨论，主要使用的范数是 BMO_2, ，因此在此情形下省略下标 2。根据 John–Nirenberg 不等式，这些范数定义了同一个函数 Banach 空间。关于一般的 BMO理论，请参阅 [45] 。

BMO 框架表明，考虑中间域可能会有所帮助

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2+\varepsilon^2\Big\}, \tag{1.1.2}$$

它是 Ξ_0 与

$$\Xi_\varepsilon = \Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1^2+\varepsilon^2 < x_2\Big\}.$$

由 Ω_ε 生成的类 $\boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}(I)$ 对应于有界平均振荡的 ε-球。从现在起，我们固定某个 $\varepsilon>0$。选择 $\mathrm{f}(t,\ t^2) = e^t$ 以及解析表达式

$$\boldsymbol{B}_{\Omega_\varepsilon}(x;e^t) = \frac{1-\sqrt{x_1^2-x_2+\varepsilon^2}}{1-\varepsilon}e^{x_1-\varepsilon+\sqrt{x_1^2-x_2+\varepsilon^2}},\qquad x\in(1.1.2),\ \varepsilon<1, \tag{1.1.3}$$

可得出 [41], 中找到的贝尔曼函数 (1.1.1) 对应的约翰–尼伦伯格不等式的锐积分形式。这个公式解释了我们所说的“计算贝尔曼函数”是什么意思。虽然 $\boldsymbol{B}$ 由 (1.1.1) 完全定义，但从这个定义中几乎无法提取任何信息。我们所说的计算贝尔曼函数，是指为它找到一个良好的解析表达式。通常，我们的表达式不像 (1.1.3) 那么简洁。它们由积分、微分组成，还包含特定函数。更重要的是，我们通常按情形定义函数，而情形的划分由某些解析方程的解所满足的不等式来确定。尽管有时这种描述是隐式的，我们总会证明这些解存在且唯一。

选择 $\mathrm{f}(t,t^2) = |t|^p$ 可得 BMO^p 范数之间的尖锐不等式；这一情形在 [43]中已有研究。经典形式的 John–Nirenberg 不等式的最佳常数见 [56]。论文 [30] 利用 [56] 中的贝尔曼函数推导出 BMO 嵌入洛伦兹空间的尖锐嵌入定理（关于 BMO 鞅的类似估计，见 [18]）；而 [31] 则采用 $f(t) = \mathrm{f}(t,t^2)$ 为分段仿射函数的情形，推导出 BMO 嵌入弱 L_∞-空间的尖锐嵌入定理。论文 [33]运用上述类型的贝尔曼函数，求出了 BMO 嵌入加权 BMO 的最佳常数。论文 [47] 和 [58] 求出了乘法不等式 $\|\varphi\|_{L_q} \leqslant c_{p,q}\|\varphi\|_{L_p}^{p/q}\|\varphi\|^{1-p/q}_{\mathrm{BMO}}$ 中的最佳常数。其论证依赖于一个三维贝尔曼函数。在第一篇论文中，该函数几乎可以直接由 [43]中的二维函数构造出来。第二篇论文中的函数则相当复杂。关于 John–Nirenberg 不等式的尖锐对称形式，参见近期预印本 [8]。一般 f 情形的理论由 [17] 创立（简要报告见 [13], ，一个较简单的案例研究见 [16]„ 该理论的一个应用示例见 [55]）。

我们注意到，上述贝尔曼函数技术非常适合用于处理有界平均振荡$_2$ ，然而，当将其应用于具有一般 p 的 BMO^p 范数时，会遇到显著的困难。上述所有论文均研究 BMO_2（贝尔曼函数技术在 BMO^p 中的唯一应用见 [39] 和 [52]）。关于 BMO_1，上 John–Nirenberg 不等式的最佳常数的结果，参见 [22], [26], 和 [39]（前两篇论文未使用贝尔曼函数技术）。

ε 取不同值时，函数 $\boldsymbol{B}_{\Omega_\varepsilon}(\,\cdot\,;f)$ 彼此相关。论文 [17] 提出同时计算它们。更准确地说，首先，当 ε 足够小时，计算函数 $\boldsymbol{B}$。然后，连续增大 ε，并跟踪 $\boldsymbol{B}$ 的演化。这为任意 ε 构造 $\boldsymbol{B}$ 提供了一种算法。本文将采用类似的思路。这说明了需要一族连续的凸区域 Ξ_ε，将 Ξ_0 与 Ξ_1 连接起来。

1.1.2 TheA_{p_1,p_2} 类

设 p_1 和 p_2、 $p_1 > p_2$ 为实数，并设 $Q > 1$。考虑定义域。

$$\Omega_{p_1,p_2,Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1, x_2 > 0 \text{ and } x_2^{1/p_2} \leqslant x_1^{1/p_1} \leqslant Q x_2^{1/p_2} \right\}. \tag{1.1.4}$$

该定义域对应于在 [54] 中引入的所谓 $A_{p_1,\ p_2}$ 类。权重 $w\colon I \to \mathbb{R}_+$ 属于 $A_{p_1,\ p_2}$，如果该量

$$[w]_{p_1,p_2} = \sup \left\{ \langle w^{p_1} \rangle_J^{\frac{1}{p_1}} \langle w^{p_2} \rangle_J^{-\frac{1}{p_2}} \;\middle|\; J \text{ is a subinterval of } I \right\}$$

是有限的。可以看出，$[w]_{p_1,p_2} \leqslant Q$ 当且仅当 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_{p_1,p_2,Q}}$，其中 $\varphi = (w^{p_1}, w^{p_2})$。

论文 [54] 推广了 [53], ，其中首次找到了 Muckenhoupt 权的最佳贝尔曼函数；这些贝尔曼函数给出了逆 H¨older 不等式中的最佳常数。尺度 A_{p_1,p_2} 包含经典的 Muckenhoupt 类 A_p。更准确地说，$A_{p,-\frac{1}{p-1}}$ 与 A_p重合，其中 $p \in (1,\infty)$。$p_1 = 1$ 的情形对应于所谓的盖林类。论文 ⊤[7] 专门研究这一特定情形。得出了将盖林类嵌入 A_p 的最佳常数。该论文使用了由形如 $\mathrm{f}(x) = x_1^q$ 的 f 所生成的贝尔曼函数，其中某个 q。相应的

A_{p_1,p_2}-权的尖锐弱型反向 H¨older 不等式在 [36] 中得到了建立；后者使用了 f(x) = $\chi_{[1,\infty)}(x_1)$ 的贝尔曼函数。关于 Muckenhoupt 类 A_1 的极限情形，参见 [35] 。

我们注意到，定义 (1.1.4) 可自然地延伸至某些参数 p_1 和 p_2 等于 1 以及 ∞的极限情形。赋予所谓 Hruschev“范数”的 A_∞ 情形

$$[w]_\infty = \sup\left\{ \langle w\rangle_J \exp(-\langle \log w\rangle_J) \,\middle|\, J \text{ is a subinterval of } I \right\}$$

在 [12], 中引入，具有特别重要的意义。这对应于定义域

$$\Omega_{1,\infty,Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, e^{x_1} \leqslant x_2 \leqslant Qe^{x_1} \right\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $Q > 1$，即当且仅当 $\varphi =$(log w, w) 属于 $\boldsymbol{A}_{\Omega_{1,\infty,Q}}$时， $[w]_\infty \leqslant Q$。这一域及相应贝尔曼函数的研究可追溯至 [53]。关于这一特例及所得不等式的应用，参见 [1] 。论文 [32] 给出了对数型 A_∞ Muckenhoupt 权属于有界平均振荡的原理的锐利形式；其论证依赖于定义域 (1.1.5) 上满足 f(x) = x_1^2 的一个贝尔曼函数。在 [39] 和 [52], 中，计算了满足 f(x) = $|x_1|^p$ 的贝尔曼函数，并用以建立有界平均振荡的 John–Nirenberg 不等式的锐利形式^p ，其中 $p \neq 2$。

1.1.3 单调重排与贝尔曼函数的几何 on

人们或许会好奇，为何一个复杂的优化问题 (1.1.1) 会有一个清晰的解。其启发式原因可以从几个角度来描述。首先，单调重排的概念在此处似乎很有用。对于函数 ξ: $I \to \mathbb{R}$ ，用公式定义其非增重排 ξ^*: $[0, |I|] \to \mathbb{R}$

$$\xi^*(t) = \inf\left\{ \lambda \,\middle|\, |\{s \in I \mid \xi(s) > \lambda\}| \leqslant t \right\}.$$

注意，对于任意合理的函数 f，都有 $\langle f(\xi)\rangle_I = \langle f(\xi^*)\rangle_{[0,|I|]}$。文献 [21] 证明了单调重排算子不会增大有界平均振荡 $_1$ 范数[1]。对于 A_p常数，也有类似的原理: $[w^*]_p \leqslant [w]_p$ （ [2] 讨论了 $p = 1$ 的情形， [23] 则讨论了任意 p）。回顾一下，我们假设 $\partial\Xi_0$可以用第一个坐标参数化。若函数 φ: $I \to \partial\Xi_0$ 的第一个坐标 φ_1 不增，则称它为非增函数。函数 φ: $I \to \partial\Xi_0$ 的单调重排也相应地定义为: 一个具有相同分布的非增函数 φ^*: $[0, |I|] \to \partial\Xi_0$。论文 [46] 提出了在 $\boldsymbol{A}_\Omega$: $\varphi^* \in \boldsymbol{A}_\Omega([0, |I|])$ 的一般情形下证明类似原理的方法，前提是 $\varphi \in \boldsymbol{A}_\Omega(I)$。其推理基于贝尔曼方法。关于二进网格类，请参见 [51] ；关于将其推广到小有界平均振荡上的 Campanato 型范数，请参见 [42] 。因此，由于属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$ 的函数的单调重排也属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$，我们可以在 (1.1.1) 中将函数类 φ 限制为非增函数。这通常能简化对函数 $\boldsymbol{B}$ 的研究，并让我们有望得到 $\boldsymbol{B}$的闭式公式。

另一个获得良好公式的原因是 $\boldsymbol{B}$ 在 [46] 中得到证明的几何描述（推广见 [61]）：该函数是在 Ω 上所有满足边界条件 $\boldsymbol{B}(x)$ = f(x)，$x \in \partial\Xi_0$ 的局部凹函数中逐点最小的。 [46] 的主要思想是，贝尔曼函数 (1.1.1) 可以用某些离散鞅来作概率表示；这类似于用布朗运动表示调和函数的表示公式。有关哈密顿–雅可比–贝尔曼方程解的更一般表示公式，参见例如 [25],; [46] 与 [25] 的区别在于，后者使用连续时间鞅。这些思想的发展使得人们能够将关于区间上函数的贝尔曼问题的所有结果推广到直线和圆上，参见 [49]。特别是，各种形式的.....中的最佳常数】【。

[1]该论文还提供了一些线索，说明对于任意 $p \in [1, \infty$，结论同样成立。

对于区间、圆和直线上的函数，Muckenhoupt 权的 John–Nirenberg 不等式与 Reverse H¨older 不等式是相同的。我们指出，为多变量函数寻找上述不等式的任何合理尖锐形式，仍是一个尚未解决的问题（关于常数对维数的依赖性问题，见 [6] ）。借助单调重排估计（见 [3]）以及半群方法（见 [46]），可以得到一些维数估计。

1.1.4 其他直接应用

我们将介绍两个近期的应用。第一个涉及对平方函数有界的鞅的分布进行尖锐估计。具体而言，似乎对于 BMO 情形，贝尔曼函数 (1.1.1)（即在任意 f 的条件下定义于 (1.1.2) 上的贝尔曼函数）能够为以下优化问题提供良好的界：在给定 ψ 为一个平方函数一致有界于 1 且均值预先指定的鞅的极限值的条件下，最大化 $\mathbb{E}f(\psi)$。看来，可以将 ψ 视为一个 BMO($[0,1]$) 范数有界于 1 的函数。论文 [48]（另见简短报告 [50]）描述了使这一原理能够导出初始问题精确解的 f 类；对于其他 f，上述原理则提供了一个精细的上解。

[44] 中的第二个应用指出，贝尔曼函数（1.1.1）可为诸如 BMO($\mathbb{R}^d$) 或 $A_p(\mathbb{R}^d)$ 这类函数空间给出与维数无关的界，前提是将这些空间和贝尔曼函数定义中的球上平均值替换为特定半群核上的平均值，并使用相应的 Garsia 型范数。这些半群平均值的主要特点是具有鞅的性质，因此可以应用 [46] 中的鞅表示。目前尚不清楚所得估计是否是尖锐的。

1.1.5 与矩方法和微分几何的关系

暂且假设 Ξ_1 是空集。设 $(t,\ g(t))$ 是 $\partial\Xi_0$ 的一个参数化。于是，我们得到以下优化问题：

$$\int_0^1 \varphi_1 = x_1; \quad \int_0^1 g(\varphi_1) = x_2; \qquad \int_0^1 f(\varphi_1) \longrightarrow \max .$$

这里我们设 $I = [0,1]$。这是矩问题的一个简单例子。关于矩方法的描述，请参阅 [19], [20], 和 [24] 。该问题的解可以用几何方式描述。设 H 为三维曲线 $\gamma(t) = (t,\ g(t)\ f(t))$ 的凸包。那么，所求的最大值等于

$$\sup\Big\{ s \in \mathbb{R} \;\Big|\; (x_1, x_2, s) \in H \Big\}.$$

与 (1.1.1) 类似，我们将这个量记为 $\boldsymbol{b}(x)$。暂且假设 Ξ_0 有界。利用凸包的 Carath´eodory 定理，我们可以看到，存在一个最优的 φ_1，其至多取 3 个值。对于无界区域，也可以建立类似的原理。由此可见，$\boldsymbol{b}$ 的图在某种意义上是平坦的：图上的每个点都是边界曲线 γ上至多 3 个点的凸组合。最常见的情况是，$(x, \boldsymbol{b}(x))$ 是边界曲线上两个点 A 和 B的凸组合。这时，我们将连接它们的线段 $[A,B]$（以及它在 x_1x_2- 平面上的投影）称为一条弦。在微分几何中，$\boldsymbol{b}$ 的图在 $(x, \boldsymbol{b}(x))$ 处的切平面称为双切平面，因为它在两点 A和 B处都与边界曲线相切。对我们而言，点 A 和 B 处存在双切平面的条件由杯形方程表示（见下文方程 (3.4.2)）。本文所述的杯形方程，作者此前已在若干更复杂的贝尔曼问题中使用过，参见 [11], [14], [47], [58],和 [60]。

上述书籍中介绍的经典矩方法的解法适用于边界曲线具有某种正则性的情形（例如具有正挠率）；这与切比雪夫系统的概念有关。根据 [24]的第三章和第四章，如果区间 $[a,b]$上的空间曲线 $(\gamma_1(t)\dots,\gamma_{n+1}(t))$ 的边界是由连续函数 $\gamma_j(t)$ 给出的，那么只要系统 $(1,\gamma_1(t)\dots,\gamma_n(t))$ 和 $(1,\gamma_1(t)\dots,\gamma_{n+1}(t))$ 在 $[a,b]$上是 T_+-系统，就可以用上主表示和下主表示 来描述其凸包的边界。回顾一下，连续函数系统 $(\gamma_0(t)\dots,\gamma_m(t))$ 若满足以下条件，则称为 T_+-系统

$$\det(\{\gamma_i(t_j)\}_{i,j=0}^m)>0 \quad \text{on} \quad \Sigma=\{a\leqslant t_0<\ldots<t_m\leqslant b\}. \tag{1.1.6}$$

在集合 Σ 上验证条件 (1.1.6) 可能很繁琐。如果映射 $t\mapsto(\gamma_0(t)\dots,\gamma_m(t))$ 属于 $C^m((a,b))$ 类，那么（第 VIII 章， [19]）以下较简单的条件

$$\det(\{\gamma_i^{(j)}(t)\}_{i,j=0}^k)>0 \quad \text{on} \quad (a,b) \tag{1.1.7}$$

对所有 $k=1,\dots,m$，都蕴含 (1.1.6)。满足 (1.1.7) 的系统 $(\gamma_0(t)\dots,\gamma_m(t))$ 称为 M_+-系统。显然，如果系统 $(\gamma_0(t)\dots,\gamma_m(t))$ 是 M_+- 系统，那么对任意 $k,0\leqslant k\leqslant m$，任何系统 $(\gamma_0(t)\dots,\gamma_k(t))$ 也都是 M_+- 系统。注意，当且仅当 $g''(t)>0$ 且$g''(t)f'''(t)-f''(t)g'''(t)$ 在 (a,b) 上 >0 时，系统 $(1,t,g(t)\ f(t))$ 才是 M_+-系统。

如果 γ 不满足 (1.1.6) 型的任何正则性假设，那么凸包边界的组合结构可能会极其复杂。关于一般曲线凸包奇点的描述，请参阅 [37] 和 [59] 。关于与四顶点定理的关系，也可参阅 [9] 和 [38] 。

最小凹函数和最小局部凹函数可以视为退化齐次 Monge–Amp`ère 方程的凹解（以及局部凹解）（见下文第 2.2.1 小节）。正则性结果请参阅 [5]和 [10] 。值得注意的是，后一篇论文从不同角度研究了非凸区域上的最小局部凹函数。在那篇论文中，边界条件施加于整个边界；而我们将边界条件施加于边界的凸（或 固定，见 [46]）部分。这是贝尔曼函数框架自然得出的做法。这两种框架之间的差异很大。

1.2 论述安排

本文的主 体分为四章。整体论述思路遵循 [17].

第2章作了更正式的介绍。在第2.1节中，我们陈述问题，列出对区域和函数 f 的要求，定义贝尔曼函数，并描述其简单性质。所谓简单性质，是指可直接由定义推出的性质。我们还给出一些例子，以说明对 Ω 和 f 施加的各种条件的含义。第2.2节概述了 [46]，中的对偶理论，介绍证明策略，尤其是优化器的概念，并以正式阐述我们的结果作结。阅读论文后续部分的安排时，我们建议查阅第2章中的定义；也可以在读完第2章后返回本节。

我们在第3章中描述可能出现的局部叶状结构。第 3.1 节对叶状分解可能呈现的形式作一般性描述。第 3.2 节介绍了围栏——一种由附着在固定边界上的线段构成的叶状分解。围栏可以由弦、切线或两者共同构成。我们研究由这种叶状分解构造出的函数满足局部凹性的条件。第 3.3 节描述切线区域及相应的标准候选函数。第 3.4 节刻画弦域。尽管这里的推理遵循了 [17]，的思路，但为了简化计算，需要进行一些非平凡的修改。第3.5节专门讨论杯形区域的构造。这里的构造与 [17]，中的做法有很大不同，过程相当冗长复杂；第3.5节因此分为若干小节。我们在第 3.6 节引入力。这些力是一些量，用来表示所构造候选函数的凹性。它们的主要特征是为负，并且随着 增大而减小。贝尔曼函数的构造高度依赖这些关于力的单调性公式。我们在第 3.6 节陈述并证明这些公式。我们还引入力的尾部这一概念。需要提醒读者的是，我们对力的看法略有调整：现在根据定义，力的定义域与其尾部重合。 [17]，中的力定义在射线上或整条直线上，且可以取正值或负值。而在本文中，力始终为负。第 3.7 节对线性区域进行分类，第3.8节描述叶状结构的组合性质。后两节的内容与 中相应章节的内容相似。

这些量表示所构造候选函数的凹性。它们的主要特征是为负，并且随着 ε 增大而减小。贝尔曼函数的构造高度依赖这些关于力的单调性公式。我们在第 3.6 节陈述并证明这些公式。我们还引入力的尾部这一概念。需要提醒读者的是，我们对力的看法略有调整：现在根据定义，力的定义域与其尾部重合。[17]，中的力定义在射线上或整条直线上，且可以取正值或负值。而在本文中，力始终为负。第 3.7 节包含线性区域的分类，第3.8节描述叶状结构的组合性质。后两节的内容与 [17] 中相应章节的内容相似。

第 4 章描述贝尔曼候选函数的演化，特别是证明对于任意可容许的 f 和 ε，都存在贝尔曼候选函数。第 4.1 节描述简单图景的情形，此时叶状分解由切线、角、杯形区域以及可能存在的简单多杯形组成。我们还证明，给定一个可容许的 f，存在 ε_1，使得对于任意 $\varepsilon < \varepsilon_1$，都存在一个适用于 f 和 ε 的简单贝尔曼候选函数。第 4.2 节包含关于力的局部单调性公式、平衡方程的根存在性的证明，以及后续证明中将用到的其他引理。第 4.3 节描述局部演化情景。粗略地说，杯形区域和完整多杯形会扩张，无轨电车会收缩，多重小鸟和多重无轨电车会瓦解。我们针对这些原则分别陈述并证明了一个严格命题。第 4.4 节包含将局部演化情景拼接起来的组合推理。由于这一组合推理与 [17], 中的完全相同，我们省略其内容，并提供详细引文。

第5章介绍优化器的理论。特别地，我们证明了第4章中构造的所有贝尔曼候选函数都与相应的贝尔曼函数一致。开篇的第5.1节给出了优化器的几何描述：将它们表示为 Ω 中的特殊曲线，即传递曲线（它们将一个优化器传递到 Ω 中的给定点）是很有用的。第5.2节考察所有局部叶层，并为每个局部叶层构造优化器。随后，在第5.3节中将这些“局部”优化器拼接起来。最后的第5.4节讨论了多种情形，在这些情形中，f 上的可求和条件不成立。我们研究了此设置下贝尔曼函数的有限性问题，并在假设该函数满足正则性条件——即 γ 的挠率仅改变有限次符号——的情况下，给出关于 f 的简单充要条件。有时，即使可求和性假设不成立，贝尔曼函数仍然是有限的。在这种情况下，优化器并不存在。然而，我们为每个点提供一个优化序列。

1.3 相关问题

1.3.1 有界Ω的情形

我们可以考虑 Ω_0 和 Ω_1 均为有界区域的情形。例如，

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}, \qquad \Omega_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 < 1 - \delta \right\}$$

这自然对应于从 $[0,1]$ 到单位圆 S^1的有界平均振荡映射类中的 δ“球”。参见 [61]第2节中的第三个例子。尽管本文中的所有构造似乎都适用于这种情形，但 Ω_0 有界时存在两个细微差别。

首先，Ω_0 和 Ω_1 的边界不再是函数的图像。因此，要将本文的方法调整到这种情形，我们需要为我们的推理寻找无坐标几何版本。其中一些并不难。例如，挠率是一个几何概念，不依赖于坐标系的选择。类似地，力可以用几何方式表示为某些向量的外积。然而，对于第3.5节的大部分内容，我们还无法找到几何解释。

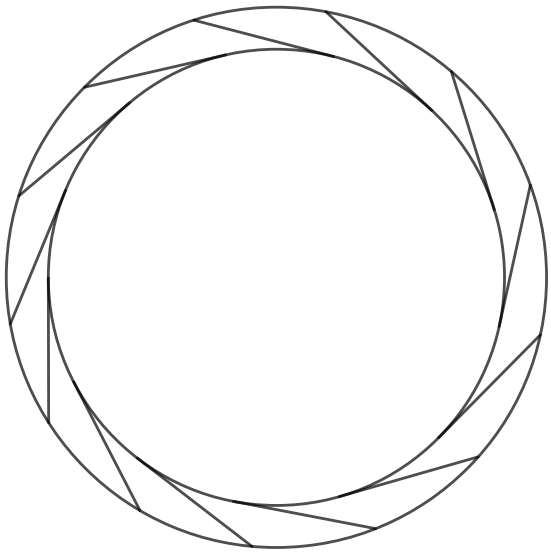


图 1.1：不可能叶状分解。

其次，与四顶点定理（见 [9]）相关的一些拓扑效应开始发挥作用。该定理指出，围成凸曲面的正则曲线，其挠率至少改变符号四次。根据本文的经验，自然可以预期，挠率从 $+$ 变为 $-$ 时发生符号变化的点是杯形区域的起点（至少在 δ 足够小时如此），而在挠率从 $-$ 变为 $+$时发生符号变化的点的邻域内存在角顶点。特别是，图 1.1 所示类型的叶状分解是不可能的。

1.3.2 高维情形

可以考虑这样一种情形：Ω_0 和Ω_1 是 $\mathbb{R}^d$ 的子集，并针对它们提出类似的贝尔曼函数问题。例如，如果希望研究向量值BMO函数（见 [61]中的第二个例子），就会出现这样的情形。正如 [61], 中所证明的，在这种一般情形下，贝尔曼函数是最小局部凹函数这一断言仍然成立。对于任意边界条件，其几何结构可能相当复杂，难以描述。然而，如果假设定义域Ω_0 和Ω_1 具有旋转对称性，并且 f 也具有旋转对称性，那么，或许可以将贝尔曼函数的计算归结为计算本文所描述类型的某些函数。特别是，向量值BMO函数问题就属于这一框架。这与概率情形中的情况类似： [34]中的许多Burkholder问题都可以推广到取值于希尔伯特空间的鞅。

第2章

设定与证明概要

2.1 设定

2.1.1 定义域

假设我们有一个 C^3-光滑曲线族 $\mathbf{g}(\cdot;\varepsilon)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_{\max})$, 令 $\mathbf{g}(t;\varepsilon)=(\mathbf{g}_1(t;\varepsilon),\mathbf{g}_2(t;\varepsilon))$, $t\in\mathbb{R}$. 特别地，我们假设 $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t;\varepsilon)\neq 0$。我们假设 $\mathbf{g}(t,\varepsilon)$ 关于 (t,ε) 是 C^3,1-光滑的，这意味着混合导数 $\frac{\partial^4}{\partial t^3\partial\varepsilon}\mathbf{g}$ 连续。对于任意固定的 ε，我们将写作 $\mathbf{g}(t)=(\mathbf{g}_1(t),\mathbf{g}_2(t))$，省略 ε 并将其视为单变量函数。我们用 $g(t)$ 表示 $\mathbf{g}(t;0)$。假设：

$$\mathbf{g}_1'>0; \tag{2.1.1}$$

$$\mathbf{g}_2''\mathbf{g}_1'-\mathbf{g}_2'\mathbf{g}_1''>0, \tag{2.1.2}$$

特别地，$\mathbf{g}(\mathbb{R})$ 是一个严格凸函数的图。

令 Ξ_ε 为$\mathbf{g}(\cdot;\varepsilon)$的严格上图集：

$$\Xi_\varepsilon=\big\{(\mathbf{g}_1(t;\varepsilon),x_2)\in\mathbb{R}^2\colon t\in\mathbb{R},\ x_2>\mathbf{g}_2(t;\varepsilon)\big\}.$$

我们假设 $\Xi_{\varepsilon_1}\supset\Xi_{\varepsilon_2}$当且仅当 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$。此外，我们假设对于任意 $t\in\mathbb{R}$和$\varepsilon_1<\varepsilon_2$，$\mathbf{g}(t;\varepsilon_1)\notin\operatorname{clos}\Xi_{\varepsilon_2}$。

对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\max})$，我们假设对任意 $t\in\mathbb{R}$，从点 $g(t)$ 到 Ξ_ε 有两条切线，且每条切线都与曲线 $g(\cdot)$ 相交两次。我们注意到，这一假设与 [46]和 [61]中使用的锥条件略有不同：这两篇论文对定义域施加的锥条件比本文的条件弱。设 $w_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon)=\mathbf{g}(s_{\mathrm{L}};\varepsilon)$ 和 $w_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=\mathbf{g}(s_{\mathrm{R}};\varepsilon)$ 为曲线 $\mathbf{g}(\cdot;\varepsilon)$ 上的切点，其中 s_{L} 和 s_{R} 是关于 t 和 ε的某些函数；我们选择$s_{\mathrm{R}}<s_{\mathrm{L}}$。设 $S_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon)=[g(t)\ w_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon)]$ 和 $S_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=[g(t)\ w_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)]$ 为切线段。这里，L 和 R 分别表示相对于切点的左侧和右侧。我们经常省略下标 L 和 R，简写为 $S(t;\varepsilon)$ 和 $w(t;\varepsilon)$，甚至写作 $S(t)$ 和 $w(t)$。

注 2.1.1. 对于固定的 ε，函数 $t\mapsto s_{\mathrm{L}}$ 和 $t\mapsto s_{\mathrm{R}}$ 均为 C^2–光滑函数，且导数为正：$s'_{\mathrm{L}}>0, s'_{\mathrm{R}}>0$.

证明。 由 (2.1.1) 可知，函数 s_{L} 和 s_{R} 是递增的。

设为 $s=s_{\mathrm{L}}$ 或 $s=s_{\mathrm{R}}$。这个数由相切方程定义。

$$\big(\mathbf{g}_2(t;0)-\mathbf{g}_2(s;\varepsilon)\big)\mathbf{g}_1'(s;\varepsilon)-\big(\mathbf{g}_1(t;0)-\mathbf{g}_1(s;\varepsilon)\big)\mathbf{g}_2'(s;\varepsilon)=0. \tag{2.1.3}$$

左侧对 t 的偏导数是

$$\mathbf{g}_2'(t;0)\mathbf{g}_1'(s;\varepsilon) - \mathbf{g}_1'(t;0)\mathbf{g}_2'(s;\varepsilon),$$

这是非零的，因为连接$\mathbf{g}(t;0)$和$\mathbf{g}(s;\varepsilon)$的线段与曲线$\mathbf{g}(\cdot;0)$相交于横截点。式 (2.1.3) 左侧关于 s 的偏导数等于

$$\big(\mathbf{g}_2(t;0) - \mathbf{g}_2(s;\varepsilon)\big)\mathbf{g}_1''(s;\varepsilon) - \big(\mathbf{g}_1(t;0) - \mathbf{g}_1(s;\varepsilon)\big)\mathbf{g}_2''(s;\varepsilon).$$

这是非零的，因为$\mathbf{g}_1(t;0) - \mathbf{g}_1(s;\varepsilon) \neq 0$，且由 (2.1.3) 和 (2.1.2) 可知。

隐函数定理保证 s 和 t 互为 C^2-光滑函数，并且 $s'(t)$ 有限且非零。因此， $s'(t) > 0$。

□

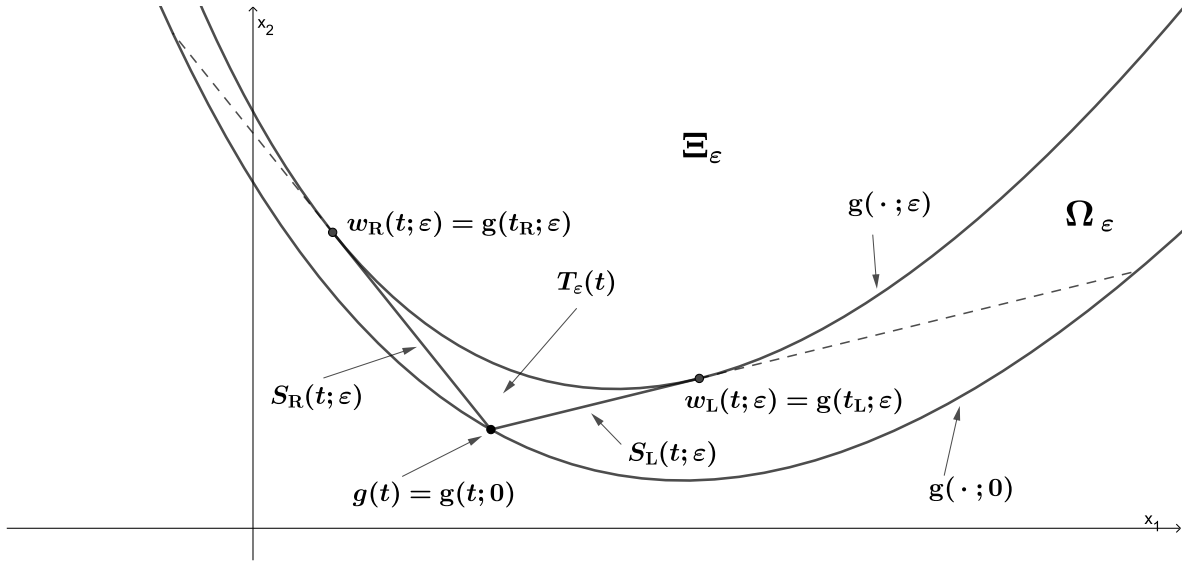


图 2.1：三角形 $T_\varepsilon(t)$。

设 $T_\varepsilon(t)$ 是一个闭曲边三角形，其顶点为 $g(t)$，边分别为 $S_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon)$、$S_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)$，以及曲线$\mathbf{g}(\cdot;\varepsilon)$ 上位于两个切点之间的部分，见图 2.1。我们定义一个定义域

$$\Omega_\varepsilon = \cup_{t\in\mathbb{R}} T_\varepsilon(t). \tag{2.1.4}$$

可以看出，$\Omega_\varepsilon = \operatorname{clos}\Xi_0 \setminus \Xi_\varepsilon$。图 2.2 展示了几个可容许区域 Ω_ε，有关这些例子的更多信息，请参见第 5.4.7 小节。图 2.2 后一幅图中的定义域形式上不满足 (2.1.2)，但对其施加适当的平面等距变换后，它便符合本理论的容许条件。以从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的 t 参数化对于理论构造很方便，但有时也存在更自然的参数化，如图 2.2 所示。

我们还作出以下技术性假设。设 $\kappa_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon)$ 和 $\kappa_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)$ 分别为三角形 $T_\varepsilon(t)$ 的边S_{L} 和 S_{R} 的斜率，即:

$$\kappa = \frac{w_2 - g_2}{w_1 - g_1}. \tag{2.1.5}$$

根据隐函数定理，函数 s_{L}、s_{R}、w_{L}、w_{R}以及 κ 关于（t、ε）均为 C^{2}、$_{1}$光滑，其含义与之前相同。区域 Ξ_ε 按包含关系递减，因此，

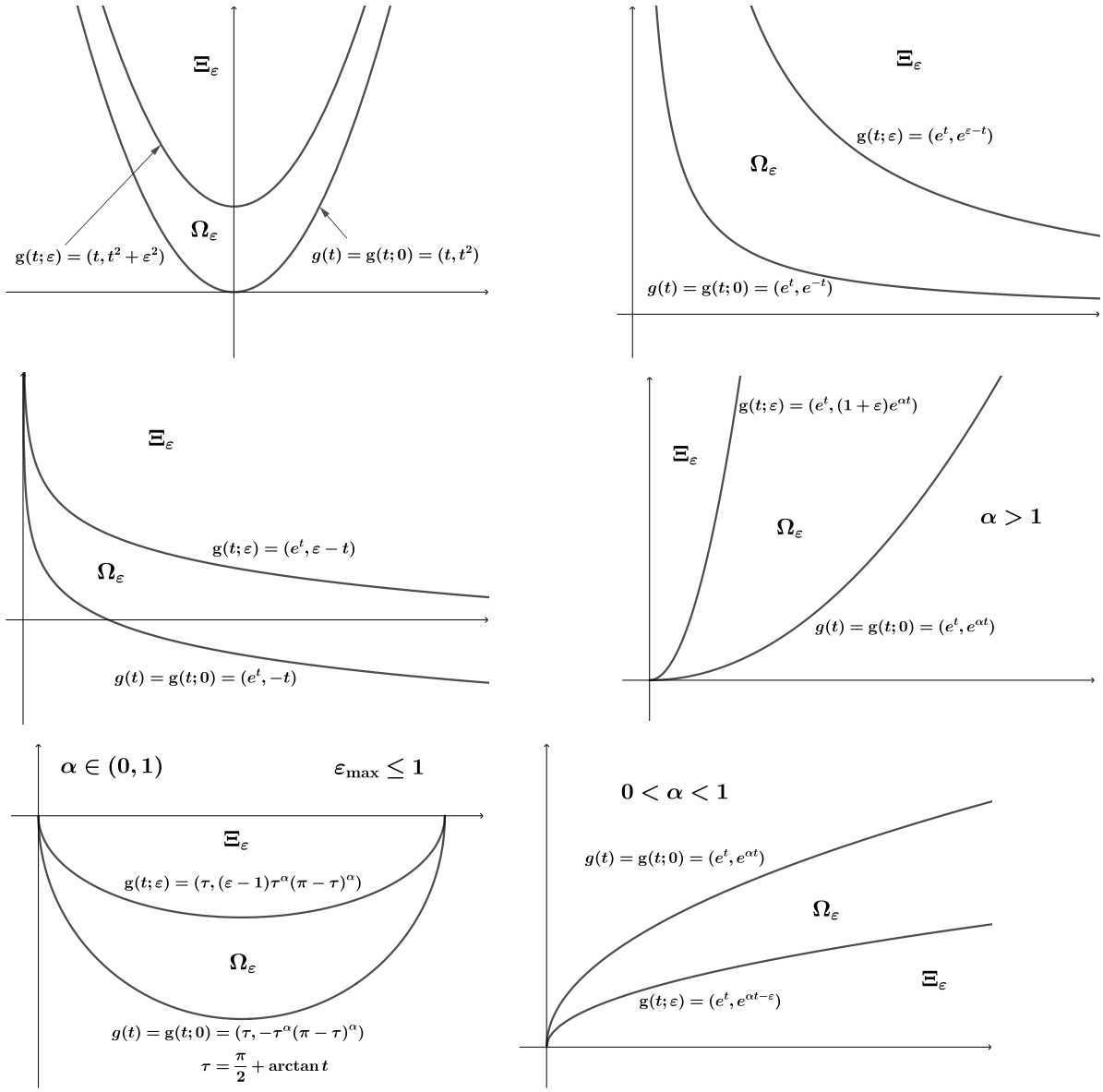


图 2.2：定义域 Ω_ε 的示例。

函数 κ 关于 ε 是单调的： κ_{L} 递增，而 κ_{R} 递减。我们再作一点更强的假设：对于任意 t 和 ε，$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\kappa(t,\varepsilon)\neq 0$。

曲线 $g(\mathbb{R})$ 称为域 Ω_ε 的**固定边界**，记作 $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega_\varepsilon$。曲线 $\mathrm{g}(\mathbb{R};\varepsilon)$ 称为 Ω_ε 的**自由边界**，记作 $\partial_{\mathrm{free}}\Omega_\varepsilon$。我们将使用符号 $\preceq$ 来表示 $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ 上两点的位置关系： $g(t)\preceq g(s)$ 当且仅当 $t\leqslant s$。

由于线段 $S(t)$ 与曲线 $\tau\mapsto\mathrm{g}(\tau;\varepsilon)$ 相切，因此存在一个标量函数 λ，满足以下向量值恒等式：

$$\lambda(t)(g(t)-w(t))=w'(t). \tag{2.1.6}$$

这里有两种情况： $w = w_{\mathrm{R}}$ 定义 $\lambda = \lambda_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)$，而 $w = w_{\mathrm{L}}$ 定义 $\lambda = \lambda_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon)$。注意， $\lambda_{\mathrm{R}} > 0$ 和 $\lambda_{\mathrm{L}} < 0$ 逐点成立，严格不等式由 $w'(t) = \mathrm{g}'(s;\varepsilon)s'(t) \neq 0$推出，这由注2.1.1保证。我们用$\lambda$ 和 w来表述关于域 Ω的重要假设：对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\max})$,

$$\big(1 + |w_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon) - g(t)|\big) \cdot \exp\Big(-\int_t^{t_0} \lambda_{\mathrm{R}}(\tau;\varepsilon)\,d\tau\Big) \to 0, \qquad t \to -\infty, \quad t_0 \in \mathbb{R}; \tag{2.1.7}$$

$$\big(1 + |w_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon) - g(t)|\big) \cdot \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \lambda_{\mathrm{L}}(\tau;\varepsilon)\,d\tau\Big) \to 0, \qquad t \to +\infty, \quad t_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.1.8}$$

这些条件在技术上有所要求。如果其中一些条件不成立，一般理论仍然适用，但某些说明需要稍作修改。详细内容见第 5.4 小节。

回顾 [15] 中的一个定义。

定义 2.1.2. 设 $\Omega = \Omega_\varepsilon$，设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个区间，且 $\varphi\colon I \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ 是一个可求和函数。若对于每个子区间 $J \subset I$，都有 $\langle\varphi\rangle_J \in \Omega$，则称函数 φ 属于类 $\boldsymbol{A}_\Omega(I)$。

2.1.2 极值问题与贝尔曼函数

定义 2.1.3. 设 $\mathrm{f}\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ 是某个可测函数。我们定义贝尔曼函数

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon(x;\,\mathrm{f}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\big\{\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_I : \langle\varphi\rangle_I = x,\ \varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}(I)\big\}. \tag{2.1.9}$$

本小节概述由公式 (2.1.9) 定义的贝尔曼函数的一些简单性质，并尝试从所研究的极值问题出发，解释为何选择这个贝尔曼函数。我们将经常使用与上文给出的 f 相关联的函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

$$f(t) = \mathrm{f}\big(g(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

我们还会用符号 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\,\cdot\,)$ 和 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\,\cdot\,;\,f)$ 表示贝尔曼函数（2.1.9），具体采用哪种写法取决于我们想强调的内容。当 ε 和 f 固定时，我们会省略它们，直接写作 $\boldsymbol{B}(x)$。现在，我们来陈述贝尔曼函数最简单的一些性质，这些性质不需要对 f作任何条件限制。

注 2.1.4。 贝尔曼函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 与定义类 $\boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$ 的区间 I 无关。

事实上，利用线性变量变换，可以将函数 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}(I)$变换为另一个˜函数 $\tilde\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}(I)$，使公式（2.1.9）中的所有平均值都保持不变。因此，公式（2.1.9）所定义的上确界取自同一个实数子集。

下一条注允许我们从下方估计积分泛函。我们可以考虑另一个贝尔曼函数,

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon^{\min}(x;\,\mathrm{f}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\big\{\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_I : \langle\varphi\rangle_I = x,\ \varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}(I)\big\}.$$

当然，最小 Bellman 函数可以很容易地用最大 Bellman 函数表示。 e.

注 2.1.5。 $\boldsymbol{B}_\varepsilon^{\min}(x;\ \ f) = -\boldsymbol{B}_\varepsilon(x;\ \ -f)$。

现在我们开始研究 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 的定义域。以下定义似乎对后续所有推理都有用。

贝尔曼函数 (2.1.9) 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处有定义。然而，如果上确界是在空集上取的，该函数就等于 $-\infty$。我们将这些点从贝尔曼函数的定义域中剔除。

定义 2.1.6。 我们将函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 的贝尔曼域 定义为点集 $x \in \mathbb{R}^2$ ，其中不存在满足 $\langle\varphi\rangle_I = x$的函数 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$ 。

Prop命题 2.1.7. 在(2.1.4) 中定义的Ωε 与.....的贝尔曼域一致。 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$.

证明。 首先，根据 $\boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$ 的定义，对于任意 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$ ，我们有 $\langle\varphi\rangle \in \Omega_\varepsilon$。其次，对于任意给定的点 $x \in\Omega_\varepsilon$ ，存在某个 $t \in \mathbb{R}$ ，使得 $x \in T_\varepsilon(t)$。我们作出一条经过 x 且与 $\partial_{\text{free}}\Omega_\varepsilon$ 相切的切线。根据定义域上的条件可知，这条直线与 $\partial_{\text{fixed}}\Omega_\varepsilon$ 相交于两点，分别记为 $g(a)$ 和 $g(b)$。需要注意的是， $x \in [g(a)$ $g(b)] \subset \Omega_\varepsilon$。取满足 $x = \alpha g(a) + (1-\alpha)g(b)$ 的 $\alpha \in [0,1]$。定义函数 φ 如下:

$$\varphi = g(a)\chi_{[0,\alpha)} + g(b)\chi_{[\alpha,1]}.$$

It 显然，对于任意 $J \subset [0,1]$， $\langle\varphi\rangle_{[0,1]} = x$ 和 $\langle\varphi\rangle_J \in [g(a)\ g(b)] \subset \Omega_\varepsilon$。因此 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$. □

这个命题并未说明贝尔曼函数在 Ω_ε 上是否有限，它只是截去了平面上先验为无穷大的那些点。

命题 2.1.8. $\boldsymbol{B}_\varepsilon(g(t);\ f) = f(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$。

证明。 函数 φ 的平均值 $\langle\varphi\rangle$ 位于固定边界上，因此几乎处处为常数，因为曲线 $\partial_{\text{fixed}}\Omega_\varepsilon$ 是严格凸函数的图像。这个常数与平均值相同，因此 $\varphi = g(t)$。所以，取上确界的集合只包含一个数 $f(t)$，因此 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(g(t);\ f) = f(t)$。

□

2.1.3 关于 f的条件

函数 f 将受到一些限制。这些限制分为两类。第一类来自定量方面。我们关注有限的贝尔曼函数；我们希望对于任意函数 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$, $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$，函数 f($\varphi$) 都是可积的，以便 (2.1.9) 中的平均值有定义。这些条件用 f 的可和性来表述。第二类条件与 f 的正则性有关。这些条件使贝尔曼函数的结构更简单，从而能够对其进行描述。

我们先讨论第二类条件。我们要求 $f \in C^2(\mathbb{R})$。考虑曲线

$$\gamma(t) = \big(g(t), f(t)\big), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1.10}$$

它是 边界条件的图，见命题 2.1.8。我们引入以下对象 t:

$$\mathbf{T}(t) = \det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ \gamma''(t)\\ \gamma'''(t)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) & f'(t)\\ g_1''(t) & g_2''(t) & f''(t)\\ g_1'''(t) & g_2'''(t) & f'''(t)\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1.11}$$

我们将在 f 上施加这类条件，使$\mathbf{T}$ 成为符号测度，见条件 2.1.10。$\mathbf{T}$ 的符号与曲线 γ 的挠率符号一致。由于我们假设 γ 是 C^2，测度 $\mathbf{T}$ 没有原子。

定义 2.1.9. 设 μ 是直线上的一个符号测度。其支集的补集是直线的一个开子集，因此它是若干个区间（有限个或可数个）的并。我们称每个这样的区间的闭包为 μ 的实根 。如果 μ 在实根的每个邻域内都既非正也非负，则称这样的实根为本质的。

令 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-$ 为测度 $\mathbf{T}$的哈恩分解。集合 $\text{supp}\mathbf{T}_+ \cap \text{supp}\mathbf{T}_-$ 是“变号”的点集。该集合是闭集。$\text{supp}\ \mathbf{T}_+ \cap \text{supp}\mathbf{T}_-$ 中的点也称为本质根。因此，本质根是直线中按包含关系极大的连通子集

使得$\mathbf{T}$ 在其上为零，但在它的每个邻域中既非负也非正。我们对$\mathbf{T}$ 施加的正则性条件是：它只有有限个本质根。如果 γ 是 C^3-光滑的，那么该条件等价于函数$\mathbf{T}$ 只有有限次变号。

我们引入以下函数：

$$\kappa_2 = \frac{g_2'}{g_1'}, \qquad \kappa_3 = \frac{f'}{g_1'}, \qquad \mathfrak{K} = \frac{\kappa_3'}{\kappa_2'}. \tag{2.1.12}$$

注意， κ_2 和 κ_3 分别是 γ' 在(x_1x_2)坐标平面和(x_1x_3)坐标平面上的投影的斜率。由于 $g_1' > 0$, $\kappa_2' \neq 0$ （见 (2.1.1) 和 (2.1.2)），并且

$$\mathbf{T} = \mathfrak{K}' \cdot (g_1')^3 \cdot (\kappa_2')^2, \tag{2.1.13}$$

$\mathbf{T}$ 和 $\mathfrak{K}'$ 的符号一致。我们用 $\mathfrak{K}$来表述上面讨论的条件：

条件 2.1.10. 函数 f 二次连续可微， $\mathfrak{K}$ 是分段单调的，且单调区间的数量有限。

注2.1.11. 条件 2.1.10 蕴含函数 f 和 κ_3 是分段单调的，且仅有限次变号。

证明。函数 $\mathfrak{K}$ 仅有限次变号， $\kappa_2' > 0$，因此 $\kappa_3' = \kappa_2'\mathfrak{K}$也如此，进而 κ_3也如此。但是 $g_1' > 0$ 和 $f' = \kappa_3 g_1'$，所以 f' 仅有限次变号，因此 f也如此。

□

$\mathbf{T}$ 的本质根将在下文中发挥重要作用，因此我们固定其记号。

定义 2.1.12. $\mathbf{T}$ （或 $\mathfrak{K}'$）的本质根是闭区间（可以是单点或射线） $c_0, c_1, \dots, c_n$和 $v_1, v_2, \dots, v_n$，使得 $c_0 < v_1 < c_1 < v_2 < \cdots < v_n < c_n$。测度$\mathbf{T}$在 v_i处从’–’“变号”为’+’，在 c_i处从’+’“变号”为’–’。

我们约定，如果在 $-\infty$ 的邻域中有 $\mathbf{T} < 0$，那么 $c_0 = -\infty$。同样地，如果在 $+\infty$ 的邻域中有 $\mathbf{T} > 0$, 那么 $c_n = +\infty$。此外， v_i 或 c_i 是区间（而非点）当且仅当它是定义 2.1.9 意义下的本质实根。

根据我们的定义，有时我们必须把区间视作点。我们用 dist$(x,\ y)$ 表示实数轴上子集 x 和 y 之间通常意义下的距离。我们只会用它表示两个区间之间，或一个区间与一个点之间的距离。此外，有时我们会写例如 $a_n \to w$，其中 w 是一个根，例如它可以是一个区间。在这种情况下，我们的意思是：对于 w 的每个邻域， $\{a_n\}_n$ 中除有限多个元素外，其余元素都落在该邻域内。再者，区间集合具有一种本质的序：当且仅当 $b < c$时， $[a, b]$ 小于 $[c, d]$。我们已在定义 2.1.12 中使用过这种序。我们还会经常用记号 $\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}$ 和 $\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}$ 分别表示区间 $\mathfrak{a}$的右端点和左端点。

现在来看第一类条件（无穷远处的可和条件）。

条件 2.1.13. 对于任意 $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ 我们有

$$\int_{-\infty}^{v} f'(\tau) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda_{\mathrm{R}}(s;\varepsilon)\, ds\Big)\, d\tau > -\infty. \tag{2.1.14}$$

$$\int_{v}^{+\infty} f'(\tau) \exp\Big(\int_{v}^{\tau} \lambda_{\mathrm{L}}(s;\varepsilon)\, ds\Big)\, d\tau < +\infty. \tag{2.1.15}$$

对任意 $v \in \mathbb{R}$。回顾一下， λ_{L} 和 λ_{R} 定义于(2.1.6)中。

这些条件看起来很繁琐，但很明显，它们的出现是十分自然的，参见第5章中的命题 5.2.6和5.2.8。如果(2.1.14)不成立，但(2.1.7)成立，那么函数 B 为无穷大，因为可以构造一个特殊的测试函数 φ （即命题 5.2.5中的一个优化器，另见定义2.2.6），使得 $\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle = +\infty$。类似地，如果(2.1.15)不成立，但(2.1.8)成立，那么函数 B 也为无穷大。详情请参见第5.4.6小节。

2.1.4 光滑性条件

这里汇总本节所讨论函数所满足的所有光滑性条件。

我们假设 g 是 C^3，1-光滑的，因此函数 s_{L}、s_{R}、w_{L}、w_{R}、κ_{L}、κ_{R} 关于 (t,ε) 是 C^2，1-光滑的，而 κ_2 是 C^2-光滑的。我们还有 $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{g}(t,\varepsilon) > 0$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\kappa(t,\varepsilon) \neq 0$。函数 λ_{R}、λ_{L} 是 C^1，1。函数 f 是 C^2，其中 f'' 是分段单调的，且具有有限个单调区间，因此 $\kappa_3 \in C^1$，而 $\mathfrak{K}$ 是具有有限个单调区间的分段单调连续函数；$\mathfrak{K}'$（以及 T）是有符号连续测度。

2.2 局部凹函数

我们将使用 [46] 关于贝尔曼函数与局部凹函数之间关系的抽象结果。首先给出局部凹性的定义。

定义2.2.1. 若函数 $G\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 在 Ω 的每个凸子域上都是凹的，则称其在 Ω 上**局部凹**。我们引入 Ω 上所有在 $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ 上大于等于 f 的局部凹函数构成的集合：

$$\Lambda_{\Omega,f} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \big\{G\colon G \text{ is locally concave on } \Omega,\ G|_{\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega} \geqslant \mathrm{f}\big\}. \tag{2.2.1}$$

定义函数 $\mathfrak{B}_{\Omega,\,f}$ 为来自 $\Lambda_{\Omega,\,f}$ 的函数的逐点最小值：

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) = \inf_{G\in\Lambda_{\Omega,f}} G(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.2.2}$$

这并不难看出，当且仅当函数在每个线段上都是凹函数时，它才是局部凹的 t 完全属于 Ω。

下面的命题与 [46] 中的命题 6.1 类似。对于无穷极限 $\lim_{t\to\pm\infty} g(t)$ 的情形，它可由 [46] 中的命题 6.1 推出。如果某些极限是有限的，则应使用射影变换技巧将其化为无穷极限的情形，见 [46] 中的附录 A。

命题 2.2.2。 设函数 f 局部有下界，且函数 $\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\,\max(f,\,0)}$有限。那么积分 $\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_I$对所有 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$均有定义，且 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\,\cdot\,;\ f) = \mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\,f}$。

命题 2.2.2 将作为证明定理 2.2.7 的主要工具之一。

2.2.1 Monge–Amp`ère 方程与直纹曲面

利用简单的凸几何论证可知，$\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\,f}$ 在某些方向上是仿射的。具体表述如下。

定理 2.2.3。 设 f 满足条件 2.1.10, 2.1.13。则函数 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\,f}$ 满足以下条件。

1. 对于每个点 $x \in \operatorname{int}\Omega_\varepsilon$，都存在一个非零向量 $\Theta(x)$，使得 $\mathfrak{B}$ 在$\ell(x) = x + \mathbb{R}\Theta(x)$ 这条直线的 x邻域内为仿射函数。若至少存在两个具有此性质的不共线向量 Θ_1 和Θ_2，则 $\mathfrak{B}$ 在 x 的邻域内为仿射函数。若该向量唯一，我们将包含 x 且使 $\mathfrak{B}$在线段上为仿射函数的 $\ell(x)$ 的最大（按包含关系）线段称为**极值线段**。

2. 函数 $\mathfrak{B}$ 可微，且其梯度沿每条极值线段保持不变。

3. 极值线段不能与自由边界横截相交，只能相切。

该定理给出了 Ω_ε 到两类集合的划分。第一类集合是极值线段，在这些线段上 $\mathfrak{B}$ 是仿射的。我们注意到（而且很容易证明），极值线段不能在 Ω_ε 内“终止”。极值线段的一个端点位于固定边界上，另一个端点则可能也位于固定边界上，或者是与自由边界相切的点。第二类集合是 $\mathfrak{B}$ 为仿射函数的二维域，我们称之为线性域。

我们需要对“区域”一词作一点说明。我们把任意一个开连通集与其边界的某个（或没有任何）部分的并集称为一个区域。

我们不证明定理 2.2.3，因为从形式上说，我们并不需要它（不过，它可以从我们的一般性考察中推出，例如后文的定理5.3.2）。它只是帮助我们猜测贝尔曼函数，并引出贝尔曼候选函数这一概念。

定义 2.2.4. 设 B 是 Ω_ε 的子域 ω 上的连续局部凹函数，并在 $\omega \cap \partial_{\text{fixed}}\Omega_\varepsilon$ 上满足边界条件。若 ω 上存在一个叶状分解，则称函数 B 是 ω 上的贝尔曼候选函数。这意味着 ω 可以表示为若干区域的并集 $\omega = \cup_i \omega^i$，使得 $B \in C^1(\omega^i)$，并且 B 在 ω^i 上是仿射函数（因此 ω^i 是一个线性区域），或者 ω^i 由直线段构成叶状分解，且沿这些直线段，B 的微分保持不变（这些直线段即为极值线段）。

如果 $\frac{d^2B}{dx^2} \leqslant 0$ 在 $x \in \Omega_\varepsilon$ 的某个内点处二阶可微，那么 $\frac{d^2B}{dx^2} \lneqq 0$，也就是说，$B$ 的二阶微分是负定的，因为 B 是局部凹的。该矩阵的核包含向量 $\Theta(x)$，因此其行列式为零。这个注释解释了本小节标题的由来：得到的方程称为齐次 *Monge–Amp`ère* 方程：

$$B_{x_1x_1}B_{x_2x_2} - B^2_{x_1x_2} = 0. \tag{2.2.3}$$

齐次 Monge-Amp`ere 方程对于函数 $\mathfrak{B}$ 必须几乎处处成立，因为局部凹函数几乎处处二阶可微。然而，它不必处处成立，因为即使边界值 f 非常光滑，贝尔曼函数也不必是 C^2-光滑的。例如，参见引理 6.1 中的函数 $N_{\varepsilon,\ p}$ 该函数在 [43] 中满足 $p > 2$：它不是 C^2-光滑的，但其边界数据为 C^∞，其中 p 为大于 2 的偶整数。

2.2.2 优化函数

设 B 是域 Ω_ε 中的一个贝尔曼候选函数，即设它满足带有 $\omega = \Omega_\varepsilon$ 的定义 2.2.4。本小节给出一种验证方法，用于验证候选对象 B 与贝尔曼函数重合。根据命题 2.2.2，有不等式 $\boldsymbol{B}_\varepsilon \leqslant B$。为证明反向不等式，对于点 x, $x \in \Omega_\varepsilon$，只需找到一个函数 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$，满足 $\langle\varphi\rangle = x$，使得$B(x) \leqslant \langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle$。事实上，根据贝尔曼函数的定义，即公式（2.1.9），有 $\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle \leqslant \boldsymbol{B}_\varepsilon(x)$，因此 $B(x) \leqslant \boldsymbol{B}_\varepsilon(x)$。下面介绍一些概念。

定义 2.2.5. 令 $x \in \Omega_\varepsilon$。如果 $\langle\varphi\rangle =$，我们称函数 $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$ 为 x 的测试函数。 $x.$

定义2.2.6。设 $x \in \Omega_\varepsilon$，且令 B 为贝尔曼候选函数。若可测函数 φ 满足两个条件，则称其为 B 在 x 处的优化器：

- φ 是 x的测试函数;
- $B(x) = \langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle$.

因此，为了证明候选对象 B 与贝尔曼函数重合，只需为每个点 $x \in \Omega_\varepsilon$ 以及该候选对象 B至少给出一个优化器。该如何做到这一点？我们只需考虑单调优化函数（相对于第2.1节中定义的序 $\preceq$）。这是因为类 $\boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$ 在单调重排下保持不变。此事实已在 [46], 推论 3.12 中证明。

单调重排的以下性质对我们很有用： $\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle = \langle \mathrm{f}(\varphi^*)\rangle$, 其中 φ^* 是 φ的单调重排。因此，如果 φ 是优化器，那么 φ^* 也是优化器。我们并不需要形式化地考察这一点，但它有助于我们猜测优化器。鉴于此，我们只考虑单调优化器。关于优化器的更详细讨论将推迟到第5章。

2.2.3 一般原则和结果描述

我们的主要目标之一是证明以下定理。

定理 2.2.7. 设 f 满足条件 2.1.10,2.1.13。那么

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon(x;\, f) = \mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon, f}.$$

事实上，在整篇论文中，我们研究如何构造最小局部凹函数 $\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\ f}$。在第3章和第4章中，对于每个 f 满足条件 2.1.10 和 2.1.13的 f，我们在 Ω_ε 上构造具有边界条件 $G|_{\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega_\varepsilon} = \mathrm{f}$ 的特定局部凹函数 G。这些函数称为贝尔曼候选函数，见定义 2.2.4。根据注 2.1.11，函数 f 在某个紧集之外不改变其符号~，因此很容易找到一个函数 f 满足条件 2.1.10 和 2.1.13，并且在某个紧集之外与 $\max(f,\ 0)$ 一致。这将意味着函数 $\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\ \tilde{f}}$是有限的，从而 $\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\ \max(f,\ 0)}$ 也是有限的。命题 2.2.2 现在给出了定理 2.2.7 的结论。特别地，在我们的论证中构造的函数 G 满足不等式 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\,\cdot\,;\ f) \leqslant G$在 Ω_ε上。我们使用优化函数证明 G 与 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\,\cdot\,;\ f)$ 一致，这将在第5章中完成，见定理5.3.1。

主要结果

1. 我们给出一种算法，用于计算满足条件 2.1.10、2.1.13 的贝尔曼函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ for f，并描述该函数关于 ε的演化；作为推论，我们得到定理 2.2.7。2. 我们证明，对于任意 C^1 函数 f，若其不满足条件 2.1.13 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\,\cdot\,;\ f)$，则该结论在除固定边界以外的所有位置成立。3. 我们研究定义域不满足技术条件（2.1.7）和（2.1.8）的情形。经过少量修改，理论仍然适用：某些点 $x \in \Omega_\varepsilon$ 可能不存在优化器；在这种情况下，我们不构造单个优化器，而是构造函数的一个优化序列 $\varphi_n \in \boldsymbol{A}_{\Omega_\varepsilon}$，使得 $\langle \varphi_n \rangle_I = x$ 且 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_I \to \boldsymbol{B}_\varepsilon(x;\ f)$。我们还给出判据，用于判断条件（2.1.7）和（2.1.8）可能不成立时函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 是否有限。

这里需要作一些说明。构造贝尔曼函数，主要是指构造相应的叶状分解。这种叶状分解连续演化，并遵循某些单调性规则，文中也会对此加以说明。首先，我们打算为 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 给出一个表达式，其中涉及积分、微分以及某些隐式方程的求解。我们总会证明这些方程是适定的，也就是说，它们不会有无穷多个解。

第3章

贝尔曼候选函数的模式

3.1 预备知识

本节旨在各种区域上构造贝尔曼候选函数（见定义 2.2.4）。贝尔曼函数的全局叶层可能相当复杂，但其局部结构很容易描述。我们将给出一些启发式方法，对局部贝尔曼候选函数进行分类。

考虑一个最小局部凹函数及定理 2.2.3 所给出的叶状分解。我们回顾一下，这个叶状分解由线段（称为极值线段）和线性区域组成。

极值线段分为两类：一类连接固定边界上的两个点，另一类连接固定边界上的一个点与自由边界上的一个点。第一类极值线段称为弦，第二类极值线段称为切线。注意，弦可以与自由边界相切。这样的弦称为长弦。

根据固定边界上的点数对线性区域进行分类较为方便。我们将线性区域分为三类：在固定边界上有一个点的线性区域、在固定边界上有两个点的线性区域，以及其他所有线性区域。稍后将在第 3.7 小节中提供更详细的分类。

全局叶层由局部叶层拼接而成。我们来说明“拼接”一词在此处的非正式含义。考虑 Ω^1 和 Ω^2 这两个 Ω_ε 的子域。令 B_1 为 Ω^1，上的一个贝尔曼候选函数，令 B_2 为 Ω^2 上的一个贝尔曼候选函数。假设 $B_1 = B_2$ 在 $\Omega^1 \cap \Omega^2$ 上。考虑定义在并域 $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ 上的函数 B，它由 B_1 和 B_2 拼接而成（即，$B = B_1$ 在 Ω^1 上，且 $B = B_2$ 在 Ω^2 上）。假设该函数 B 是 C^1 光滑的。在这种情况下，只要函数 B_1 和 B_2 是局部凹的，它便是局部凹的，见下文命题 3.1.2。因此，它是 Ω 上的一个贝尔曼候选函数。它的叶状分解在 Ω^1 上与 B_1 的叶状分解一致，在 Ω^2 上与 B_2 的叶状分解一致。我们称 B 的叶状分解是由 B_1 和 B_2 的叶状分解拼接而成的。

在说明中，我们用到了以下事实：两个局部凹函数的 C^1-拼接仍是局部凹的。为了严谨地表述这一说法，我们需要引入几个新概念。

定义 3.1.1. 假设 Ω 是 Ω_ε 的一个子域。如果对每条线段 $l \subset \Omega_\varepsilon$，集合 $\Omega \cap l$ 都是凸集，则称 Ω 为一个诱导凸集。与通常做法一样，对于任意集合 $\omega \subset \Omega_\varepsilon$，我们将其诱导凸包ind conv($\omega$) 定义为包含 ω 的最小诱导凸集。

我们用于构造贝尔曼候选函数的所有区域都是诱导凸的。

命题 3.1.2。 假设定义域 Ω^1 和Ω^2 在Ω_ε中是诱导凸的。假设函数 B 是 C^1-光滑的，并且在每个定义域 Ω^i, $i = 1,2$上都是局部凹的。那么它在$\Omega^1 \cup \Omega^2$上也是局部凹的。

证明。为了证明该结论，我们证明 B 在每条线段 $l \subset \Omega^1 \cup \Omega^2$ 上的限制都是凹的。我们有 $l = \big(l \cap \Omega^1\big) \cup \big(l \cap \Omega^2\big)$。集合 $l \cap \Omega^1$ 和 $l \cap \Omega^2$ 都是凸的，即它们要么是线段，要么是空集（后一种情况显然成立）。根据假设，B 在这些线段上分别是凹的。利用 B 在这些线段的公共点处的 C^1-光滑性，我们得到 $B|_l$ 是凹的。 □

现在我们可以表述如下：如果两个贝尔曼候选函数的定义域是诱导凸的，那么它们的 C^1-光滑拼接也是一个贝尔曼候选函数。

我们开始构造贝尔曼候选函数。通常，我们只会给出能够生成贝尔曼候选函数的叶状分解和函数 f 的充分条件。然而，为了准备构造贝尔曼函数，我们必须考察所有可能的局部贝尔曼候选函数。因此，我们给出的条件通常也是必要条件。为了简化叙述，有时我们不会证明这种必要性，因为我们并不需要它。

为了描述叶状结构的组合性质，我们为每个叶状分解关联一个特殊的有向图。通常，图的顶点对应线性区域，而边对应极值线段的定义域。若相应的两个区域相邻，则顶点与边关联。关于该图的更详细描述，我们留待第3.8.2小节再讨论。

3.2 围栏

我们开始。结合对定义在一族极值.....上的贝尔曼候选函数性质的研究 al

线段 其端点位于固定边界上。

回忆一下，$g = (g_1, g_2)\colon \mathbb{R} \to \partial_{\text{fixed}}\Omega$ 是 Ω 的固定边界的参数化，满足$g_1' > 0$ 且 $\kappa_2' = \big(g_2'/g_1'\big)' > 0$。设 I 是 $\mathbb{R}$中的某个区间。假设存在一个线段族 $S(t) = [g(t)\ w(t)], t \in I$，它们叶状分解出一个子域 $\Omega(I) \subset \Omega$。我们假设该叶状分解足够光滑：$w \in C^1(I)$。我们可以将 t 视为从 $\Omega(I)$ 到 I 的函数，使得对于 $x \in \Omega(I)$，有 $x \in S(t(x))$。我们还假设函数 t 是 C^1-光滑的，并且满足 $\frac{\partial}{\partial x_2} t \neq 0$（这意味着线段 $S(t)$不是竖直的，即 $w_1(t) \neq g_1(t)$）。我们用 $\kappa(t)$表示线段 $S(t)$的斜率：

$$\kappa(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_2(t) - g_2(t)}{w_1(t) - g_1(t)}. \tag{3.2.1}$$

命题 3.2.1. 设 B 是$\Omega(I)$ 上的一个 C^1-光滑函数，在每条线段 $S(t)$上都是仿射函数，且其梯度 $\beta = (\beta_1, \beta_2) = \nabla B$ 在 $S(t)$ $t \in I$上为常数。则 B 是 C^2-光滑的。此外, 存在一个表示

$$B(x) = f(t) + \big(x_1 - g_1(t)\big)\Big[\kappa_3(t) + \big(\kappa(t) - \kappa_2(t)\big)\beta_2(t)\Big], \quad t = t(x), \tag{3.2.2}$$

其中 β_2 由下式给出

$$\beta_2(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\left(\int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\frac{\kappa_3'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa(\tau)}\, d\tau + \beta_2(t_0)\right), \quad t, t_0 \in I, \tag{3.2.3}$$

而 κ_2, κ_3 在 (2.1.12), 中定义，这里 $\beta_2(t_0)$ 是任意数。

证明。我们有

$$B(x) = f(t) + \beta_1(t)(x_1 - g_1(t)) + \beta_2(t)(x_2 - g_2(t)), \tag{3.2.4}$$

因为函数 B 在 $S(t)$ 上是仿射的。对边界等式 $B(g(t)) = f(t)$ 求导，我们得到

$$\langle \beta(t), g'(t) \rangle = f'(t), \tag{3.2.5}$$

这等价于（两边除以 g_1'）

$$\beta_1 + \kappa_2\beta_2 = \kappa_3. \tag{3.2.6}$$

将其代入 (3.2.4)，得到

$$B(x) = f(t) + (\kappa_3(t) - \kappa_2(t)\beta_2(t))(x_1 - g_1(t)) + \beta_2(t)(x_2 - g_2(t)). \tag{3.2.7}$$

我们使用公式

$$\kappa(t) = \frac{x_2 - g_2(t)}{x_1 - g_1(t)}, \quad x \in S(t), \tag{3.2.8}$$

将 (3.2.7) 改写为 (3.2.2) 的形式。

接下来只需证明 (3.2.3)。注意，在点 $x = w(t)$ 处的 (3.2.2) 意味着 β_2 具有 C^1-光滑性，而这又意味着 B 具有 C^2-光滑性，因为根据 (3.2.6)，β_1 也具有 C^1-光滑性。对 x_2 求导 (3.2.7)，并利用关系式 $\kappa_2 g_1' = g_2'$, $\kappa_3 g_1' = f'$，得到

$$\Big((\kappa_3' - \kappa_2'\beta_2 - \kappa_2\beta_2')(x_1 - g_1(t)) + \beta_2'(x_2 - g_2(t))\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} t = 0. \tag{3.2.9}$$

利用 $\frac{\partial}{\partial x_2} t \neq 0$ 和 (3.2.8)，得到

$$(\kappa_2 - \kappa)\beta_2' + \kappa_2'\beta_2 = \kappa_3'. \tag{3.2.10}$$

方程 $y'(t) + K_1(t)y(t) = K_2(t)$ 的解 y 由公式给出

$$y(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} K_1(\tau)\,d\tau\Big)\left(\int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} K_1(s)\,ds\Big) K_2(\tau)\,d\tau + y(t_0)\right), \tag{3.2.11}$$

其中 $y(t_0)$ 是任意参数。将 $y = \beta_2$ 代入 (3.2.10)，我们得到 (3.2.3)。 □

在接下来的内容中，我们需要 β_2 的一种略有不同的表示，它可以通过分部积分得到。

推论 3.2.2. 在命题 3.2.1 关于 $t, t_0 \in I$ 的条件下，我们有：

$$\beta_2(t) = \mathfrak{K}(t) - \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\left(\int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau + \mathrm{Const}\right), \tag{3.2.12}$$

$$\beta_2'(t) = \frac{\kappa_2'(t)}{\kappa_2(t) - \kappa(t)} \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\left(\int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau + \mathrm{Const}\right), \tag{3.2.13}$$

其中 $\mathrm{Const} = \beta_2'(t_0)^{\frac{\kappa_2}{(t_0) - \kappa(t_0)\,\kappa_2'(t_0)}} = \mathfrak{K}(t_0) - \beta_2(t_0)$。

证明。 利用这一事实，对 (3.2.3) 的右端进行分部积分：

$$\exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\frac{\kappa_3'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa(\tau)} = \left(\exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\right)' \cdot \mathfrak{K}(\tau).$$

注意，由于条件 2.1.10，$\mathfrak{K}'$ 是一个符号测度；(3.2.12) 和 (3.2.13) 中的积分均视为关于该测度的积分。公式 (3.2.13) 由 (3.2.12) 和 (3.2.10) 立即得出，这也证明了 (3.2.13) 和 (3.2.12) 中的常数相同。

□

我们给出命题 3.2.1 的逆命题。

命题 3.2.3。 设函数 β_2 由(3.2.3) 给出，函数 B 在定义域$\Omega(I)$上由(3.2.2) 定义。那么，函数 B 在$\Omega(I)$ 上是 C^2-光滑的，并且在每个线段 $S(t)$上都是仿射的。其梯度在 $S(t)$上与$(\beta_1(t)\ \beta_2(t))$ 一致，其中 β_1 由(3.2.6)给出。

证明。 如果我们证明 $\nabla B = \beta$，那么就可以自动得到 B 是 C^2-光滑的，因为 β 和 t 都是C^1-光滑的。

利用 (3.2.6) 和 (3.2.8)，我们将 (3.2.2) 重写为形式 (3.2.4)。对 (3.2.4) 关于 x 求导，我们得到

$$\nabla B = f'(t)\nabla t + \beta(t) + \big(\langle \beta'(t), x - g(t)\rangle - \langle \beta(t), g'(t)\rangle\big)\nabla t, \qquad t \in I,\ x \in S(t). \tag{3.2.14}$$

我们回顾一下，(3.2.6) 与 (3.2.5) 等价，因此 $\langle \beta(t)\ g'(t)\rangle = f'(t)$。因此，为了证明 $\nabla B = \beta$，我们只需证明 $\langle \beta'(t)\ x - g(t)\rangle = 0$。由 (3.2.3) 给出的函数 β_2 满足 (3.2.10)。同样，利用 (3.2.6) 和 (3.2.8)，我们得到

$$(\kappa_3' - \kappa_2'\beta_2 - \kappa_2\beta_2')(x_1 - g_1(t)) + \beta_2'(x_2 - g_2(t)) = 0,$$

这等价于

$$\langle \beta'(t), x - g(t)\rangle = 0, \quad x \in S(t). \tag{3.2.15}$$

□

注 3.2.4. 将 (3.2.15) 除以 $x_1 - g_1(t)$, 我们得到以下关系：

$$\beta_1' + \kappa\beta_2' = 0. \tag{3.2.16}$$

本小节最后，我们将上述定义的区域 $\Omega(I)$ 称为围栏。我们需要两种类型的围栏：点 $w(t)$ 要么位于 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 上，要么位于 $\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 上。第一种情况下，我们有一族与 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 相切的切线，$\Omega(I)$ 称为切域；第二种情况下，我们有一族弦，$\Omega(I)$ 称为弦域。接下来，我们将对这两种围栏类型都使用本小节中的所有关系。现在我们分别考虑这两种情况，并说明如何求出向量值函数 β 并确定候选对象 B。

3.3 切线域

如第 3.1 节所述，极值线段分为两种类型：弦和切线。本节将研究切线区域，即由与 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 相切的线段 $S(t)$ 构成的围栏，见图 3.1。

定义 3.3.1. 具有叶状分解 $S(t) = [g(t)\ w(t)]$, $t \in I$ 的围栏 $\Omega(I)$，若 $w(t) \in \partial_{\text{free}}\Omega$ 且线段 $S(t)$ 与 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 在 $t \in I$ 处相切，则称为切域。

注意，一般有两种可能： $S(t) = S_{\text{R}}(t)$（右切线），或 $S(t) = S_{\text{L}}(t)$（左切线），见第2.1.1小节。考虑这两种情况之一时，我们分别使用记号 $\Omega_{\text{R}}(I)$ 和 $\Omega_{\text{L}}(I)$。当且仅当在（3.2.1）中定义的函数 κ 满足以下方程时，线段 $S(t)$ 与 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 相切：

$$\kappa(t) = \frac{w_2'(t)}{w_1'(t)}. \tag{3.3.1}$$

对 (3.2.1) 求导并使用 (3.3.1)，可以很容易验证

$$\kappa' = \frac{g_1'\kappa - g_2'}{w_1 - g_1}. \tag{3.3.2}$$

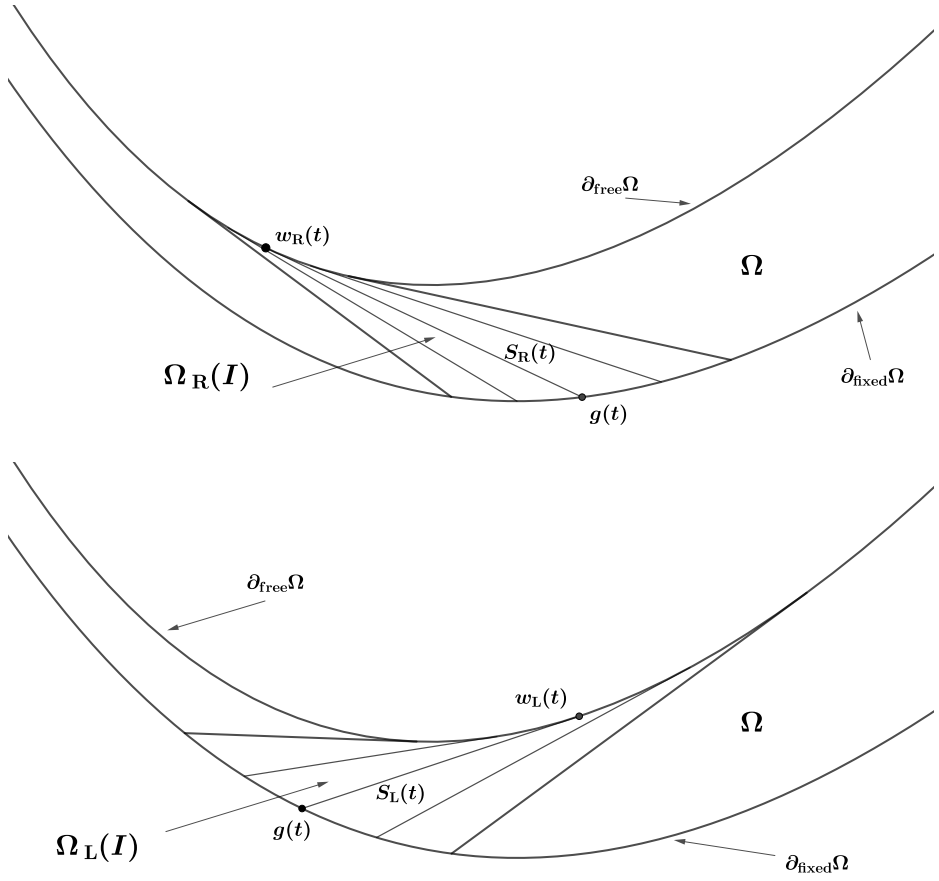


图 3.1：具有右切线和左切线的区域 Ω_{R} 和 Ω_{L} 。

对 (3.2.8) 关于 x_2 求导，再次使用 (3.3.2) 和 (3.2.1)，我们得到函数 $t = t(x)$ 的偏导数：

$$t_{x_2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial t}{\partial x_2} = \frac{1}{g_2' + (x_1 - g_1)\kappa' - g_1'\kappa} = \frac{w_1 - g_1}{(\kappa g_1' - g_2')(x_1 - w_1)} = \frac{w_1 - g_1}{g_1'(\kappa - \kappa_2)(x_1 - w_1)}. \tag{3.3.3}$$

注 3.3.2. 注意到，对于 $\Omega_{\text{L}}(I)$， x_1 位于 g_1 和 w_1之间；对于 $\Omega_{\text{R}}(I)$， x_1 位于 $\kappa > \kappa_2$ 和 $\kappa < \kappa_2$ 之间。因此，对于 $\Omega_{\text{R}}(I)$，有 $t_{x_2} > 0$ ；对于 $\Omega_{\text{L}}(I)$，有 $t_{x_2} < 0$ 。回忆一下， B 由 (3.2.2) 定义，且其海森矩阵是退化的，因此 B 的凹性可由 $B_{x_2x_2} < 0$推出。 $B_{x_2x_2} = \beta_2'(t)t_{x_2}$的符号由 β_2'的符号决定，由此得到以下命题。

命题 *3.3.3.* 考虑一个切域 $\Omega_{\text{R}}(I)$，它由线段族 $S_{\text{R}}(t) = [g(t)\ w(t)]$ 所叶状分解，且满足 $w(t) \in \partial_{\text{free}}\Omega$，并且对于 $t \in I$， $S_{\text{R}}(t)$ 是 Ω ∂_{free} 的右切线。假设由 *(3.2.3)* 给出的函数 β_2 满足不等式 $\beta_2'(t) \leqslant 0$ ，对于 $t \in I$ 成立。那么，由 *(3.2.2)* 给出的函数 B 是 $\Omega_{\text{R}}(I)$ 上的贝尔曼候选函数。

证明。 由命题 3.2.3，式 (3.2.3) 给出的函数 β_2 和式 (3.2.6) 定义的函数 β_1 是梯度∇B 的分量。因此，我们只需验证 B的凹性。如果 $\beta_2'(t) = 0$，那么根据式 (3.2.16)， $\beta_1'(t) = 0$，且 B 的海森矩阵为零矩阵。如果 $\beta_2'(t) < 0$，那么 $B_{x_2x_2} = \beta_2'(t)t_{x_2} < 0$ ，且根据西尔维斯特判据，海森矩阵为半负定。因此，两种情况下命题均得证。

□

注 3.3.4。如果 $I=[t_-,t_+]$, $\beta_2'(t_-)\leqslant 0$, 且对应于 γ（在式 (2.1.11) 中定义）的函数 $\mathbf{T}$ 在 I上非正，那么根据式 (3.2.13) 和 (2.1.13)，$\beta_2'\leqslant 0$ 在整个区间 I 上成立。

我们陈述以下对称命题:

命题 *3.3.5*。考虑一个由线段族 $S_{\text{L}}(t)=[g(t)\ w(t)]$ 叶状分解的切域 $\Omega_{\text{L}}(I)$，其中 $w(t)\in\partial_{\text{free}}\Omega$，且对于 $t\in I$，$S_{\text{L}}(t)$ 是 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 的左切线。设由（*3.2.3*）给出的函数 β_2 满足不等式 $\beta_2'(t)\geqslant 0$（对于 $t\in I$）。则由（*3.2.2*）给出的函数 B 是 $\Omega_{\text{L}}(I)$ 上的贝尔曼候选函数。

在本小节的最后一部分，我们考虑无限切域的情形。

命题 *3.3.6*。设 $I=(-\infty,t_2)$ $t_2\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$。考虑一个由线段族 $S_{\text{R}}(t)=[g(t)\ w(t)]$ 叶状分解的切域 $\Omega_{\text{R}}(I)$，其中 $w(t)\in\partial_{\text{free}}\Omega$，且对于 $t\in I$，$S_{\text{R}}(t)$ 是 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 的右切线。设由（*3.2.12*）给出的函数 β_2 满足 $Const=0$ 和 $t_0=-\infty$，即，

$$\beta_2(t)=\mathfrak{K}(t)-\int_{-\infty}^{t}\exp\Big(-\int_{\tau}^{t}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau,\qquad t\in I,\tag{3.3.4}$$

是有限的，并满足不等式

$$\beta_2'(t)=\frac{\kappa_2'(t)}{\kappa_2(t)-\kappa(t)}\int_{-\infty}^{t}\exp\Big(-\int_{\tau}^{t}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau\leqslant 0,\qquad t\in I.\tag{3.3.5}$$

那么，由(3.2.2) 给出的函数 B 是域 $\Omega_{\text{R}}(I)$上的贝尔曼候选函数。

命题 *3.3.7*. 设 $I=(t_1,+\infty)$ $t_1\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。考虑一个切域 $\Omega_{\text{L}}(I)$，它由线段族 $S_{\text{L}}(t)=[g(t)\ w(t)]$ 构成，并满足 $w(t)\in\partial_{\text{free}}\Omega$，且 $S_{\text{L}}(t)$ 是 $\partial_{\text{free}}\Omega$ 的左切线，其中$t\in I$。假设函数 β_2 由公式 *(3.2.12)* 给出，其中 $Const=0$ 且 $t_0=+\infty$，即:

$$\beta_2(t)=\mathfrak{K}(t)-\int_{t}^{+\infty}\exp\Big(\int_{t}^{\tau}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau,\qquad t\in I,\tag{3.3.6}$$

是有限的，并满足不等式

$$\beta_2'(t)=\frac{\kappa_2'(t)}{\kappa_2(t)-\kappa(t)}\int_{t}^{+\infty}\exp\Big(\int_{t}^{\tau}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau\geqslant 0,\qquad t\in I.\tag{3.3.7}$$

那么，由公式(3.2.2) 给出的函数 B 是域 $\Omega_{\text{L}}(I)$上的贝尔曼候选函数。

定义 3.3.8. 命题 3.3.3、3.3.5、3.3.6 和 3.3.7 中构造的函数 B，若关于 β_2'的不等式在 I的内部严格成立，即，对于 $\Omega_{\text{R}}(I)$ 有 $\beta_2'<0$，且对于 $\Omega_{\text{L}}(I)$ 有 $\beta_2'>0$，则称为相应切域 $\Omega_{\text{R}}(I)$ 和 $\Omega_{\text{L}}(I)$ 的标准候选函数 。

我们想对 (3.3.4) 和 (3.3.6) 中积分的收敛性作一说明。

注 3.3.9。(3.3.4) 中积分的收敛性等价于 Condition (2.1.14) 中积分的收敛性，这将在下文引理 5.2.4 中证明。此外，如果 (2.1.14) 中的积分等于 $+\infty$，则 (3.3.5) 中的不等式不成立，即对于任意 $t_2\in\mathbb{R}$，在 $\Omega_{\text{R}}(-\infty,\ t_2)$ 上都不存在标准候选函数。

同样，式 (3.3.6) 中积分的收敛等价于条件 (2.1.15) 中积分的收敛。此外，若 (2.1.15) 中的积分等于 $-\infty$，则不等式 (3.3.7) 不成立，即对于任意 $t_1\in\mathbb{R}$，在 $\Omega_{\text{L}}(t_1,\ +\infty)$ 上都不存在标准候选函数。

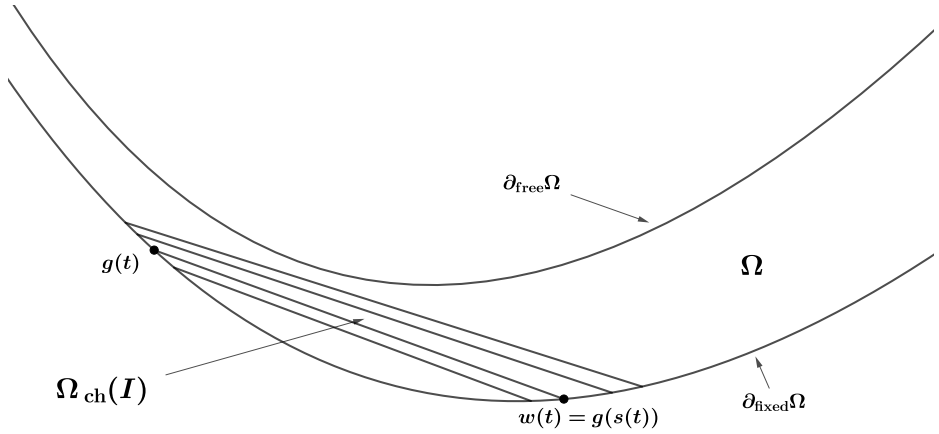


图 3.2：弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$。

3.4 弦域

如第 3.1 节所述，极值线段分为两类：弦和切线。本节研究弦域，即由弦构成的定义域（见图 3.2）。

定义 3.4.1. 具有叶状分解 $S(t) = [g(t)\ w(t)],\ t \in I$ 的围栏 $\Omega(I)$，若 $w(t) \in \partial_{\text{fixed}}\Omega$ 对于 $t \in I$ 成立，则称为弦域。弦域记作 $\Omega_{\text{ch}}(I)$。

在弦域中，函数 B 由其边界值以及在线段上的线性性唯一确定：

$$B\big(\alpha g(t) + (1-\alpha)g(s)\big) = \alpha f(t) + (1-\alpha)f(s), \qquad \alpha \in [0,1], \tag{3.4.1}$$

其中，函数 $s\colon I \to \mathbb{R}$ 由关系 $g(s(t)) = w(t)$ 对于 $t \in I$ 定义。注意，函数 s 是递减的。本小节旨在给出条件，使得由 (3.4.1) 给出的函数 B 能够作为贝尔曼候选函数。

向量 $\gamma'(t)\ \gamma'(s)$，和 $\gamma(t)-\gamma(s)$属于函数 B 图形的同一切平面，因此，

$$\det\begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma(s)-\gamma(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) & f'(t) \\ g_1'(s) & g_2'(s) & f'(s) \\ g_1(s)-g_1(t) & g_2(s)-g_2(t) & f(s)-f(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.4.2}$$

我们将此方程称为杯形方程。

记 $\theta = \theta(x_1, x_2)$ 为在点 $(x_1, x_2, B(x_1, x_2))$ 处与 B 的图正交的向量：

$$\theta = \nabla(B(x_1,x_2) - x_3) = (\beta(t(x_1,x_2)), -1). \tag{3.4.3}$$

我们可以将 θ 视为仅关于 t 的函数：$\theta(t) = (\beta(t)\ -1)$。该向量与边界曲线 γ 的切向量正交，即 $\langle \theta(t)\ \gamma'(t)\rangle = 0$，这等价于

$$\langle \beta(t), g'(t)\rangle = f'(t). \tag{3.4.4}$$

现在我们来求出 β'。对方程 (3.4.4) 求导，得到

$$\langle \beta'(t), g'(t)\rangle = f''(t) - \langle \beta(t), g''(t)\rangle = -\langle \theta(t), \gamma''(t)\rangle, \tag{3.4.5}$$

其中 θ 由 (3.4.3) 定义。

我们知道 $\langle \theta(t)\ \gamma'(t)\rangle = \langle \theta(t)\ \gamma'(s)\rangle = 0$ 且 $\langle \theta(t),\ (0,\ 0,\ 1)\rangle = -1$。因此，对于任意 $v \in \mathbb{R}^3$，都有 $\big\langle \theta(t)\ v + \langle \theta(t)\ v\rangle\,(0,\ 0,\ 1)\big\rangle = 0$，于是

$$\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ v + \langle \theta(t), v\rangle\,(0,0,1) \end{pmatrix} = 0,$$

or

$$\langle \theta(t), v\rangle \det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'(s) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ v \end{pmatrix}.$$

将其代入 (3.4.5)，得到

$$\langle \beta'(t), g'(t)\rangle = -\langle \theta(t), \gamma''(t)\rangle = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'(s) \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) & f'(t) \\ g_1'(s) & g_2'(s) & f'(s) \\ g_1''(t) & g_2''(t) & f''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) \\ g_1'(s) & g_2'(s) \end{pmatrix}}. \tag{3.4.6}$$

对于 $\beta'(t)$，我们有方程组 (3.4.6) 和 (3.2.16)（其中 $w(t) = g(s)$）。解得

$$\beta_2'(t) = \frac{1}{g_1'(t)} \cdot \frac{1}{\kappa_2(t) - \kappa(t)} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) & f'(t) \\ g_1'(s) & g_2'(s) & f'(s) \\ g_1''(t) & g_2''(t) & f''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) \\ g_1'(s) & g_2'(s) \end{pmatrix}}, \tag{3.4.7}$$

其中 $\kappa(t) = \frac{g_2(s)-g_2(t)}{g_1(s)-g_1(t)}$ 由 (3.2.1) 定义，且 $\kappa_2 = \frac{g_2'}{g_1'}$。我们回顾一下，$g_1' > 0$ （见 (2.1.1)）。由 $\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 的凸性可知，对于 $t < s$，以下不等式成立：

$$\frac{g_2'(t)}{g_1'(t)} = \kappa_2(t) < \kappa(t) < \kappa_2(s) = \frac{g_2'(s)}{g_1'(s)} \tag{3.4.8}$$

（对于 $s < t$，两个不等式的方向相反），因此，符号 $\beta_2'(t) = -$ 符号 $\det \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'(t)\ (s)\ (t) \\ \gamma'' \end{pmatrix}$.

注意，符号 $\frac{\partial t}{\partial x_2}$ = 符号$(t - s)$，于是

$$\operatorname{sign} \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} = \operatorname{sign}\big[\beta_2'(t)\frac{\partial t}{\partial x_2}\big] = \operatorname{sign}\left[(s-t)\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix}\right]. \tag{3.4.9}$$

我们提出一个命题，给出由 (3.4.1) 定义的函数 B 成为弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 上贝尔曼候选函数的充分条件。

命题 3.4.2。考虑由线段族 $S(t) = [g(t)\ g(s(t))]$, 所叶状分解的弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$，其中函数 $s\colon I \to \mathbb{R}$ 满足 (3.4.2)。设 B 在 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 上由边界条件 $B \circ g = f$ 以及在每条线段 $S(t)\ t \in I$ 上的线性性定义，即，由 (3.4.1) 定义。假设

$$(t-s)\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad t \in I. \tag{3.4.10}$$

那么，函数 B 是 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 上的贝尔曼候选函数。

证明。我们需要验证 ∇B 在每条弦上都是常数。由 (3.4.2) 可得一个向量 $\beta = \beta(t)$，使得 $\theta = (\beta, -1)$ 与 $\gamma'(t)$ $\gamma'(s)$ 正交，并且 $\gamma(s) - \gamma(t)$。按此方式选取的函数 β 满足关系式 (3.4.4)、(3.2.15)。恒等式 (3.2.4) 对 $x = g(t)$ 和 $x = g(s)$ 成立，因此，由线性性可知，它对任意 $x \in S(t)$ 都成立。于是，根据 (3.2.14)，$\nabla B = \beta(t)$，因此 ∇B 在 $S(t)$ 上为常数。在命题的假设下，由 (3.4.9) 可知 B 的凹性。 □

定义 3.4.3. 命题 3.4.2 中构造的函数 B，若对于 I 的内部中的 t，不等式 (3.4.10) 严格成立，则称为弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 的标准候选函数。

定义 3.4.4. 设 $I = [t_-, t_+]$，且函数 $s\colon I \to \mathbb{R}$ 对应于弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$，其中 $s(t_-) = t_-$ 或 $s(t_+) = t_+$。则弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 称为以 $g(c)$ 为起点的杯形区域，其中 $c = s(c)$ 分别与 t_- 或 t_+ 重合。点 $g(c)$ 以及参数值 c 称为杯形域的起点。

杯形域的起挠率方 点 $g(c)$ 是杯形区域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 的曲线 g 上一个非常特殊的点。它应满足以下 程：

g

$$\det \begin{pmatrix} \gamma'(c) \\ \gamma''(c) \\ \gamma'''(c) \end{pmatrix} = 0, \tag{3.4.11}$$

通过对 (3.4.2) 中的 $t \to c$ 和 $s \to c$ 精确取极限可得。

从几何上看，弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 和 $\Omega_{\text{ch}}(s(I))$ 相同。通常无需区分二者，因此我们采用以下通用记号。设 $I = [t_-, t_+]$。将数 $t_\pm$ 和 $s(t_\pm)$ 按递增序记为 a_0，a_1，b_1 和 b_0，即 $[g(a_0)\ g(b_0)]$ 是该定义域的上弦，而 $[g(a_1)\ g(b_1)]$ 是下弦。将这样的弦域记为 $\Omega_{\text{ch}}([a_0, b_0],\ [a_1, b_1])$。若其中一条弦不重要，我们就用 $*$ 代替：

$$\Omega_{\text{ch}}([a_0, b_0], *) \qquad \text{or} \qquad \Omega_{\text{ch}}(*, [a_1, b_1]).$$

3.5 杯形区域周围

3.5.1 微分

定义 3.5.1。 设一对 $(s,\ t)$ 满足杯形方程 (3.4.2)。设 $s < t$。我们将以下两个表达式称为微分，分别对应左侧和右侧：

$$D_{\text{L}}(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ \gamma'(t) \\ \gamma''(s) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(s) \\ g'(t) \end{pmatrix}}, \qquad D_{\text{R}}(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'(s) \end{pmatrix}}. \tag{3.5.1}$$

显然，从形式上说 $D_{\text{L}}(s,\ t) = D_{\text{R}}(t,\ s)$，但为了方便起见，我们会用两个不同的符号表示这些表达式。

引理 3.5.2. 假设数对 (s, t) 满足杯形方程 (3.4.2)。那么

$$\gamma(t) - \gamma(s) = C_{\text{R}}\gamma'(t) - C_{\text{L}}\gamma'(s), \tag{3.5.2}$$

其中

$$C_{\text{L}}(s,t) = \frac{\det \begin{pmatrix} g(s) - g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(s) \\ g'(t) \end{pmatrix}}, \qquad C_{\text{R}}(s,t) = \frac{\det \begin{pmatrix} g(t) - g(s) \\ g'(s) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'(s) \end{pmatrix}}.$$

注 3.5.3. 若 $u, v, w \in \mathbb{R}^2$，则

$$u \det \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} + v \det \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + w \det \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = 0. \tag{3.5.3}$$

引理 *3.5.2* 的证明。 由 (3.5.3) 可得,

$$g(t) - g(s) = C_{\mathrm{R}} g'(t) - C_{\mathrm{L}} g'(s). \tag{3.5.4}$$

向量 $\gamma(t) - \gamma(s)$、 $\gamma'(s)$、 $\gamma'(t)$ 线性相关，且其线性相关关系的系数与其二维投影 $g(t) - g(s)$、 $g'(t)$ 和 $g'(s)$ 的系数相同。 □

注 3.5.4。 对于 $s \neq t$，有 $\mathrm{sign}(C_{\mathrm{R}}) = -\mathrm{sign}(C_{\mathrm{L}}) = \mathrm{sign}(t - s)$ (见 (3.4.8))。

推论 **3.5.5.** 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 为一个弦域，其对应的函数为 $s = s(t)$ $t \in I$。则 *en*

$$C_{\mathrm{L}} \det \begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ \gamma'(t) \\ \gamma''(s) \end{pmatrix} ds + C_{\mathrm{R}} \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix} dt = 0. \tag{3.5.5}$$

证明。 对 (3.4.2) 求导，得到

$$0 = \det \begin{pmatrix} \gamma''(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma(t) - \gamma(s) \end{pmatrix} dt + \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(s) \\ \gamma(t) - \gamma(s) \end{pmatrix} ds = C_{\mathrm{R}} \det \begin{pmatrix} \gamma''(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} dt - C_{\mathrm{L}} \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(s) \\ \gamma'(s) \end{pmatrix} ds$$

根据（3.5.2）。 □

由（3.5.1）可知，等式（3.5.5）可以改写为以下形式:

$$C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}} ds = C_{\mathrm{R}} D_{\mathrm{R}} dt. \tag{3.5.6}$$

推论 3.5.6。

$$D_{\mathrm{R}} = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma(t) - \gamma(s) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t) - g(s) \end{pmatrix}}, \qquad D_{\mathrm{L}} = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ \gamma(s) - \gamma(t) \\ \gamma''(s) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(s) \\ g(s) - g(t) \end{pmatrix}}. \tag{3.5.7}$$

证明。 这立即由（3.5.2）、（3.5.4）和（3.5.1）得到。 □

引理 3.5.7. 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 为弦域，其对应的函数为 $s = s(t)$ $t \in I$。那么，

$$dD_{\mathrm{R}}(s,t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ \gamma'''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}} dt + \left(\frac{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}} - \frac{\det \begin{pmatrix} g''(t) \\ g(t) - g(s) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t) - g(s) \end{pmatrix}} \right) D_{\mathrm{R}}(s,t) dt. \tag{3.5.8}$$

证明。 我们利用表示 (3.5.7) 对 D_{R} 求导。首先，注意到关于 s 的偏导数等于零:

$$\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\-\gamma'(s)\\\gamma''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}-\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma(t)-\gamma(s)\\\gamma''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}^2}\det\begin{pmatrix}g'(t)\\-g'(s)\end{pmatrix}\overset{\substack{(3.5.7)\\(3.5.1)}}{=}-D_{\mathrm{R}}\frac{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g'(s)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}+D_{\mathrm{R}}\frac{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g'(s)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}.$$

其次，对 t 的偏导数等于:

$$\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma(t)-\gamma(s)\\\gamma'''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}-\frac{\det\begin{pmatrix}g''(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}D_{\mathrm{R}}. \tag{3.5.9}$$

我们使用公式 (3.5.2) 和 (3.5.4) 重写 (3.5.9) 中的第一项:

$$\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma(t)-\gamma(s)\\\gamma'''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g(t)-g(s)\end{pmatrix}}=\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma'(s)\\\gamma'''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g'(s)\end{pmatrix}}. \tag{3.5.10}$$

由（3.5.3）可知，对于向量 $g'(t)$、 $g''(t)$ 和 $g'''(t)$，得出的是

$$\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g''(t)\end{pmatrix}\gamma'''(t)+\det\begin{pmatrix}g'''(t)\\g'(t)\end{pmatrix}\gamma''(t)+\det\begin{pmatrix}g''(t)\\g'''(t)\end{pmatrix}\gamma'(t)=\begin{pmatrix}0,\ 0,\ \det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma''(t)\\\gamma'''(t)\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

我们由这个恒等式表示 $\gamma'''(t)$，并将其代入 (3.5.10)，得到

$$\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma'(s)\\\gamma'''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g'(s)\end{pmatrix}}=\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma''(t)\\\gamma'''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g''(t)\end{pmatrix}}-\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\\gamma'(s)\\\gamma''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g'(s)\end{pmatrix}}\frac{\det\begin{pmatrix}g'''(t)\\g'(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g''(t)\end{pmatrix}}.$$

这个公式结合 (3.5.10)、(3.5.9) 和定义 (3.5.1)，完成了证明。 □

注 3.5.8. 公式 (3.5.8) 可用函数 κ、 κ_2、 κ_3 和 $\mathfrak{K}$ 重写(见 (2.1.5) 和 (2.1.12)):

$$\frac{dD_{\mathrm{R}}(s(t),t)}{dt}=\kappa_2'g_1'\mathfrak{K}'+\Big[\frac{(g_1'\kappa_2')'}{g_1'\kappa_2'}-\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big]D_{\mathrm{R}}(s(t),t). \tag{3.5.11}$$

证明。 （3.5.11）与（3.5.8）的第一项相同，这由（2.1.13）和恒等式可得

$$\det\begin{pmatrix}g'(t)\\g''(t)\end{pmatrix}=g_1'g_2''-g_1''g_2'=(g_1')^2\kappa_2'.$$

至于第二项，我们列出以下一系列初等等式：

$$\det\begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t)-g(s)\end{pmatrix} = g_1'\big(g_2(t)-g_2(s)\big) - g_2'\big(g_1(t)-g_1(s)\big) = g_1'\big[g_2(t)-g_2(s)-\kappa_2\big(g_1(t)-g_1(s)\big)\big].$$

(3.5.8) 中大括号内的系数等于

$$\frac{\det\begin{pmatrix} g'(t) \\ g'''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t)\end{pmatrix}} - \frac{\det\begin{pmatrix} g''(t) \\ g(t)-g(s)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t)-g(s)\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\det\begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t)-g(s)\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\kappa_2'g_1'}{g_2(t)-g_2(s)-\kappa_2\big(g_1(t)-g_1(s)\big)} =$$

$$= \frac{(\kappa_2'g_1')'}{\kappa_2'g_1'} - \frac{g_2'-\kappa_2'\big(g_1(t)-g_1(s)\big)-\kappa_2 g_1'}{\big(g_1(t)-g_1(s)\big)(\kappa-\kappa_2)} = \frac{(\kappa_2'g_1')'}{\kappa_2'g_1'} + \frac{\kappa_2'}{\kappa-\kappa_2}. \qquad \square$$

3.5.2 杯形区域构造

命题 3.5.9. 假设 γ 的挠率在点 t_0 处从 $+$ 变为 $-$，即，$\mathbf{T}$在 t_0 的左邻域内为正，在右邻域内为负。那么，当 $\delta>0$ 充分小时，存在一个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}(t_0, t_0+\delta)$，其上有标准贝尔曼候选函数。

命题 3.5.9 强调了条件 2.1.10 的重要性，因为杯形区域只能从点 $t_0=c_i$ 处开始，见定义 2.1.12。

首先，我们需要得到几个有用的公式。

引理 3.5.10. 对于任意 s、t，以下恒等式成立：

$$\det\begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma(t)-\gamma(s)\end{pmatrix} = g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t \mathfrak{K}'(\sigma)\bigg(\int_s^\sigma\int_\sigma^t \kappa_2'(u)\kappa_2'(v)\big(g_1(v)-g_1(u)\big)dv\,du\bigg)d\sigma = \tag{3.5.12}$$

$$= -g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t \mathfrak{K}(\sigma)\bigg(\int_s^t \kappa_2'(\sigma)\kappa_2'(v)\big(g_1(v)-g_1(\sigma)\big)dv\bigg)d\sigma. \tag{3.5.13}$$

证明。

$$\det\begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma(t)-\gamma(s)\end{pmatrix} = \int_s^t \det\begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma'(\tau)\end{pmatrix}d\tau = \int_s^t g_1'(t)g_1'(s)g_1'(\tau)\det\begin{pmatrix} 1 & \kappa_2(t) & \kappa_3(t) \\ 1 & \kappa_2(s) & \kappa_3(s) \\ 1 & \kappa_2(\tau) & \kappa_3(\tau)\end{pmatrix}d\tau =$$

$$= -g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t g_1'(\tau)\det\begin{pmatrix} \kappa_2(t)-\kappa_2(\tau) & \kappa_3(t)-\kappa_3(\tau) \\ \kappa_2(\tau)-\kappa_2(s) & \kappa_3(\tau)-\kappa_3(s)\end{pmatrix}d\tau =$$

$$= -g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t g_1'(\tau)\int_\tau^t\int_s^\tau \det\begin{pmatrix} \kappa_2'(v) & \kappa_3'(v) \\ \kappa_2'(u) & \kappa_3'(u)\end{pmatrix}du\,dv\,d\tau =$$

$$= g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t g_1'(\tau)\int_\tau^t\int_s^\tau \kappa_2'(v)\kappa_2'(u)\int_u^v \mathfrak{K}'(\sigma)\,d\sigma\,du\,dv\,d\tau =$$

$$= g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t \mathfrak{K}'(\sigma)\bigg(\int_s^\sigma\int_\sigma^t \kappa_2'(u)\kappa_2'(v)\int_u^v g_1'(\tau)\,d\tau\,dv\,du\bigg)d\sigma =$$

$$= g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t \mathfrak{K}'(\sigma)\bigg(\int_s^\sigma\int_\sigma^t \kappa_2'(u)\kappa_2'(v)\big(g_1(v)-g_1(u)\big)dv\,du\bigg)d\sigma \overset{\text{integration by parts}}{=}$$

$$= -g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t \mathfrak{K}(\sigma)\Big(\int_\sigma^t \kappa_2'(\sigma)\kappa_2'(v)\big(g_1(v)-g_1(\sigma)\big)dv - \int_s^\sigma \kappa_2'(u)\kappa_2'(\sigma)\big(g_1(\sigma)-g_1(u)\big)du\Big)d\sigma =$$
$$= -g_1'(t)g_1'(s)\int_s^t \mathfrak{K}(\sigma)\Big(\int_s^t \kappa_2'(\sigma)\kappa_2'(v)\big(g_1(v)-g_1(\sigma)\big)dv\Big)d\sigma.$$

□

推论 3.5.11。 对于任意 s,t ，以下恒等式成立：

$$\det\begin{pmatrix}\gamma''(t)\\ \gamma'(s)\\ \gamma(t)-\gamma(s)\end{pmatrix} = \frac{g_1''(t)}{g_1'(t)}\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ \gamma'(s)\\ \gamma(t)-\gamma(s)\end{pmatrix} - \\ - g_1'(t)g_1'(s)\kappa_2'(t)\int_s^t \big(\mathfrak{K}(u)-\mathfrak{K}(t)\big)\kappa_2'(u)\big(g_1(t)-g_1(u)\big)du. \tag{3.5.14}$$

证明。 对 (3.5.13) 直接求微分即可得到该结果：第一项由因子 $g_1'(t)$ 的微分得到，第二项则由积分的微分得到。 □

引理 3.5.12. 设 s、t、$c\in\mathbb{R}$ 和 $s<c<t$。假设函数 Φ 在 $[s,t]$ 上连续，在 (s,c) 上单调不减，在 (c,t) 上单调不增，并且在 $[s,t]$ 上不是常数。设函数 ϕ 和 ψ 定义在 $[s,t]$ 上，且 $\phi>0$ 和 $\psi'>0$。假设

$$\int_s^t \Phi(\sigma)\Big(\int_s^t \phi(\sigma)\phi(v)\big(\psi(v)-\psi(\sigma)\big)dv\Big)d\sigma = 0. \tag{3.5.15}$$

Then

$$\int_s^t \big(\Phi(u)-\Phi(t)\big)\phi(u)\big(\psi(t)-\psi(u)\big)du > 0. \tag{3.5.16}$$

证明。 不等式 (3.5.16) 和等式 (3.5.15) 在函数 ψ 上加上一个常数后保持不变。因此，不妨设 $\psi(t)=0$。在此假设下，$\psi<0$ 在 (s,t) 上。

我们将 (3.5.15) 改写如下：

$$\int_s^t \Phi(\sigma)\phi(\sigma)\,d\sigma \int_s^t \phi(v)\psi(v)\,dv = \int_s^t \Phi(\sigma)\phi(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma \int_s^t \phi(v)\,dv. \tag{3.5.17}$$

我们看到，该问题对给 Φ 添加常数并不敏感。积分 $\int\phi\psi$ 严格为负，因此必要时可以通过给 Φ 添加常数来假设 $\int_s^t \Phi\phi\psi = 0$ 。由此可从 (3.5.17) 得出$\int_s^t \Phi\phi = 0$。在我们的假设下，(3.5.16) 具有如下形式

$$\Phi(t)\int\phi\psi > 0,$$

这等价于 $\Phi(t)<0$。如果不成立，那么 $\Phi(t)\geqslant 0$ 和 $\Phi\geqslant 0$ 在 $[c,t]$上。我们可以找到一个点$\sigma_0\in(s,c)$，使得 $\Phi\geqslant 0$在 (σ_0,t) 上，且 $\Phi\leqslant 0$在 (s,σ_0) 上。然而，

$$\int_s^t \Phi(\sigma)\phi(\sigma)(\psi(\sigma)-\psi(\sigma_0))d\sigma = 0,$$

由于被积函数非负。因此，被积函数恒等于零，从而 Φ 也为零。这与我们要求 Φ 不是常数相矛盾。

□

推论 3.5.13。设 s、t、$t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $s < t_0 < t$。假设 $\mathfrak{K}$ 在 (s,t_0) 上非减，在 (t_0,t) 上非增，并且在 $[s,t]$ 上不是常数。假设有序对 (s,t) 满足杯形方程 (3.4.2)。那么 $D_{\mathrm{R}}(s,t) < 0$ 且 $D_{\mathrm{L}}(s,t) < 0$。

证明。我们只证明 $D_{\mathrm{R}}(s,t) < 0$，其余不等式由对称性可得。

我们要对 $\Phi = \mathfrak{K}$、$\psi = g_1$、$\phi = \kappa_2'$ 和 $c = t_0$ 使用引理 3.5.12。于是，由于 (3.5.13)，(3.5.15) 成立。因此我们得到 (3.5.16)，它等价于

$$\det \begin{pmatrix} \gamma''(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma(t) - \gamma(s) \end{pmatrix} < 0$$

根据 (3.5.14)。我们使用 (3.5.2) 将其改写为关于 D_{R}的形式：

$$0 > \det \begin{pmatrix} \gamma''(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma(t) - \gamma(s) \end{pmatrix} = C_{\mathrm{R}} \det \begin{pmatrix} \gamma''(t) \\ \gamma'(s) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = -C_{\mathrm{R}} D_{\mathrm{R}} \det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'(s) \end{pmatrix}.$$

我们回顾一下，当 $t > s$ 时，$C_{\mathrm{R}} > 0$ 和 $\det \begin{pmatrix} g' \\ g' \end{pmatrix}(t)\,(s) < 0$。因此，我们得到所声称的不等式 $D_{\mathrm{R}} < 0$。

□

命题 *3.5.9* 的证明。取 $\theta_0 > 0$ 为一个足够小的数，使得 γ 的挠率$\mathbf{T}$ 在 $(t_0 - \theta_0, t_0)$ 上为正，在 $(t_0, t_0 + \theta_0)$ 上为负。回忆一下，$\mathbf{T}$ 的符号与 $\mathfrak{K}'$的符号一致，见 (2.1.13)。

考虑以下函数 h：

$$h(t,\theta) = \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(t-\theta) \\ \gamma(t) - \gamma(t-\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in (0, \theta_0],\ t \in [t_0, t_0 + \theta].$$

该函数在其定义域上连续且可微。由曲线 g 的条件可知，对于任意满足 $u < v$ 的 u、v，都有 $\kappa_2'(u)\kappa_2'(v)(g_1(v) - g_1(u)) > 0$。对于任意 $\theta \in (0, \theta_0]$，测度 $\mathfrak{K}'$ 在 $(t_0 - \theta, t_0)$ 上为正，在 $(t_0, t_0 + \theta)$ 上为负，因此公式 (3.5.12) 表明，对于任意 $\theta \in (0, \theta_0]$，都有 $h(t_0, \theta) > 0 > h(t_0 + \theta, \theta)$。因此，对于任意这样的 θ，存在 $t_\theta \in (t_0, t_0 + \theta)$，使得 $h(t_\theta, \theta) = 0$。我们将证明，对于任意 $\theta \in (0, \theta_0]$，这样的 t_θ 是唯一的。

推论 3.5.13 表明 $D_{\mathrm{R}} = D_{\mathrm{R}}(t_\theta - \theta,\ t_\theta)$ 和 $D_{\mathrm{L}} = D_{\mathrm{L}}(t_\theta - \theta,\ t_\theta)$ 均为负。我们使用公式 (3.5.2) 得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t_\theta, \theta) = \det \begin{pmatrix} \gamma''(t_\theta) \\ \gamma'(t_\theta - \theta) \\ \gamma(t_\theta) - \gamma(t_\theta - \theta) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \gamma'(t_\theta) \\ \gamma''(t_\theta - \theta) \\ \gamma(t_\theta) - \gamma(t_\theta - \theta) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} g'(t_\theta) \\ g'(t_\theta - \theta) \end{pmatrix} (C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}} - C_{\mathrm{R}} D_{\mathrm{R}}) < 0,$$

因为 $\det \begin{pmatrix} g' \\ g' \end{pmatrix}(t_\theta)\,(t_\theta - \theta) < 0$，$C_{\mathrm{R}} > 0 > C_{\mathrm{L}}$，$D_{\mathrm{R}} < 0$，以及 $D_{\mathrm{L}} < 0$。由此可知，函数 $h(\cdot, \theta)$ 在区间（$t_0, t_0 + \theta$）内的任意根处，其符号均由正变负。因此，它在那里只有一个根 t_θ。现在我们来计算

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(t_\theta, \theta) = -\det \begin{pmatrix} \gamma'(t_\theta) \\ \gamma''(t_\theta - \theta) \\ \gamma(t_\theta) - \gamma(t_\theta - \theta) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} g'(t_\theta) \\ g'(t_\theta - \theta) \end{pmatrix} C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}} > 0.$$

It 现在根据隐函数定理可知， t_θ 是 θ 的可微函数，并且

$$\frac{\partial t_\theta}{\partial \theta} = \frac{C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}}}{C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}} - C_{\mathrm{R}} D_{\mathrm{R}}} \in (0,1)$$

对于 $\theta \in (0, \theta_0)$。因此， $t_\theta - \theta$ 递减。此外，对于任意 θ， $t_\theta \in (t_0, t_0 + \theta)$，因此，$\lim_{\theta \to 0+} t_\theta = t_0$。令 $\delta = t_{\theta_0} - t_0$, $I = [t_0, t_{\theta_0}]$。我们按照以下规则定义函数 s: $I \to [t_{\theta_0} - \theta_0, t_0]$：对于 $\theta \in (0, \theta_0]$， $s(t_\theta) = t_\theta - \theta$，且 $s(t_0) = t_0$。该函数递减，相应的线段族$S(t) = [g(t)\ g(s(t))]$, $t \in I$构成一个弦域。根据 t_θ的定义，对于任意 $t \in I$，数对 $(s(t)\ t)$ 满足杯形方程 (3.4.2)，此外， $D_{\mathrm{R}}(s,t) < 0$, $D_{\mathrm{L}}(s,t) < 0$。因此，该弦域满足命题 3.4.2 的条件，证明至此完成。 □

3.5.3 如何从一条单弦生长出弦域

现在我们转 向更一般的情形。在本小节中，我们采用以下假设。

条件 **3.5.14 条件**。存在一组数 a_0, b_0, $a_0 < b_0$，满足杯形方程 （3.4.2），即 .,

$$\det \begin{pmatrix} \gamma'(a_0) \\ \gamma'(b_0) \\ \gamma(b_0) - \gamma(a_0) \end{pmatrix} = 0,$$

使得对于某个 $\theta_0 > 0$ ，行列式

$$L(t) = \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(a_0) \\ \gamma'(b_0) \end{pmatrix}$$

在 $t \in (b_0, b_0 + \theta_0)$ 时为负，在 $t \in (a_0 - \theta_0, a_0)$时为正。

注 3.5.15。 如果 (a_0, b_0) 满足杯形方程 (3.4.2) 以及不等式 $D_{\mathrm{R}}(a_0, b_0) < 0$和$D_{\mathrm{L}}(a_0, b_0) < 0$，则条件 3.5.14 成立。

证明。 这立即由以下事实得出： $L(a_0) = L(b_0) = 0$ 以及

$$\frac{L'(a_0)}{D_{\mathrm{L}}(a_0, b_0)} = \frac{L'(b_0)}{D_{\mathrm{R}}(a_0, b_0)} = \det \begin{pmatrix} g'(a_0) \\ g'(b_0) \end{pmatrix} > 0.$$ □

现在可以陈述本小节的主要结果了。

命题 **3.5.16**。 在条件 3.5.14 下，存在 $\delta > 0$ 以及两个可微函数 a, b: $[0, \delta] \to \mathbb{R}$使得

1. $a' < 0 < b'$, $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$；
2. $b(\theta) - a(\theta) = b_0 - a_0 + \theta$，并且数对 $(a(\theta)\ b(\theta))$ 对任意 $\theta \in [0, \delta]$ 都满足杯形方程 (3.4.2)；
3. $D_{\mathrm{L}}(a(\theta)\ b(\theta)) < 0$ 以及 $D_{\mathrm{R}}(a(\theta)\ b(\theta)) < 0$，对任意 $\theta \in (0, \delta]$。

证明。 我们总可以假设 $f'(a_0) = f'(b_0) = 0$。如果情况并非如此，那么我们可以用 $f + c_1 g_1 + c_2 g_2$ 替换函数 f，并选取适当的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。在这种情况下，杯形方程中的行列式和微分中的行列式都不依赖于 c_1 和 c_2 的选择。由于 $\det \begin{pmatrix} g' \\ g' \end{pmatrix}(a_0)\ (b_0) \neq 0$，我们可以选择常数 c_1, c_2，使修改后的函数满足 $f'(a_0) = f'(b_0) = 0$。在这种情形下。

情形： $L(t)$ 的符号与 $f'(t)$ 的符号一致，因此条件 3.5.14 意味着 f' 在 b_0 的右邻域上为负。从杯形区域 (3.4.2) 我们得到 $f(a_0) = f(b_0)$。

让我们证明， κ_3' 在 b_0的某个右邻域内非正。根据条件 2.1.10，函数 $\mathfrak{K}$ 是分段单调的，因此我们可以找到 b_0 的一个右邻域，使其在该邻域内单调且符号不变。于是，$\kappa_3' = \mathfrak{K}\kappa_2'$ 在 b_0 的同一个右邻域内也符号不变。我们知道， $\kappa_3(b_0) = 0$ 并且

$$\kappa_3 = \frac{f'}{g_1'} < 0 \quad \text{to the right of } b_0, \tag{3.5.18}$$

因此在此处 $\kappa_3' \leqslant 0$ 。不失一般性，以下我们假设

$$\kappa_3' \leqslant 0 \quad \text{on } (b_0, b_0 + \theta_0). \tag{3.5.19}$$

我们对 $t \in (b_0,\ b_0 + \theta_0)$写出如下不等式：

$$f(t) - f(a_0) = f(t) - f(b_0) = \int_{b_0}^{t} f'(\tau)\,d\tau = \int_{b_0}^{t} g_1'(\tau)\kappa_3(\tau)\,d\tau \geqslant \big(g_1(t) - g_1(b_0)\big)\kappa_3(t)$$

因为 $g_1' > 0$ 且 $\kappa_3' \leqslant 0$。我们利用这个不等式来估计行列式：

$$\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(a_0) \\ \gamma(t) - \gamma(a_0) \end{pmatrix} \leqslant \det \begin{pmatrix} g_1'(t) & g_2'(t) & f'(t) \\ g_1'(a_0) & g_2'(a_0) & 0 \\ g_1(t) - g_1(a_0) & g_2(t) - g_2(a_0) & (g_1(t) - g_1(b_0))\kappa_3(t) \end{pmatrix} =$$

$$= f'(t)g_1'(a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & \kappa_2(t) & 1 \\ 1 & \kappa_2(a_0) & 0 \\ g_1(t) - g_1(a_0) & g_2(t) - g_2(a_0) & g_1(t) - g_1(b_0) \end{pmatrix}.$$

当 t 从右侧趋近 b_0 时，后一个行列式趋于

$$g_2(b_0) - g_2(a_0) - \kappa_2(a_0)\big(g_1(b_0) - g_1(a_0)\big).$$

由于曲线 g的凸性，这个表达式严格为正。由于 $f'(t) < 0$，因此得到不等式

$$\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(a_0) \\ \gamma(t) - \gamma(a_0) \end{pmatrix} < 0 \tag{3.5.20}$$

当 $t > b_0$ 充分接近 b_0时。必要时缩小 θ_0 ，我们可以假设对于所有 $t \in$ （b_0，$b_0 + \theta_0$），(3.5.19) 和 (3.5.20) 均成立。

同样，我们可以证明，对于所有处于 a_0 的左邻域中的 t ，有 $\kappa_3'(t) \geqslant 0$ ，并且

$$\det \begin{pmatrix} \gamma'(b_0) \\ \gamma'(t) \\ \gamma(b_0) - \gamma(t) \end{pmatrix} > 0. \tag{3.5.21}$$

我们可以再次缩小 θ_0 ，并在下文中假设对于所有 $t \in$ （$a_0 - \theta_0$，a_0），(3.5.21) 均成立。考虑函数

$$h(t, \theta) = \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma'(t - (b_0 - a_0) - \theta) \\ \gamma(t) - \gamma(t - (b_0 - a_0) - \theta) \end{pmatrix}, \qquad \theta \in (0, \theta_0], \quad t \in [b_0, b_0 + \theta].$$

这个函数 函数在其定义域上连续且可微。由 (3.5.20) 和 (3.5.21) 可得

$$h(b_0,\theta) > 0 > h(b_0+\theta,\theta), \qquad \theta \in (0,\theta_0).$$

因此，对于任意这样的 θ，都存在 $b_\theta \in (b_0,\ b_0+\theta)$，使得 $h(b_\theta,\ \theta) = 0$。我们将证明这样的 b_θ 是唯一的。令 $a_\theta = b_\theta - (b_0 - a_0) - \theta$。我们希望验证，函数 $a(\theta) = a_\theta$ 和 $b(\theta) = b_\theta$就是命题中所述存在的函数。

证明的其余部分基于以下引理。

L引理 3.5.17。 如果 $\theta \in (0,\ \theta_0)$ 充分小，那么 $D_{\mathrm{R}}(a_\theta,\ b_\theta) < 0$ 以及 $D_{\mathrm{L}}(a_\theta,\ b_\theta) < 0$。

这个引理的证明相当繁琐 , 我们将在完成命题的证明后给出
。证明的其余部分完全重复命题 3.5.9 的证明。我们可以假设 θ_0 足够小，使引理 3.5.17 的陈述对区间 $(0,\ \theta_0)$ 中的所有 θ 都成立。我们计算 h 的导数:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(b_\theta,\theta) = \det\begin{pmatrix} g'(b_\theta) \\ g'(a_\theta)\end{pmatrix} \cdot \big[C_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{L}} - C_{\mathrm{R}}D_{\mathrm{R}}\big](a_\theta,b_\theta) < 0. \tag{3.5.22}$$

因此，函数 $h(\cdot,\ \theta)$ 在 $(b_0,\ b_0+\theta)$ 上有唯一的根。我们用 b_θ 表示这个唯一的根。可以计算关于 θ 的偏导数:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(b_\theta,\theta) = -\det\begin{pmatrix} g'(b_\theta) \\ g'(a_\theta)\end{pmatrix} \cdot \big[C_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{L}}\big](a_\theta,b_\theta) > 0. \tag{3.5.23}$$

隐函数定理表明， b_θ 是 θ 的可微函数，并且

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} = \frac{C_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{L}}}{C_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{L}} - C_{\mathrm{R}}D_{\mathrm{R}}} \in (0,1) \tag{3.5.24}$$

对于 $\theta \in (0,\ \theta_0)$。由此可知， $a_\theta = b_\theta - \theta - (b_0 - a_0)$ 递减，并且

$$\lim_{\theta\to 0+} b_\theta = b_0, \qquad \lim_{\theta\to 0+} a_\theta = a_0.$$

命题 3.5.16 得证。 □

引理 3.5.17 的证明。我们只讨论 D_{R}，另一个不等式是对称的。由于 $f'(b_0) = 0$ 且 $f'(t) < 0$ 对于 $t \in (b_0, b_0+\theta_0)$ 成立，因此我们有 $f''(b_0) \leqslant 0$。又由于 $f'(a_0) = 0$，由此得到 $D_{\mathrm{R}}(a_0,b_0) \leqslant 0$。如果 $D_{\mathrm{R}}(a_0,b_0) < 0$，那么由连续性可知，当 θ 足够小时，$D_{\mathrm{R}}(a_\theta,b_\theta) < 0$。同样的推理表明 $D_{\mathrm{L}}(a_0,b_0) \leqslant 0$；如果 $D_{\mathrm{L}}(a_0,b_0) < 0$，那么当 θ 足够小时，$D_{\mathrm{L}}(a_\theta,b_\theta) < 0$。

考虑 $D_{\mathrm{L}}(a_0,b_0)$ 和 $D_{\mathrm{R}}(a_0,b_0)$ 中一个严格为负、另一个为零的情形。两个微分都为零的情形稍后讨论。不失一般性，假设 $D_{\mathrm{L}}(a_0,b_0) < 0$ 且 $D_{\mathrm{R}}(a_0,b_0) = 0$。那么 $f''(b_0) = 0$，因此

$$\kappa_3'(b_0) = \frac{f''(b_0)g_1'(b_0) - f'(b_0)g_1''(b_0)}{(g_1'(b_0))^2} = 0; \qquad \mathfrak{K}(b_0) = \frac{\kappa_3'(b_0)}{\kappa_2'(b_0)} = 0.$$

条件 2.1.10 意味着 $\mathfrak{K}'$ 在 b_0 的某个右邻域内符号不变。由 (3.5.19) 可知， $\mathfrak{K}$ 在 $(b_0, b_0+\theta_0)$ 上非正，因此 $\mathfrak{K}' \leqslant 0$ 在 b_0 的某个右邻域内也如此。注意到

$$\mathfrak{K}' \text{ is not identically zero in any right neighborhood of } b_0. \tag{3.5.25}$$

反设， $\mathfrak{K}'$ 在 b_0的某个右邻域内恒为零。于是函数 $\mathfrak{K}$ 在那里为常数，并且与 $\mathfrak{K}(b_0) = 0$一致。因此，在同一个邻域内 $\kappa_3' = 0$。于是 κ_3 在那里为常数，并等于 $\kappa_3(b_0) = 0$。这与（3.5.18）矛盾。

不等式（3.5.22）和（3.5.23）对 $\theta = 0$成立，因此根据连续性，当 θ 充分小时，它们也成立。于是，

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} = \frac{C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}}}{C_{\mathrm{L}} D_{\mathrm{L}} - C_{\mathrm{R}} D_{\mathrm{R}}} > 0. \tag{3.5.26}$$

令 $F(\theta) = D_{\mathrm{R}}(a_\theta, b_\theta)$。由（3.5.11）可得

$$F'(\theta) = \Big(\kappa_2'(b_\theta) g_1'(b_\theta) \mathfrak{K}'(b_\theta) + \Big[\frac{(g_1'\kappa_2')'}{g_1'\kappa_2'}(b_\theta) - \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}(b_\theta)\Big] F(\theta)\Big) \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta}.$$

我们使用积分因子

$$M(\theta) = \exp\Big(- \int_0^\theta \Big[\frac{(g_1'\kappa_2')'}{g_1'\kappa_2'}(b_\eta) - \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}(b_\eta)\Big] \frac{\partial b_\eta}{\partial \eta} d\eta\Big), \qquad \theta > 0,$$

从而得到

$$\frac{d}{d\theta}\big(F(\theta) M(\theta)\big) = M(\theta) \kappa_2'(b_\theta) g_1'(b_\theta) \mathfrak{K}'(b_\theta) \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} \leqslant 0. \tag{3.5.27}$$

我们知道 $F(0) = 0$，因此对于 $\eta > 0$， $F(\eta) \leqslant 0$。如果对于某个 $\eta > 0$， $F(\eta) = 0$，那么（3.5.27）中的表达式在 $(0, \eta)$ 上恒为零。因此， $\mathfrak{K}'(b_\theta) = 0$ 在 $(0, \eta)$ 上也成立，这与（3.5.25）矛盾。因此，当 $\theta > 0$ 足够小时，$D_{\mathrm{R}}(a_\theta, b_\theta) = F(\theta) < 0$。不等式 $D_{\mathrm{L}}(a_\theta, b_\theta) < 0$ 由连续性以及我们的假设 $D_{\mathrm{L}}(a_0, b_0) < 0$ 得出。

剩下需要证明的是 $D_{\mathrm{L}}(a_0, b_0) = D_{\mathrm{R}}(a_0, b_0) = 0$ 的情形。在这种情况下， $f''(a_0) = f''(b_0) = 0$，在 b_0 的右邻域内为 $\mathfrak{K}' \leqslant 0$，并且在 a_0 的左邻域内为 $\mathfrak{K}' \geqslant 0$。我们不考虑 f，而考虑函数

$$\tilde{f} = (1 - \chi_{[a_0, b_0]}) f + \chi_{[a_0, b_0]} f(a_0),$$

以及相应的函数 $\tilde{\mathfrak{K}}$。函数 $\tilde{f}$ 是 C^2-光滑的。对于任意 θ，有序对 (a_θ, b_θ) 满足杯形方程 (3.4.2)，其中以 f 代替 f。此外，在 (a_0, b_0) 之外，我们有 $\mathfrak{K} = \tilde{\mathfrak{K}}$。由 (3.5.25) 可知，函数 $\mathfrak{K} = \tilde{\mathfrak{K}}$ 在 (b_0, b_θ) 上不是常数。对于任意 $t_0 \in (a_0, b_0)$，我们得到 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 满足推论 3.5.13 的假设，从而推出 $D_{\mathrm{R}}(a_\theta, b_\theta) < 0$，且 $D_{\mathrm{L}}(a_\theta, b_\theta) < 0$。

□

3.6 力

定义 3.6.1. 设 B 是围栏 $\Omega(I)$ 上的贝尔曼候选函数。该函数

$$\mathcal{F}_I = \frac{\kappa_2 - \kappa}{\kappa_2'} \beta_2' \tag{3.6.1}$$

在 I 上称为其力函数。

注 3.6.2. 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 是一个弦域，其对应函数为 s: $I \to \mathbb{R}$，并且B 是 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 上的标准贝尔曼候选函数。那么

$$\mathcal{F}_I(t) = \frac{D}{g_1'(t)\kappa_2'(t)}, \qquad t \in I,$$

其中 $D = D_{\mathrm{R}}(s, t)$，若 $t > s(t)$，且 $D = D_{\mathrm{L}}(t, s)$，若 $t < s(t)$。

证明。 这直接由公式 (3.4.7)、(3.5.1) 和 (3.6.1) 得出。 □

注 3.6.3。 力函数 $\mathcal{F}$ 在其定义域上非正。

证明。 若 $\Omega(I)$ 是右切域，则 $\beta_2' \leqslant 0$ （见注 3.3.2），且 $\kappa_2 - \kappa > 0$ （这可由 Ω 的几何性质得出）。对于左切线的情形，两个不等式的方向都相反。因此，$\mathcal{F} \leqslant 0$。

对于弦域的情况，两个微分 D_{L} 和 D_{R} 均为负，因此 $\mathcal{F} \leqslant 0$。 □

3.6.1 篱笆拼接

在这部分　我们提出了在围栏上拼接两个贝尔曼候选函数的充要条件。

es 与 com 的组合
　　mon 点。我们指的是以下情况。

命题 3.6.4。设 t_-、t_0、$t_+ \in \mathbb{R}$、$t_- \leqslant t_0 \leqslant t_+$，设 $I_- = [t_-, t_0]$、$I_+ = [t_0, t_+]$。假设 $\Omega(I_\pm)$是两个带有贝尔曼候选函数 $B_\pm$ 的围栏，其对应的函数为 $w_\pm$、$S_\pm$、$\beta_\pm$。设$\operatorname{int}\Omega(I_-) \cap \operatorname{int}\Omega(I_+) = \varnothing$。假设 *that*

$$\beta_+(t_0) = \beta_-(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_0. \tag{3.6.2}$$

然后，由公式定义的函数 B

$$B(x) = \begin{cases} B_-(x), & x \in \Omega(I_-); \\ f(t_0) + \langle \beta_0, x - g(t_0) \rangle, & x \in \operatorname{ind}\operatorname{conv}(S_-(t_0) \cup S_+(t_0)); \\ B_+(x), & x \in \Omega(I_+) \end{cases} \tag{3.6.3}$$

在其定义域上是一个 C^1-光滑的贝尔曼候选函数 (参见诱导凸包的定义 *3.1.1*)。

证明。 C^1 的光滑性可由 (3.6.2) 和 $B_\pm$ 的 C^1-光滑性推出。由此， B 的凹性可由命题 3.1.2 得出。

□

推论 3.6.5。若将 (3.6.2) 替换为力等式$\mathcal{F}_{I_+}(t_0) = \mathcal{F}_{I_-}(t_0)$，命题 3.6.4 的结论仍然成立。

证明。由于 κ_2 和 κ_3 不依赖于围栏，因此将 (3.2.6) 和 (3.2.10) 应用于 t_0，可得 $\beta_+(t_0) = \beta_-(t_0)$。

□

现在我们来考察第 3.3 节和第 3.4 节中研究过的围栏拼接的具体情形。

3.6.2 力与尾部

在定义 3.6.1 中，力定义在围栏上。对于给定的弦域，我们有一个定义在该定义域内部的力函数。为了通过切线将贝尔曼候选函数从弦域延拓出去，我们希望将力延伸到域外。

设 $I = [t_-, t_+]$ 是一个区间，$\Omega_{\text{ch}}(I)$ 是一个弦域，其对应函数为 $s\colon I \to \mathbb{R}$，满足对于 $t \in I$，$s(t) \leqslant t$。我们按如下方式定义弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 的右侧力。我们将 t^{R} 定义为数 τ、$\tau \geqslant t_+$ 的上确界，使得在右切域 $\Omega_{\text{R}}([t_+, \tau])$ 上存在一个满足以下条件的标准贝尔曼候选函数

$$\mathcal{F}_{[t_-, t_+]}(t_+) = \mathcal{F}_{[t_+, \tau]}(t_+).$$

请注意　t^{R} 可以等于 $+\infty$。函数 $\mathcal{F}_I$ 和 $\mathcal{F}_{[t_+, t^{\text{R}}]}$ 的拼接将称为 th　　e
右侧力　　弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 的函数。

定义 3.6.6. 函数

$$F_{\text{R}}(t, \Omega_{\text{ch}}(I)) = \begin{cases} \mathcal{F}_I(t), & t \in I; \\ \mathcal{F}_{[t_+, t^{\text{R}}]}(t), & t \in [t_+, t^{\text{R}}], \end{cases}$$

被称为弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 的右力函数。集合 (t_-, t^{R}) 被称为弦域 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 的右尾部</style)。

注 3.6.7. 如果 $t^{\text{R}} < +\infty$，那么 $\mathcal{F}_{[t_+, t^{\text{R}}]}(t^{\text{R}}) = 0$。

证明。Thi 这直接由 t^{R} 的极大性、连续性以及力的非正性得出。 □

注记 3.6.8。若 $t_+ < t^{\mathrm{R}} < +\infty$，则存在 $\bar{t}$, $\bar{t} < t^{\mathrm{R}}$，使得曲线 γ 的挠率在 $(\bar{t}, t^{\mathrm{R}})$ 上严格为正。若 $t^{\mathrm{R}} > t_1 \geqslant t_+$，且曲线 γ 的挠率在区间 (t_1, t_2) 上非正，则 $t^{\mathrm{R}} > t_2$。

证明。由条件 2.1.10，我们可以找到 $\bar{t}$, $\bar{t} < t^{\mathrm{R}}$，它们充分接近 t^{R}，使得要么 $\mathfrak{K}' > 0$ 在 $(\bar{t}, t^{\mathrm{R}})$ 上，要么 $\mathfrak{K}' \leqslant 0$ 在 $(\bar{t}, t^{\mathrm{R}})$ 上。若 $\mathfrak{K}' \leqslant 0$，则对 $t_0 = \bar{t}$, $t = t^{\mathrm{R}}$ 使用 (3.2.13)，得到 $\mathcal{F}_{[t_+, t^{\mathrm{R}}]}(t^{\mathrm{R}}) < 0$，这与注记 3.6.7 矛盾。因此 $\mathfrak{K}' > 0$ 在 $(\bar{t}, t^{\mathrm{R}})$ 上。第二个结论由第一个结论立即得出。 □

类似地，我们定义左力函数和弦域的左尾部。设 $I = [t_-, t_+]$ 为一个区间，$\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 为弦域，其对应的函数为 $s\colon\ I \to \mathbb{R}$，满足 $s(t) \geqslant t$，其中 $t \in I$。我们将 t^{L} 定义为满足以下条件的数 τ、$\tau \leqslant t_-$ 的下确界：存在定义在左切域 $\Omega_{\mathrm{L}}([\tau, t_-])$ 上的标准贝尔曼候选函数，使得

$$\mathcal{F}_{[\tau, t_-]}(t_-) = \mathcal{F}_{[t_-, t_+]}(t_-).$$

注意，t^{L} 可以等于 $-\infty$。

定义 3.6.9。函数

$$F_{\mathrm{L}}(t, \Omega_{\mathrm{ch}}(I)) = \begin{cases} \mathcal{F}_{[t^{\mathrm{L}}, t_-]}(t), & t \in [t^{\mathrm{L}}, t_-]; \\ \mathcal{F}_I(t), & t \in I \end{cases}$$

称为弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 的左力函数。集合（t^{L}，t_+）称为弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 的左尾部。

下面的注是注 3.6.7 和注 3.6.8 的“左侧”对应版本。

注 3.6.10。若 $t^{\mathrm{L}} > -\infty$，则 $\mathcal{F}_{[t^{\mathrm{L}}, t_-]}(t^{\mathrm{L}}) = 0$。若 $-\infty < t^{\mathrm{L}} < t_-$，则存在 $\bar{t}$、$t^{\mathrm{L}} < \bar{t}$，使得曲线 γ 的挠率在（t^{L}，$\bar{t}$）上严格为负。若 $t^{\mathrm{L}} < t_2 \leqslant t_-$，且曲线$\gamma$ 的挠率在区间（t_1，t_2）上非负，则 $t^{\mathrm{L}} < t_1$。

注 3.6.11. 假设 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$ 是一个弦域，其上弦为 $[g(a)\ g(b)]$。由于弦域外的力函数不依赖于域内的叶状分解，因此对于弦域外的 t，我们将使用记号$F_{\mathrm{R}}(t;\ a,\ b)$，而不使用 $F_{\mathrm{R}}(t,\ \Omega_{\mathrm{ch}}(I))$；并使用 $F_{\mathrm{L}}(t;\ a,\ b)$，而不使用 $F_{\mathrm{L}}(t,\ \Omega_{\mathrm{ch}}(I))$。这些力满足以下恒等式：

$$F_{\mathrm{R}}(t;\ a,\ b) = \text{指数}\left(-\int_{b}^{t} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\right)\left(\int_b^t \exp\left(\int_b^\tau \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa} g_1'(b)\kappa_2'(b)\right)\mathfrak{K}'(\tau)\, d\tau + \frac{D_{\mathrm{R}}(a,\ b)}{\qquad}\right), \qquad t \in [b, t^{\mathrm{R}}]; \quad (3.6.4)$$

$$F_{\mathrm{L}}(t; a, b) = \exp\left(\int_t^a \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\right)\left(-\int_t^a \exp\left(-\int_\tau^a \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\right)\mathfrak{K}'(\tau)\, d\tau + \frac{D_{\mathrm{L}}(a, b)}{g_1'(a)\kappa_2'(a)}\right), \quad t \in [t^{\mathrm{L}}, a]. \quad (3.6.5)$$

类似地，我们定义来自无穷远点的力和尾部。假设 $t \in \mathbb{R}$，且右切域 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,\ t)$ 上存在标准贝尔曼候选函数（参见命题 3.3.6）。令$t^{\mathrm{R}} \leqslant +\infty$ 为此类 t 的上确界。

定义 3.6.12. 该函数

$$F_{\mathrm{R}}(t, -\infty) = \mathcal{F}_{(-\infty, t^{\mathrm{R}})}(t), \quad t \in (-\infty, t^{\mathrm{R}})$$

称为 $-\infty$ 的右力函数。射线（$-\infty$，t^{R}）称为 $-\infty$ 的右尾部。

类似地，我们定义 $+\infty$ 的左力函数和左尾部。令 $t^{\text{L}} \geqslant -\infty$ 为满足以下条件的 $t \in \mathbb{R}$ 的下确界：在左切域 $\Omega_{\text{L}}(t^{\text{L}},\ +\infty)$ 上存在标准贝尔曼候选函数（见命题 3.3.7）。

定义 3.6.13. 函数

$$F_{\text{L}}(t, +\infty) = \mathcal{F}_{(t^{\text{L}},+\infty)}(t), \quad t \in (t^{\text{L}}, +\infty)$$

称为 $+\infty$ 的左力函数。射线 $(t^{\text{L}}, +\infty)$ 称为 $+\infty$ 的左尾部。

3.6.3 力的性质

尽管力的表达式对于任意点对 (a_0, b_0) 都有定义，但当我们写出与此类点对相关的力时，总是假定点对 (a_0, b_0) 满足杯形方程 (3.4.2)。我们研究力的微分性质。

命题 3.6.14. 设 $\Omega_{\text{ch}}([a, b], *)$ 为一个弦域。那么其力在相应尾部上满足以下微分方程：

$$F' = \mathfrak{K}' - \beta_2' = \mathfrak{K}' - \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa} F, \tag{3.6.6}$$

其中 F 为 F_{R} 或 F_{L}。

证明。 考虑到定义 (3.6.1)，该结论可通过将 (3.2.10) 除以 κ_2' 并进行微分得到。 □

注 3.6.15. 函数 $F_{\text{R}} - \mathfrak{K}$ 和 $F_{\text{L}} - \mathfrak{K}$ 分别在其定义域上严格递增和严格递减。

证明。 根据 (3.6.6)， $F' - \mathfrak{K}' = -\frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa} F$。我们始终有 $F < 0$ 和 $\kappa_2' > 0$。只需注意，在右侧力的情况下， $\kappa_2 - \kappa > 0$；而在左力的情况下， $\kappa_2 - \kappa < 0$。 □

引理 3.6.16. 设 $\Omega_{\text{ch}}(I)$ 是一个具有上弦 $[g(a)\ g(b)]$ 的弦域。对于固定的 $t, t > b$，将右力函数 $F_{\text{R}}(t, a(b)\ b)$ 视为 b 的函数。那么它关于 b 的导数满足以下等式：

$$\frac{\partial F_{\text{R}}(t, a(b), b)}{\partial b} = \frac{D_{\text{R}}(a, b)}{g_1'(b)} \cdot \Big[\frac{1}{\kappa_2(b) - \kappa_{\text{R}}(b)} - \frac{1}{\kappa_2(b) - \kappa_{\text{chord}}(b)}\Big] \cdot \exp\Big(-\int_b^t \frac{\kappa_2'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa_{\text{R}}(\tau)} d\tau\Big), \tag{3.6.7}$$

其中 κ_{R} 是右切线的斜率(参见(2.1.5))，而 $\kappa_{\text{chord}}(b)$ 是上弦的斜率 *of* 弦 l 定义域，即，

$$\kappa_{\text{chord}}(b) = \frac{g_2(b) - g_2(a)}{g_1(b) - g_1(a)}. \tag{3.6.8}$$

对于固定的 $t, t < a$，我们得到一个对称形式：

$$\frac{\partial F_{\text{L}}(t, a, b(a))}{\partial a} = \frac{D_{\text{L}}(a, b)}{g_1'(a)} \cdot \Big[\frac{1}{\kappa_2(a) - \kappa_{\text{L}}(a)} - \frac{1}{\kappa_2(a) - \kappa_{\text{chord}}(a)}\Big] \cdot \exp\Big(\int_t^a \frac{\kappa_2'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa_{\text{L}}(\tau)} d\tau\Big), \tag{3.6.9}$$

其中 κ_{L} 是左切线的斜率（见（2.1.5））， 而 $\kappa_{\text{chord}}(a) = \kappa_{\text{chord}}(b)$ 由（3.6.8）给出。

证明。 我们对 $F_{\mathrm{R}}(t,\ a,\ b)$ 关于 b 求导（见（3.6.4））， 其中将 $a=a(b)$ 视为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\mathrm{R}}(t,a(b),b)}{\partial b} &= \frac{\kappa_2'(b)}{\kappa_2(b)-\kappa(b)}F_{\mathrm{R}}(t,a,b)+\Big\{-\mathfrak{K}'(b)-\frac{\kappa_2'(b)}{\kappa_2(b)-\kappa(b)}\int_b^t\exp\Big(\int_b^\tau\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau+\\ &\quad+\frac{1}{g_1'(b)\kappa_2'(b)}\frac{dD_{\mathrm{R}}(a(b),b)}{db}-\frac{(g_1'(b)\kappa_2'(b))'}{(g_1'(b)\kappa_2'(b))^2}D_{\mathrm{R}}(a,b)\Big\}\exp\Big(-\int_b^t\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big) \qquad (3.6.10)\\ &= \Big\{-\mathfrak{K}'+\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\cdot\frac{D_{\mathrm{R}}}{g_1'\kappa_2'}+\frac{1}{g_1'\kappa_2'}\cdot\frac{dD_{\mathrm{R}}}{db}-\frac{(g_1'\kappa_2')'}{(g_1'\kappa_2')^2}D_{\mathrm{R}}\Big\}\exp\Big(-\int_b^t\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big).\end{aligned}$$

我们使用公式 (3.5.11) 来简化大括号中的表达式。注意，(3.6.10) 中的 κ 与 (3.5.11) 中的不同。我们用 κ_{R} 表示 (3.6.10) 中出现的那个，用 κ_{chord} 表示 (3.5.11) 中出现的那个：

$$\begin{aligned}&\Big\{-\mathfrak{K}'+\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{R}}}\cdot\frac{D_{\mathrm{R}}}{g_1'\kappa_2'}+\frac{1}{g_1'\kappa_2'}\cdot\frac{dD_{\mathrm{R}}}{db}-\frac{(g_1'\kappa_2')'}{(g_1'\kappa_2')^2}D_{\mathrm{R}}\Big\}=\\ &\quad=-\mathfrak{K}'+\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{R}}}\cdot\frac{D_{\mathrm{R}}}{g_1'\kappa_2'}+\frac{1}{g_1'\kappa_2'}\cdot\Big[\kappa_2'g_1'\mathfrak{K}'+\Big(\frac{(g_1'\kappa_2')'}{g_1'\kappa_2'}-\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{chord}}}\Big)D_{\mathrm{R}}\Big]-\frac{(g_1'\kappa_2')'}{(g_1'\kappa_2')^2}D_{\mathrm{R}}=\\ &\quad=\frac{D_{\mathrm{R}}}{g_1'}\Big(\frac{1}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{R}}}-\frac{1}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{chord}}}\Big).\end{aligned}$$

□

3.7 线性区域

如第 3.1 节所述，我们根据固定边界上的点数对线性区域进行分类。对于每个线性区域 $\mathfrak{L}$，我们将在 $\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 上定义相应的力函数。

3.7.1 角

我们研究的第一个线性区域是角，它在固定边界上只有一个点 $g(u)$。回想一下， $S_{\mathrm{L}}(u)$ 和 $S_{\mathrm{R}}(u)$ 是从点 $g(u)$ 出发、与 Ω 的自由边界相切的左切线段和右切线段；而 $T(u)$ 是一个闭曲边三角形，其顶点为 $g(u)$，边分别为 $S_{\mathrm{L}}(u)$、$S_{\mathrm{R}}(u)$，以及 Ω 上位于两个切点之间的部分。我们将用符号 $\Omega^{\text{ang}}(u)$ 表示这个线性区域；注意，从几何上看，$\Omega^{\text{ang}}(u)=T(u)$。

定义 3.7.1。 角 $\Omega^{\text{ang}}(u)$ 上的仿射函数 B，如果向量 $\gamma'(u)$ 与 $\Omega^{\text{ang}}(u)$ 上的 B 的图平行，则称其为 $\Omega^{\text{ang}}(u)$ 上的<style id='6'>标准候选函数。

角是命题 3.6.4 中出现的线性区域，其中 $\Omega(I_-)$ 是右切域，而 $\Omega(I_+)$ 是左切域，参见图 3.3。由 (3.6.3) 定义的函数 B 是该角上的标准候选函数。关于这一情形的图形表示，参见第 3.7.3 节中的图 3.9。

3.7.2 固定边界上有两个点的线性区域

考虑一个线性区域 $\mathfrak{L}$，它在固定边界 $\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 上有两个点 $g(a)$ 和 $g(b)$，假设 $a<b$ 和 $[g(a)\ g(b)]\subset\Omega$。显然，线段 $[g(a)\ g(b)]$ 是线性区域边界的一部分。自然可以假设有两条与自由边界相切的极值线段，$S(a)$ 和 $S(b)$，分别从左侧和右侧界定我们的线性区域。如果它们的方向相同，

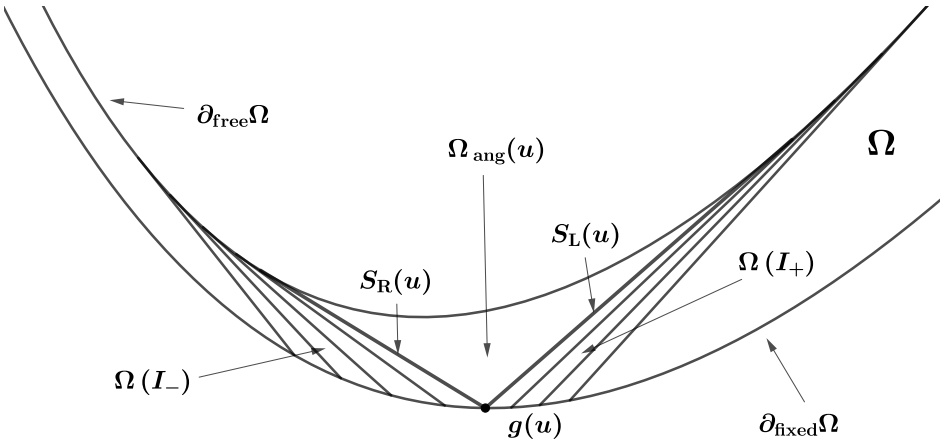


图 3.3：带有相邻区域的角 $\Omega^{\mathrm{ang}}(u)$。

也就是说，它们要么是 $S_{\mathrm{L}}(a)$ 和 $S_{\mathrm{L}}(b)$，要么是 $S_{\mathrm{R}}(a)$ 和 $S_{\mathrm{R}}(b)$，那么这个线性区域称为一辆无轨电车，分别称为左侧或右侧无轨电车。这些无轨电车记作 $\Omega_{\mathrm{tr},\ \mathrm{L}}(a,\ b)$ 和 $\Omega_{\mathrm{tr},\ \mathrm{R}}(a,\ b)$，见图 3.4 和图 3.5。

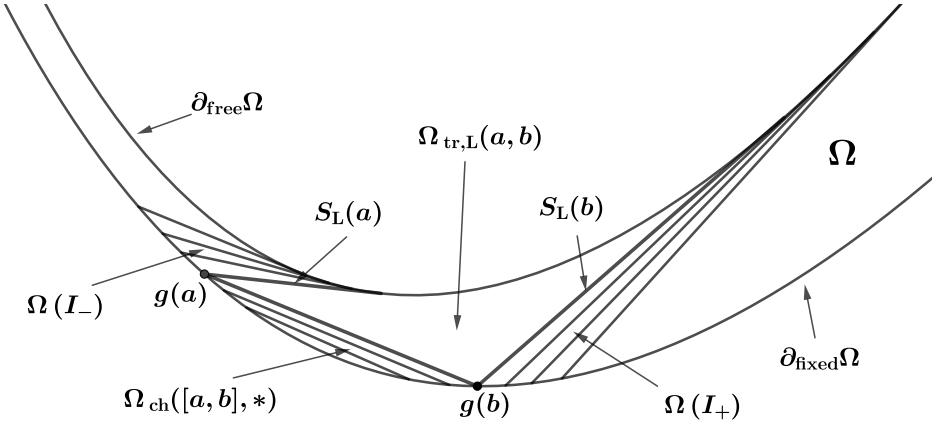


图 3.4：带有相邻区域的无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr},\ \mathrm{L}}(a,\ b)$。

边界切线方向不同的线性区域，即 $S_{\mathrm{R}}(a)$ 和 $S_{\mathrm{L}}(b)$，称为小鸟，见图 3.6，记作 $\Omega_{\mathrm{bird}}(a,\ b)$。显然，相反的情况，即 $S_{\mathrm{L}}(a)$ 和$S_{\mathrm{R}}(b)$，是不可能的，因为这两条线段彼此相交。

与角的情形一样，我们假设 $g(a)$ 和 $g(b)$ 是粘合两条不同围栏的点。因此，共有三条围栏：切域 $\Omega(I_-)$ 沿切线 $S(a)$ 与 $\mathfrak{L}$ 相邻，切域 $\Omega(I_+)$ 沿 $S(b)$ 与 $\mathfrak{L}$ 相邻，以及弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$。

命题 3.7.2。 设 $I_- = [t_-, a]$、 $I_+ = [b, t_+]$. 是$\Omega(I_\pm)$上的贝尔曼候选函数，

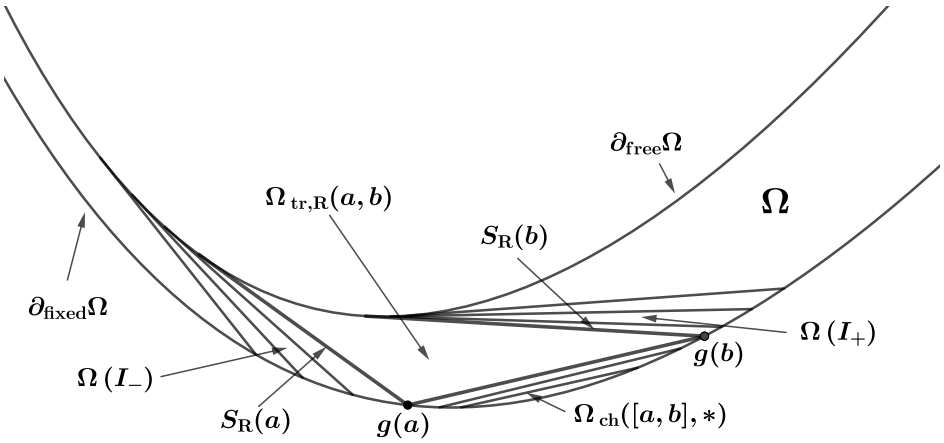


图 3.5：带有相邻区域的无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr,\ R}}(a,\ b)$。

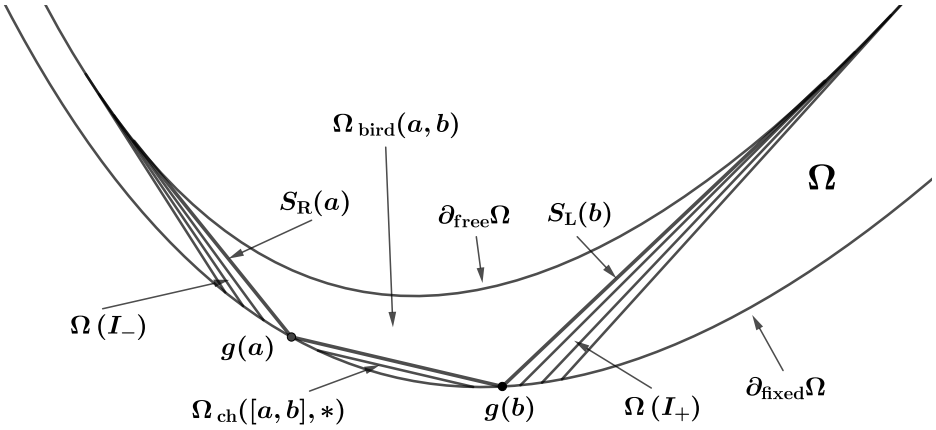


图 3.6：带有相邻区域的小鸟 $\Omega_{\mathrm{bird}}(a,\ b)$。

且 $B_{\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)}$ 是$\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b]$、$*)$上的贝尔曼候选函数。假设两对围栏分别满足粘合条件，即：

$$\mathcal{F}_{I_-}(a)=F_{\mathrm{L}}(a,\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)),\qquad \mathcal{F}_{I_+}(b)=F_{\mathrm{R}}(b,\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)). \tag{3.7.1}$$

设 $B_{\mathfrak{L}}(x)$ 是由方程定义的仿射函数

$$\det\begin{pmatrix} g_1'(a) & g_2'(a) & f'(a)\\ g_1'(b) & g_2'(b) & f'(b)\\ x_1-g_1(a) & x_2-g_2(a) & B_{\mathfrak{L}}(x)-f(a)\end{pmatrix}=0,\quad x\in\mathfrak{L}. \tag{3.7.2}$$

那么，由公式定义的函数 B

$$B(x) = \begin{cases} B_-(x), & x \in \Omega(I_-); \\ B_{\mathfrak{L}}(x), & x \in \mathfrak{L}; \\ B_+(x), & x \in \Omega(I_+); \\ B_{\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)}, & x \in \Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*) \end{cases}$$

是在其定义域上 C^1-光滑的贝尔曼候选函数。

证明。 条件 (2.1.2) 蕴含

$$\det \begin{pmatrix} g_1'(a) & g_2'(a) \\ g_1'(b) & g_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0,$$

因此，(3.7.2) 正确定义了 $B_{\mathfrak{L}}$ 。杯形方程 (3.4.2) 保证仿射函数 $B_{\mathfrak{L}}$ 与 $B_{\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)}$ 在 $\mathfrak{L}$ 上的唯一仿射延拓一致。因此，它也与 (3.6.3) 中针对两对拼接围栏的函数的仿射部分一致：对于 $\Omega(I_-)$ 和 Ω_{ch}，以及对于 Ω_{ch} 和 $\Omega(I_+)$。因此，命题 3.6.4 表明，函数 B 是一个 C^1-光滑的贝尔曼候选函数。 □

定义 3.7.3. 由 (3.7.2) 定义、在有两个点位于固定边界上的线性区域 $\mathfrak{L}$ 中的函数 $B_{\mathfrak{L}}$，称为该处的标准候选函数。

注 3.7.4. 由 (3.7.2) 可得仿射函数 $B_{\mathfrak{L}}$ 的导数公式如下：

$$\beta_2 = \frac{\partial B_{\mathfrak{L}}}{\partial x_2} = \frac{\det \begin{pmatrix} g_1'(a) & f'(a) \\ g_1'(b) & f'(b) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g_1'(a) & g_2'(a) \\ g_1'(b) & g_2'(b) \end{pmatrix}} = \frac{\kappa_3(b) - \kappa_3(a)}{\kappa_2(b) - \kappa_2(a)}. \tag{3.7.3}$$

定义 3.7.5. 设 $\mathfrak{L}$ 为一个在固定边界上有两个点的线性区域：$g(a)\ g(b) \in \mathfrak{L} \cap \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$，$g(a) \prec g(b)$。定义 $\{a, b\}$ 上的力函数 F 如下：

$$F(a) = \frac{D_{\mathrm{L}}(a,b)}{g_1'(a)\kappa_2'(a)}, \qquad F(b) = \frac{D_{\mathrm{R}}(a,b)}{g_1'(b)\kappa_2'(b)}.$$

请注意，小鸟可以视为无轨电车与角的并集（有两种对称方式）：

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathrm{bird}}(a,b) &= \Omega_{\mathrm{tr,R}}(a,b) \biguplus \Omega_{\mathrm{R}}(b,b) \biguplus \Omega_{\mathrm{ang}}(b); \\ \Omega_{\mathrm{bird}}(a,b) &= \Omega_{\mathrm{ang}}(a) \biguplus \Omega_{\mathrm{L}}(a,a) \biguplus \Omega_{\mathrm{tr,L}}(a,b). \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

需要注意的是，只要将 $\bigcup$ 替换为 $\biguplus$，等式两边作为平面区域就是相等的。(3.7.4) 中的符号 $\biguplus$ 表示如下含义：如果定义在该区域上的函数 B 是连续的，并且其在公式一侧每个单独子域上的限制都是标准候选函数，那么该函数 B 在公式另一侧的每个子域上也都是标准候选函数。这很容易由命题 3.6.4 和命题 3.7.2 推得。该等式的图形表示见图 3.14（参见下文第 3.7.3 节）。

为便于形式化，我们再引入两个“线性区域”。首先，有时我们会将一条单弦 $[g(a)\ g(b)]$, where (a, b)（满足杯形方程 (3.4.2)）视为一个线性区域 $\mathfrak{L}$。$[g(a)\ g(b)]$ 内部的标准候选函数 B 由线性性给出。我们注意到，命题 3.7.2 对以下两个“隐含”子情形也成立。第一种情形是，弦$[g(a)\ g(b)]$ 与 Ω 的自由边界相切，$\Omega(I_-) = \Omega_{\mathrm{L}}(I_-)$ 是左切域，而 $\Omega(I_+) = \Omega_{\mathrm{R}}(I_+)$ 是右切域。由粘合的切域得到弦域（见图 3.7）。

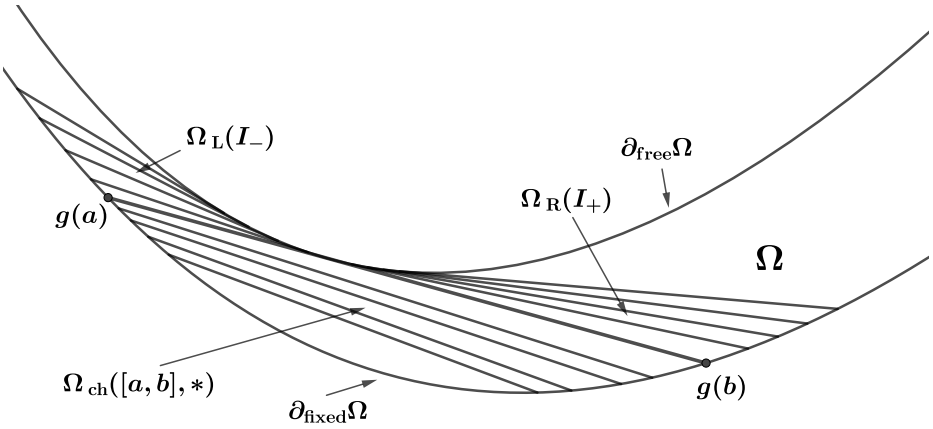


图 3.7：一个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$，其上附有切域。

第二种子情形是，弦 $[g(a)\ g(b)]$ 不与自由边界相切，并且 $\Omega(I_\pm) = \Omega_{\mathrm{ch}}(*,[a,b])$ 是同一弦域的右参数化和左参数化，该弦域位于弦 $[g(a)\ g(b)]$上方。在此子情形中，我们得到两个粘合弦状区域 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,[a,b])$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)$；当无法将它们的并集视为一个弦域时（若 $D_{\mathrm{R}}(a,b) = 0$ 或 $D_{\mathrm{L}}(a,b) = 0$），就会出现这种情况，见图 3.8。

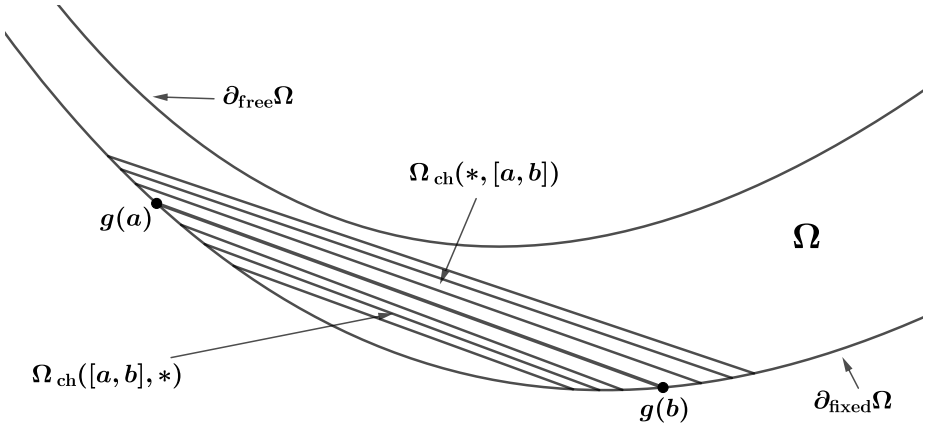


图 3.8：两个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,\ [a,b])$，两者之间有一条弦。

其次，有时将单切线 $\Omega_{\mathrm{R}}(u,\ u)$ 或 $\Omega_{\mathrm{L}}(u,\ u)$ 视为线性区域 $\mathfrak{L}$ 会很有用。此外，无论看起来多么奇怪，将它视为固定边界上有两个点的定义域都是很自然的。我们将这条单切线视为零宽度无轨电车，即其底边是弦 $[g(u)\ g(u)]$。这可以看作弦上无轨电车序列的极限，该序列不断收缩，最终趋于点 u。仅当 $u = c_i$ 对某个 i 成立时，它才会出现，其中 c_i 是一个来自 ..... 的单点根

定义 2.1.12. 该定义域中的标准候选函数 B 可通过在（3.7.2 中取极限得到 ）：

$$\det\begin{pmatrix} g_1'(u) & g_2'(u) & f'(u) \\ g_1''(u) & g_2''(u) & f''(u) \\ x_1 - g_1(u) & x_2 - g_2(u) & B_{\mathfrak{L}}(x) - f(u) \end{pmatrix} = 0, \quad x \in \mathfrak{L}. \tag{3.7.5}$$

当同一方向的两个切域上的标准候选函数无法拼接成这些定义域并集上的标准候选函数时，这一构造就会出现在它们之间。这种拼接的障碍在于点 u 处的力消失。

3.7.3 基本域的图形表示

正如第 3.1 节中所述，我们为叶状结构的组合结构提供一种图形表示。本小节的内容基本上重复了 [17] 中类似的构造。我们从最简单的局部叶状结构的表示开始：围栏（切域和弦域）以及一些线性区域。在第 3.8.2 节中，我们将给出一种图形表示，用于描述整个定义域 Ω_ε 的叶状结构。

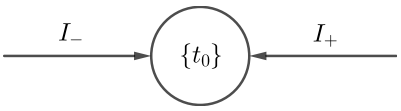
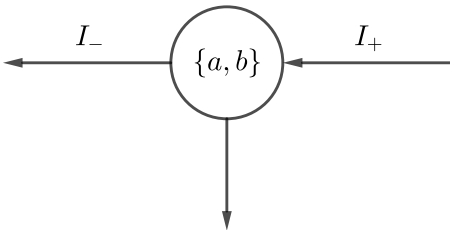


图 3.9：带有相邻切线区域的角 $\Omega^{\mathrm{ang}}(t_0)$ 的图形表示。



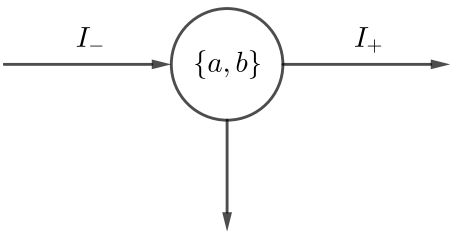


图 3.10：带有相邻切域和一个弦域的无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr},\ \mathrm{L}}(a,\ b)$ 和 $\Omega_{\mathrm{tr},\ \mathrm{R}}(a,\ b)$ 的图形表示。

通常，顶点对应线性区域，有向边则始终对应围栏。我们绘制一个对应某个角的图顶点，以及两条对应相邻切域的入边，见图 3.9。我们为图的元素赋予与固定边界上的点相对应的数值参数。

现在，我们给出命题 3.7.2 中所述可能变体（无轨电车和小鸟）的图形表示。我们为线性区域画一个顶点，并为围栏画几条边——一条弦域和两个切域。对应于弦域的边是出边。我们将对应于切域的边水平绘制，其方向与切线的方向一致（向左或向右）。无轨电车总是有

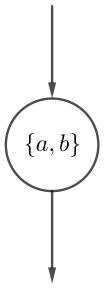


图 3.11：沿弦粘合的两个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,\ [a,b])$ 的图形表示。

一条入边和两条出边，而小鸟则有两条入边和一条出边，见图 3.10 中对应无轨电车的图，以及图 3.12 左侧的小鸟示意图。

我们给出了一个包含两个相邻切域的完整弦域的图形表示，见图 3.12 右图。顶点对应于作为“线性区域”的弦$[g(a)\ g(b)],$，而边对应于弦域和切域。图 3.11 给出了沿弦粘合的两个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,\ [a,b])$ 的图形表示（图 3.8）。这里的顶点对应于弦 $[g(a)\ g(b)],$，而入边和出边分别对应于 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,\ [a,b])$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$。

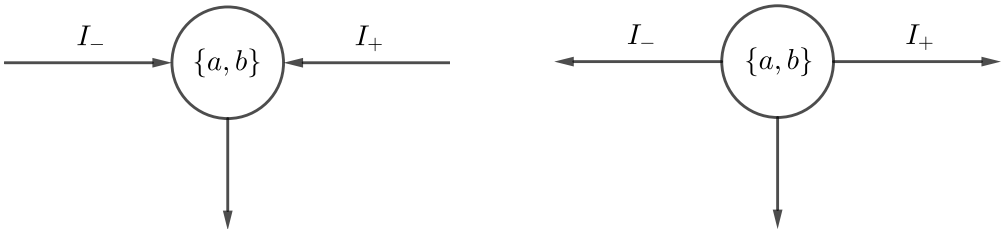


图 3.12：小鸟 $\Omega_{\mathrm{bird}}(a,\ b)$ 和完整弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],\ *)$ 及其相邻区域的图形表示。

图 3.13 给出了两个沿零宽度的“无轨电车” $\Omega_{\mathrm{L}}(t_-,u)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u,t_+)$ 粘合的切线区域的图形表示，以及 $\Omega_{\mathrm{R}}(t_-,u)$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(u,t_+)$ 沿“无轨电车” $\Omega_{\mathrm{R}}(u,u)$ 粘合时的对称情形。这里的顶点对应于“无轨电车”，而边对应于切线区域。



图 3.13：两个切域沿着一条零宽度的“无轨电车”粘合在一起的图形表示：左侧情形和右侧情形。

最后，图 3.14 展示了等式 (3.7.4) 的图形表示。

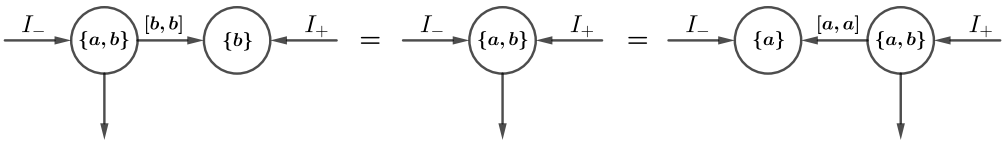


图 3.14：等式“小鸟 $=$ 角 $+$无轨电车”的图形表示。

3.7.4 多图形

我们首先作出一项结构性约定。对于每个线性区域 $\mathfrak{L}$，我们作出以下有限性假设：交集 $\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 被假定为有限条弧的并（其中一条或两条弧可以无界，即由射线参数化），

$$\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega=\cup_{i=1}^{k}\{g(t)\mid t\in\mathfrak{a}_i\},$$

其中，$\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^{k}$ 是有限个互不相交的闭区间组成的集合，也可以是单点。与 $\mathfrak{a}_i$ 相对应的曲线弧为 $g(\mathfrak{a}_i)$。提醒读者注意第2.1.3小节引入的记号：$\mathfrak{a}_i$ 的左端点是 $\mathfrak{a}_i^{\text{l}}$，右端点是 $\mathfrak{a}_i^{\text{r}}$。正如我们将看到的，由于条件 2.1.10，我们所需的所有线性区域都满足这一有限性假设。

考虑一个线性区域 $\mathfrak{L}$。我们知道，集合 $\{\gamma(a)\colon\ g(a)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega\}$ 位于 $\mathbb{R}^3$中的一个二维平面内。因此，存在一个函数 $P_{\mathfrak{L}}$，它是 g_1、g_2、和一个常函数的线性组合，使得

$$f(a)=P_{\mathfrak{L}}(a),\quad g(a)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega. \tag{3.7.6}$$

显然，反过来也是成立的：如果存在 g_1、g_2和一个常函数的某个线性组合 $P_{\mathfrak{L}}$，使得式 (3.7.6) 成立，那么就存在一个仿射函数 $B_{\mathfrak{L}}$，使得对于所有 $g(a)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$，都有 $B_{\mathfrak{L}}(g(a))=f(a)$。具体而言，若 $P_{\mathfrak{L}}=\beta_0+\beta_1g_1+\beta_2g_2$，则

$$B_{\mathfrak{L}}\big(x_1,x_2\big)=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2. \tag{3.7.7}$$

此函数 $B_{\mathfrak{L}}$ 是 $\mathfrak{L}$中的贝尔曼候选函数。

注 3.7.6。与线性区域在固定边界上只有两个点的情形类似，对于任意 $g(a)$ $g(b)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}$，恒等式 (3.7.2) 和 (3.7.3) 都成立。所有满足$g(a)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 的向量 $\gamma'(a)$，都位于一个与向量 $(\beta_1,\beta_2,-1)$ 正交的平面内。

定义 3.7.7。由公式 (3.7.2) 在定义域 $\mathfrak{L}$中定义的函数 B，其中 $g(a)$ 和 $g(b)$ 是来自 $\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 的任意点，称为 $\mathfrak{L}$中的标准候选函数。

正如我们已经验证的，$\mathfrak{L}$ 中的标准候选函数不依赖于 th 中 a 和 b 的选择 e 定义 并且与式 (3.7.7) 给出的函数重合。

在下面的引理中，我们使用定义 3.5.1。

引理 3.7.8。设 a_1、a_2 和 a_3 满足条件：$\gamma'(a_i)$ $i=1$、2、3 位于同一个平面内。若 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$，则

$$\begin{aligned}D_{\text{L}}(a_1,a_2)&=D_{\text{L}}(a_1,a_3);\\D_{\text{R}}(a_1,a_3)&=D_{\text{R}}(a_2,a_3);\\D_{\text{R}}(a_1,a_2)&=D_{\text{L}}(a_2,a_3).\end{aligned}$$

证明。我们来证明第一个恒等式，其余恒等式的证明类似。我们求出系数 α_1 和 α_2，使得$\gamma'(a_3)$ $=\alpha_1\gamma'(a_1)+\alpha_2\gamma'(a_2)$。然后 $g'(a_3)=\alpha_1g'(a_1)+\alpha_2g'(a_2)$。我们将其代入 $D_{\text{L}}(a_1,a_3)$，得到

$$D_{\text{L}}(a_1,a_3)=\frac{\det\begin{pmatrix}\gamma'(a_1)\\\gamma'(a_3)\\\gamma''(a_1)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}g'(a_1)\\g'(a_3)\end{pmatrix}}=\frac{\alpha_2\det\begin{pmatrix}\gamma'(a_1)\\\gamma'(a_2)\\\gamma''(a_1)\end{pmatrix}}{\alpha_2\det\begin{pmatrix}g'(a_1)\\g'(a_2)\end{pmatrix}}=D_{\text{L}}(a_1,a_2).$$

□

定义 3.7.9. 设 $\mathfrak{L}$ 是一个线性区域，使得交集 $\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 至少包含两个点，设 $g(a)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$。类比定义 3.7.5，我们将力函数 F 在 a 处的值定义为

$$F(a)=\frac{D}{g_1'(a)\kappa_2'(a)},$$

其中，若 $a<b$，则 $D=D_{\text{L}}(a,b)$；若 $a>b$，则 $D=D_{\text{R}}(b,a)$；并且 $b\neq a$ 是任意一点，满足 $g(b)\in\mathfrak{L}\cap\partial_{\text{fixed}}\Omega$。

注 3.7.10. 力函数在集合 $\{a\in\mathbb{R}$ 上定义良好（不依赖于点 b 的选取）：$g(a)\in\mathfrak{L}\}$，这是引理 3.7.8 的结论。

引理 3.7.11. 设 $a_1,\ a_2,$ 和 a_3 满足 $\gamma'(a_i),\ i=1,2,3,$ 位于同一平面内。假设数对 (a_1,a_2) 和 (a_2,a_3) 满足杯形方程。那么(a_1,a_3) 也满足杯形方程。

证明。 数对 (a_1,a_2) 和 (a_2,a_3) 满足杯形方程，意味着向量 $\gamma(a_2)-\gamma(a_1)$ 和$\gamma(a_3)-\gamma(a_2)$ 与所有 $\gamma'(a_i)$ 位于同一平面内，因此 $\gamma(a_3)-\gamma(a_1)$ 也位于该平面内。所以数对 (a_1,a_3) 满足杯形方程。

□

现在我们已经能够描述所有其余的线性区域。我们从那些与 Ω 的自由边界相连的区域开始。此类区域的边界若为紧集,

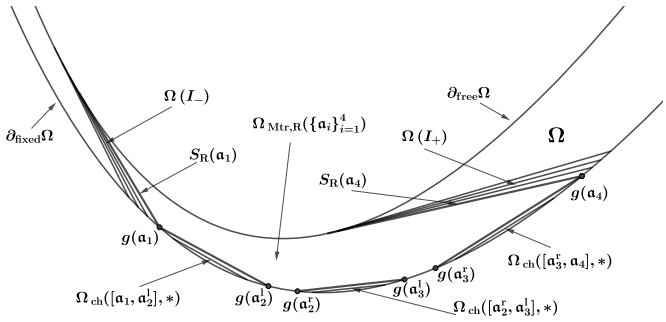


图 3.1　　5：$k=4$ 的右侧多无轨电车形，包含相邻区域及其图示　　n.

由弧 $g(\mathfrak{a}_i)$、$i=1$、2、.....、k，弦 $[g(\mathfrak{a}_i^{\text{r}})\ g(\mathfrak{a}_{i+1}^{\text{l}})]$、$i=1$、2、.....、$k-1$，两条切线 $S(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 和 $S(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$，以及自由边界上的弧组成。我们根据这些切线的方向对多图形进行分类。也就是说，若有 $S_{\text{R}}(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 和 $S_{\text{R}}(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$，则得到一个右侧多无轨电车形，记作 $\Omega_{\text{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，见图 3.15；若为 $S_{\text{L}}(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 和 $S_{\text{L}}(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$，则得到一个左多重手推车，记作 $\Omega_{\text{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$。若有 $S_{\text{L}}(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 和 $S_{\text{R}}(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$，则该线性区域称为多杯形，记作 $\Omega_{\text{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，见图3.16。

我们区分这样一种情况：两条边界切线 $S_{\text{L}}(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 和 $S_{\text{R}}(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$ 位于同一直线上；在这种情况下，我们称多杯形为 完整。最后，如果有 $S_{\text{R}}(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 和 $S_{\text{L}}(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$，则线性区域 $\mathfrak{L}$被称为多重小鸟，记作 $\Omega_{\text{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，参见图3.17。建立在 $\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k$ 之上的多图形 $\mathfrak{L}$ 的图形表示遵循以下规则绘制。定义域 $\mathfrak{L}$ 对应于一个单独的顶点。它具有 $k-1$ 条出边，表示弦域 $\Omega_{\text{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\text{r}},\mathfrak{a}_{i+1}^{\text{l}}],*)$、$i=1,2$、.....、$k-1$。此外，还有两条边对应于围绕 $\mathfrak{L}$的两个切线区域。如果 $\mathfrak{L}$ 是多杯形，则这两条边均为出边；如果 $\mathfrak{L}$ 是多重小鸟，则这两条边均为入向边。如果 $\mathfrak{L}$ 是多重无轨电车，则它具有一条入向边和一条出边。我们给出了绘制于图 3.15、3.16和3.17中的多图形的图示示例。

我们还将考虑无界线性区域：至少有一个区间 $\mathfrak{a}_1$ 或 $\mathfrak{a}_k$ 为射线的多杯形 $\Omega_{\text{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，以及右侧多无轨电车形 $\Omega_{\text{Mtr, R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，其中 $\mathfrak{a}_k$ 是一条延伸的射线。

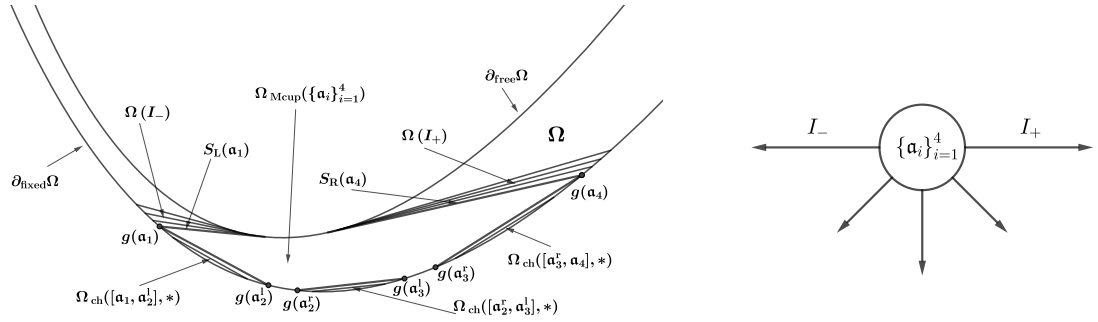
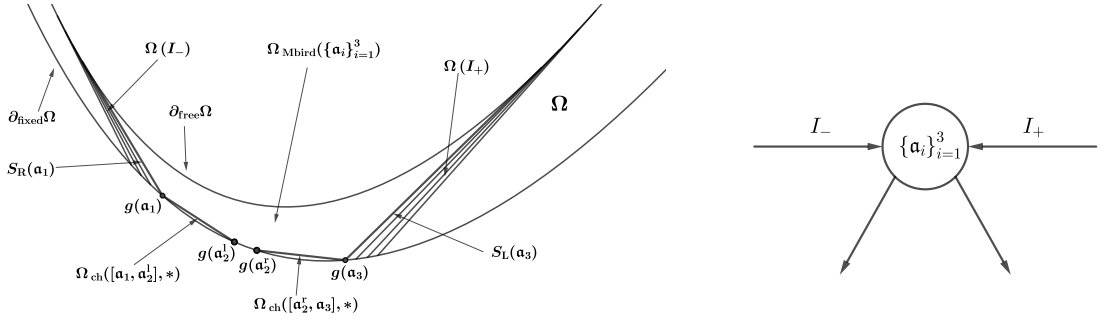


图3.16： $k=4$ 的多杯形结构及其相邻区域和图形表示 on.



Fig图 3.17： $k=3$ 的多重小鸟及其相邻区域和图形表示 .

到 $+\infty$，或左多重手推车 $\Omega_{\mathrm{Mtr,\ L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，其中 $\mathfrak{a}_1$ 是延伸至 $-\infty$ 的射线。此类定义域没有边界切线之一。在这种情况下，表示此定义域的顶点没有对应的边。

考虑一个与自由边界分离的线性区域 $\mathfrak{L}$ 。 $\mathfrak{L}$的边界由弧 $g(\mathfrak{a}_i)$、 $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ k$，弦 $[g(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}})\ g(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}})]$、 $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ k-1$，以及弦 $[g(\mathfrak{a}_1^{l})\ g(\mathfrak{a}_k^{r})]$组成。这种构造称为闭合多杯结构，记作 $\Omega^{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$。其图形表示如下：它有一条表示 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,\ [\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}])$ 的入边，以及若干条对应于弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}},\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}],\ *)$、 $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ k-1$ 的出边。例如，它可以呈现为图 3.18 中的样子。

以下命题给出了将线性区域与其周围的围栏（切线区域和弦域）拼接起来的充分条件。从形式上看，它比命题3.7.2更一般，但证明方法相似。

命题3.7.12。 设 $\mathfrak{L}$ 是一个被若干围栏包围的线性区域。假设函数 B 在 $\mathfrak{L}$ 及每个周围的围栏上都是标准候选函数。令 $a=$ 下确界$\{t\in\mathbb{R}:\ \ g(t)\ \in\mathfrak{L}\}$以及 $b=$ 上确界$\{t\in\mathbb{R}:\ \ g(t)\ \in\mathfrak{L}\}$。如果力函数在 a 和 b处连续，那么 B 是其定义域上的一个 C^1-光滑贝尔曼候选函数。

注 3.7.13。 在前一个命题中，如果 $\mathfrak{L}$ 是闭合多杯结构，那么它被弦域包围，并且力函数的连续性条件总是成立。

现在是定义线性区域尾部的时候了，该线性区域 $\mathfrak{L}$ 在下方边界上至少包含两个点

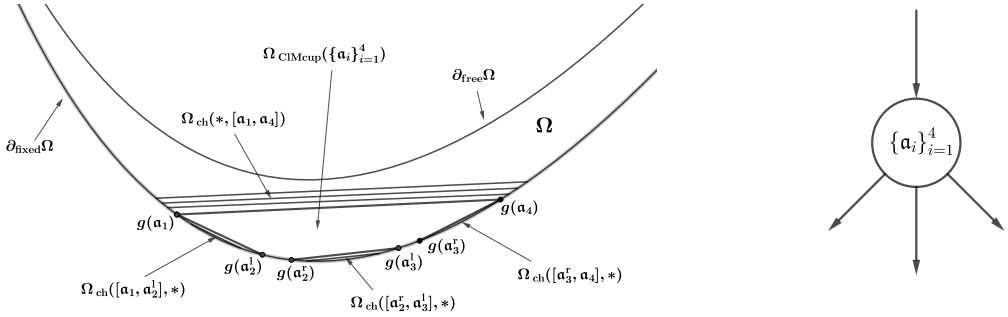


图3.18：闭合多杯结构与相邻弦域的图示例 s.

与命题3.7.12中一样，我们定义 $a=\inf\{t\in\mathbb{R}:\ g(t)\in\mathfrak{L}\}$ 以及 $b=\sup\{t\in\mathbb{R}:\ g(t)\in\mathfrak{L}\}$。

定义 3.7.14. 我们将线性区域 $\mathfrak{L}$ 的尾部和力定义为弦 $[g(a)\ g(b)]$ 的尾部和力（该弦可能不位于 Ω 中）。具体而言，尾部见定义3.6.6、3.6.9，相应的力公式见公式(3.6.4)、(3.6.5)。

3.8 叶状结构的组合性质

本节的内容基本上重复了 [17] 中的第3.5节。之所以重复，是因为我们不得不稍微改变记号：[17] 中使用的一些自然参数在我们的广义设定中并不存在。

3.8.1 拼接复合图形

本小节给出若干公式，使我们能够以不同方式将叶状结构的一部分视为若干基本域的并集。例子已在(3.7.4)中给出（另见第44页对符号 $\biguplus$ 的说明）。

我们从描述角 $\Omega_{\mathrm{ang}}(a)$ 与长弦 $[g(a)\ g(b)]$（见图 3.19）粘合的公式开始。它们的并集构成一个无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr}}(a,b)$:

$$\Omega_{\mathrm{ang}}(a)\biguplus\Omega_{\mathrm{L}}(a,a)\biguplus[g(a),g(b)]=\Omega_{\mathrm{tr,R}}(a,b). \tag{3.8.1}$$

类似地,

$$[g(a),g(b)]\biguplus\Omega_{\mathrm{R}}(b,b)\biguplus\Omega_{\mathrm{ang}}(b)=\Omega_{\mathrm{tr,L}}(a,b). \tag{3.8.2}$$

这两个公式都可以非正式地称为**“角 $+$ 长弦 $=$ 无轨电车”**。

我们已经考察过一个更复杂公式（3.7.4）的例子:

$$\Omega_{\mathrm{tr,R}}(a,b)\biguplus\Omega_{\mathrm{R}}(b,b)\biguplus\Omega_{\mathrm{ang}}(b)=\Omega_{\mathrm{bird}}(a,b); \tag{3.8.3}$$

$$\Omega_{\mathrm{ang}}(a)\biguplus\Omega_{\mathrm{L}}(a,a)\biguplus\Omega_{\mathrm{tr,L}}(a,b)=\Omega_{\mathrm{bird}}(a,b), \tag{3.8.4}$$

它可以非正式地称为**“小鸟 $=$ 角 $+$ 无轨电车”**。

我们推 为其他区域提供相同形式的公式。其验证留给读者。 r.

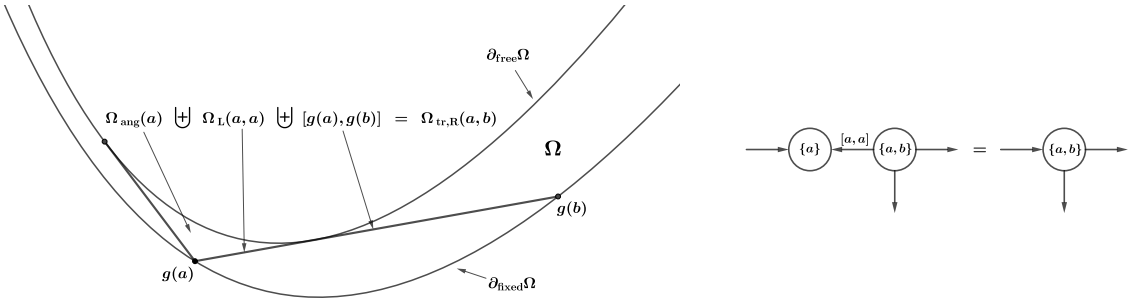


图 3.19：公式 (3.8.1) 的图形表示。

角 + 多杯形 = 多重无轨电车

$$\Omega_{\mathrm{ang}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) = \Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k); \tag{3.8.5}$$



图 3.20：公式 (3.8.5) 和 (3.8.6) 对应的图。

$$\Omega_{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) \biguplus \Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{ang}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}) = \Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k). \tag{3.8.6}$$

长弦 + 多重小鸟 = 多重无轨电车

$$[g(a_0), g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})] \biguplus \Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) = \Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{a_0\} \cup \{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k), \tag{3.8.7}$$

其中 $[g(a_0)\ g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})]$ 是长弦；

$$\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) \biguplus \Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}) \biguplus [g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}), g(a_{k+1})] = \Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k \cup \{a_{k+1}\}), \tag{3.8.8}$$

其中 $[g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})\ g(a_{k+1})]$ 是长弦。

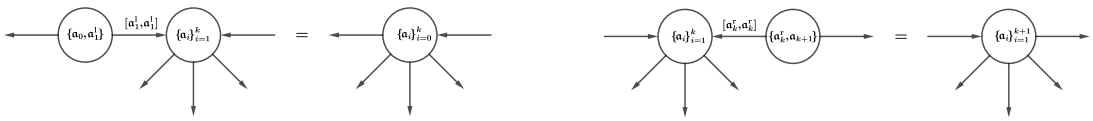


图 3.21：公式 (3.8.7) 和 (3.8.8) 对应的图。

角 +多重无轨电车 = 多重小鸟

$$\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) \biguplus \Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{ang}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}) = \Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k); \tag{3.8.9}$$

$$\Omega_{\mathrm{ang}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) = \Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k). \tag{3.8.10}$$



图 3.22：公式 (3.8.9) 和 (3.8.10) 的图。

长弦 +多重无轨电车 =多杯形

$$[g(a_0), g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})] \biguplus \Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) = \Omega_{\mathrm{Mcup}}(\{a_0\} \cup \{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k), \tag{3.8.11}$$

其中， $[g(a_0)\ g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})]$ 是一条长弦；

$$\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) \biguplus \Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}) \biguplus [g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}), g(a_{k+1})] = \Omega_{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k \cup \{a_{k+1}\}), \tag{3.8.12}$$

其中 $[g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})\ g(a_{k+1})]$ 是一条长弦。

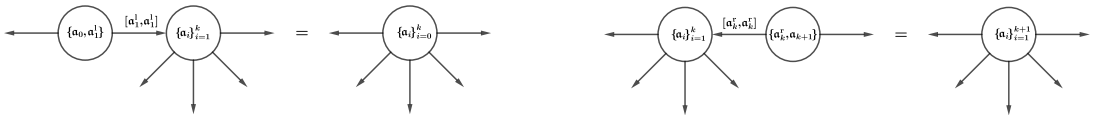


图 3.23：公式 (3.8.11) 和 (3.8.12) 的图。

多重无轨电车 = 电车列队

$$\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) = \Big(\biguplus_{i=1}^{k} \Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}) \Big) \biguplus \Big(\biguplus_{i=1}^{k-1} \big(\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{tr,R}}(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}) \big) \Big); \tag{3.8.13}$$

$$\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k) = \Big(\biguplus_{i=1}^{k} \Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}) \Big) \biguplus \Big(\biguplus_{i=1}^{k-1} \big(\Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{tr,L}}(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}) \biguplus \Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}) \big) \Big). \tag{3.8.14}$$

在 (3.8.13) 中，如果某个 $\mathfrak{a}_i$ 是单点，则省略退化切域 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{l}},\ \mathfrak{a}_i^{\mathrm{l}})$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}},\ \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}})$，并将多重无轨电车 $\Omega_{\mathrm{Mtr,\ R}}(\{\mathfrak{a}_i\})$ 替换为退化切域 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}_i)$。在 (3.8.14) 中，我们对左切域和多重无轨电车进行类似的替换。

多重小鸟 $=$ 右侧多无轨电车形 $+$ 角 $+$ 左多重手推车

$$\begin{aligned}&\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)=\\&\quad=\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^{j-1}\cup\{\mathfrak{a}_j^{\mathrm{l}}\})\biguplus\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_j^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_j^{\mathrm{l}})\biguplus\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_j\})\biguplus\Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_j^{\mathrm{r}},\mathfrak{a}_j^{\mathrm{r}})\biguplus\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_j^{\mathrm{r}}\}\cup\{\mathfrak{a}_i\}_{i=j+1}^k).\end{aligned}\tag{3.8.15}$$

这里 j是一个任意数，$j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ k$。两个多重无轨电车都可以根据（3.8.13）和（3.8.14）进行分解。如果 $\mathfrak{a}_j$ 是一个单点，则应将 $\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_j\})$ 改为 $\Omega^{\mathrm{ang}}(\mathfrak{a}_j)$。如果 $\mathfrak{a}_j$ 是一个实根，则 $\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_j\})$还可以根据（3.8.10）和（3.8.9）以两种方式进一步分解。

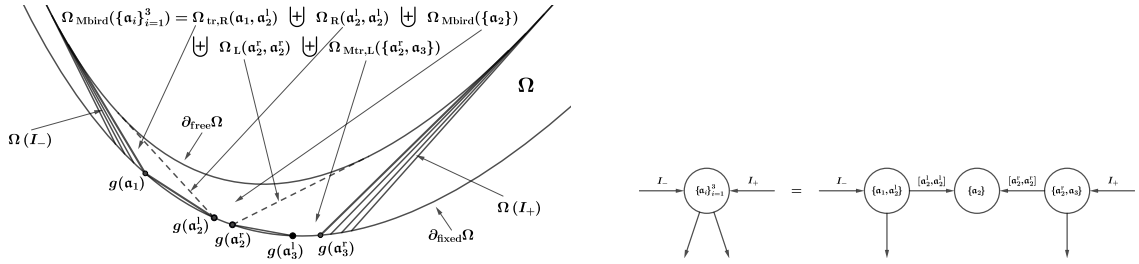


图 3.24：公式（3.8.15）及其图形表示的一个示例。

闭合多杯结构 $+$ 无轨电车 $=$ 多重无轨电车

$$\Omega_{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)\biguplus\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}],[\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}])\biguplus\Omega_{\mathrm{tr,R}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})=\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k);\tag{3.8.16}$$

$$\Omega_{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)\biguplus\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}],[\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}])\biguplus\Omega_{\mathrm{tr,L}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})=\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k).\tag{3.8.17}$$

闭合多杯结构 $+$ 小鸟 $=$ 多重小鸟

$$\Omega_{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)\biguplus\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}],[\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}])\biguplus\Omega_{\mathrm{bird}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})=\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k).\tag{3.8.18}$$

3.8.2 一般叶状结构

为了描述叶状分解的组合性质，绘制一个与该叶状分解 Γ 相对应的图是很自然的。顶点对应于线性区域。如果存在一个围栏是它们的公共邻居，则用一条边连接这两个顶点。通过映射 $\nabla B\colon\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R}^2$，可将这样的图绘制在平面上。然而，我们还需要明确一些细节。

我们将使用少量图论术语。由于我们研究的是非常特殊的图，因此这些术语的用法也具有特殊性。我们的图是有向树（即边具有方向的树）。我们将没有入边的顶点称为根，将没有出边的顶点称为叶（叶可以有多条入边）。我们所说的路径是指有向路径，即沿路径探索时，我们从边的起点移动到其终点。其他术语的含义则不言自明。

图的顶点记为 $\{\mathfrak{L}_i\}_i$，边记为 $\{\mathfrak{E}_i\}_i$。边和顶点属于不同的类型，而且还带有稍后将指定的数值参数。我们先从边开始描述。

每条边 $\mathfrak{e}$ 表示一个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}}],[a^{\mathrm{bot}},b^{\mathrm{bot}}])$，或以下切域之一：$\Omega_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{r}})$ 或 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{r}})$。表示弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}}],[a^{\mathrm{bot}},b^{\mathrm{bot}}])$ 的边从其上邻点指向下邻点。我们将与弦域相关联的函数 a 和 b 视为其数值参数。$\Omega_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{r}})$ 的边从其左邻点的顶点指向其右邻点的顶点。表示 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{r}})$ 的边则方向相反。闭区间 $[u_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{r}}]$ 是此类边的数值参数。

这些顶点对应线性区域。角、无轨电车、小鸟和多图形的图形表示已在介绍它们的小节中给出（3.7.3 和 3.7.4）。这些顶点各自属于不同类型（即，图中有多个“角”类型的顶点、多个“小鸟”类型的顶点，等等）。每个这样的顶点都附有其数值特征，即固定边界 $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$上与其对应点的参数值。例如，“角”类型的顶点有一个数值参数 u，即该角所依附的点 $g(u)$；而对于“多杯形”、“多重无轨电车”或“多重小鸟”类型的顶点，区间集合 $\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k$ 则充当其数值参数。

然而，我们还需要一些虚拟顶点，它们不对应任何具有非零面积的线性区域。例如，在图 3.12 中，表示长弦的顶点就是虚拟的。这类顶点共有五种。

首先，会有一些 $\mathfrak{L}_i$ 对应于长弦（与 Ω_ε的自由边界相切的弦）。具体而言，假设我们有一个完整弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}}],*)$，满足 $D_{\mathrm{R}}(a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}})\neq 0$ 且 $D_{\mathrm{L}}(a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}})\neq 0$，以及两个切线区域 $\Omega_{\mathrm{R}}(b^{\mathrm{top}},u_2)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,a^{\mathrm{top}})$。那么，与弦 $[g(a^{\mathrm{top}})\ g(b^{\mathrm{top}})]$ 对应的顶点 $\mathfrak{L}$ 有三条出边，分别表示 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}}],*)$、$\Omega_{\mathrm{R}}(b^{\mathrm{top}},u_2)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,a^{\mathrm{top}})$。集合 $\{a^{\mathrm{top}},b^{\mathrm{top}}\}$ 是 $\mathfrak{L}$的数值参数。示例见图 3.12。

其次，会有一些顶点 $\mathfrak{L}_i$ 对应于固定边界上的点。假设我们有一个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,[a^{\mathrm{bot}},b^{\mathrm{bot}}])$，其 $a^{\mathrm{bot}}=b^{\mathrm{bot}}$（我们回顾一下，这种弦域称为杯形区域）。在我们的叶状结构中，所有这类点都将与定义 2.1.12 中的某个 c_j 重合，参见 (3.4.11) 附近的说明。于是，对应于 $a^{\mathrm{bot}}=b^{\mathrm{bot}}=c_j$ 的顶点 $\mathfrak{L}$ 有一条与 $\Omega_{\mathrm{ch}}(*,[a^{\mathrm{bot}},b^{\mathrm{bot}}])$ 相匹配的入边，以及一个等于 c_j 的数值参数。

第三，有时我们需要在两个弦域之间粘接一条弦（当其中一个微分消失时会这样做，见定义 3.5.1）。假设有两个弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1,b_1],\ [a_2,b_2])$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],\ [a_3,b_3])$。在这种情况下，我们粘接一个顶点 $\mathfrak{L}$，它对应于弦 $[g(a_2)\ g(b_2)]$，见图 3.11。它有一条入边和一条出边，以及数值参数 $\{a_2,b_2\}$。长弦中，若一个或两个微分消失，也被视为第三类虚拟顶点。

第四，可能有一个或两个无穷远处的顶点。如果有一个切域 $\Omega(u_{\mathrm{l}},\ u_{\mathrm{r}})$，且$u_{\mathrm{l}}=-\infty$，那么就有一个顶点 $\mathfrak{L}$，它对应于 $-\infty$。它具有数值参数 $-\infty$，以及一条表示 $\Omega(-\infty,\ u_{\mathrm{r}})$ 的边；当 Ω_{R} 时，这条边为出边；当 Ω_{L} 时，这条边为入边。类似地，如果有 $u_{\mathrm{r}}=+\infty$，那么就有一个顶点 $\mathfrak{L}$，它对应于 $+\infty$，具有数值参数 $+\infty$，以及一条表示 $\Omega(u_{\mathrm{l}},\ +\infty)$ 的边；当 Ω_{R} 时，这条边为入边；当 Ω_{L} 时，这条边为出边。如果 $u_{\mathrm{l}}=-\infty$ 和 $u_{\mathrm{r}}=+\infty$ 同时成立，那么这两个顶点都会出现，并且它们之间有一条边。

第五，可能存在一个与单切线对应的顶点。假设我们有一个切域 $\Omega(u_1,\ u_2)$，使得 $\mathcal{F}<0$ 在 $[u_1,u_2]$ 上除某个点 u外成立，其中 $\mathcal{F}$ 等于零[1]。对于右切域的情形，将 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,\ u_2)$ 分解为以下形式会很有用：

$$\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,u)\biguplus\Omega_{\mathrm{R}}(u,u)\biguplus\Omega_{\mathrm{R}}(u,u_2)$$

并粘贴一个表示 $\Omega_{\mathrm{R}}(u,\ u)$ 的顶点（或者，也可以将其视为位于单点上的多重无轨电车）。它有一条出边 $\Omega_{\mathrm{R}}(u,\ u_2)$ 和一条入边 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,\ u)$，见图 3.13。其

[1]在这种情况下，对于某个根 c_j，$u=c_j$（见定义 2.1.12）。

数值参数为 u。对于左切线的情形，也可以进行同样的处理。我们注意到，第五类虚拟顶点可以是右侧的，也可以是左侧的（与无轨电车相同）。

上述规则定义了叶状结构图。不过，为了使其结构更加清晰，我们还会进一步说明。引入线性区域集合上的偏序是有用的。

定义 3.8.1. 设 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 是两个线性区域。若 $\mathfrak{L}_1$ 将 $\mathfrak{L}_2$ 与自由边界隔开，则称 $\mathfrak{L}_2$ 从属于 $\mathfrak{L}_1$，记作 $\mathfrak{L}_2 \prec \mathfrak{L}_1$。

注意，若 $\mathfrak{L}_2 \prec \mathfrak{L}_1$，则 $\mathfrak{L}_2$ 是一个闭合多杯结构。我们还可以令 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 为弦，并令 $\mathfrak{L}_2$ 为固定边界上的一个点。还要注意的是，顶点 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 的数值参数足以确定命题 $\mathfrak{L}_2 \prec \mathfrak{L}_1$ 是否成立。

下面说明如何从叶状分解构造图。忽略方向后，我们的图是一棵树。首先，介绍由表示切域的边所张成的子图 Γ^{free}。这个子图描述了叶状分解在自由边界上的轨迹。形式上，我们可以将 Γ^{free} 定义为不从属于任何其他顶点的顶点集合，以及这些顶点之间的边。若忽略边的方向，Γ^{free} 是一条路径，即一棵顶点度数均为二的树，但最多可能有两个无穷远处的叶节点。这些叶节点通常是第四类虚拟顶点；不过，如果某个多杯形或多重无轨电车延伸至无穷远，其对应的顶点就是叶节点（此时没有代表相应无穷远点的虚拟顶点）。边的方向已作说明。这里只需指出，Γ^{free} 的根是第一类和第三类虚拟顶点（当然，后者应属于 Γ^{free}，即代表一条长弦）、对应多杯域的顶点，以及可能存在的无穷远处的顶点。Γ^{free} 中的叶节点对应角、小鸟、多重小鸟，以及可能存在的无穷远处的顶点。Γ^{free} 是由表示某个叶状分解的切域的边所张成的子图的充要条件是：由它重构出的叶状分解覆盖自由边界且没有交集。

其次，我们描述由对应于弦域的边所张成的图 Γ^{fixed}。图 Γ^{fixed} 是一片森林（即有限棵树的集合）。森林中的每棵树都从其根向叶定向；根可以是 Γ^{free} 的任意顶点，但第四类或第五类的虚拟顶点，以及位于单条弧上的多图形除外。Γ^{fixed} 的叶是第二类虚拟顶点（对应于杯形区域的起点）和位于单条弧上的闭合多杯结构。所有其他顶点都是闭合多杯结构和第三类虚拟顶点。我们注意到，该图由定义 3.8.1 中引入的序生成：当且仅当 $\mathfrak{L}_2 \prec \mathfrak{L}_1$，且不存在满足 $\mathfrak{L}_2 \prec \mathfrak{L}_3 \prec \mathfrak{L}_1$ 的顶点 $\mathfrak{L}_3$ 时，每条边 $\mathfrak{e}$ 都从 $\mathfrak{L}_1$ 指向 $\mathfrak{L}_2$。要使 Γ^{fixed} 成为某个叶状分解中由对应于弦域的边所张成的子图，其充要条件是：由其顶点构成的线性区域互不相交，并且这些边由定义 3.8.1 中的序生成。

因此，叶状结构图是一棵有限有向树，其顶点和边具有类型（它们分别对应于上文所述的某些图形或虚构构造），并带有若干与其类型相关的数值特征。需要提醒读者的是，绘制图时我们不会标出所有数值参数，这样插图会更加清晰。我们想强调的是，可以根据该图以及由此叶状分解确定的数值参数恢复叶状分解。

第4章

贝尔曼候选函数的演化

本章将针对每个 $\varepsilon, 0<\varepsilon<\varepsilon_\infty$，介绍一种在 Ω_ε 上构造特殊贝尔曼候选函数的算法。在第5章中，我们将利用优化器证明，该候选函数与贝尔曼函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon(\cdot; f)$ 一致。

算法从足够小的 ε 开始。在这种情况下，贝尔曼候选函数的叶状分解可以由杯形区域（多杯形）、角和切域组成。然后我们增大 ε，为更大的 ε构造贝尔曼候选函数。形式上，会有两类命题（可称为“第一类和第二类归纳步骤”）。第一类命题指出，对于某种给定结构存在贝尔曼候选函数的 ε 集合是开集。其形式如下：“如果对于某个 η 存在一个图为 Γ 的贝尔曼候选函数，那么存在某个正的 δ，使得对于 $[\eta, \eta+\delta]$ 中的所有 ε，具有图 Γ 且数值参数经过扰动的叶状分解，都能为 Ω_ε 中的 f 提供一个贝尔曼候选函数。”第二类命题指出，对于其存在图 Γ 和一组数值参数、且这些参数能为 f 和 ε提供贝尔曼候选函数的那些 ε，构成一个闭集。其形式如下：“如果对于每个 ε_n，都存在一个图为 Γ、$\varepsilon_n \nearrow \varepsilon$ 的贝尔曼候选函数，且数值参数在 $\varepsilon_n \to \varepsilon$ 时收敛到某些极限，那么带有极限参数的 Γ 就为 Ω_ε 中的 f 提供一个叶状分解。”我们注意到，数值参数的极限可能在某种意义下是退化的（例如，无轨电车可能变成第五类虚拟顶点），因此取极限后 Γ 会发生变化。每个这样的归纳步骤又都可以归结为类似的局部命题，即关于孤立图形（例如杯形区域、角等）演化行为的命题。

支配叶状分解演化的基本规律是：“随着 ε 增大，力会减小（绝对值增大）”。因此，长弦和多杯形会增大（命题 4.3.1 和 4.3.2），无轨电车会减小（命题 4.3.4 和 4.3.5），多重无轨电车、小鸟和多重小鸟会解体（命题 4.3.10、4.3.11 和 4.3.13）。此外，单个图形可能发生碰撞；具体来说，在第二类归纳步骤中，当某条边在极限处的“长度为零”时，就会发生这种情况。发生碰撞时，我们使用第 3.8.1 小节中的公式继续演化。

4.1 简单图景

定义 4.1.1。设 Γ 为一个叶状图。如果它没有长度大于一的有向路径，也没有闭合多杯结构，我们就称它（以及相应的叶状分解）是 简单的。

简单叶状分解由交替排列的杯形区域（或位于单条弧上的多杯形；单条弧上的多杯形指 $\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}\})$，其中 $\mathfrak{a}$ 是一个区间）和通过切域连接的角组成。若 Γ 是一个由 N 条边构成的简单叶状分解的图，则该叶状分解中要么有 $\binom{N}{2}$ 个角，要么有 $\binom{N-1}{2}$ 个角，要么有 $\binom{N-2}{2}$ 个角。在 Γ^{free} 中，对应于角的顶点与表示多杯形和

长弦的顶点交替出现。每个多杯形都位于一条弧上，该弧的凸包不包含在 Ω_ε 中。每条长弦下方都有一个杯形区域。可参见图 4.1 中的示意图。

出于教学目的，我们解释简单图如何生成贝尔曼候选函数 B （一般图的类似构造将在第 4.4 节中解释）。假设 Γ 是一个简单图。首先，我们考虑其根，即长弦、实根上的多杯形区域以及无穷远处的顶点。对于长弦和多杯形区域，我们利用线性性构造标准候选函数（见 (3.4.1)）。其次，考虑 Γ 的边。对于对应于弦域的边，我们再次利用弦上的线性性构造标准候选函数（见 (3.4.1)）。对于每条对应于切域的边，我们将该定义域中的一个标准候选函数连续地粘接到已经构造的、与该边源点对应的标准候选函数上。这通过在 (3.2.3) 中选择适当的 β_2（t_0）来完成。对于源点位于无穷远处的切域，我们无需进行任何粘接，只需在其上考虑标准候选函数即可；此类标准候选函数是唯一确定的，见定义 3.3.8。在各个角中，我们选择

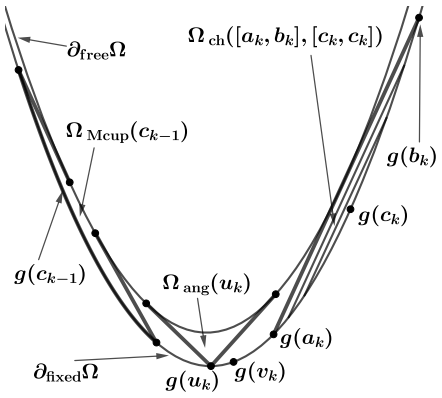


图 4.1：简单图景的示例。

由命题 3.6.4 得到的标准候选函数。所构造的函数 B 是 C^1-光滑的，因此，根据命题 3.1.2，它是局部凹的。

在下面的定理中，我们采用本质根的记号，参见定义 2.1.12。

定理 4.1.2。对于满足条件 2.1.10 和 2.1.13 的任意函数 f，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得对于任意 $\varepsilon < \varepsilon_1$，都存在一个简单图和一组数值参数，使得由该图、$f$和 ε 按上述方式构造的函数 B 是一个 C^1-光滑的贝尔曼候选函数。此外，它的叶状分解满足以下性质：杯形区域的起点与那些为单点的 c_i重合；多杯域位于那些为区间的 c_i 上；对于任意 $k = 1$、2、.....、n，Γ^{free} 中第 k 个角的顶点 u_k 的参数随着 $\varepsilon \to 0$趋于 v_k。

该定理的证明将在本节末尾给出，因为还需要做一些准备。

设 c_k 和 v_{k+1}是相邻的两个点，边界曲线 γ 的挠率 $\mathbf{T}$ 在这两点之间改变符号。如果 c_k 是实根，那么对于充分小的 ε，我们可以在 c_k 上构造一个多杯形，并在那里定义标准候选函数。如果 c_k 是单点，那么对于小的 ε，我们使用命题 3.5.9在其上构造一个完整杯。设其上弦为 $[g(a_k)\ g(b_k)] = [g(a_k(\varepsilon))\ g(b_k(\varepsilon))]$（对于杯形区域，我们取其上弦；对于多杯形，我们考虑连接其端点的弦）。于是，由 (3.6.4) 可得 $F_{\mathrm{R}}(u;\, a_k, b_k; \varepsilon) < 0$ 当 $u \in (b_k, v_{k+1}]$时，因为 $\mathrm{sign}(\mathbf{T}) = \mathrm{sign}(\mathfrak{K}')$（见 (2.1.13)）。因此，在 c_k 上构造的杯形区域或多杯形的右尾部总是包含 v_{k+1}。类似地，在 c_{k+1} 上构造的杯形区域或多杯形的左尾部包含 v_{k+1}。下面的引理说明，这些尾部的端点在 $\varepsilon \to 0$时趋于v_{k+1}。

引理 4.1.3. 设$(g(a_k(\varepsilon))\ g(b_k(\varepsilon)))$ 是建立在 c_k,之上的杯形区域或多杯形的上弦，设 $t_k^{\mathrm{R}} = t_k^{\mathrm{R}}(\varepsilon)$ 是其右尾部的端点。那么当 $\varepsilon \to 0$ 时，$t_k^{\mathrm{R}} \to v_{k+1}$。类似地，左尾部的端点 $t_k^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$ 趋于 v_k。来自无穷远点的力也有类似的收敛结论。

证明。我们将处理右尾部的情形。记 a 为 a_k，记 b 为 b_k。只需证明，对于每个满足 $v_{k+1} < w_+$ 的点 w_+（我们还假设 w_+ 离 v_{k+1}不远），我们希望 $\mathfrak{K}$

在（v_{k+1}， w_+）上递增），不等式 $t_k^{\mathrm{R}} < w_+$ 最终会在 $\varepsilon \to 0$时成立。我们在弦域之外对力F_{R}（t） $= F_{\mathrm{R}}$（t; a（ε） b（ε）； ε）使用 3.6.4，得到

$$F_{\mathrm{R}}(w_+) = \int_b^{w_+} \exp\Big(-\int_\tau^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau + \exp\Big(-\int_b^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)F_{\mathrm{R}}(b). \tag{4.1.1}$$

只需证明当 ε 足够小时， $F_{\mathrm{R}}(w_+) > 0$ 。我们首先处理第一项，它将被拆分成两个积分 $\int_b^{w_+} = \int_b^{v_{k+1}^{\mathrm{r}}} + \int_{v_{k+1}^{\mathrm{r}}}^{w_+}$ （与往常一样，我们用 v_{k+1}^{r} 表示 v_{k+1}的右端点）。首先，

$$\left|\int_b^{v_{k+1}^{\mathrm{r}}} \exp\Big(-\int_\tau^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \exp\Big(-\int_{v_{k+1}^{\mathrm{r}}}^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big) \cdot \int_b^{v_{k+1}^{\mathrm{r}}} |\mathfrak{K}'(\tau)|\,d\tau. \tag{4.1.2}$$

获取 $w \in (v_{k+1}^{\mathrm{r}},\ w_+)$。然后，

$$\begin{aligned}\int_{v_{k+1}^{\mathrm{r}}}^{w_+} \exp\Big(-\int_\tau^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau &\geqslant \int_w^{w_+} \exp\Big(-\int_\tau^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau \geqslant \\ &\geqslant \exp\Big(-\int_w^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big) \cdot \int_w^{w_+} \mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau = \exp\Big(-\int_w^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big) \cdot \big(\mathfrak{K}(w_+) - \mathfrak{K}(w)\big).\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

我们将（4.1.1）式两边同时乘以 \(\exp\{v1\}\)，利用（4.1.2）式和（4.1.3）式，得到

$$\begin{aligned}\exp\Big(\int_w^{w_+} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)F_{\mathrm{R}}(w_+) \geqslant \\ \mathfrak{K}(w_+) - \mathfrak{K}(w) - \exp\Big(-\int_{v_{k+1}^{\mathrm{r}}}^{w} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big) \cdot \int_b^{v_{k+1}^{\mathrm{r}}} |\mathfrak{K}'(\tau)|\,d\tau + \exp\Big(-\int_b^{w} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)F_{\mathrm{R}}(b).\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

当 $\varepsilon \to 0$、 κ 从下方逐点趋近于 κ_2 时，因此 (4.1.4) 右端的两个指数都趋于零。这些指数乘以有界因子。事实上，

$$\int_b^{v_{k+1}^{\mathrm{r}}} |\mathfrak{K}'(\tau)|\,d\tau \leqslant \int_{c_k}^{v_{k+1}^{\mathrm{r}}} |\mathfrak{K}'(\tau)|\,d\tau.$$

第二个因子的有界性处理起来更加繁琐。如果 ($g(a)$ $g(b)$) 是一个多杯形的上弦，那么 $F_{\mathrm{R}}(b) = 0$ ，无需进行任何处理。考虑杯形区域的情况。在这种情况下，我们使用 (3.6.4)：

$$F_{\mathrm{R}}(b) = \frac{D_{\mathrm{R}}(a,b)}{g_1'(b)\kappa_2'(b)}. \tag{4.1.5}$$

让我们重写公式 (3.5.14)。应用 (3.5.2) 和 (3.5.1) 后，其左侧呈现为以下形式。

$$\det\begin{pmatrix}\gamma''(b)\\ \gamma'(a)\\ \gamma(b)-\gamma(a)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\gamma''(b)\\ \gamma'(a)\\ C_{\mathrm{R}}\gamma'(b) - C_{\mathrm{L}}\gamma'(a)\end{pmatrix} = C_{\mathrm{R}}\det\begin{pmatrix}\gamma''(b)\\ \gamma'(a)\\ \gamma'(b)\end{pmatrix} = -C_{\mathrm{R}}D_{\mathrm{R}}\det\begin{pmatrix}g'(b)\\ g'(a)\end{pmatrix}.$$

由于同一公式 (3.5.2)，(3.5.14) 右端的非积分项消失。因此，我们得到

$$C_{\mathrm{R}}D_{\mathrm{R}}\det\begin{pmatrix}g'(b)\\ g'(a)\end{pmatrix} = g_1'(b)g_1'(a)\kappa_2'(b)\int_a^b \Big(\mathfrak{K}(u) - \mathfrak{K}(b)\Big)\kappa_2'(u)\big(g_1(b) - g_1(u)\big)\,du.$$

T函数 $W(u) = \kappa_2'(u)\big(g_1(b) - g_1(u)\big)$ 非负，且其在 $[a,b]$ 上的积分等于 to

$$\int_a^b W(u)\,du = \kappa_2(u)\big(g_1(b)-g_1(u)\big)\Big|_a^b + \int_a^b \kappa_2(u)g_1'(u)\,du = \\ = -\kappa_2(a)\big(g_1(b)-g_1(a)\big) + g_2(b) - g_2(a) = -\frac{1}{g_1'(a)}\det\begin{pmatrix} g(b)-g(a) \\ g'(a)\end{pmatrix} = -\frac{1}{g_1'(a)}\det\begin{pmatrix} g'(b) \\ g'(a)\end{pmatrix} C_{\mathrm{R}}. \tag{4.1.6}$$

因此，(4.1.5) 可写成

$$F_{\mathrm{R}}(b) = \frac{\int_a^b \big(\mathfrak{K}(b)-\mathfrak{K}(u)\big)W(u)\,du}{\int_a^b W(u)\,du}.$$

根据中值定理，存在某个 $u \in [a,b]$，使得 $F_{\mathrm{R}}(b) = \mathfrak{K}(b) - \mathfrak{K}(u)$，该值有界，而且当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零。因此，(4.1.4) 的右端趋于 $\mathfrak{K}(w_+) - \mathfrak{K}(w)$，这是正值。因此，当 ε 充分小时，(4.1.4) 的左侧为正。 □

下面引理中的记号与前一个引理中的相同。

引理 4.1.4. 力之差， $F_{\mathrm{R}}(u; a_k, b_k) - F_{\mathrm{L}}(u; a_{k+1}, b_{k+1})$，在区间 $(t_{k+1}^{\mathrm{L}}, t_k^{\mathrm{R}}) \cap (b_k, a_{k+1})$上严格递增(作为 u 的函数)。

证明。 我们对所讨论的函数关于 u 求导，使用 (3.6.6)，得到

$$\big(F_{\mathrm{R}} - F_{\mathrm{L}}\big)' = -\beta_{2,\mathrm{R}}' + \beta_{2,\mathrm{L}}' > 0, \tag{4.1.7}$$

因为 $\beta_{2,\ \mathrm{L}}' > 0 > \beta_{2,\ \mathrm{R}}'$ 在 $(t_{k+1}^{\mathrm{L}},\ t_k^{\mathrm{R}}) \cap (b_k,\ a_{k+1})$ 上成立，这是由定义 3.3.8 得出的。命题得证。 □

推论 4.1.5。 平衡方程

$$F_{\mathrm{R}}(u; a_k, b_k; \varepsilon) = F_{\mathrm{L}}(u; a_{k+1}, b_{k+1}; \varepsilon) \tag{4.1.8}$$

当 ε 足够小时，在 $(t_{k+1}^{\mathrm{L}},\ t_k^{\mathrm{R}})$ 中有唯一的根。

证明。 首先，由引理 4.1.3，当 ε 足够小时，我们有 $[t_{k+1}^{\mathrm{L}}, t_k^{\mathrm{R}}] \subset (b_k,\ a_{k+1})$。根据尾部的定义以及力的连续性，力函数在其尾部的端点处为零： $F_{\mathrm{R}}(t_k^{\mathrm{R}};\ a_k,\ b_k;\ \varepsilon) = 0$，并且 $F_{\mathrm{L}}(t_{k+1}^{\mathrm{L}};\ a_{k+1},\ b_{k+1};\ \varepsilon) = 0$。因此，

$$F_{\mathrm{R}}(t_{k+1}^{\mathrm{L}}; a_k, b_k; \varepsilon) - F_{\mathrm{L}}(t_{k+1}^{\mathrm{L}}; a_{k+1}, b_{k+1}; \varepsilon) = F_{\mathrm{R}}(t_{k+1}^{\mathrm{L}}; a_k, b_k; \varepsilon) < 0,$$

因为 $t_{k+1}^{\mathrm{L}} \in (b_k,\ t_k^{\mathrm{R}})$。类似地，

$$F_{\mathrm{R}}(t_k^{\mathrm{R}}; a_k, b_k; \varepsilon) - F_{\mathrm{L}}(t_k^{\mathrm{R}}; a_{k+1}, b_{k+1}; \varepsilon) = -F_{\mathrm{L}}(t_k^{\mathrm{R}}; a_{k+1}, b_{k+1}; \varepsilon) > 0.$$

根据博尔查诺–魏尔施特拉斯原理，平衡方程在 $(t_{k+1}^{\mathrm{L}}, t_k^{\mathrm{R}})$ 上有一个根 u_{k+1}。根据引理 4.1.4，该根是唯一的。 □

注 4.1.6。 前述引理和推论的结果在其中一个杯形区域（或两个杯形区域）位于无穷远处时仍然成立，即相应的 c_k 是无穷大。

现在，我们已经具备了证明定理 4.1.2 所需的所有要素。

定理 *4.1.2* 的证明。 首先，我们取 ε 为一个足够小的数，使得借助命题 3.5.9，可以围绕每个 c_k 构造一个完整杯（如果 c_k 是实根，则构造一个多杯形）。此外，我们取ε 足够小，使所有这些图形互不相交。由于根据我们的假设，根的数量有限，这是可行的。然后，如果对于每个 k， ε 都满足推论 4.1.5（连同注 4.1.6）的假设，就可以在每一对相邻的杯形区域或多杯形之间，拼接一个顶点位于方程 (4.1.8) 的唯一根处的角，见推论 3.6.5。关系 $u_{k+1} \to v_{k+1}$ 是引理 4.1.3 与包含关系 $u_{k+1} \in (t_{k+1}^{\mathrm{L}}, t_k^{\mathrm{R}})$ 的直接推论。

□

4.2 演化的准备

本节汇集了一些对演化有用的技术引理。这些引理分为三组。第一组描述第三类虚拟顶点可能出现的位置，第二组讨论尾部和力，第三组则研究平衡方程。

4.2.1 弦的结构引理

我们对弦域作如下约定：不等式 $D_{\mathrm{L}} < 0$ 和 $D_{\mathrm{R}} < 0$ 在弦域内成立。注意，在弦域中构造标准候选函数时也需要满足相同的不等式。

引理 4.2.1. 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b], *)$ 为一个弦域。若 $D_{\mathrm{L}}(a,b) = 0$，则 $\mathfrak{K}$ 在 a 的右侧递减；若 $D_{\mathrm{R}}(a,b) = 0$，则 $\mathfrak{K}$ 在 b 的左侧递增。

证明. 我们只讨论右微分的情形。其余情形是对称的。我们将使用公式 (3.5.8)。令

$$U(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g'''(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}} - \frac{\det \begin{pmatrix} g''(t) \\ g(t) - g(s) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t) - g(s) \end{pmatrix}},$$

其中， $s = s(t)$， $s < t$ 是第 3.4 节中定义的对应于弦域的函数。函数 U 实际上是 b 左邻域内的有界变差测度，因此我们可以找到一个递增函数 A，使得 $A' + U$ 在 b 的左邻域内是一个正测度。考虑 $V(t) = e^{A(t)} D_{\mathrm{R}}(s,t)$ 在 b 的左邻域内的情形。我们使用方程 (3.5.8) 和 (2.1.11)：

$$e^{-A(t)} V'(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{\det \begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}} + (A'(t) + U(t)) D_{\mathrm{R}}(s,t).$$

如果 $\mathfrak{K}$ 在 b 左侧没有增加，那么根据 (2.1.13) 和条件 2.1.10，$\mathbf{T}(t) < 0$ 在 b 的一个小左邻域内。由于 $A'(t) + U(t) > 0$ 且 $D_{\mathrm{R}}(s,t) < 0$，我们得到 $V'(t) < 0$。因此， V 递减，这与以下事实矛盾：对于 $t < b$， $V(t) < 0$，且 $V(b) = 0$。 □

引理 4.2.2. 假设一对(a,b) 满足杯形方程，且弦 $[g(a)\ g(b)]$ 具有非零尾部(即， $t^{\mathrm{L}} < a$ 和 $b < t^{\mathrm{R}}$)。若 $D_{\mathrm{L}}(a,b) = 0$，则 $\mathfrak{K}$ 在 a左侧递增；若 $D_{\mathrm{R}}(a,b) = 0$，则 $\mathfrak{K}$在 b右侧递减。

证明。 我们仅讨论右微分的情况。其余情况是对称的。我们将使用公式（3.6.4）。根据函数 f 的条件 2.1.10，函数 $\mathfrak{K}$ 在 b 的某个右邻域内要么递增，要么递减。如果它递增，则力 F_{R} 非负，这与假设 $t^{\mathrm{R}} > b$ 矛盾。因此， $\mathfrak{K}$ 在 b 的右侧递减。

□

结合这两个引理，我们得到以下推论：在演化过程中，微分只有在某些非常特殊的情形下才会消失（在下面的推论中，我们使用定义 2.1.12 中的记号）。

推论 4.2.3. 假设弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)$ 具有非零尾部。若 $D_{\mathrm{R}}(a,b)=0$，则对于某个 i，有 $b=c_i$；若 $D_{\mathrm{L}}(a,b)=0$，则对于某个 i，有 $a=c_i$。

4.2.2 尾部增长引理

引理 4.2.4. 假设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1,b_1],[a_0,b_0])$ 嵌入到 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],[a_0,b_0])$ 中，即，前一个弦域的叶状分解与后一个弦域的叶状分解的某一部分重合。那么，$\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1,b_1],*)$ 的力不超过$\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],*)$对应的力。更准确地说，它们在 $[a_1,a_0]\cup[b_0,b_1]$ 上相等，而在 $[a_1,b_1]$ 之外，不等式严格成立。

证明。 对于右力，该结论由 (3.6.7) 以及 $\kappa_{\mathrm{R}}(b)<\kappa_{\mathrm{chord}}(b)<\kappa_2(b)$ 得出。注意，$D_{\mathrm{R}}(a,b)<0$ 因此，随着弦域扩大，F_{R} 递增，即 b 递增。对于左力，类似的论证同样成立：我们使用 (3.6.9) 以及系数间的反向关系：$\kappa_{\mathrm{L}}(a)>\kappa_{\mathrm{chord}}(a)>\kappa_2(a)$。因此，随着弦域扩大，$F_{\mathrm{L}}$ 递增，即 a递减。

□

推论 4.2.5。 假设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1,b_1],*)$ 按照引理 4.2.4 的含义嵌入到 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],*)$ 中。则前一个弦域的尾部严格包含后一个弦域的尾部。

证明。 这由引理 4.2.4 和尾部的定义得出。 □

前述结论可以非正式地改述如下：弦域越小，尾部越大，而尾部内的力越小（绝对值越大）。下面的引理描述了固定弦域的力对于一族不断扩大的定义域 Ω_ε 的单调性。

引理 4.2.6. 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)$ 是一个弦域，设 F是其左侧力或右侧力。若 t 属于 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)$相应尾部的闭包，则

$$\frac{\partial F(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\leqslant 0,$$

且在 $[a,b]$之外，不等式为严格不等式。

证明。 我们只讨论右侧力的情形，另一种情形是对称的。首先注意，在 $[a,b]$内，力与 ε无关，因此，$\frac{\partial F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=0$。其次，我们使用公式 (3.6.6)，得到

$$F'_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)+\frac{\kappa_2'(t)}{\kappa_2(t)-\kappa(t;\varepsilon)}F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=\mathfrak{K}'(t).$$

o在此区间之外。我们谨慎地对该方程关于 ε 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F'_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)+\frac{\kappa_2'(t)}{\kappa_2(t)-\kappa(t;\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=-\frac{\kappa_2'(t)F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)}{(\kappa_2(t)-\kappa(t;\varepsilon))^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\kappa(t;\varepsilon).$$

在第一项中交换关于 t 和 ε 的微分后，我们看到 $y(t)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)$ 是关于 t 的一阶微分方程的解：

$$y'(t)+\frac{\kappa_2'(t)}{\kappa_2(t)-\kappa(t;\varepsilon)}y(t)=-\frac{\kappa_2'(t)F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)}{(\kappa_2(t)-\kappa(t;\varepsilon))^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\kappa(t;\varepsilon).$$

我们利用 (3.2.11) 将解表示为:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=\exp\Big(-\int_b^t\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\left(\int_b^t\exp\Big(\int_b^\tau\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\Big[-\frac{\kappa_2'F_{\mathrm{R}}}{(\kappa_2-\kappa)^2}\frac{\partial\kappa}{\partial\varepsilon}\Big](\tau)\,d\tau+\mathrm{Const}(\varepsilon)\right),$$

其中常数为零，因为 $\lim_{t\to b+}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=0$（该极限关系可通过使用公式（3.6.4）进行直接计算验证）。现在，结论立即得出，因为 $F_{\mathrm{R}}<0$ 在尾部内，$\kappa_2'>0$ 且 $\frac{\partial\kappa_{(t;\varepsilon)}}{\partial\varepsilon}<0$ 出于几何原因。

□

推论 4.2.7. 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a,b],*)$ 为一个具有非零尾部的弦域。如果我们将 ε 稍微增大，该弦域的尾部将严格扩大。

证明。 根据引理 4.2.6，在相应的尾部上，力会减小（绝对值增大），因此尾部不会缩短。此外，如果我们稍微增大 ε，尾部末端的力就会变为负值，尾部也会随之延长。

□

注 4.2.8. 引理 4.2.6 和推论 4.2.7 的结果对于来自无穷远点和多杯域的力同样成立。

暂且，我们允许弦域超出 Ω_ε，即它们的弦可以与自由边界相交。当然，在研究弦域时，我们并不需要上边界，因此，这样的假设不会破坏所有关于弦域的结果。

引理 4.2.9。 设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],[a_1,b_1])$ 是一个弦域，并且其中有标准贝尔曼候选函数。假设 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 且存在可微函数 $a\colon[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\to[a_2,a_1]$ 和 $b\colon[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\to[b_1,b_2]$，使得弦 $[g(a(\varepsilon))\ g(b(\varepsilon))]$ 对于任意 $\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 都与 Ω_ε 的自由边界相切。那么，对于任意 $\tilde\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big[F\big(t;a(\tilde\varepsilon),b(\tilde\varepsilon);\varepsilon\big)\Big]\Big|_{\varepsilon=\tilde\varepsilon}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big[F\big(t;a(\varepsilon),b(\varepsilon);\varepsilon\big)\Big]\Big|_{\varepsilon=\tilde\varepsilon},$$

其中，F 表示右侧(见(3.6.4)) 或左侧(见(3.6.5)) 力函数。

证明。 根据引理 3.6.16，该恒等式成立，因为当弦与自由边界相切时，$\kappa_{\mathrm{R}}=\kappa_{\mathrm{L}}=\kappa_{\mathrm{chord}}$。

□

引理 4.2.10。 在引理 4.2.9 的假设下，$\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)],*)$ 的尾部在 ε 中严格增大。

证明。 事实上，考虑某个点 t，它属于某个 ε 对应的 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)],*)$ 的某个尾部。首先，我们需要证明 $F(t;\,a(\varepsilon)\ b(\varepsilon);\,\varepsilon)$ 在 ε 中递减。该函数关于 ε 的导数非正，因为根据引理 4.2.9，对于每个 ε，它等于假设弦域的上弦固定时所取的相应导数，而根据引理 4.2.6，该导数非正。因此，尾部不会缩小。此外，根据引理 4.2.6，相应的力在每个尾部末端处的导数非零，因此尾部会增长。

□

定义 4.2.11。 设 $0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_{\max}$。设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1,b_1],\ [a_0,b_0])$ 是一个弦域。假设存在两个连续函数 $a\colon[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\to[a_1,a_0]$，$b\colon[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\to[b_0,b_1]$，使得对于任意 $\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，$[g(a(\varepsilon)\ g(b(\varepsilon))]$ 是该弦域的一条弦。我们称这一族为

$$\{\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon),b(\varepsilon)],[a_0,b_0])\}_\varepsilon$$

弦域的一个流。该流生成相应的力：

$$\begin{aligned} &F_{\mathrm{R}}\Big(u;\Omega_{\mathrm{ch}}\big(\big[a(\varepsilon),b(\varepsilon)\big],[a_0,b_0]\big);\varepsilon\Big), \quad u\in[b_0,t^{\mathrm{R}}(\varepsilon)),\\ &F_{\mathrm{L}}\Big(u;\Omega_{\mathrm{ch}}\big(\big[a(\varepsilon),b(\varepsilon)\big],[a_0,b_0]\big);\varepsilon\Big), \quad u\in(t^{\mathrm{L}}(\varepsilon),a_0], \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

其中， $t^{\mathrm{R}}(\varepsilon)$ 和 $t^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$ 分别是 $\Omega_{\mathrm{ch}}\big(\big[a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)\big],\ [a_0,b_0]\big)$ 的尾部的右端点和左端点。如果 b 递减（a 递增），则称一个流为递减的 。如果对于所有 $\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，弦 $[g(a(\varepsilon)\ g(b(\varepsilon))]$ 都与 Ω_ε 的自由边界相切，则称该流为满的 。

我们在以下推论中汇总前述引理的陈述。

推论 4.2.12. 考虑弦域的递减流或完整流。相应的力(4.2.1)在弦域之外是关于 ε 的严格递减函数，在弦域内部则为常数。因此，尾部会扩大。

证明。对于 在递减流的情况下，我们使用引理 4.2.6 和引理 4.2.4。对于完整流的情况，我们使用引理 4.2.10。 □

定义 4.2.13。 设 $0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_{\max}$，设 $u_-\colon\ [\varepsilon_1,\varepsilon_2]\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 为非递增函数， $u_+\colon\ [\varepsilon_1,\varepsilon_2]\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为非递减函数，且满足 $u_-\leqslant u_+$。假设对于任意$\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，存在一个围栏 $\Omega(I_\varepsilon)$，使得 $(u_-(\varepsilon)\ u_+(\varepsilon))\subset I_\varepsilon$。

若连续函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}\colon\ \{(u,\varepsilon)\colon\ u\in[u_-(\varepsilon)\ u_+(\varepsilon)]\cap\mathbb{R},\ \varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\}\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为右单调力流：

1. 对任意 $\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，围栏 $\Omega(I_\varepsilon)$ 都是一个右切域，函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon)$ 是 Definition 3.3.8 中引入的 $\Omega_{\mathrm{R}}(I_\varepsilon)$ 上某个标准候选函数的力；
2. $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(u_+(\varepsilon);\varepsilon)=0$ 当且仅当 $u_+(\varepsilon)<+\infty$；
3. 对于任意 η_1 和 η_2，只要 $\varepsilon_1<\eta_1<\eta_2<\varepsilon_2$，当 $v\in(u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1)]\cap\mathbb{R}$ 时，我们有 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(v;\eta_1)>\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(v;\eta_2$。

我们称连续函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}\colon\ \{(u,\varepsilon)\colon\ u\in[u_-(\varepsilon)\ u_+(\varepsilon)]\cap\mathbb{R},\ \varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\}\to\mathbb{R}$ 为**左单调力流** ，如果：

1. 对任意 $\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，围栏 $\Omega(I_\varepsilon)$ 是一个左切域，函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon)$ 是 $\Omega_{\mathrm{L}}(I_\varepsilon)$ 上一个标准候选函数的力；
2. $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(u_-(\varepsilon);\varepsilon)=0$ 当且仅当 $u_-(\varepsilon)>-\infty$；
3. 对于任意满足 $\varepsilon_1<\eta_1<\eta_2<\varepsilon_2$ 的 η_1 和 η_2，只要 $v\in(u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1))\cap\mathbb{R}$，就有 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(v;\eta_1)>\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(v;\eta_2)$。

单调力流可以由弦域的流生成，如式 (4.2.1) 所示。于是，在右侧情形下，我们有 $u_+=t^{\mathrm{R}}$；在左侧情形下，则有 $u_-=t^{\mathrm{L}}$。关于 t^{R} 和 t^{L} 的定义，参见第 3.6.2 小节。注 4.2.14。 我们强调，对于任意固定的 $\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，若 $u_-(\varepsilon)<u_+(\varepsilon)$，则单调力流 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\ \cdot\ ;\varepsilon)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot\ ;\varepsilon)$ 满足微分方程

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}'=\mathfrak{K}'-\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{R}}}\mathfrak{F}_{\mathrm{R}},\qquad \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}'=\mathfrak{K}'-\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa_{\mathrm{L}}}\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}. \tag{4.2.2}$$

因此，注3.6.8和注3.6.10的陈述对于力仍然成立：

- if $u_-(\varepsilon)<u_+(\varepsilon)<\infty$, then $\mathfrak{K}'>0$ in a left neighborhood of $u_+(\varepsilon)$;

- 若 $u_+(\varepsilon) > u_-(\varepsilon) > -\infty$，则 $\mathfrak{K}' < 0$ 在 $u_-(\varepsilon)$ 的右邻域内。

注 4.2.15。 注意，右单调力流定义中的函数 u_+ 在有限时严格递增。类似地，左单调力流定义中的函数 u_- 在有限时严格递减。

一个简单的单调力流示例是由一条不依赖于 ε 的弦所产生的力（单调性由引理 4.2.6 得出）。

注 4.2.16。 设 $\{\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)], *)\}$, $\varepsilon \in [\eta_1, \eta_2]$, 是弦域的递减流或满流。则

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(u\,;\varepsilon) = F_{\mathrm{R}}(u\,;\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon), b(\varepsilon)], *)\,;\varepsilon), \quad u \in [b(\varepsilon), t^{\mathrm{R}}(\varepsilon)] \cap \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in [\eta_1, \eta_2],$$

是一个右单调力流，并且

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(u\,;\varepsilon) = F_{\mathrm{L}}(u\,;\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon), b(\varepsilon)], *)\,;\varepsilon), \quad u \in [t^{\mathrm{L}}(\varepsilon), a(\varepsilon)] \cap \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in [\eta_1, \eta_2],$$

是一个左单调力流。

4.2.3 平衡方程引理

定义 4.2.17。 设 F_{R} 和 F_{L} 是弦域、无穷远点或多杯域的力（定义见第 3.6.2 小节和注 3.7.14），且它们的定义域相交。那么平衡方程 为

$$F_{\mathrm{R}}(u) = F_{\mathrm{L}}(u), \tag{4.2.3}$$

其中， u 属于各个力的定义域的交集。

我们正在寻找平衡方程的解。引理 4.1.4 帮助我们在推论 4.1.5 中证明了解的存在性。

引理 4.2.18。 设 F_{R} 和 F_{L} 是弦域、 无穷远点、 多杯域， 或简单的弦中的两个力，且它们的尾部有交集。则函数 $F_{\mathrm{R}}(u) - F_{\mathrm{L}}(u)$ 在此交集上严格递增。

证明。 证明与引理 4.1.4 的证明完全相同。 □

4.3 局部演化定理

本节所有定理的形式如下：如果对于某个 ε，我们可以用特定公式在某个特定定义域上构造一个贝尔曼候选函数，那么对于稍大的 ε，我们也可以用经过扰动的参数和类似的公式，在一个经过扰动的定义域上构造一个贝尔曼候选函数。这些陈述相当形式化，也有些冗长，因此我们会在每个陈述之前给出简短的启发式说明。我们还要重申一项约定：在弦域及其任意尾部内，力都严格为负。

下面的命题指出，任何被切域包围的完整弦域（其上弦的微分非零）都会随着 ε 的增大而扩大（换言之，根据定义 4.2.11，完整弦域会生成一个从自身出发的弦域满流）。

命题 *4.3.1*（弦域的归纳步骤）。设 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1, b_1], [a_0, b_0])$ 是一个完整弦域， $u_1 < a_1 \leqslant a_0 \leqslant b_0 \leqslant b_1 < u_2$, 且 $0 < \eta_1 < \varepsilon_{\max}$。设连续函数 B 在 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1, b_1], [a_0, b_0])$、$\Omega_{\mathrm{L}}(u_1, a_1;\ \eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(b_1, u_2;\ \eta_1)$ 上与标准候选函数一致。若 $D_{\mathrm{L}}(a_1, b_1) < 0$且 $D_{\mathrm{R}}(a_1, b_1) < 0$, 则存在 η_2、 $\eta_2 > \eta_1$ 以及一个由弦域组成的完整流 $\{\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)], [a_0, b_0])\}_{\varepsilon \in [\eta_1, \eta_2]}$，使得 $a(\eta_1) = a_1$、 $b(\eta_1) = b_1$ ；并且对每个 $\varepsilon \in [\eta_1, \eta_2]$ ，都存在一个连续函数 B_ε，它在 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1, a(\varepsilon);\ \varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)], [a_0, b_0])$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(b(\varepsilon)\ u_2;\ \varepsilon)$ 上与标准候选函数一致。

证明。我们使用注 3.5.15 3.5.16 a_1 b_1 $\delta>0$ $\tilde{a}$。以及命题。来对一对（，）寻找函数和函数 b，它们从 $[0,\delta]$ 作用到 $\mathbb{R}$，使得 $\tilde{a}$ 递减，$\tilde{a}(0)$ $=a_1$ τ $=$，b 递增，$b(0)=b_1$，$b(\ )-\tilde{a}(\ )\,b_1-a_1+\tau$，并且对 $(\tilde{a}(\tau)\ b(\tau))$ 满足 (3.4.2) 以及不等式 $D_{\mathrm{L}}(\tilde{a}(\tau)\ b(\tau))<0$ 和 $D_{\mathrm{R}}(\tilde{a}(\tau)\ \tilde{b}(\tau))<0$（对 $\tau\in[0,\delta]$）。我们选取 $\eta_2>\eta_1$，使得弦 $\left[g(\tilde{a}(\delta)\ g(\tilde{b}(\delta))\right]$ 与 Ω_{η_2} 的自由边界相交。于是，对任意 $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$，存在唯一的 $\tau=\tau(\varepsilon)\in[0,\delta]$，使得弦 $\left[g(\tilde{a}(\tau)\ g(\tilde{b}(\tau))\right]$ 与 Ω_ε 的自由边界相切。令 $a(\varepsilon)=\tilde{a}(\tau(\varepsilon))$，$b(\varepsilon)=b(\tau(\varepsilon))$。

根据我们的假设，u_2 属于 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_1,b_1],\ [a_0,b_0])$ 的右尾部，而 u_1 属于其左尾部。由引理 4.2.10，u_1 和 u_2 分别属于 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)],\ [a_0,b_0])$、$\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$ 的左尾部和右尾部。这使我们能够在 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)],\ [a_0,b_0])\cup\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,\ a(\varepsilon);\varepsilon)\cup\Omega_{\mathrm{R}}(b(\varepsilon)\ u_2;\varepsilon)$ 上为 $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$ 定义所需的 B_ε。□

根据注记 4.2.16，函数

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(u;\varepsilon)=F_{\mathrm{R}}(u;[a(\varepsilon),b(\varepsilon)];\varepsilon),\qquad \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(u;\varepsilon)=F_{\mathrm{L}}(u;[a(\varepsilon),b(\varepsilon)];\varepsilon)$$

是相应定义域上的右单调力流和左单调力流。

下面的命题描述了非满多杯（即多杯形区域 $\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k;\varepsilon)$，其中弦 $\left[g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})\ g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})\right]$ 不包含在 Ω_ε 中）在 ε 中的演化。

命题 *4.3.2*（多杯形的归纳步骤）。设 $\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k;\eta_1)$ $\eta_1\in(0,\varepsilon_{\max})$ 是一个多杯形，使得弦 $\left[g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})\ g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})\right]$ 不位于 Ω_{η_1}、$u_1<\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}$ 和 $\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}<u_2$ 中。设一个连续函数 B 在 $\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k;\eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}};\eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(a_k^{\mathrm{r}},u_2;\eta_1)$ 上与标准候选函数一致。那么存在 η_2、$\eta_1<\eta_2$，使得对于每个 $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$，存在一个连续函数 B_ε，其在 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}};\varepsilon)$、$\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k;\varepsilon)$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}},u_2;\varepsilon)$ 上与标准候选函数一致。

证明。我们可以取任意满足弦 $\left[g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})\ g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})\right]$ 与 Ω_{η_2} 的自由边界相交的 $\eta_2>\eta_1$。从指定的区间中任取一个 ε。根据注 4.2.8，多杯形的尾部会随 ε 增大，因此点 u_1 和 u_2 属于这些尾部。由此可以构造所需的函数 B_ε。□

显然，函数

$$F_{\mathrm{R}}(u;[\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}];\varepsilon)\quad\text{and}\quad F_{\mathrm{L}}(u;[\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}];\varepsilon)$$

是相应定义域上的右单调力流和左单调力流。

下面的命题说明，具有非零尾部的长弦会产生一个弦域。我们指出，这推广了命题 4.3.1（在后一种情形下，微分非零，因此上弦的尾部也非零）。不过，出于教学上的考虑，我们更愿意将这两个命题分开。在某种意义上，一个或两个微分为零的情形不同于命题 4.3.1 中所述的情形。事实上，假设其中一个微分为零，并且在弦 $[g(a_0)\ g(b_0)]$ 下方有一个弦域，其上定义了标准候选函数。根据命题 4.3.3，在增大 ε 后，我们可以在 $[g(a_0)\ g(b_0)]$ 上方构造一个弦域，并在其上定义标准候选函数。然而，我们无法将这些标准候选函数拼接成一个，因为标准候选函数的微分必须严格为负。我们还指出，下面的命题也可应用于完整多杯的上弦（即，弦 $\left[g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})\ g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})\right]$ 与 Ω_ε 的自由边界相切的多杯形）。

命题 *4.3.3*（长弦的归纳步骤）。假设 $a_0,b_0,u_1,u_2\in\mathbb{R}$，$a_0<b_0$，数对 (a_0,b_0) 满足杯形方程 *(3.4.2)*，并且弦 $[g(a_0)\ g(b_0)]$ 与 Ω_{η_1}，$\eta_1\in(0,\varepsilon_{\max})$ 的自由边界相切。再设 $u_1<a_0$ 和 $u_2>b_0$，且 u_1 属于弦 $[g(a_0)\ g(b_0)]$ 的左尾部，u_2 属于其右尾部。那么存在 η_2，$\eta_2>\eta_1$，以及弦域的完整流 $\{\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)],[a_0,b_0])\}_{\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]}$，使得对每个 $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$，都存在一个连续函数 B_ε，它与 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,a(\varepsilon);\varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ b(\varepsilon)],[a_0,b_0])$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(b(\varepsilon)\ u_2;\varepsilon)$ 上的标准候选函数重合。

证明。 该证明重复了命题 4.3.1 的证明，唯一的区别是，这里我们需要直接验证条件 3.5.14，以便使用命题 3.5.16。

我们需要验证该量

$$L(t)=\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ \gamma'(a_0)\\ \gamma'(b_0)\end{pmatrix}=g_1'(t)\det\begin{pmatrix}1 & \kappa_2(t) & \kappa_3(t)\\ g_1'(a_0) & g_2'(a_0) & f'(a_0)\\ g_1'(b_0) & g_2'(b_0) & f'(b_0)\end{pmatrix}$$

在 t 左侧为正，在 a_0 右侧为负。我们考虑右侧情形，左侧情形类似。由于弦 $[g(a_0)\ g(b_0)]$ 的右尾部非空， $D_{\mathrm{R}}(a_0,\ b_0)\leqslant 0$。若 $D_{\mathrm{R}}(a_0,\ b_0)<0$，则结论显然成立（见注 3.5.15）。若 $D_{\mathrm{R}}(a_0,\ b_0)=0$，则利用引理 4.2.2 可得，对于某个 $\delta>0$， $\mathfrak{K}$ 在 $(b_0,\ b_0+\delta)$ 上递减。注意， $L(b_0)=L'(b_0)=0$，且对于 $t\in(b_0,\ b_0+\delta)$，我们有

$$L_1(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\left(\frac{L(t)}{g_1'(t)}\right)'}{\kappa_2'(t)}=\mathfrak{K}(t)\det\begin{pmatrix}g'(a_0)\\ g'(b_0)\end{pmatrix}+\mathrm{Const}<\mathfrak{K}(b_0)\det\begin{pmatrix}g'(a_0)\\ g'(b_0)\end{pmatrix}+\mathrm{Const}=L_1(b_0)=0.$$

由于 $\kappa_2'>0$，函数 $\frac{L}{g_1'}$ 在 $(b_0,\ b_0+\delta)$ 上严格递减，因此 $\frac{L}{g_1'}(t)<\frac{L}{g_1'}(b_0)=0$，并且对于 $t\in(b_0,\ b_0+\delta)$， $L(t)<0$，因为 $g_1'>0$。 □

现在我们转而讨论无轨电车。接下来的两个命题指出，随着 ε 增大，无轨电车的底部会缩小。更正式地说，存在一个弦域的递减流，使得对每个 ε，我们都可以在相应的弦域上构造一辆无轨电车。下文中，我们将用记号 $\overline{\mathbb{R}}$ 表示扩展实数线 $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$，其中 $\overline{\ }$。

命题 *4.3.4*（右侧无轨电车的归纳步骤）。设 $\eta_1,\eta_3\in\mathbb{R}$, $0<\eta_1<\eta_3<\varepsilon_{\max}$。假设 $a_1,b_1,a_2,b_2,u\in\mathbb{R}$, $a_2<a_1<b_1<b_2\leqslant u$。令 $\Omega([a_2,a_1])$ 为带有相应函数 $s\colon [a_2,a_1]\to[b_1,b_2]$, $s(a_i)=b_i$, $i=1,2$ 的围栏。此围栏与 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],[a_1,b_1])$ 重合。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 是一个右单调力流，其相应函数为 $u_\pm\colon [\eta_1,\eta_3]\to\mathbb{R}$，且满足 $a_2\in[u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1)]$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ a_2;\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{tr},\mathrm{R}}(a_2,b_2;\eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{R}}(b_2,u;\ \eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])$ 上与标准候选函数重合。此外， B 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ a_2;\eta_1)$ 上的力与 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\ \eta_1)$ 重合。那么存在 η_2, $\eta_1<\eta_2<\eta_3$，以及一个严格递增函数 $a\colon [\eta_1,\eta_2]\to[a_2,a_1]$，使得 $a(\eta_1)=a_2$；并且对任意 $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$，存在一个连续函数 B_ε，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ a(\varepsilon);\varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{tr},\mathrm{R}}(a(\varepsilon)\ b(\varepsilon);\ \varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ a_1])$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(b(\varepsilon)\ u;\varepsilon)$ 上与标准候选函数重合，其中 $b(\varepsilon)=s(a(\varepsilon))$。此外， B_ε 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ a(\varepsilon);\ \varepsilon)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon)$。这些函数

$$F_{\mathrm{R}}\Big(t;a(\varepsilon),b(\varepsilon);\varepsilon\Big)\quad and\quad F_{\mathrm{L}}\Big(t;a(\varepsilon),b(\varepsilon);\varepsilon\Big)\tag{4.3.1}$$

分别是对应定义域上的右单调力流和左单调力流。

我们注意到 $\{\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ a_1])\}$， $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$ 是弦域的递减流。

证明。 我们的第一步是找到 $\eta_2\in(\eta_1,\ \eta_3)$，以及一个位于 a_2 的右邻域中的点 a^-，使得 $a^-<u_+(\varepsilon)$，并且

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a^-;\varepsilon)>F_{\mathrm{L}}(a^-;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])),\qquad \varepsilon\in(\eta_1,\eta_2).\tag{4.3.2}$$

我们考虑两种情况： $u_+(\eta_1)>a_2$ 和 $u_+(\eta_1)=a_2$。

首先，如果 $u_+(\eta_1)>a_2$，那么根据引理 4.2.18，函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1)-F_{\mathrm{L}}(\cdot;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$ 在 a_2 的某个右邻域内严格递增。由于点 a_2 是这些力的平衡方程的根，即 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a_2;\ \eta_1)=F_{\mathrm{L}}(a_2;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$，我们只需取一个点 $a^-\in(a_2,\ u_+(\eta_1))\cap(a_2,\ a_1)$ 并

得到 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a^{-};\eta_1) > F_{\mathrm{L}}(a^{-};\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$。由力的连续性可知，对于某个 $\eta_2\in(\eta_1,\ \eta_3)$，不等式 (4.3.2) 成立。

现在我们假设 $u_{+}(\eta_1) = a_2$。那么 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a_2;\eta_1) = F_{\mathrm{L}}(a_2;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])) = 0$，根据引理 4.2.1，函数 $\mathfrak{K}$ 在区间 (a_2,a^{-}) 上递减，$a^{-} < a_1$。由注 4.2.15 可知，对于任意 $\varepsilon\in(\eta_1,\eta_3]$，$u_{+}(\varepsilon) > a_2$，因此由注 4.2.14 得 $u_{+}(\varepsilon) > a^{-}$。引理 4.2.18 意味着函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon) - F_{\mathrm{L}}(\cdot;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$ 在 (a_2,a^{-}) 上严格递增。如果不存在所需的 η_2，那么对于所有 $\varepsilon,\varepsilon\in(\eta_1,\eta_3)$，$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a^{-};\varepsilon) - F_{\mathrm{L}}(a^{-};\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])) \leqslant 0$。然而，

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a_2;\varepsilon) \quad\longrightarrow\quad \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a_2;\eta_1) = F_{\mathrm{L}}(a_2;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])), \qquad \varepsilon\to\eta_1+,$$

因此，当 $\varepsilon\to\eta_1+$ 时，$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon) - F_{\mathrm{L}}(\cdot;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$ 在 $[a_2,a^{-}]$ 上一致收敛到零；或者，等价地，

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon) - \mathfrak{K} \quad\longrightarrow\quad F_{\mathrm{L}}(\cdot;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])) - \mathfrak{K}, \qquad \varepsilon\to\eta_1+, \tag{4.3.3}$$

在 $[a_2,a^{-}]$上一致收敛。根据注记 3.6.15，(4.3.3) 右端的函数严格递减，而左侧的函数严格递增。这与一致收敛 (4.3.3) 矛盾。因此，存在 $\eta_2\in(\eta_1,\eta_3)$，使得 (4.3.2) 成立。

根据单调力流的定义 4.2.13，

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a_2;\varepsilon) - F_{\mathrm{L}}(a_2;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])) < 0, \quad \varepsilon\in(\eta_1,\eta_2),$$

因为 $F_{\mathrm{L}}(a_2;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$ 不依赖于 ε。因此，存在一个点 $a = a(\varepsilon)\in[a_2,a^{-}]$，它满足平衡方程 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(a;\varepsilon) = F_{\mathrm{L}}(a;\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1]))$。我们注意到函数 a 是递增的。为了得到所需的函数 B_ε，我们只需验证

$$F_{\mathrm{R}}(t;a(\varepsilon),b(\varepsilon);\varepsilon) < 0, \quad \varepsilon\in[\eta_1,\eta_2],\ t\in[b(\varepsilon);u],$$

这由推论 4.2.12 得出，因为 $\{\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ a_1])\}$ 是弦域的递减流。根据注记 4.2.16，力函数 (4.3.1) 构成单调力流。

□

命题 *4.3.5*（左侧无轨电车的归纳步骤）。设 $\eta_1,\eta_3\in\mathbb{R}$, $0<\eta_1<\eta_3<\varepsilon_{\max}$。假设 $a_1,b_1,a_2,b_2,u\in\mathbb{R}$, $u\leqslant a_2<a_1<b_1<b_2$。令 $\Omega_{\mathrm{ch}}([b_1,b_2])$ 为具有相应函数 s 的围栏：$[b_1,b_2]\to[a_2,a_1]$, $s(b_i) = a_i$, $i=1,2$。该围栏与 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,b_2],[a_1,b_1])$ 重合。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$ 是具有相应函数 $u_{\pm}$ 的左单调力流：$[\eta_1,\eta_3]\to\mathbb{R}$，使得$b_2\in[u_{-}(\eta_1)\ u_{+}(\eta_1)]$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{L}}(b_2,u_{+}(\eta_1);\eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{tr,L}}(a_2,b_2;\eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{L}}(u,a_2;\eta_1)$ 以及 $\Omega_{\mathrm{ch}}([b_1,b_2])$ 上与标准候选函数重合。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{L}}(b_2,u_{+}(\eta_1);\eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\eta_1)$。那么存在 η_2, $\eta_1<\eta_2<\eta_3$ 以及严格递减函数 b：$[\eta_1,\eta_2]\to[b_1,b_2]$，使得 $b(\eta_1) = b_2$；并且对于任意 $\varepsilon\in[\eta_1,\eta_2]$，存在一个连续函数$B_\varepsilon$，它在 $\Omega_{\mathrm{L}}(b(\varepsilon)\ u_{+}(\varepsilon);\varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{tr,L}}(a(\varepsilon)\ b(\varepsilon);\varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{L}}(u,a(\varepsilon);\varepsilon)$ 以及 $\Omega_{\mathrm{ch}}([b_1,b(\varepsilon)])$ 上与标准候选函数重合，其中 $a(\varepsilon) = s(b(\varepsilon))$. 此外，$B_\varepsilon$ 在 $\Omega_{\mathrm{L}}(b(\varepsilon)\ u_{+}(\varepsilon);\varepsilon)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon)$。力 *(4.3.1)* 构成单调力流。

注 4.3.6. 由引理 4.2.18 可知，命题 4.3.4 和 4.3.5 中构造的函数 a 和 b 是唯一的（至少在 $\eta_2-\eta_1$ 足够小时如此）。

以下四个命题描述了多重无轨电车的演化行为。看起来，每辆多重无轨电车都会立即分解成电车列队（根据公式 (3.8.13) 和 (3.8.14)），而其中每辆无轨电车都会逐渐减小。为使表述更加流畅，我们分别考虑两个较简单的情形。

命题 4.3.7 (实根上右侧多无轨电车形的归纳步骤)。设 $\eta_1,\eta_3\in\mathbb{R}$, $0<\eta_1<\eta_3<\varepsilon_{\max}$。考虑实根 $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}]$（不排除 $\mathfrak{a}^{\mathrm{l}} = \mathfrak{a}^{\mathrm{r}}$ 的情形）上的右侧多无轨电车形 $\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}\};\eta_1)$。设 $u\in\mathbb{R}$, $\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}\leqslant u$。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 是一个右单调力流，其具有

相应的函数 $u_\pm\colon\ [\eta_1,\eta_3]\to\bar{\mathbb{R}}$ 使得 $\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}\in[u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1)]$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ \mathfrak{a}^{\mathrm{l}};\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{Mtr},\mathrm{R}}(\{\mathfrak{a}\};\eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{r}},u;\ \eta_1)$ 上与标准候选函数一致。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ \mathfrak{a}^{\mathrm{l}};\ \eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1)$。那么对于任意 $\varepsilon\in(\eta_1,\eta_3]$，都存在一个连续函数 B_ε，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ u;\varepsilon)$ 上与标准候选函数一致，且 B_ε 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ u;\varepsilon)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon)$。

证明。首先注意到 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{l}};\eta_1)=0$，因此 $\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}=u_+(\eta_1)$。我们唯一需要证明的是，对于任意 $\varepsilon\in(\eta_1,\eta_3]$，$u_+(\varepsilon)\geqslant u$。由注 4.2.15 可知 $u_+(\varepsilon)>u_+(\eta_1)=\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}$。由注 4.2.14，$u_+(\varepsilon)\notin\mathfrak{a}$，因此 $u_+(\varepsilon)>\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}$。由 (4.2.2)，对于任意 $t\in(\mathfrak{a}^{\mathrm{r}},\ \min(u_+(\varepsilon)\ u)]$，有

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon)=\int_{\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}}^{t}\exp\Big(-\int_{\tau}^{t}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau+\exp\Big(-\int_{\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}}^{t}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{r}};\varepsilon).\tag{4.3.4}$$

(4.3.4) 中的第二项为负，因为 $\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}\in[u_-(\varepsilon)\ u_+(\varepsilon))$。(4.3.4) 中的第一项等于 $F_{\mathrm{R}}(t;\mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}^{\mathrm{r}};\varepsilon)$（见 (3.6.4)，$D_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}^{\mathrm{r}})=0$）。此外，不等式

$$F_{\mathrm{R}}(t;\mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}^{\mathrm{r}};\varepsilon)<F_{\mathrm{R}}(t;\mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}^{\mathrm{r}};\eta_1)\tag{4.3.5}$$

由力关于 ε 的单调性可得。(4.3.5) 的右端非正，因为 $t\in(\mathfrak{a}^{\mathrm{r}},\ u]$ 和 $F_{\mathrm{R}}(\cdot;\ \mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\ \mathfrak{a}^{\mathrm{r}};\ \eta_1)$ 是标准候选函数在 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{r}},\ u;\eta_1)$ 上的力。因此，特别地，$\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\min(u_+(\varepsilon)\ u);\varepsilon)<0$。由于 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(u_+(\varepsilon);\ \varepsilon)=0$，我们有 $\min(u_+(\varepsilon)\ u)\neq u_+(\varepsilon)$，因此 $u_+(\varepsilon)>u$。□

注 4.3.8。注意，命题 4.3.7 中的情形 $\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}=\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}$ 表示多重无轨电车 $\Omega_{\mathrm{Mtr},\ \mathrm{R}}(\{\mathfrak{a}\};\eta_1)$ 是一个第五类虚拟顶点 $\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a},\ \mathfrak{a})$。左侧情形类似。

命题 *4.3.9*。（具有一个底层弦域的右侧多无轨电车形的归纳步骤）。设 $\eta_1,\eta_3\in\mathbb{R}$，$0<\eta_1<\eta_3<\varepsilon_{\max}$。假设 $a_1,b_1,a_2,b_2,u\in\mathbb{R}$，$a_2<a_1<b_1<b_2\leqslant u$。令 $\mathfrak{a}=[\mathfrak{a}^{\mathrm{l}},\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}]$ 为实根，$\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}<\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}=a_2$。考虑一个右侧多无轨电车形 $\Omega_{\mathrm{Mtr},\mathrm{R}}(\{\mathfrak{a},b_2\};\ \eta_1)$。令 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])$ 为相应函数 $s\colon\ [a_2,a_1]\to[b_1,b_2]$，$s(a_i)=b_i$，$i=1,2$ 所对应的弦域。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 是一个右单调力流，其对应函数为 $u_\pm\colon\ [\eta_1,\eta_3]\to\mathbb{R}$，且 $\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}\in[u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1)]$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ \mathfrak{a}^{\mathrm{l}};\eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{Mtr},\mathrm{R}}(\{\mathfrak{a},b_2\};\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{R}}(b_2,u;\ \eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_2,a_1])$ 上与标准候选函数重合。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ \mathfrak{a}^{\mathrm{l}};\ \eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1)$。那么存在 η_2，$\eta_1<\eta_2<\eta_3$，以及一个严格递增函数 $a\colon\ [\eta_1,\eta_2]\to[a_2,a_1]$，使得 $a(\eta_1)=a_2$；并且对于任意 $\varepsilon\in(\eta_1,\eta_2]$，都存在一个连续函数 B_ε，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ a(\varepsilon);\varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{tr},\mathrm{R}}(a(\varepsilon)\ b(\varepsilon);\varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{ch}}([a(\varepsilon)\ a_1])$ 和 $\Omega_{\mathrm{R}}(b(\varepsilon)\ u;\ \varepsilon)$ 上与标准候选函数重合，其中 $b(\varepsilon)=s(a(\varepsilon))$。此外，$B_\varepsilon$ 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ a(\varepsilon);\varepsilon)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon)$。*(4.3.1)* 中的力构成单调力流。

证明。B 对 $\mathfrak{a}$ 的力为零，特别是 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{l}};\eta_1)=0$，因此 $u_+(\eta_1)=\mathfrak{a}^{\mathrm{l}}$。在这种情况下，我们不能直接应用命题 4.3.4，但其证明仍然适用，因为对于任意 $\varepsilon\in(\eta_1,\ \eta_3)$，根据命题 4.3.7，我们有 $u_+(\varepsilon)>\mathfrak{a}^{\mathrm{r}}$，而命题 4.3.4 证明中第二种情况（其中 $u_+(\eta_1)=a_2$）的论证可以原样应用。□

命题 *4.3.10*（一般右侧多无轨电车形的归纳步骤）。设 η_1、$\eta_3\in\mathbb{R}$ 和 $\eta_1<\eta_3<\varepsilon_{\max}$。考虑右侧多无轨电车形 $\Omega_{\mathrm{Mtr},\mathrm{R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^{k};\eta_1)$。设 $u\in\mathbb{R}$、$\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}\leqslant u$。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 是一个右单调力流，并具有相应的函数 $u_\pm\colon\ [\eta_1,\eta_3]\to\mathbb{R}$，使得 $\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}\in[u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1)]$。我们还假设，对于每个 $i=1$、2、……、$k-1$，存在弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}},\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}],*)$ 及其相应的函数 s_i、$s_i(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}})=\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}};\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{Mtr},\mathrm{R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^{k};\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}},u;\ \eta_1)$ 以及每个 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}},\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}],*)$ 上与标准候选函数重合。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\eta_1)\ \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}};\ \eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1)$。那么，存在一个数 η_2、$\eta_2>\eta_1$，以及一组严格递增的函数 $a_i\colon\ [\eta_1,\eta_2]\to\mathbb{R}$，

$a_i(\eta_1) = \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}},\ i = 1, 2, \ldots, k-1$, 使得对于每个 $\varepsilon \in (\eta_1, \eta_2]$ 都存在一个定义在定义域上的连续函数 B_ε

$$\Omega_{\mathrm{R}}\big(u_-(\varepsilon), a_1(\varepsilon); \varepsilon\big) \cup \Big(\cup_{i=1}^{k-2} \Omega_{\mathrm{R}}\big(b_i(\varepsilon), a_{i+1}(\varepsilon); \varepsilon\big)\Big) \cup \Big(\cup_{i=1}^{k-1} \Omega_{\mathrm{tr,R}}(a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon); \varepsilon)\Big) \cup$$
$$\Big(\cup_{i=1}^{k-1} \Omega_{\mathrm{ch}}([a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon)], *)\Big) \cup \Omega_{\mathrm{R}}\big(b_{k-1}(\varepsilon), u; \varepsilon\big); \qquad b_i(\varepsilon) = s_i(a_i(\varepsilon)),$$

在划分的每个子域内与标准候选函数一致。此外，B_ε 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-(\varepsilon)\ a_1(\varepsilon);\ \varepsilon)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot; \varepsilon)$。函数们

$$F_{\mathrm{R}}\Big(\cdot; a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon); \varepsilon\Big) \qquad and \qquad F_{\mathrm{L}}\Big(\cdot; a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon); \varepsilon\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

是相应定义域上的右单调力流和左单调力流。

证明。 我们将 $\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k;\ \eta_1)$ 分解为 $\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}\};\ \eta_1),\ i = 1, \ldots, k-1$ 的并；如果 $\mathfrak{a}_k^{\mathrm{l}} < \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}$，还包括 $\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_k\};\ \eta_1)$。若 $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{l}} < \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}$，我们应用命题 4.3.9；若 $\mathfrak{a}_i^{\mathrm{l}} = \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}$，则对多重无轨电车 $\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}\};\ \eta_1)$ 依次应用命题 4.3.4。最后，若 $\mathfrak{a}_k^{\mathrm{l}} < \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}$，我们对 $\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_k\}; \eta_1)$ 应用命题 4.3.7，从而完成归纳法。 □

命题 *4.3.11*（一般左多重手推车域的归纳步骤）。令 $\eta_1, \eta_3 \in \mathbb{R},\ \eta_1 < \eta_3 < \varepsilon_{\max}$。考虑左多重手推车 $\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k; \eta_1)$。令 $u \in \mathbb{R},\ u \leqslant \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}$。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$ 是一个左$^-$单调力流，具有相应的函数 $u_\pm\colon [\eta_1, \eta_3] \to \mathbb{R}$，使得 $\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}} \in [u_-(\eta_1)\ u_+(\eta_1)]$。我们还假设，对每个 $i = 1, 2, \ldots, k-1$，存在弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}], *)$，以及相应的函数 s_i，$s_i(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}) = \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{L}}(u, \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}};\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k;\ \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, u_+(\eta_1);\ \eta_1)$ 以及每个 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}], *)$ 上与标准候选函数重合。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, u_+(\eta_1);\ \eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\ \eta_1)$。那么，存在一个数 $\eta_2,\ \eta_2 > \eta_1$，以及一组严格递减函数 $b_i\colon [\eta_1, \eta_2] \to \mathbb{R},\ b_i(\eta_1) = \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}$，$i = 1, 2, \ldots, k-1$，使得对每个 $\varepsilon \in (\eta_1, \eta_2]$，都存在一个定义在该定义域上的连续函数 B_ε。

$$\Omega_{\mathrm{L}}\big(u, a_1(\varepsilon); \varepsilon\big) \cup \Big(\cup_{i=1}^{k-2} \Omega_{\mathrm{L}}\big(b_i(\varepsilon), a_{i+1}(\varepsilon); \varepsilon\big)\Big) \cup \Big(\cup_{i=1}^{k-1} \Omega_{\mathrm{tr,L}}(a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon); \varepsilon)\Big) \cup$$
$$\Big(\cup_{i=1}^{k-1} \Omega_{\mathrm{ch}}([a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon)], *)\Big) \cup \Omega_{\mathrm{L}}\big(b_{k-1}(\varepsilon), u_+(\varepsilon); \varepsilon\big); \qquad a_i(\varepsilon) = s_i(b_i(\varepsilon)),$$

它在划分的每个子域内都与标准候选函数一致。此外，B_ε 在Ω_{L}（b_{k-1}（ε） u_+（ε）；ε）上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$（$\cdot$；$\varepsilon$）。这些函数

$$F_{\mathrm{R}}\Big(t; a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon); \varepsilon\Big) \qquad and \qquad F_{\mathrm{L}}\Big(t; a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon); \varepsilon\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

分别是对应定义域上的右单调力流和左单调力流。

在下面的命题中，我们将证明角会连续变化。

命题 *4.3.12*（角的归纳步骤）。设 $\eta_1, \eta_3 \in \mathbb{R},\ 0 < \eta_1 < \eta_3 < \varepsilon_{\max}$，令$u_0 \in \mathbb{R}$。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$ 是左单调力流，其对应函数为 $u_\pm^l\colon [\eta_1, \eta_3] \to \bar{\mathbb{R}}^-$，且 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 是右单调力流，其对应函数为 $u_\pm^r\colon [\eta_1, \eta_3] \to \mathbb{R}$，满足$u_0 \in (u_-^r(\eta_1)\ u_+^r(\eta_1)] \cap [u_-^l(\eta_1)\ u_+^l(\eta_1))$。假设存在连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-^r(\eta_1)\ u_0; \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{ang}}(u_0; \eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_0, u_+^l(\eta_1);\ \eta_1)$ 上与标准候选函数一致。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-^r(\eta_1)\ u_0;\ \eta_1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_0, u_+^l(\eta_1);\ \eta_1)$ 上的力分别为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\ \eta_1)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot; \eta_1)$。那么，存在 $\eta_2, \eta_1 < \eta_2 < \eta_3$，以及连续函数 $u\colon [\eta_1, \eta_2] \to \mathbb{R}$，使得 $u(\eta_1) = u_0$，并且对于任意 $\varepsilon \in [\eta_1, \eta_2]$，有 $u(\varepsilon) \in [u_-^l(\varepsilon)\ u_+^l(\varepsilon)) \cap (u_-^r(\varepsilon)\ u_+^r(\varepsilon)]$，且存在连续函数 B_ε，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-^r(\varepsilon)\ u(\varepsilon);\ \varepsilon)$、$\Omega_{\mathrm{ang}}(u(\varepsilon);\ \varepsilon)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u(\varepsilon)\ u_+^l(\varepsilon);\ \varepsilon)$ 上与标准候选函数一致。此外，B_ε 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-^r(\varepsilon)\ u(\varepsilon);\ \varepsilon)$ 和 $\Omega_{\mathrm{L}}(u(\varepsilon)\ u_+^l(\varepsilon);\ \varepsilon)$ 上的力分别为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\ \varepsilon)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot; \varepsilon)$。

证明。我们首先指出，为了构造所需的函数 B_ε，只需找到平衡方程 (4.2.3) 的一个根 $u(\varepsilon)$，对应于 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon)$（见推论 3.6.5）。

若 $u_+^r(\eta_1) > u_0 > u_-^l(\eta_1)$，则证明很简单。根据引理 4.2.18，函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\eta_1)$ 在 $(u_-^l(\eta_1)\ u_+^l(\eta_1)) \cap (u_-^r(\eta_1)\ u_+^r(\eta_1))$ 上严格递增，因此它在 u_0 的某个右邻域上为正，在某个左邻域上为负。由关于 ε 的连续性可知，当 $\eta_1, \varepsilon > \eta_1$ 充分接近 η_1 时，函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon)$ 在 u_0 的某个固定邻域内有一个根 $u(\varepsilon)$。同样，根据引理 4.2.18，这个根在尾部的交集中唯一。

若 $u_+^r(\eta_1) = u_0$ 或 $u_0 = u_-^l(\eta_1)$，则 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(u_0;\eta_1) = \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(u_0;\eta_1) = 0$，因为 u_0 是 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\eta_1)$ 对应的平衡方程 (4.2.3) 的根。因此 $u_+^r(\eta_1) = u_-^l(\eta_1) = u_0$。由注 4.2.14 可知，存在 $u_-, u_+ \in \mathbb{R}$，使得 $u_- < u_0 < u_+$, $\mathfrak{K}' > 0$ 在 (u_-, u_0) 上，且 $\mathfrak{K}' < 0$ 在 (u_0, u_+) 上。因此，对某个 i，有 $u_0 = c_i$（见定义 2.1.12）。对于任意 $\varepsilon \in (\eta_1, \eta_3)$，我们有 $u_-^l(\varepsilon) < u_-$，且 $u_+ < u_+^r(\varepsilon)$。我们只需验证：当 ε 充分接近 η_1 时，对于任意 $\delta > 0$，函数 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon)$ 有一个根 $u(\varepsilon) \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$。

若情况并非如此，则存在一个正数 δ 和一个序列 $\varepsilon_n \to \eta_1, \varepsilon_n > \eta_1$，使得函数 $\Phi_n(\cdot) = \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon_n) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon_n)$ 在 $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ 上没有根。不失一般性，我们可以假设 Φ_n 在这个交集上为负。函数 Φ_n 在 $[u_0, u_0 + \delta]$上严格递增，在那里为负，并且 $\Phi_n(u_0) \to 0, n \to +\infty$。因此，$\Phi_n$ 在 $[u_0, u_0 + \delta]$上一致收敛于零。由此可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(t;\varepsilon_n) - \mathfrak{K}(t) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(t;\varepsilon_n) - \mathfrak{K}(t) = \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(t;\eta_1) - \mathfrak{K}(t), \quad t \in [u_0, u_0 + \delta],$$

其中，右端的函数在 $(u_0, u_0 + \delta)$ 上严格递减，而左侧的函数根据注记 3.6.15 在 $(u_0, u_0 + \delta)$ 上严格递增。这就导致矛盾，并证明了该断言。

□

命题 *4.3.13*（多鸟形结构的归纳步骤）。令 $\eta_1, \eta_3 \in \mathbb{R}$, $\eta_1 < \eta_3 < \varepsilon_{\max}$。考虑一个多重小鸟 $\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k; \eta_1)$。假设 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 是左单调力流和右单调力流，其对应的函数 $u_\pm^{\mathrm{L}}$ 和 $u_\pm^{\mathrm{R}}$ 从 $[\eta_1, \eta_3]$ 作用到 $\bar{\mathbb{R}}$，使得 $\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}} \in (u_-^{\mathrm{R}}(\eta_1)\ u_+^{\mathrm{R}}(\eta_1)]$ 以及 $\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}} \in [u_-^{\mathrm{L}}(\eta_1)\ u_+^{\mathrm{L}}(\eta_1))$。我们还假设，对于每个 i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, 都存在弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}], *)$。假设存在一个连续函数 B，它在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-^{\mathrm{R}}(\eta_1)\ \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}; \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k; \eta_1)$、$\Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, u_+^{\mathrm{L}}(\eta_1); \eta_1)$ 以及每个 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}], *)$ 上都与标准候选函数一致。此外，B 在 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_-^{\mathrm{R}}(\eta_1)\ \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}; \eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\eta_1)$，而 B 在 $\Omega_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}, u_+^{\mathrm{L}}(\eta_1); \eta_1)$ 上的力为 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\eta_1)$。那么，存在一个数 η_2、$\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$, 以及一族严格单调函数 a_i 和 b_i，它们从 $[\eta_1, \eta_2]$ 作用到 $\mathbb{R}$，使得 a_i 递增且 $a_i(\eta_1) = \mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}$，$b_i$ 递减且$b_i(\eta_1) = \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}$，并且 $[g(a_i(\varepsilon))\ g(b_i(\varepsilon))]$ 是 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}], *)$ 的一条弦。此外，对于每个 $\varepsilon \in (\eta_1, \eta_2]$，都存在一个整数 $j = j(\varepsilon)$、$1 \leqslant j \leqslant k$，以及 $u(\varepsilon) \in (b_{j-1}(\varepsilon)\ a_j(\varepsilon)]$（这里令 $b_0 \mathrel{\mathit{def}}= u_-^{\mathrm{R}}(\varepsilon)$，并且 $a_k \overset{\mathrm{def}}{=} u_+^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$），使得定义域上存在一个连续函数 B_ε

$$\begin{gathered}
\Big(\cup_{i=0}^{j-2} \Omega_{\mathrm{R}}\big(b_i(\varepsilon), a_{i+1}(\varepsilon);\varepsilon\big)\Big) \cup \Big(\cup_{i=1}^{j-1} \Omega_{\mathrm{tr,R}}\big(a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon);\varepsilon\big)\Big) \cup \\
\Omega_{\mathrm{R}}\big(b_{j-1}(\varepsilon), u(\varepsilon);\varepsilon\big) \cup \Omega_{\mathrm{ang}}\big(u(\varepsilon);\varepsilon\big) \cup \Omega_{\mathrm{L}}\big(u(\varepsilon), a_j(\varepsilon);\varepsilon\big) \cup \\
\Big(\cup_{i=j}^{k-1} \Omega_{\mathrm{tr,L}}\big(a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon);\varepsilon\big)\Big) \cup \Big(\cup_{i=j}^{k-1} \Omega_{\mathrm{L}}\big(b_i(\varepsilon), a_{i+1}(\varepsilon);\varepsilon\big)\Big) \cup \\
\Big(\cup_{i=1}^{k-1} \Omega_{\mathrm{ch}}\big(\big[a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon)\big], *\big)\Big)
\end{gathered}$$

在划分的每个子域内与标准候选函数重合。此外，B_ε 的力在 $u_-^{\mathrm{R}}(\varepsilon)$ 的右邻域内与 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(\cdot;\varepsilon)$ 重合，在 $u_+^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$的左邻域内与 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(\cdot;\varepsilon)$ 重合。这些函数

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{R},i}(\cdot;\varepsilon) = F_{\mathrm{R}}\Big(\cdot; a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon);\varepsilon\Big), \qquad \mathfrak{F}_{\mathrm{L},i}(\cdot;\varepsilon) = F_{\mathrm{L}}\Big(\cdot; a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon);\varepsilon\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.3.6}$$

分别是在相应定义域上的右单调力流和左单调力流。

证明。考虑两个多重无轨电车 $\Omega_{\mathrm{Mtr,\ R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 和 $\Omega_{\mathrm{Mtr,\ L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$。将命题 4.3.10 和 4.3.11 应用于这些叶状结构，可得数值 η_2^{R}，η_2^{L} 以及函数集 $\{a_j, b_j\}_{j=1}^{k-1}$（它们都定义在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上，其中 $\eta_2 = \min(\eta_2^{\mathrm{R}},\ \eta_2^{\mathrm{L}})$），我们将它们分别记为 $\{a_j^{\mathrm{R}}, b_j^{\mathrm{R}}\}$ 和 $\{a_j^{\mathrm{L}}, b_j^{\mathrm{L}}\}$。设 $\varepsilon \in (\eta_1,\ \eta_2]$ 为固定值。

我们**断言**，若 $b_j^{\mathrm{R}} \leqslant b_j^{\mathrm{L}}$ 对某个 $j, 1 < j < k$成立，则 $b_{j-1}^{\mathrm{R}} < b_{j-1}^{\mathrm{L}}$。事实上，我们有以下不等式链：

$$F_{\mathrm{R}}\Big(b_{j-1}^{\mathrm{L}};\ a_{j-1}^{\mathrm{L}}, b_{j-1}^{\mathrm{L}}; \varepsilon\Big) = F_{\mathrm{L}}\Big(b_{j-1}^{\mathrm{L}}; a_j^{\mathrm{L}}, b_j^{\mathrm{L}};\ \varepsilon\Big) \geqslant F_{\mathrm{L}}\Big(b_{j-1}^{\mathrm{L}};\ a_j^{\mathrm{R}}, b_j^{\mathrm{R}};\ \varepsilon\Big) > F_{\mathrm{R}}\Big(b_{j-1}^{\mathrm{L}};\ a_{j-1}^{\mathrm{R}}, b_{j-1}^{\mathrm{R}};\ \varepsilon\Big). \tag{4.3.7}$$

(4.3.7) 中的第一个等式就是平衡方程。第二个不等式由引理 4.2.4 以及我们的假设 $b_j^{\mathrm{R}} \leqslant b_j^{\mathrm{L}}$ 得出。注意，点 b_{j-1}^{L} 位于弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_j^{\mathrm{R}}, b_j^{\mathrm{R}}],\ *)$ 的左尾部，因为它位于较大的弦域 $\Omega_{\mathrm{ch}}([a_j^{\mathrm{L}}, b_j^{\mathrm{L}}],\ *)$ 的左尾部（见推论 4.2.5）。此外，b_{j-1}^{L} 位于点 a_j^{R} 的左侧；点 a_j^{R} 是力 $F_{\mathrm{R}}\Big(\cdot;\ a_{j-1}^{\mathrm{R}},\ b_{j-1}^{\mathrm{R}};\ \varepsilon\Big)$ 和 $F_{\mathrm{L}}\Big(\cdot; a_j^{\mathrm{R}},\ b_j^{\mathrm{R}};\ \varepsilon\Big)$ 的平衡方程的根，因此，(4.3.7) 中的最后一个不等式由引理 4.2.18 得出。不等式 (4.3.7) 和引理 4.2.4 蕴含 $b_{j-1}^{\mathrm{R}} < b_{j-1}^{\mathrm{L}}$。**断言**得证。

由此可知，存在 $j = j(\varepsilon) \in \{1, 2, \ldots, k\}$，使得对于任意 $i, 0 < i < j$，不等式 $b_i^{\mathrm{R}} < b_i^{\mathrm{L}}$成立；并且对于任意 $i,\ j \leqslant i < k$，有 $b_i^{\mathrm{R}} \geqslant b_i^{\mathrm{L}}$。我们将 $b_i(\varepsilon) = b_i^{\mathrm{R}}(\varepsilon)$ 定义为 $0 < i < j$，并将 $b_i(\varepsilon) = b_i^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$ 定义为 $j \leqslant i < k$。此外，我们令 $a_i(\varepsilon),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1$，使得 $[g(a_i(\varepsilon))\ g(b_i(\varepsilon))]$ 是 $\Omega_{\mathrm{ch}}([\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}, \mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}], *)$ 的一条弦。下文中，我们使用记号 (4.3.6)，并令 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},0} = \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L},k} = \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$。我们只需证明，对于充分接近 η_1 的 ε，存在 $u(\varepsilon) \in [b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon) a_{j(\varepsilon)}(\varepsilon)]$，它满足关于 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(\cdot;\varepsilon)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(\cdot;\varepsilon)$ 的平衡方程。

首先，考虑 $1 < j(\varepsilon) < k$ 的情形。令 $u_- = \max(b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon)\ t^{\mathrm{L}})$，其中 t^{L} 是 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L},\ j(\varepsilon)}(\cdot;\varepsilon)$ 尾部的左端点。我们断言 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},\ j(\varepsilon)-1}(u_-;\varepsilon) \leqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{L},\ j(\varepsilon)}(u_-;\varepsilon)$。事实上，若 $u_- = t^{\mathrm{L}}$，则该断言显然成立：

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(t^{\mathrm{L}};\varepsilon) = 0 \geqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(t^{\mathrm{L}};\varepsilon),$$

因为 t^{L} 位于 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},\ j(\varepsilon)-1}(\cdot;\varepsilon)$ 的尾部。

若 $u_- = b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon)$，则 $u_- < b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$，因此由引理 4.2.18 可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(u_-;\varepsilon) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(u_-;\varepsilon) &\leqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}(\varepsilon);\varepsilon) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}(\varepsilon);\varepsilon)\\ &< F_{\mathrm{R}}\Big(b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}; a_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}, b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}};\varepsilon\Big) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}(\varepsilon);\varepsilon) = 0,\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

其中第二个不等式由引理 4.2.4 以及不等式 $b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon) < b_{j(\varepsilon)-1}^{\mathrm{L}}(\varepsilon)$ 得出。类似地，对于 $u_+ = \min(a_{j(\varepsilon)}(\varepsilon)\ t^{\mathrm{R}})$，其中 t^{R} 是 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(\cdot;\varepsilon)$ 尾部的右端点，我们有$\mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(u_+;\ \varepsilon) \geqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(u_+;\varepsilon)$。因此，平衡方程存在一个根 $u(\varepsilon) \in [u_-, u_+]$，对应于力 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},j(\varepsilon)-1}(\cdot;\ \varepsilon)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L},j(\varepsilon)}(\cdot;\ \varepsilon)$；由引理 4.2.18 可知该根唯一。

不等式 (4.3.8) 意味着 $u(\varepsilon) > b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon)$，因此 $u(\varepsilon) \in (b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon) a_{j(\varepsilon)}(\varepsilon)]$。

现在考虑 $j(\varepsilon) = 1$ 的情形（$j(\varepsilon) = k$ 的情形是对称的）。令 $u_+ = \min(a_1(\varepsilon)\ t^{\mathrm{R}}(\varepsilon))$，其中 t^{R} 是 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(\cdot;\ \varepsilon)$ 尾部的右端点。我们断言 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(u_+;\ \varepsilon) \geqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{L},1}(u_+;\ \varepsilon)$。事实上，若 $u_+ = t^{\mathrm{R}}$，则论证与之前相同：$\mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(t^{\mathrm{R}};\ \varepsilon) = 0 \geqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{L},1}(t^{\mathrm{R}};\varepsilon)$。若 $u_+ = a_1(\varepsilon)$，则 $u_+ \geqslant a_1^{\mathrm{R}}(\varepsilon)$，并且应用引理 4.2.18 和引理 4.2.4，可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(u_+;\varepsilon) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L},1}(u_+;\varepsilon) &\geqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(a_1^{\mathrm{R}};\varepsilon) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L},1}(a_1^{\mathrm{R}};\varepsilon)\\ &= \mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(a_1^{\mathrm{R}};\varepsilon) - F_{\mathrm{L}}\Big(a_1^{\mathrm{R}}; a_1^{\mathrm{L}}, b_1^{\mathrm{L}};\varepsilon\Big) \geqslant \mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(a_1^{\mathrm{R}};\varepsilon) - F_{\mathrm{L}}\Big(a_1^{\mathrm{R}}; a_1^{\mathrm{R}}, b_1^{\mathrm{R}};\varepsilon\Big) = 0.\end{aligned}$$

该**断言**得证。

回顾一下，我们要证明：当 ε 充分接近 η_1 时，存在 $u(\varepsilon) \in [b_0(\varepsilon)\ a_1(\varepsilon)]$，满足关于 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}},0(\cdot;\varepsilon)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}},1(\cdot;\varepsilon)$ 的平衡方程。反设：对某个序列 $\varepsilon_n \to \eta_1+$，函数

$$\Phi_n(\cdot) = \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(0,\cdot,\varepsilon_n) - \mathfrak{F}_{\mathrm{L}}(1,\cdot,\varepsilon_n) \qquad [b_0(\varepsilon_n),\ a_1(\varepsilon_n)]$$

$\Phi_n(u_+(\varepsilon_n)) > 0$，$\Phi_n(t^{\mathrm{L}}(\varepsilon_n)) < 0$ 在 $(0,0)$ 上没有平衡点。于是 Φ_n，因此在尾部的交集上为正；所以，$\mathfrak{F}_{\mathrm{L}},1(\cdot;\varepsilon_n)$ 尾部的左端不大于 $b_0(\varepsilon_n)$。根据引理 4.2.18，Φ_n 是严格递增函数，并且当 $n \to +\infty$ 时，$\Phi_n(a_1(\eta_1))$ 趋于 0。因此，Φ_n 在 $(b_0(\eta_1),\ a_1(\eta_1))$ 上一致趋于零（回顾一下，根据单调力流的定义，对任意 $\varepsilon > \eta_1$，$b_0(\eta_1) \geqslant b_0(\varepsilon)$）。因此，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{F}_{\mathrm{L},1}(t;\varepsilon_n) - \mathfrak{K}(t) = \lim_{n\to+\infty} \mathfrak{F}_{\mathrm{R},0}(t;\varepsilon_n) - \mathfrak{K}(t) = \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(t;\eta_1) - \mathfrak{K}(t), \quad t \in (b_0(\eta_1), a_1(\eta_1)),$$

由于注记 3.6.15，右端的函数在 $(b_0(\eta_1),\ a_1(\eta_1))$ 上严格递减，而左侧的函数在 $(b_0(\eta_1),\ a_1(\eta_1))$ 上严格递增。这就导致矛盾，并证明了该结论。

□

注 4.3.14。我们注意到，命题 4.3.13 中的 $j(\varepsilon)$ 确实可能取决于 ε，也就是说，在演化过程中，角可能会在无轨电车之间改变位置。此外，函数 $j(\cdot)$ 即使在有界区间上也可能有无穷多个跳跃，参见 [17] 第123页的“振荡小鸟”示例。

注 4.3.15。我们在证明中已经看到，平衡方程的根 $u(\varepsilon)$ 位于半闭区间 $(b_{j(\varepsilon)-1}(\varepsilon), a_{j(\varepsilon)}(\varepsilon)]$。可能出现 $u(\varepsilon) = a_{j(\varepsilon)}(\varepsilon)$ 的情况；此时，角 $\Omega_{\mathrm{ang}}\big(u(\varepsilon);\varepsilon\big)$、切域 $\Omega_{\mathrm{L}}\big(u(\varepsilon)\ u(\varepsilon);\varepsilon\big)$ 和无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr},\ \mathrm{L}}\big(u(\varepsilon)\ b_{j(\varepsilon)}(\varepsilon);\ \varepsilon\big)$ 会粘合在一起形成一只小鸟，参见公式 (3.8.4)。此外，这个方程可能在某个区间内对 ε 成立；小鸟可以缩小而不解体。

4.4 全局演化

在给出正式表述之前，我们先描述演化规则。

回顾一下，在第3.8.2小节中，我们构造了与贝尔曼候选函数的叶状分解对应的图 Γ，以及它的子图 Γ^{free}；该子图对应叶状分解中未与自由边界 $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ 分隔的子域。图 Γ 的顶点分为两类：对应线性区域的顶点和虚拟顶点。Γ 的边始终对应围栏：弦状区域或切线区域。Γ^{free} 的顶点对应线性区域：多杯形、角、无轨电车、多重无轨电车、小鸟、多重小鸟，以及第一类、第三类（对应长弦）、第四类和第五类虚拟顶点。

按照下表所述的形式规则，我们为 Γ^{free} 的每条边 $\mathfrak{E}$ 指定一个力。第一列是边起始处顶点的类型。该顶点的数值参数列在第二列。如果切域位于图形左侧，则分配给它的力列在第三列；如果切域位于图形右侧，则分配给它的力列在最后一列。

顶点类型	参数	左力	右侧力
右侧无轨电车	$\{a, b\}$		$F_{\mathrm{R}}(\cdot; a, b; \varepsilon)$
左侧无轨电车	$\{a, b\}$	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; a, b; \varepsilon)$	
多杯形	$\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k$	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}; \varepsilon)$	$F_{\mathrm{R}}(\cdot; \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}; \varepsilon)$
右侧多无轨电车形	$\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k$		$F_{\mathrm{R}}(\cdot; \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}; \varepsilon)$
左多重手推车	$\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k$	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; \mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}, \mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}}; \varepsilon)$	
第一类虚拟顶点	$\{a, b\}$	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; a, b; \varepsilon)$	$F_{\mathrm{R}}(\cdot; a, b; \varepsilon)$
第三类虚拟顶点	$\{a, b\}$	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; a, b; \varepsilon)$	$F_{\mathrm{R}}(\cdot; a, b; \varepsilon)$
第四类虚拟顶点	$-\infty$		$F_{\mathrm{R}}(\cdot; -\infty; \varepsilon)$
第四类虚拟顶点	$+\infty$	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; +\infty; \varepsilon)$	
第五类右侧虚拟顶点	c_i		$F_{\mathrm{R}}(\cdot; c_i, c_i; \varepsilon)$
第五类左虚顶点	c_i	$F_{\mathrm{L}}(\cdot; c_i, c_i; \varepsilon)$	

(⋆)

演化过程中生成的所有叶状结构都满足以下规则：如果 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2)$ 或 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1, u_2)$ 在 Γ^{free} 中由边 $\mathfrak{E}$ 表示，那么 (u_1, u_2) 属于与 $\mathfrak{E}$ 对应的力的尾部。我们将叶状结构的这一要求称为非退化力条件。

条件 4.4.1. 对于 Γ^{free} 中对应于切域 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2)$ 或 $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1, u_2)$, 的任意边 $\mathfrak{E}$，区间 (u_1, u_2) 都属于分配给 $\mathfrak{E}$ 的力的尾部。

简要检查定义可知，对于所构造的所有标准候选函数对应的图，条件 4.4.1 均成立。换言之，切域中的所有力都严格为负。特别地，下面的注十分重要。

注 4.4.2。第 4.1 节中为简单图景构造的贝尔曼候选函数满足非退化力条件 4.4.1。

如前所述，演化的主要规则是力不断减小（绝对值不断增大），见第 4.2.2 小节。因此，尾部严格增长（这里指 t^{R} 增大而 t^{L} 减小）。于是，完整弦域不断增长（命题 4.3.1），多重杯形区域稳定[1]（命题 4.3.2），无轨电车不断缩小（命题 4.3.4 和命题 4.3.5），角不断地从一侧移向另一侧（命题 4.3.12）。这些图形可称为稳定的。如果在固定的 ε 的叶状分解中存在多重无轨电车或多重小鸟，它们会立即解体（命题 4.3.10、4.3.11 和 4.3.13）。这些图形是不稳定的。至于小鸟，它可能缩小（见注 4.3.15），但通常会解体。因此，它是半稳定的。

还有一个有用的条件，是我们所有的图都会满足的。它具有结构性（因而 s 依赖于定义 2.1.12），且主要涉及虚拟顶点。它称为叶根条件。

条件 4.4.3. 任何多图形中不是单点的弧，都与某个实根重合 c_i。第二类虚拟顶点的数值参数是一些单点根 c_i。每个第三类虚拟顶点对应一条至少具有一个消失微分的弦 $[g(a_0)\ g(b_0)]$。若 $D_{\mathrm{R}}(a_0, b_0) = 0$, 则 $b_0 = c_i$ 对于某个单点根 c_i；若 $D_{\mathrm{L}}(a_0, b_0) = 0$，则 $a_0 = c_j$，其中 c_j 也必须是单点根。第五类每个顶点的数值参数也都是单点根 c_i。

注 4.4.4. 第 4.1 节中构造的所有简单图都满足叶根条件 4.4 .3.

定义 4.4.5。 设 $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$。如果与 Γ 的顶点和边相对应的所有图形都满足其局部命题，则称图 Γ 对于 f 和 ε 是可容许的。

“与 Γ 的顶点和边相对应的所有图形都满足其局部命题”是指：对于 Γ 中的每个顶点或边，其参数均满足下表第三列中为该顶点或边所标示的命题的假设。

[1]从某种意义上说，它们也会增长：边界切线上升；然而，数值参数并未改变。

顶点或边类型	公式	验证	演化规则
右切域	(3.2.12), (3.2.2)	3.3.3、3.3.6	
左切域	(3.2.12), (3.2.2)	3.3.5，3.3.7	
弦域	（3.4.1）	3.4.2	4.3.1
角	(3.6.3)	3.6.4	4.3.12
右侧无轨电车	(3.7.2)	3.7.2	4.3.4
左侧无轨电车	(3.7.2)	3.7.2	4.3.5
小鸟	(3.7.2)	3.7.2	4.3.13
多杯形	(3.7.7), (3.7.2)	3.7.12	4.3.2
完整多杯	(3.7.7), (3.7.2)	3.7.12	4.3.3
右侧多无轨电车形	(3.7.7), (3.7.2)	3.7.12	4.3.10
左多重手推车	(3.7.7), (3.7.2)	3.7.12	4.3.11
多重小鸟	(3.7.7), (3.7.2)	3.7.12	4.3.13
闭合多杯结构	(3.7.7), (3.7.2)	3.7.12	稳定
第一类虚拟顶点	(3.4.1)	3.6.4	4.3.1
第三类虚拟顶点，长弦	(3.4.1)	3.6.4	4.3.3
第五类虚拟顶点	(3.7.5)	3.6.4	4.3.7

第一列给出了顶点或边的类型；第二列列出了用于构造相应图形中的规范函数 B 的公式引用；第三列记录了保证该 B 为贝尔曼候选函数的命题编号。最后一列包含描述该图形参数局部演化的命题编号。我们省略了第二类和第四类的虚拟顶点（以及与短弦相对应的第三类顶点），因为在与它们相对应的区域中，函数 B 的值是平凡定义的，而且这些图形是稳定的，不存在演化情景。

现在我们描述如何从图构造函数 B。首先，将该函数构造为所有参与 $\Gamma \setminus \Gamma^{\mathrm{free}}$ 的顶点和边所对应定义域上的标准候选函数，因为对于这些图形，构造 B 不需要额外信息（不需要来自其他图形的信息）。其次，将函数 B 构造为 Γ^{free} 中所有非叶顶点（即角除外）所对应定义域上的标准候选函数。第三，为 Γ^{free} 的各条边构造标准候选函数。对于每条这样的边 $\mathfrak{e}$，其起点所对应图形中 B 的取值决定了该边所对应定义域上的力函数（见第 73 页的表（$\star$）），因此，若已知 $\mathfrak{e}$ 的源点对应定义域上 B 的取值，便可在 $\mathfrak{e}$ 对应的切域中构造 B。最后，在 Γ^{free} 的叶所对应的定义域上（即在角上）构造 B，因为我们知道每个这样的角的线性边界上 B 的取值。注意，若 Γ 满足条件 4.4.1，则 B 在每个图形上的限制都是该处的标准贝尔曼候选函数。图的可容许性保证，力函数（按照第 73 页表（$\star$）中的规则，在叶状分解的每个元素上局部定义）是 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数。

注 4.4.6。 由可容许图构造的函数 B 是一个贝尔曼候选函数。

证明。 我们需要验证函数 B满足定义 2.2.4 中的条件。查看上表，我们对每个顶点或边使用相应的验证命题，并可知函数 B在整个 Ω_ε上具有叶状分解。我们还注意到，函数 B 是局部凹的，并且 C^1 光滑，不仅在子域上如此，在全局范围内也是如此。 □

由于在演化过程中，一些图形会变大，角会移动，因此某些图形可能会发生碰撞。例如，某个角的顶点可能与一条长弦的右端点重合。在这种情况下，我们

[2]有一个例外：对于来自无穷远处的切域，不需要任何边界数据。

观察公式 (3.8.1)，可以看到它们现在形成了一辆无轨电车。因此，叶状结构图在这一时刻发生变化 ε。我们将这样的时刻称为演化临界点。其基本思想是，如果发生碰撞，那么发生碰撞的图形就会组合成一个新的图形（借助第 3.8.1 小节中的公式），然后我们便可以继续演化过程。不幸的是，演化临界点可能有无穷多个（参见 [17]，第123页上的例子，其中一个角使无轨电车的方向发生翻转，且这种情况会无限次发生）。然而，如果只关注那些图的结构 Γ^{fixed} 发生本质变化的临界点，就会发现这样的临界点只有有限多个。这些点称为本质临界点。下面的定义也很有用。

定义4.4.7. 若图 Γ 中不存在表示完整多重上卷、多重无轨电车、多重小鸟、表示长弦的第三类虚拟顶点以及第五类虚拟顶点，则称该图为光滑的。

定理4.4.8. 对于任意 $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$，都存在一个图 $\Gamma(\varepsilon)$，它对 f 和 ε 是可容许的。

我们不对该定理给出详细证明，因为这与 BMO 情形下同一定理的证明完全相同（见 [17] 的定理 4.4.15）。下面我们将介绍证明的主要步骤。

首先，我们使用定理 4.1.2，为较小的 ε 构造一条光滑的可容许图 $\Gamma(\varepsilon)$。接着，我们利用第4.3小节中汇总于第75页表格的局部演化定理证明：如果对于某个 η_1，存在一条可容许图 $\Gamma(\eta_1)$，那么我们就能为 $\varepsilon, \varepsilon > \eta_1$ 构造一条光滑的可容许图 $\Gamma(\varepsilon)$，且它充分接近 η_1。如果对于某个 η_2，我们有光滑图 $\Gamma(\varepsilon)$、$\varepsilon \in (\eta_1, \eta_2)$，就可以取极限并构造一条极限图 $\Gamma(\eta_2)$。极限图 $\Gamma(\eta_2)$ 中可能会出现一些“长度为零”的边。在这种情况下，我们使用第 3.8.1 小节中的公式修改该图。修改后的图可能不光滑，但它是可容许的，因此我们可以从该图出发继续演化。看来，在我们的假设下，演化中本质临界点的数量有限；在这些点处，图 $\Gamma(\varepsilon)$ 不光滑。这样，我们就能为任意 $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ 得到图 $\Gamma(\varepsilon)$。

第5章

优化函数

在上一章中，我们构造了一个特殊形式的贝尔曼候选函数 B （定理4.4.8和注4.4.6）。我们断言，它与贝尔曼函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 相同。小节2.2.2提供了一种证明这一断言的方法。我们需要为每个 $x \in \Omega_\varepsilon$ 构造一个优化器 φ_x （见定义2.2.6）。这里我们将采用与构造贝尔曼候选函数时相同的策略：首先研究优化器的局部行为（即当 x 在一个图形中变化时，优化器如何变化），这将在第5.2节完成；然后在第5.3节将这些局部情形“拼接”起来。有界平均振荡情形的优化函数已在 [17], 中构造；这里我们将对一般情形采用类似的策略。在第5.1节和第5.2节中，我们不会使用演化，因此 ε 固定不变，并且直到第5.3节才写出下标 ε。特别地，我们将写作 Ξ 而非 Ξ_ε，以及 $\Omega = \Xi_0 \setminus \Xi$ 而非 Ω_ε，这些对象的定义见第2.1节。在第5.4节中，我们将讨论违反条件（2.1.7）和（2.1.8）的情形。

5.1 抽象理论

我们首先对优化函数的形式进行抽象描述。首先，正如小节2.2.2中所提到的，构造单调优化函数是很自然的。构造一个单调函数 φ_x，使得 $\langle \varphi_x \rangle = x$ 和 $B(x) = \langle \varphi_x \rangle$，并不困难。主要难点在于验证 $\varphi_x \in \boldsymbol{A}_\Omega$。 [16] 中指出，从几何角度进行论证更为自然。在此背景下，传递曲线 这一概念很有用。

定义5.1.1。 设 B 是域 Ω 上的贝尔曼候选函数。假设 $\varphi\colon [l,r] \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ 是一个可积函数。曲线 $\gamma\colon (l,r] \to \Omega$ 由公式给出

$$\gamma(\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \varphi \rangle_{[l,\tau]}, \quad \tau \in (l,r], \tag{5.1.1}$$

若对任意 $\tau \in (l,r]$，都有 $B(\gamma(\tau)) = \langle \mathrm{f}(\varphi) \rangle_{[l,\tau]}$（特别地，$\gamma(\tau) \in \Omega$），则称其为传递曲线。函数 φ 称为 γ 的生成函数。

换句话说，γ 是一条将优化函数“传递”到该点的曲线。这里的“曲线”指参数化曲线，因为定义取决于参数化。考虑这样的曲线的优点在于，它可以验证条件：φ 是一个测试函数（即，$\varphi \in \boldsymbol{A}_\Omega$）。

我们将用到的主要特征是公式

$$\gamma(\tau) + (\tau - l)\gamma'(\tau) = \varphi(\tau), \tag{5.1.2}$$

可通过对 (5.1.1) 求微分得到。特别地，这个公式表明，γ 在 τ 处的切线指向 $\varphi(\tau)$的方向。因此，可以通过观察以下内容来重构 φ 的值：

固定边界上由相应传递曲线的切线“指示”的点。我们将经常使用这一原理。此外，方程 (5.1.2) 允许从 γ重构 φ。

引理 5.1.2. 由公式 (5.1.1) 给出的曲线在其生成函数为单调函数时是凸的。

证明. 我们将证明生成函数递增的情形 φ。函数递减的情形是对称的。

暂且假设函数 φ 是 C^2-光滑的。在这种情况下，我们可以对 (5.1.2) 求导，得到

$$(\tau - l)\gamma''(\tau) = -2\gamma'(\tau) + \varphi'(\tau).$$

因此， γ的曲率，即 $(\gamma_1')^{-3}$ 行列式 $\begin{pmatrix}\gamma'\\ \gamma''\end{pmatrix}$，与行列式 $\begin{pmatrix}\gamma'\\ \varphi'\end{pmatrix}$的符号相同，因为 $\gamma_1' > 0$。我们再次利用 (5.1.2) 表示 γ'，并将行列式改写为以下形式：

$$\det\begin{pmatrix}\gamma'\\ \varphi'\end{pmatrix} = \frac{1}{\tau - l}\det\begin{pmatrix}\varphi - \gamma\\ \varphi'\end{pmatrix}.$$

这个表达式为正，因为 φ'是 $\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 在 $\varphi(\tau)$ 处的切向量，且 $\varphi_1' > 0$，而 $\gamma(\tau)$ 属于 Ω，见图 5.1。

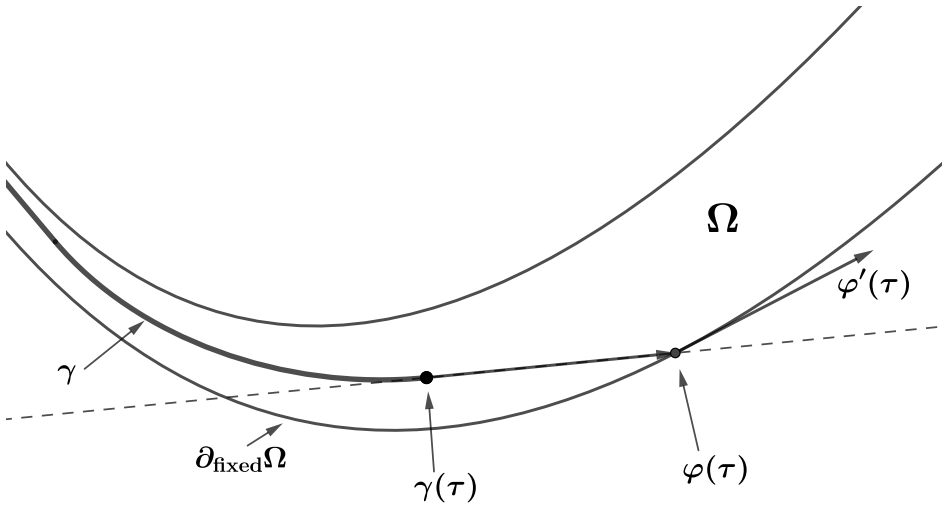


图 5.1：引理 5.1.2 证明示意图。

我们只需去掉光滑性假设。可以用光滑递增函数 φ_n 来逼近 $\varphi : (l,\ r] \to \partial_{\text{fixed}}\Omega$，使得由 φ_n 生成的曲线 γ_n 逐点收敛于 γ。每条 γ_n 都是一条凸曲线（从标准坐标的意义上说，这些曲线都是凸函数的图像），并且 $\gamma_n \to \gamma$ 逐点成立。因此， γ 本身也是一条凸曲线。 □

下面的引理将 γ 为凸的条件与条件 $\varphi \in \boldsymbol{A}_\Omega$ 联系起来（证明的示意图见图 5.2）。下文引理中的符号 $\gamma'(r)$ 表示左导数，它总是因凸性而存在。

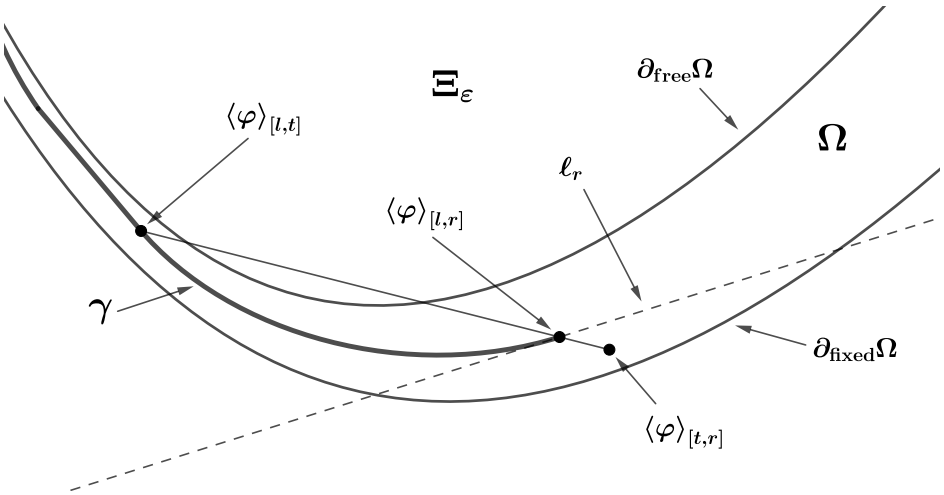


图 5.2：引理 5.1.3 证明的示意图。

引理 5.1.3. 设 γ 为一条以区间 $(l, r]$ 为参数、由 (5.1.1) 给出的曲线。假设它是凸的，也就是说，它在标准坐标下是一个凸函数的图像。再假设切线

$$\ell_r = \{\gamma(r) + s\gamma'(r) \colon s \in \mathbb{R}\}$$

不穿过定义域 Ξ （见定义 2.1.1）。那么，对于任意 $t \in [l, r)$，我们有 $\langle\varphi\rangle_{[t,r]} \in \Omega$。

证明。由于曲线 γ 是凸的，它位于直线 ℓ_r的上方。定义域 Ξ 也位于直线 ℓ_r的上方。注意到 $\langle\varphi\rangle_{[l,r]}$ 是 $\langle\varphi\rangle_{[l,t]}$ 和 $\langle\varphi\rangle_{[t,r]}$的凸组合。因此，$\langle\varphi\rangle_{[t,r]}$ 由 ℓ_r与 Ξ 分隔。另一方面，$\langle\varphi\rangle_{[t,r]}$ 显然属于 Ξ_0，因此它位于 Ω 内部。 □

在下面的推论中，我们用 $\gamma'(\tau)$、 $\tau \in (l,\ r]$ 表示任意一个单侧导数。

推论 5.1.4。设 γ 是定义在 $(l, r]$ 上的一条传递曲线。假设它是凸的，即它在标准坐标下是某个凸函数的图。还假设切线

$$\ell_\tau = \{\gamma(\tau) + s\gamma'(\tau) \colon s \in \mathbb{R}\}$$

对任意 $\tau \in (l, r]$ 都不会穿过定义域 Ξ。那么，生成 γ 的函数 φ 属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$。

在开始构造具体的传递曲线之前，我们应当提出一个有助于猜测它们的启发式原理。由于传递曲线“由优化器组成”，它必须避开贝尔曼候选函数呈非线性的方向。因此，我们猜想，传递曲线应当沿着极值线段或自由边界延伸。

在第 5.2 小节中，我们将为叶状分解的每个基本图形构造传递曲线。一般情况下，一个图形在自由边界上会有一些特殊点，我们称它们为入向节点和出向节点。思路如下：如果我们为入向节点构造了特殊的传递曲线，那么就能为定义域中的任意点构造一条传递曲线。此外，如果定义域有出向节点，我们也会为它们构造特殊的传递曲线。某个定义域的每个出向节点，同时也是其相邻区域的入向节点。沿着这些特殊节点延续传递曲线，就能为 Ω 中的所有点构造优化函数。

5.2 优化函数的局部行为

5.2.1 切线区域的优化函数

考虑一个切域 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,\ u_2)$，它由线段 $S(u) = [g(u)\ w(u)]$, $u \in [u_1, u_2]$叶状分解而成，这些线段与 Ω 的自由边界相切。设 B 是 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,\ u_2)$ 上的一个标准候选函数。该定义域的边界有两段直线部分，即 $S(u_1)$ 和 $S(u_2)$。自由边界上的切点 $w(u_1)$ 和 $w(u_2)$ 分别是 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,\ u_2)$ 的入向节点和出向节点。回顾正值函数 λ,

$$\lambda(u)\big(g(u) - w(u)\big) = w'(u), \quad u \in [u_1, u_2], \tag{5.2.1}$$

在 (2.1.6) 中引入。

假设 ψ 是入射节点 $w(u_1)$（见下图 5.3）的一个优化器，其定义在区间 $(l, l_1]$ 上。我们的目标是为 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2)$ 内的所有点构造优化器。我们从自由边界上的点 $w(u)$ $u \in [u_1, u_2]$ 开始。我们寻找一个定义在 $(l, r]$ 上的函数 φ，其中 $r > l_1$ 满足： $\varphi = \psi$ 在 $(l, l_1]$ 上成立，并且其传递曲线 γ 沿自由边界从 $w(u_1)$ 延伸至 $[l_1, r]$ 上的 $w(u_2)$。我们将找到一个单调函数 u: $[l_1, r] \to [u_1, u_2]$，使得该函数

$$\varphi(t) = g(u(t)) \tag{5.2.2}$$

生成所需的传递曲线 $\gamma(t) = \langle\varphi\rangle_{[l,t]}$，该曲线将与 $w(u(t))$ $t \in [l_1, r]$ 重合。这等价于方程

$$(t - l)w(u(t)) = \int_l^t \varphi(\tau)\, d\tau.$$

我们对恒等式关于 t 求微分，得到

$$w(u(t)) + (t - l)w'(u(t))u'(t) = \varphi(t) = g(u(t)).$$

利用 (5.2.1)，得到 $(t - l)\lambda(u(t))u'(t) = 1$. 我们用边界条件 $u(l_1) = u_1$ 求解这个微分方程，得到

$$\log\frac{t - l}{l_1 - l} = \int_{u_1}^{u(t)} \lambda(v)\, dv. \tag{5.2.3}$$

由于函数 λ 为正且 C^1光滑（参见第2.1.4小节），等式 (5.2.3) 定义了所需的C^2光滑递增函数 u，其定义在区间 $[l_1, r]$ 上（以及由 (5.2.2) 定义的函数 φ），其中

$$r = l + (l_1 - l)\exp\Big(\int_{u_1}^{u_2} \lambda(v)\, dv\Big).$$

我们想利用引理 5.1.3 验证函数 φ 属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$。根据构造，曲线$\gamma(t)$, $t \in (l_1,\ r]$, 与自由边界 $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ 的这一部分重合。因此，曲线的这一部分是凸的，其切线不会穿过定义域 Ξ。为了使用引理 5.1.3，我们需要曲线 γ 在整个区间 $(l,\ r)$ 上的凸性。由此引出下面的命题。

命题 5.2.1。 设 B 是 $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2)$ 上的一个候选对象。假设存在一个非递减优化器 ψ，使其在点 $w(u_1)$ 处对应于 B。另设 $\psi \preceq g(u_1)$。那么，存在一个非递减优化器 φ_x，使其在每个点 $x \in \Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2)$，处对应于 B，此外，$\varphi_x \preceq g(u_2)$。

回顾一下，Ω 上的序 $\preceq$ $\partial_{\mathrm{fixed}}$ 是在第 13 页引入的。

证明。 我们为点 $x \in \Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2) \cap \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ 构造了所需的函数 φ_x。对于任意点 $x \in \Omega_{\mathrm{R}}(u_1, u_2)$，存在唯一的 $u \in [u_1, u_2]$，使得 $x \in S(u)$。我们已知这条极值线段两个端点 $w(u)$ 和 $g(u)$ 处的优化器。具体而言，它们在区间 $(l, r]$

以及常函数 $\varphi_{g(u)} \equiv g(u)$。我们将通过把函数 $\varphi_{w(u)}$ 延伸到某个适当长度的区间 $(r, r_1]$ 上，并在其上取常值 $g(u)$，从而得到所需的优化器 φ_x。

要证明该命题，我们需要说明两点。首先，需要验证函数 φ_x属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$。其次，需要证明候选对象 B满足等式 $B(x) = \langle \mathrm{f}(\varphi_x)\rangle$。

我们先验证由 $\varphi = \varphi_x$生成的曲线 $\gamma = \gamma_x$ 的凸性。根据引理 5.1.2，由 ψ生成的曲线，即 $\gamma|_{(l,l_1]}$，是凸的，并且它在点 $w(u_1)$处的切线与自由边界的切线重合（这是条件 $\psi \preceq g(u_1)$和（5.1.2）的推论）。随后，曲线 γ 沿着凸的自由边界延伸，然后沿着切线$S(u)$延伸。因此，该曲线 γ 是凸的。令 $l < t < \tau \leqslant r_1$。若 $\tau \leqslant l_1$，则点 $\langle\varphi\rangle_{[t,\tau]}$ 位于由 ψ生成的曲线上，因此根据假设，它属于 Ω。若 $\tau > l_1$，则根据构造，γ 在 $\gamma(\tau)$处的切线就是自由边界的切线。因此，该切线不会穿过定义域 Ξ，由引理 5.1.3 可知，$\langle\varphi\rangle_{[t,\tau]}$ 属于 Ω。这就证明了 $\varphi \in \boldsymbol{A}_\Omega$。

只需证明，对于 $s \in [l_1, r_1]$，$B(\gamma(s)) = \langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_{[l,s]}$，因为对于 $s \in (l, l_1]$，这一结论可由 ψ 是一个优化器这一事实得出。因此，我们需要验证以下恒等式：

$$(s-l)B(\gamma(s)) - (l_1 - l)B(\gamma(l_1)) = \int_{l_1}^{s} \mathrm{f}(\varphi(\tau))\, d\tau. \tag{5.2.4}$$

对 s 求导后，我们得到等价的恒等式（因为 (5.2.4) 对 $s = l_1$ 成立）：

$$B(\gamma(s)) + (s-l)\,\langle \nabla B(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle = \mathrm{f}(\varphi(s)) = B(\varphi(s)). \tag{5.2.5}$$

由于 B 是一个贝尔曼候选函数（见定义 2.2.4），梯度 ∇B 在包含 $\gamma(s)$ 和 $\varphi(s)$ 的极值线段上为常数，因此，

$$B(\varphi(s)) - B(\gamma(s)) = \big\langle \nabla B, \big(\varphi(s) - \gamma(s)\big)\big\rangle \overset{(5.1.2)}{=} (s-l)\,\langle \nabla B, \gamma'(s)\rangle\,. \qquad \square$$

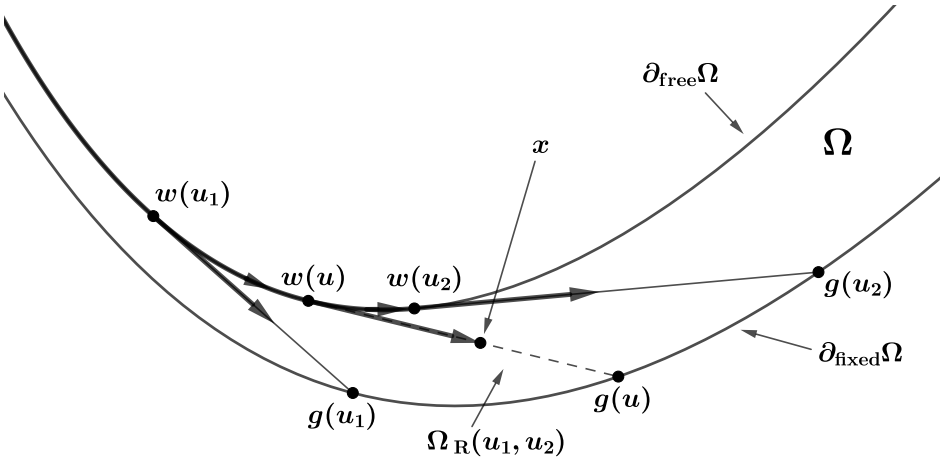


图 5.3：切域内的配送曲线。

我们简要陈述一个对称命题。

命题 5.2.2. 设 B 是Ω_{L}（u_1, u_2）上的一个候选对象。假设存在一个非递增优Ω ψ，使其在点 w（u_2）处是 B 的优化器。另设 g（u_2）$\preceq \psi$。则，存在一个非递增优化器 φ_x，使其在每个点 $x \in \Omega_{\text{L}}$（u_1, u_2），都是 B 的优化器，此外，g（u_1）$\preceq \varphi_x$。

对于无限定义域中类似命题的证明稍微复杂一些，并且需要额外的假设 (2.1.7) 和 (2.1.8)。我们将结合以下技术性引理使用这些假设。

引理 5.2.3。设 $\sigma \in \mathbb{R}$。设 ϑ 和 Y 是定义在 $[\sigma, +\infty)$上的两个分段单调连续函数，且具有有限个单调区间。假设 $\lim_{+\infty} \vartheta = 0$。那么，分部积分公式成立：

$$\int_\sigma^{+\infty} \vartheta dY = \lim_{\nu \to +\infty} \int_\sigma^\nu \vartheta dY = -Y(\sigma)\vartheta(\sigma) - \lim_{\nu \to +\infty} \int_\sigma^\nu Y d\vartheta = -Y(\sigma)\vartheta(\sigma) - \int_\sigma^{+\infty} Y d\vartheta, \tag{5.2.6}$$

其中两个极限都存在（有限或无限）。

对称性 度，对于定义在$(-\infty, \sigma]$ 上的分段单调连续函数 ϑ 和 Y，且具有有限个数的...
区间数量调性，若极限$_{-\infty}$ $\vartheta = 0$，则

$$\int_{-\infty}^\sigma \vartheta dY = \lim_{\nu \to -\infty} \int_\nu^\sigma \vartheta dY = Y(\sigma)\vartheta(\sigma) - \lim_{\nu \to -\infty} \int_\nu^\sigma Y d\vartheta = Y(\sigma)\vartheta(\sigma) - \int_{-\infty}^\sigma Y d\vartheta, \tag{5.2.7}$$

其中两个极限均存在（有限或无限）。

证明。我们给出（5.2.6）的证明。（5.2.7）的证明类似。

由于分部积分公式在任意有限区间上都成立，不失一般性，我们可以假设 Y 和 ϑ 都是单调的，并且在 $[\sigma, +\infty$ 上不改变符号。于是，（5.2.6）中的两个积分关于 ν 都是单调的，因此两个极限均存在，可以是有限的，也可以是无限的。

首先，假设 $\int_\sigma^{+\infty} \vartheta dY$ 收敛。任取 $\nu > \sigma$，并写出分部积分公 la
在区间 $[\sigma, \nu]$:

$$\int_\sigma^\nu \vartheta \, dY + Y(\sigma)\vartheta(\sigma) = Y(\nu)\vartheta(\nu) - \int_\sigma^\nu Y d\vartheta. \tag{5.2.8}$$

当 $\nu \to +\infty$ 时，(5.2.8) 的左侧有有限极限。右端的第一项与第二项符号相同（因为 sign(ϑ') $=$ $-$ sign(ϑ)），因此，两个加项都有有限极限。如果第一项的极限非零，那么第二项的极限将是无穷大。事实上，在这种情况下

$$|Y(\tau)| > \frac{\text{const}}{|\vartheta(\tau)|}, \quad \tau \to +\infty, \tag{5.2.9}$$

因此，

$$\Big| \int^{+\infty} Y(\tau) d\vartheta(\tau) \Big| > \text{const} \cdot \Big| \int^{+\infty} \frac{d\vartheta(\tau)}{\vartheta(\tau)} \Big| = +\infty, \tag{5.2.10}$$

因为 $\vartheta(+\infty) = 0$。因此，(5.2.8) 右端的第一项在 $+\infty$ 处消失。公式(5.2.6)得证。

现在，假设 $\int_\sigma^{+\infty} Y d\vartheta$ 收敛。(5.2.8) 左侧的积分关于 ν 单调，因此，当 ν 趋于 $+\infty$ 时，它有有限或无限极限。因此，(5.2.8) 右端的第一项也有有限或无限极限。如果这个极限非零，那么就有 (5.2.9) 和 (5.2.10)，这与我们的假设矛盾。因此，(5.2.8) 右端的第一项消失，且当 ν 趋于 $+\infty$ 时，(5.2.8) 的左侧有有限极限，(5.2.6) 得证。

最后，如果（5.2.6）中的两个极限都是无穷远点，我们需要证明两侧的无穷远点具有相同的符号。我们不妨假设 ϑ 为正且递减。也不妨假设 Y 单调

且在无穷远处非负。如果 Y 在无穷远处有界，那么（5.2.6）左侧的极限将是有限的。因此， Y 在无穷远处递增，并且（5.2.6）的两侧相等 $+\infty$。 □

引理 5.2.4. 假设条件(2.1.7) 成立。那么，条件(2.1.14) 等价于由(3.3.4) 给出的 β_2 满足，

$$\beta_2(v) = \mathfrak{K}(v) - \int_{-\infty}^{v} \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\, \mathfrak{K}'(\tau)\, d\tau, \tag{5.2.11}$$

满足不等式 $\beta_2(v) < +\infty$，对任意 $v \in \mathbb{R}$ 均成立。此外，下列等式成立 :

$$\int_{-\infty}^{v} f'(\tau)\, \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda\Big)\, d\tau = -\big(w_1(v) - g_1(v)\big)\Big[\kappa_3(v) + \big(\kappa(v) - \kappa_2(v)\big)\beta_2(v)\Big]. \tag{5.2.12}$$

这里 $\lambda = \lambda_{\mathrm{R}}$、 $\kappa = \kappa_{\mathrm{R}}$ 和 $w = w_{\mathrm{R}}$。

证明。 我们来修改 (5.2.11) 右端指数中的表达式。利用 (3.3.2)、(2.1.6) 和 (2.1.12)，得到

$$\int \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa} = \log(\kappa_2 - \kappa) + \log(g_1 - w_1) + \int \lambda\,. \tag{5.2.13}$$

首先，我们**断言**

$$\int_{-\infty}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa} = +\infty, \tag{5.2.14}$$

这等价于

$$\lim_{\tau \to -\infty} \big(\kappa_2(\tau) - \kappa(\tau)\big)\big(g_1(\tau) - w_1(\tau)\big) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda\Big) = 0$$

根据 (5.2.13)。回想一下，$(g_1 - w_1)\kappa = (g_2 - w_2)$，因此

$$\lim_{\tau \to -\infty} \kappa(\tau)\big(g_1(\tau) - w_1(\tau)\big) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda\Big) = \lim_{\tau \to -\infty} \big(g_2(\tau) - w_2(\tau)\big) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda\Big) = 0 \tag{5.2.15}$$

这是由于条件 (2.1.7)。由于曲线 g 的凸性，函数 $\kappa_2 = \frac{g_2'}{g_1'}$ 是递增的。分两种情况。如果 κ_2 在 $-\infty$ 上有界，那么

$$\lim_{\tau \to -\infty} \kappa_2(\tau)\big(g_1(\tau) - w_1(\tau)\big) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda\Big) = 0 \tag{5.2.16}$$

这是由于同一条件 (2.1.7)。如果 κ_2 在 $-\infty$ 上无界，那么 $\kappa_2(\tau) \to -\infty$，当 $\tau \to -\infty$ 时，接着我们利用如下事实：只要 τ 足够接近 $-\infty$，就有 $0 > \kappa_2 > \kappa$。因此 $|\kappa_2| < |\kappa|$，并且由 (5.2.15) 可得 (5.2.16)。于是，(5.2.14) 中所声称的 发散性得证。

我们希望将引理 5.2.3 用于

$$\vartheta(\tau) = \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big) \qquad \text{and} \qquad Y(\tau) = \mathfrak{K}(\tau)$$

进行分部积分，并将公式 (5.2.11) 改写为 β_2。我们验证引理 5.2.3 的假设。显然， $\kappa_2' > 0$, $\kappa_2 > \kappa$，因此函数 ϑ 单调，并由 (5.2.14) 可知其在 $-\infty$ 趋于 0。根据条件 2.1.10，函数 Y 分段单调。因此，由引理 5.2.3 可得:

$$\beta_2(v) = \int_{-\infty}^{v} \frac{\kappa_2'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa(\tau)}\, \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\mathfrak{K}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{v} \frac{\kappa_3'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa(\tau)}\, \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\, d\tau. \tag{5.2.17}$$

现在将 (5.2.13) 代入 (5.2.17)，得到

$$\beta_2(v) = \frac{1}{\kappa_2(v)-\kappa(v)} \cdot \frac{1}{g_1(v)-w_1(v)} \cdot \int_{-\infty}^{v} \kappa_3'(\tau)\big(g_1(\tau)-w_1(\tau)\big)\, \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \lambda\Big)\, d\tau. \tag{5.2.18}$$

下一步是再次使用同一个引理 5.2.3 进行分部积分，其中

$$\vartheta(\tau) = \big(g_1(\tau)-w_1(\tau)\big)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big) \qquad \text{and} \qquad Y(\tau)=\kappa_3(\tau).$$

我们验证引理 5.2.3 的假设。首先，由于 (2.1.7)，当 $\tau \to -\infty$ 时 $\vartheta \to 0$。其次，我们利用关系 $\big(g_1-w_1\big)\lambda = w_1'$ 计算 ϑ'：

$$\vartheta'(\tau) = \Big(\lambda(\tau)\big(g_1(\tau)-w_1(\tau)\big) + g_1'(\tau) - w_1'(\tau)\Big)\, \exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big) \overset{(2.1.6)}{=} g_1'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big) > 0.$$

因此，ϑ 是单调的。最后，由注 2.1.11，Y 是分段单调的。因此，我们可以应用引理 5.2.3，并在 (5.2.18) 中分部积分：

$$\beta_2(v) = \frac{\kappa_3(v)}{\kappa_2(v)-\kappa(v)} - \frac{1}{\kappa_2(v)-\kappa(v)} \cdot \frac{1}{g_1(v)-w_1(v)} \int_{-\infty}^{v} \kappa_3(\tau) g_1'(\tau) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big)\, d\tau.$$

由于 $\kappa_3 g_1' = f'$，我们得到：

$$\beta_2(v) = \frac{\kappa_3(v)}{\kappa_2(v)-\kappa(v)} - \frac{1}{\kappa_2(v)-\kappa(v)} \cdot \frac{1}{g_1(v)-w_1(v)} \cdot \int_{-\infty}^{v} f'(\tau) \exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big)\, d\tau. \tag{5.2.19}$$

这就完成了（5.2.12）的证明。

条件 (2.1.14) 表明 (5.2.12) 的左侧大于 $-\infty$。根据 (5.2.12)，这等价于 $\beta_2 < +\infty$。

□

让我们回过头来讨论优化器。

命题 5.2.5. 设 B 是 $\Omega_R(-\infty, u_2)$ 上的标准候选函数。在每个点 $x \in \Omega_R(-\infty, u_2)$, 处，都存在一个针对 B 的非递减优化器 φ_x，此外，$\varphi_x \preceq g(u_2)$。

证明。根据域 $\Omega_R(-\infty, u_2)$ 中标准候选函数的定义 3.3.8，由式 (3.3.4) 给出的函数 β_2 是有限的。因此，式 (5.2.11) 中的积分收敛。

我们从自由边界上的点开始。完成后，我们就能自动得到任意 $x \in \Omega_R(-\infty, u_2)$ 对应的所需优化器 φ_x。为此，我们任取有限的 u_1，使得 $x \in \Omega_R(u_1, u_2)$，并使用命题 5.2.1。此外，只需为 $x = w(u_2)$ 构造一个优化器。

与有界域 Ω_R 的情形类似，我们希望在某个区间 $(l, r]$ 上构造一个函数 $\varphi\colon (l, r] \to \partial_{\text{fixed}}\Omega$，使得由 φ 生成的曲线 $\gamma(t) = \langle\varphi\rangle_{(l,t)}$ 沿着自由边界从无穷远延伸至 $w(u_2)$。与之前一样，我们将寻找形如 $\varphi(t) = g(u(t))$ 的函数，其中 $u\colon (l, r] \to (-\infty, u_2]$是一个单调函数。前面的推理（见 (5.2.3)）导出以下关系：

$$\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \lambda(v)\, dv = \log\frac{t_2-l}{t_1-l}, \qquad l < t_1 < t_2 \leqslant r. \tag{5.2.20}$$

我们希望得到 $u(r) = u_2$。将 $t_2 = r$ 代入 (5.2.20)，得到

$$\int_{u(t_1)}^{u_2} \lambda(v)\, dv = \log\frac{r-l}{t_1-l}, \qquad l < t_1 < r. \tag{5.2.21}$$

根据 (2.1.7) 中的条件，我们有

$$\int_{-\infty}^{u_2}\lambda(v)\,dv=+\infty\,, \tag{5.2.22}$$

因此，(5.2.21) 定义了函数 u，其定义域为 $(l,\ r)$。

我们可以选择线段的长度 (l,r) 为 1，即可以取 $l=0,\,r=1$。我们得到反函数 $t=t(u)$ 的显式公式：

$$t=\exp\Big(-\int_{u}^{u_2}\lambda(v)\,dv\Big). \tag{5.2.23}$$

推论 5.1.4 保证 $\varphi\in\boldsymbol{A}_{\Omega}$，前提是我们知道的是。

$$\frac{1}{t}\int_0^t\varphi=w(u(t)),\qquad t\in(0,1].$$

因此，对于任意 $t\in(0,1]$，我们需要检查的是 Erotiske

$$\int_0^t\varphi=tw(u(t)). \tag{5.2.24}$$

此外，为了证明 φ 是 B 的优化器，我们还需要验证的是

$$B(w(u(t)))=\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_{[0,t]}=\frac{1}{t}\int_0^t f(u(s))\;ds. \tag{5.2.25}$$

我们从（5.2.24）开始。首先，我们证明（5.2.24）右端的极限在$t\to 0$时为零。这等价于

$$\lim_{u\to-\infty}w_i(u)\exp\Big(-\int_{u}^{u_2}\lambda(v)\,dv\Big)=0,\qquad i=1,2. \tag{5.2.26}$$

固定 $i=1$,2。如果函数 w_i 在 $-\infty$上有界，则 (5.2.26) 可由 (5.2.22) 得出。如果 w_i 在 $-\infty$上无界，则应用洛必达法则：

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{w_i(u)}{\exp\big(\int_u^{u_2}\lambda\big)}=-\lim_{u\to-\infty}\frac{w_i'(u)}{\lambda(u)\exp\big(\int_u^{u_2}\lambda\big)}\overset{(5.2.1)}{=}\lim_{u\to-\infty}\big(w_i(u)-g_i(u)\big)\exp\Big(-\int_u^{u_2}\lambda\Big)=0$$

由条件 (2.1.7) 可知。

我们计算 (5.2.24) 左侧的积分：

$$\int_0^t\varphi(\tau)d\tau=\int_0^t g(u(\tau))d\tau\overset{(5.2.23)}{=}\int_{-\infty}^{u(t)}\lambda(v)g(v)\exp\Big(-\int_v^{u_2}\lambda\Big)\,dv. \tag{5.2.27}$$

注意

$$\int\lambda(v)g(v)\exp\Big(-\int_v^{u_2}\lambda\Big)\,dv\overset{(5.2.1)}{=}\int\big(w'(v)+\lambda(v)w(v)\big)\exp\Big(-\int_v^{u_2}\lambda\Big)\,dv=w(v)\exp\Big(-\int_v^{u_2}\lambda\Big),$$

当 $v\to-\infty$ 时，它趋于零，见 (5.2.26)。这证明 (5.2.27) 中的积分收敛，且等于

$$w(u(t))\exp\Big(-\int_{u(t)}^{u_2}\lambda\Big)=tw(u(t)).$$

关系式 (5.2.24) 现已得证。

下面开始证明（5.2.25）。利用（5.2.23），（5.2.25）的右端可以改写为如下形式

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t f(u(s))\,ds &= \exp\Big(\int_{u(t)}^{u_2}\lambda\Big)\cdot\int_0^t f(u(s))\,d\left[\exp\Big(-\int_{u(s)}^{u_2}\lambda\Big)\right]= \\ &\overset{\tau=u(s)}{=}\int_{-\infty}^{u(t)} f(\tau)\lambda(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{u(t)}\lambda\Big)d\tau= \\ &= f(u(t))-\int_{-\infty}^{u(t)} f'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{u(t)}\lambda\Big)\,d\tau,\end{aligned}\tag{5.2.28}$$

根据引理 5.2.3，在 $\vartheta(\tau)=\exp\Big(-\int_{\tau}^{u(t)}\lambda\Big)$ 和 $Y=f$ 的条件下，分部积分是有保证的。利用（5.2.12），我们得到（5.2.25）；关于 B 与 β_2 之间的关系，参见表示（3.2.2）。 □

命题 5.2.6。如果（2.1.7）成立，但（2.1.14）不成立，那么对于任意 $x\in\Omega\setminus\partial_{\text{fixed}}\Omega$</style}，都有 $(x;\ f)=+\infty$.

证明。只需证明对于任意 $v\in\mathbb{R}$，有 $\boldsymbol{B}(w(v);\ f)=+\infty$。条件（2.1.7）保证，在命题 5.2.5 的证明中构造的函数 φ 是点 $w(v)$ 处的测试函数。（2.1.14）不成立意味着

$$\int_{-\infty}^{v} f'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda_{\text{R}}\Big)\,d\tau=-\infty,$$

由引理 5.2.3 可得

$$\langle \mathrm{f}(\varphi)\rangle_{[0,1]}\overset{(5.2.28)}{=}\int_{-\infty}^{v} f(\tau)\lambda_{\text{R}}(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda_{\text{R}}\Big)\,d\tau=+\infty.$$

□

对于 $+\infty$ 上的左切线域，我们陈述类似的命题。

命题 5.2.7。设 B 是 $\Omega_{\text{L}}(u_1,+\infty)$ 上的标准候选函数。在 $\Omega_{\text{L}}(u_1,+\infty)$ 中的每个点 $x\in$ 处，都存在一个非递增优化器 φ_x，此外，$g(u_1)\preceq\varphi_x$。

命题 5.2.8。若(2.1.8) 成立，但(2.1.15) 不成立，则对于任意 $x\in\Omega\setminus\partial_{\text{fixed}}\Omega$，有 $\boldsymbol{B}(x;\ f)=+\infty$.

5.2.2 其他所有图形的优化函数

构造弦域的优化器非常容易。事实上，下面的命题是公式 (3.4.1) 的直接推论。

命题 5.2.9。设 B 为弦域 $\Omega_{\text{ch}}([a_0,b_0],[a_1,b_1])$ 上的标准候选函数。设 $g(a)$ 和 $g(b)$ 是该弦域中一条弦的端点，$a\in[a_0,a_1]$，$b\in[b_1,b_0]$。设

$$x=\alpha g(a)+(1-\alpha)g(b),$$

其中 $\alpha\in[0,1]$。那么，优化器 $\varphi_x\colon[0,1]\to\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 由公式给出

$$\varphi_x=g(a)\chi_{[0,\alpha]}+g(b)\chi_{(\alpha,1]}.$$

证明。显然，$\langle\varphi_x\rangle=x$，且弦上 B的线性性意味着 $B(x)=\langle \mathrm{f}(\varphi_x)\rangle_{[0,1]^\circ}$ 显然，所有平均值 $\langle\varphi_x\rangle_J$都位于 $[g(a)\ g(b)]\subset\Omega$上，其中 $J\subset[0,1]$，因此，$\varphi_x\in\boldsymbol{A}_\Omega$。 □

注 5.2.10. 我们为弦域建议的优化器 φ_x 是非递增的。只需取函数 $\varphi_x = g(b)\chi_{[0,1-\alpha]} + g(a)\chi_{(1-\alpha,1]}$，即可构造一个非递增优化器。

定义 5.2.11. 上述构造同样适用于长弦这一特殊情形。在这种情况下，与自由边界相切的点称为这条弦的出射节点。

现在我们转向多杯域的情形。

命题 5.2.12. 设 B 是$\Omega^{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$上的标准候选函数。那么，在$\Omega^{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$中的任意点 $x \in$处， B 都存在一个单调优化器 φ_x ； 此外， $g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \preceq \varphi_x \preceq g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})$ 逐点成立。

证明。 固定 $x \in \Omega^{\mathrm{ClMcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，并将其表示为三个点 $g(a_1)$、 $g(a_2)$、$g(a_3)$的凸组合，其中 a_1， a_2， $a_3 \in \cup_{i=1}^k \mathfrak{a}_i$满足:

$$x = \alpha_1 g(a_1) + \alpha_2 g(a_2) + \alpha_3 g(a_3); \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_j \geqslant 0.$$

不失一般性，我们可以假设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$。 令

$$\varphi_x(\tau) = g(a_1)\chi_{[0,\alpha_1]} + g(a_2)\chi_{(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2]} + g(a_3)\chi_{(\alpha_1+\alpha_2,1]}.$$

等式 $\langle\varphi_x\rangle = x$ 显然成立，而关系 $B(x) = \langle \mathrm{f}(\varphi_x)\rangle_{[0,1]}$ 则由闭合多杯结构上 B 的线性性得出。对于所有 $J \subset [0,1]$，平均值 $\langle\varphi_x\rangle_J$ 都位于多杯形内，因此 $\varphi_x \in \boldsymbol{A}_\Omega$。 □

命题 5.2.13。 设 B 是 $\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$上的标准候选函数。则，对于任意点 $x \in \Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$，存在一个针对 B 的单调优化器 φ_x ，此外， $g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}}) \preceq \varphi_x \preceq g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})$ 逐点成立。

证明。 如果 $x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$，则 $\varphi_x = x\chi_{[0,1]}$ 是优化器。因此，在下文中我们假设 $x \notin \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$。考虑开凸集 Ω' ，它是 Ξ 与点 $g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})$ 和 $g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})$ 的凸包的内部。由于 $x \notin \Omega'$，根据分离定理，存在一条直线 $\varkappa = \varkappa(x)$ 经过 x 且不与 Ω'相交。设 y 和 z 分别为直线 $\varkappa(x)$ 与 $\Omega^{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 边界交集的最左点和最右点。对于每个交点（y 和z），可能出现以下两种情况之一：它位于弧 $g(\mathfrak{a}_i)$、 $i \in \{1,2,\dots,k\}$上，或位于线段 $[g(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}})\ g(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}})]$、 $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$上。

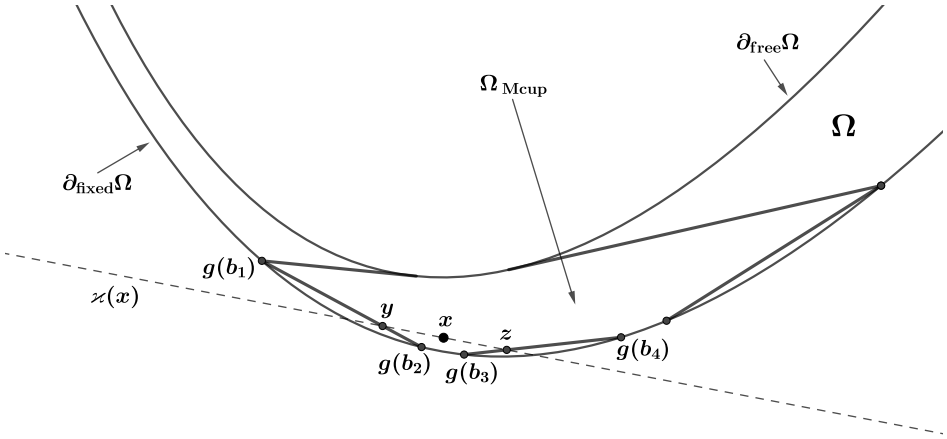


图 5.4：在多杯形区域中构建优化器。

如果 y 位于弦 $[g(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}})\ g(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}})]$, 上，那么我们可以写成

$$y = \alpha_y g(\mathfrak{a}_i^{\mathrm{r}}) + (1-\alpha_y) g(\mathfrak{a}_{i+1}^{\mathrm{l}}); \qquad \text{for some} \quad \alpha_y \in [0,1].$$

类似地，如果 z 位于弦 $[g(\mathfrak{a}_j^{\mathrm{r}})\ g(\mathfrak{a}_{j+1}^{\mathrm{l}})]$，上，那么

$$z=(1-\alpha_z)g(\mathfrak{a}_j^{\mathrm{r}})+\alpha_z g(\mathfrak{a}_{j+1}^{\mathrm{l}});\qquad \text{for some}\quad \alpha_z\in[0,1].$$

因此，在任何情况下，$y=\alpha_y g(b_1)+(1-\alpha_y)g(b_2)$、$z=(1-\alpha_z)g(b_3)+\alpha_z g(b_4)$（见图 5.4），其中 $b_j\in\cup_{i=1}^{k}\mathfrak{a}_i$（如果 y 是 $\varkappa$ 与一条弧的交集，那么我们可以取 $b_1=b_2$；对于 z，情况也类似）使得

$$g_1(b_1)\leqslant y_1\leqslant g_1(b_2)\leqslant g_1(b_3)\leqslant z_1\leqslant g_1(b_4).$$

在 $[y_1,z_1]$线段上定义优化器 φ_x 很方便:

$$\varphi_x(t)=\begin{cases} g(b_1), & t\in J_1=[y_1,y_1+\alpha_y(z_1-x_1));\\ g(b_2), & t\in J_2=[y_1+\alpha_y(z_1-x_1)),z_1-x_1+y_1);\\ g(b_3), & t\in J_3=[z_1-x_1+y_1,z_1-\alpha_z(x_1-y_1));\\ g(b_4), & t\in J_4=[z_1-\alpha_z(x_1-y_1),z_1]. \end{cases}\tag{5.2.29}$$

和往常一样，等式 $\langle\varphi_x\rangle=x$ and $\langle \mathrm{f}(\varphi_x)\rangle_{[y_1,z_1]}=B(x)$ 显然成立。然而，如果我们画出 φ_x 的传递曲线，就会发现某些情况下它不属于引理 5.1.3 的适用范围（切线可能会穿过自由边界），因此我们直接证明 φ_x 属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$。

我们断言，点 $\langle\varphi_x\rangle_J$（其中 $J\subset[y_1,z_1]$）要么属于线段 $[g(b_1)\ g(b_2)]$ 和 $[g(b_3)\ g(b_4)]$，中的一条，要么与自由边界相隔 $\varkappa$。证明该断言后，我们得到 $\varphi_x\in\boldsymbol{A}_\Omega$。

我们将讨论 J 在 $[y_1,z_1]$ 内部所处位置的不同情形。如果 J 与 (5.2.29) 中的四个区间 J_1、J_2、J_3、J_4 中至多两个相交，则断言显然成立。如果 J 与全部四个区间相交，那么我们可以将 x 表示为 $\langle\varphi_x\rangle_J$、$g(b_1)$ 和 $g(b_4)$ 的线性组合。由于 $g(b_1)$ 和 $g(b_4)$ 位于 $\varkappa$ 上方（即与自由边界处于同一半平面内），点 $\langle\varphi_x\rangle_J$ 位于 $\varkappa$ 下方。

因此，我们可以假设 J 与 (5.2.29) 中的三个区间相交。不失一般性，我们可以假设 $J\cap J_4=\varnothing$。那么，$\langle\varphi_x\rangle_J$ 是 $g(b_3)$ 与来自 $[y,g(b_2)]$ 的一个点的凸组合（因为 $J_2\subset J$）。这两个点都位于 $\varkappa$ 下方。因此，$\langle\varphi_x\rangle_J$ 被 $\varkappa$ 与自由边界隔开。 □

注 5.2.14。我们为多杯形定义域提出的优化器 φ_x 是非递减的。以类似的方式，可以构造一个非递增优化器。

定义 5.2.15。自由边界上属于多杯形边界的那段弧的端点，称为多杯形的出向节点。

命题 5.2.16。设 $\Omega^{\mathrm{ang}}(u)$ 是一个角，其顶点为 $g(u)$，边界切线为 S_{L} 和 S_{R}，相应的切点为 w_{L} 和 w_{R}。设 B 是 $\Omega^{\mathrm{ang}}(u)$上的标准候选函数。设 ψ_{R} 是点 w_{R} 的非递减优化器，ψ_{L} 是点 w_{L} 的非递增优化器，且 $\psi_{\mathrm{R}}\preceq g(u)$ 和 $g(u)\preceq\psi_{\mathrm{L}}$ 逐点成立。那么，对每个点 $x\in\Omega^{\mathrm{ang}}(u)$，都存在一个优化器。

证明。这个命题的证明与命题 5.2.13 的证明非常相似。首先，存在数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，使得

$$x=\alpha_1 w_{\mathrm{R}}+\alpha_2 g(u)+\alpha_3 w_{\mathrm{L}};\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1,\quad \alpha_j\geqslant 0.$$

其次，根据注释 2.1.4，我们可以在任意区间上对 ψ_{R} 和 ψ_{L} 进行建模。假设 ψ_{R} 定义在 $[0,\alpha_1]$ 上，而 ψ_{L} 定义在 $[0,\alpha_3]$ 上。根据公式，在 $[0,1]$ 上定义优化器 φ_x。

$$\varphi_x(\tau)=\begin{cases}\psi_{\mathrm{R}}(\tau), & \tau\in[0,\alpha_1);\\ g(u), & \tau\in[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2);\\ \psi_{\mathrm{L}}(1-\tau), & \tau\in[\alpha_1+\alpha_2,1].\end{cases}$$

通常，等式 $\langle\varphi_x\rangle = x$ 和 $\langle \mathbf{f}(\varphi_x)\rangle_{[0,1]} = B(x)$ 显然成立。我们需要验证 $\varphi_x \in \boldsymbol{A}_\Omega$。设 $\varkappa = \varkappa(x)$ 是一条经过 x 且不与 Ξ 相交的直线。首先，我们证明 $\gamma_{\psi_{\mathrm{R}}}$ 位于 $\varkappa$ 上方，且 $\gamma_{\psi_{\mathrm{L}}}$ 也位于 $\varkappa$ 上方。只需证明关于 $\gamma_{\psi_{\mathrm{R}}}$ 的断言。由于 ψ_{R} 是非递减的，引理 5.1.2 表明曲线 $\gamma_{\psi_{\mathrm{R}}}$ 是凸函数的图。因此，它位于点 w_{R} 处的切线上方。由 (5.1.2) 可知，这条切线包含线段 $[w_{\mathrm{R}}, g(u)]$。因此，$\gamma_{\psi_{\mathrm{R}}}$ 位于点 w_{R} 处的自由边界的切线上方，且在该点左侧。因此，$\gamma_{\psi_{\mathrm{R}}}$ 位于 $\varkappa$ 上方。

令 $J \subset [0,1]$ 为一个区间，我们必须证明 $\langle\varphi_x\rangle_J \in \Omega$。考虑 J 在 $[0,1]$ 内的几种位置情况。

假设 $[\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2] \subset J$。那么我们断言，$\langle\varphi_x\rangle_J$ 与自由边界之间隔着 $\varkappa$。由于 x 是 $\langle\varphi\rangle_{[0,\alpha_1)\setminus J}$、$\langle\varphi\rangle_{[\alpha_1+\alpha_2,1]\setminus J}$ 和 $\langle\varphi\rangle_J$ 的凸组合，且前两个点位于 $\varkappa$ 上方，因此点 $\langle\varphi\rangle_J$ 确实位于 $\varkappa$ 下方，见图 5.5。

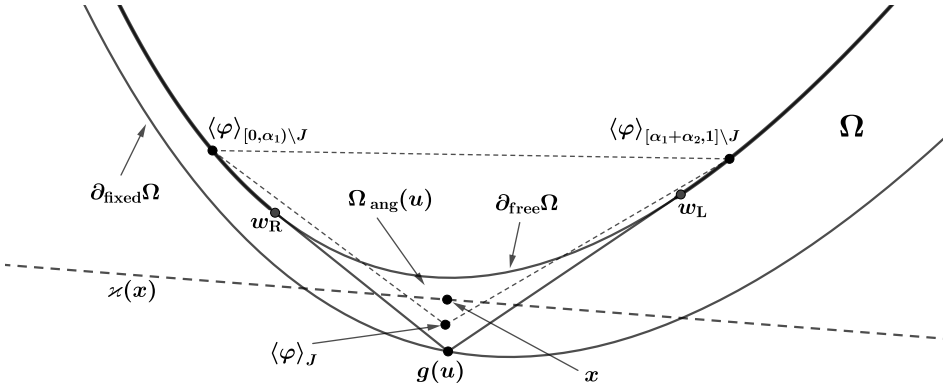


图 5.5：$\Omega^{\mathrm{ang}}(u)$ 中的优化器。

如果 $[\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2]$ 不包含在 J 中，那么我们可以将引理 5.1.3 应用于函数 $\varphi|_J$。事实上，$\varphi|_J$ 是一个单调函数，且相应曲线在端点处的切线不与自由边界相交。

□

定义 5.2.17. 命题 5.2.16 中引入的点 w_{R} 和 w_{L} 称为该角的入射节点 。

命题 5.2.18。 令 B 为右侧无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr,R}}(u_1, u_2)$ 中的标准候选函数。设 ψ 为点 $w_{\mathrm{R}}(u_1)$ 的非递减优化器，且逐点满足 $\psi \preceq g(u_1)$。那么, 对于任意 $x \in \Omega_{\mathrm{tr,R}}(u_1, u_2)$，存在一个非递减优化器 φ_x，使得 $\varphi_x \preceq g(u_2)$。

证明。 任取点 $x \in \Omega_{\mathrm{tr,R}}(u_1, u_2)$。无轨电车 $\Omega_{\mathrm{tr,R}}(u_1, u_2)$ 位于顶点为 $g(u_1)$ $g(u_2)$ 和 $w_{\mathrm{R}}(u_1)$ 的三角形内。因此，存在 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 使得

$$x = \alpha_0 w_{\mathrm{R}}(u_1) + \alpha_1 g(u_1) + \alpha_2 g(u_2); \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_j \geqslant 0.$$

根据注释 2.1.4，我们可以假设 ψ 定义在 $[0, \alpha_0]$上。根据公式，在 $[0,1]$ 上定义优化器 φ_x 为

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau), & \tau \in [0, \alpha_0); \\ g(u_1), & \tau \in [\alpha_0, \alpha_0+\alpha_1); \\ g(u_2), & \tau \in [\alpha_0+\alpha_1, 1]. \end{cases}$$

显然， $\langle\varphi_x\rangle_{[0,1]} = x$ 和 $\langle \mathbf{f}(\varphi_x)\rangle_{[0,1]} = B(x)$。我们只需验证 $\varphi_x \in \boldsymbol{A}_\Omega$，即对于任意区间 $J \subset [0,1]$，$\langle\varphi_x\rangle_J \in \Omega$。取一条经过 x 的直线 $\varkappa = \varkappa(x)$，使得点 $g(u_2)$与定义域 Ξ 位于该直线的上方，参见图 5.6。与命题 5.2.13 和 5.2.16 的证明一样，我们需要考虑 J 位于 $[0,1]$内部的不同位置情况。

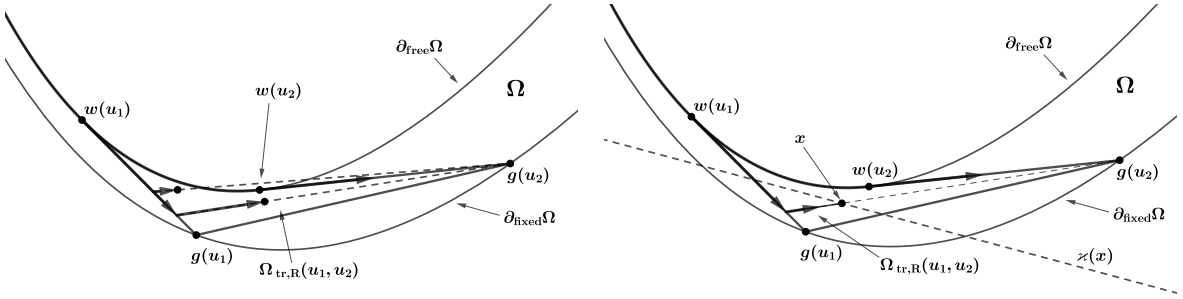


图 5.6：无轨电车内的配送曲线。

若 $[\alpha_0, \alpha_0+\alpha_1) \subset J$，则 $\langle\varphi_x\rangle_J$ 与自由边界之间被 $\varkappa_x$ 隔开（这一推理与我们在命题 5.2.13 和 5.2.16 中采用的方法完全类似）。

若 $J \cap [\alpha_0+\alpha_1, 1] = \varnothing$，则该情形属于引理 5.1.3 的适用范围。

若 $J \cap [0, \alpha_0) = \varnothing$，则 $\langle\varphi_x\rangle_J \subset [g(u_1)\ g(u_2)]$。

我们已考虑所有情形，并验证了 $\varphi_x \in \boldsymbol{A}_\Omega$。此外，根据构造可知， φ_x 是非递减的，且 $\varphi_x \preceq g(u_2)$。□

通常，我们也有一个对称命题。

命题 5.2.19. 设 B 为左侧无轨电车 $\Omega_{\text{tr, L}}(u_1, u_2)$中的标准候选函数。假设 ψ 是点 $w_{\text{L}}(u_2)$ 的一个非递增优化器，且满足 $\psi \succeq g(u_2)$。那么， 对于任意 $x \in \Omega_{\text{tr, L}}(u_1, u_2)$，都存在一个非递增优化器 φ_x ，使得 $\varphi_x \succeq g(u_1)$。

仍需 构造多重无轨电车、小鸟和多重小鸟的优化器。第 3.8.1 小节中的公式将有助于我们完成这项工作。 m
第 3.8.1 小节将有助于我们完成这项工作。

命题 5.2.20. 设 B 为右侧多无轨电车形 $\Omega_{\text{Mtr, R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$中的标准候选函数。假设 ψ 是点 $w_{\text{R}}(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 的一个非递减优化器，且满足 $\psi \preceq g(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$。那么， 对于任意来自$\Omega_{\text{Mtr, R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 的 x ，都存在一个不超过 $g(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$的非递减优化器。

证明。 我们应用 (3.8.13)，将一个多重无轨电车分解为由右手推车域和实根上的多重无轨电车 $\Omega_{\text{Mtr,R}}(\mathfrak{a}_i)$ 构成的交替序列。我们将每个这样的多重无轨电车视为一个切域，并在其中取候选对象 B （注意，这不是该切域的标准候选函数）。依次对无轨电车应用命题 5.2.18、对切域应用命题 5.2.1，即可为 $\Omega_{\text{Mtr, R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 内的所有点构造优化器。 □

命题 5.2.21。 设 B 是左多重手推车 $\Omega_{\text{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 中的标准候选函数。假设 ψ 是点 $w_{\text{L}}(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$ 的非递增优化器，且满足 $\psi \succeq g(\mathfrak{a}_k^{\text{r}})$。那么，对于 $\Omega_{\text{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 中任意的 x ，都存在一个不小于 $g(\mathfrak{a}_1^{\text{l}})$ 的非递增优化器。

定义 5.2.22。 设 w_- 和 w_+ 分别为自由边界弧的左端点和右端点，该弧是无轨电车（或多重无轨电车）边界的一部分。这些点称为无轨电车（或多重无轨电车）的入向 和出向节点： 对于 $\Omega_{\text{tr,R}}$ （以及 $\Omega_{\text{Mtr,R}}$）的情形，入向节点为 w_- ，出向节点为 w_+, ； 对于 $\Omega_{\text{tr,L}}$ （以及 $\Omega_{\text{Mtr,L}}$）的情形则相反。

命题 5.2.23。 设 B 是多重小鸟$\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 中的标准候选函数。设 ψ_{R} 是点 $w_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})$ 的非递减优化器，满足 $\psi_{\mathrm{R}} \preceq g(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})$，设 ψ_{L} 是点 $w_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})$ 的非递增优化器，满足 $\psi_{\mathrm{L}} \succeq g(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})$。那么，对于$\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$中的每个点 x，都存在一个优化器。

证明。我们应用 (3.8.15)（j 可任意选取），并将多重小鸟分解为两个多重无轨电车和一个角。针对各个区域应用相应的前述命题，我们构造出 $\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 内所有点的优化器。 □

定义 5.2.24. 命题 5.2.23 中的点 $w_{\mathrm{R}}(\mathfrak{a}_1^{\mathrm{l}})$ 和 $w_{\mathrm{L}}(\mathfrak{a}_k^{\mathrm{r}})$ 被称为多重小鸟 $\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ 的入向节点。

5.3 全局优化器

在讨论全局优化器之前，我们先汇总叶状图中某个顶点或边的入向和出向节点信息。这些节点是自由边界上的点，用于将传递曲线从一个区域转移到另一个区域。对于某些图形，其中的优化函数是利用从右侧或左侧延伸而来的优化器构造的（例如，要在无轨电车中构造优化函数，我们需要一个自由边界上的特殊点对应的优化器，见命题 5.2.18 和 5.2.19）。入向节点是我们开始传递曲线的点，而出向节点是传递曲线离开图形的点。下表给出了精确定义。对于其他定义域 $\mathfrak{L}$，我们将定义 5.2.22 中的记号扩展如下：令 w_- 和 w_+ 分别为自由边界弧 $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ 的左端点和右端点，该弧是 $\mathfrak{L}$ 边界的一部分。

	长弦	$\Omega_{\mathrm{Mcup}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$	$\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ $\Omega_{\mathrm{tr,R}}(u_1,u_2)$ $\Omega_{\mathrm{R}}(u_1,u_2)$	$\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$ $\Omega_{\mathrm{tr,\ L}}(u_1,\ u_2)$ $\Omega_{\mathrm{L}}(u_1,u_2)$	$\Omega_{\mathrm{ang}}(w)$ $\Omega_{\mathrm{Mbird}}(\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^k)$
出向	$w_- = w_+$	$w_-,\ w_+$	w_+	w_-	w_-, w_+
入向			w_-	w_+	

其他图形（与上边界分离）完全没有入射节点或出射节点。现在我们看到，第5.2.1节和第5.2.2节中的命题具有以下形式：如果入射节点存在满足某种限制的单调优化器（若所讨论的图形有入射节点），那么我们就可以为定义域中的所有点构造满足类似限制的单调优化函数，特别是为出向节点构造（如果存在）。这些命题非常适合用归纳法。为了陈述关于优化函数的一般定理，我们需要定义 4.4.5（参见注4.4.6及其前一段，其中解释了可容许图会生成贝尔曼候选函数）。

定理5.3.1。 令 $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$， 令 $\Gamma(\varepsilon)$ 为 ε 和 f的可容许图。由 $\Gamma(\varepsilon)$ 生成的贝尔曼候选函数 B_ε在Ω_ε的每一点都存在一个优化器。

证明。 该定理的证明通过归纳地应用第 5.2.1 小节和第 5.2.2 小节中的命题来完成。具体细节与抛物条带的部分情形相同，参见 [17] 中的定理5.3.1。 □

我们刚刚证明的定理5.3.1 为第 19 页定理 2.2.7 之后给出的论证提供了依据。此外，由可容许的图 $\Gamma(\varepsilon)$ 构造的候选对象 B_ε 与贝尔曼函数 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 以及最小局部凹函数 $\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon,\ f}$ 相一致。

定理 <escape>**5.3.2.** </escape>对于任意 $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$，所构造的贝尔曼候选函数 B_ε 均与 $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ 和 $\mathfrak{B}_{\Omega_\varepsilon}$<escape>,</escape> 一致。 f.

5.4 关于全局条件的注

I本节讨论未作任何说明而引入的条件（2.1.7）和（2.1.8）.

读者已经看到，这些技术条件仅在构造优化器的不同步骤中用到。这里我们讨论这些条件不成立时会发生什么。需要指出的是，优化器的构造不涉及任何演化论证，而是针对固定的 ε。

5.4.1 在 $-\infty$ 上的行为

由于存在左右对称性，我们来考察在 $-\infty$ 上的行为，即条件 (2.1.7)。下文省略下标 R，也就是说，我们用 λ、w、κ 分别代替 λ_{R}、w_{R}、κ_{R}。

如果 (2.1.7) 不成立，且函数 B 的叶状分解包含由 $-\infty$ 出发的右切线域 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,\ v)$，那么命题 5.2.5 在以下意义下不成立：不存在用于 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,\ v)\setminus\partial_{\text{fixed}}\Omega$ 的优化器 φ_x。然而，对于任何这样的 x，都存在一个测试函数序列 $\varphi_n\in\boldsymbol{A}_\Omega$，使得 $\langle\varphi_n\rangle=x$ 且 $B(x)=\lim_{n\to+\infty}\langle f(\varphi_n)\rangle$。我们称这样的 $\{\varphi_n\}_n$ 为 x 的优化序列。如果将“优化器”一词替换为“优化序列”，则第 5.2 小节中的所有命题仍然成立。

我们给出一些关于如何为 φ_n 构造这些函数的细节，其中 $x=w(v)$。考虑满足 $v_n^-<v_n^+<v$、$v_n^+\to-\infty$，且弦 $[g(v_n^-)\ g(v_n^+)]$ 与 Ω 相切的序列 $v_n^-,v_n^+\in\mathbb{R}$。切点为 $w(v_n^+)$。考虑定义域 $\Omega_{\mathrm{R}}(v_n^+,v)$，并令 γ_n 为传递曲线：它从点 $g(v_n^-)$ 出发，沿弦到达 $w(v_n^+)$，然后沿 Ω 继续前进，直至点 $w(v)$。在 $[0,1]$ 上构造一个测试函数 φ_n，使其生成这条曲线 γ_n：

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}g(v_n^-), & t\in[0,\alpha_1);\\ g(v_n^+), & t\in[\alpha_1,\alpha_2);\\ g(u(t)), & t\in[\alpha_2,1].\end{cases}\tag{5.4.1}$$

参数 $u=u(t)$ 和 $t=t(u)$ 的关系如式 (5.2.23) 所示：

$$\log t=-\int_{u(t)}^{v}\lambda,\qquad t\in[\alpha_2,1],\tag{5.4.2}$$

以及 $u(\alpha_2)=v_n^+$，即，

$$\alpha_2=\exp\Big(-\int_{v_n^+}^{v}\lambda\Big).\tag{5.4.3}$$

α_1 的值由以下关系确定，该关系将点 $w(v_n^+)$ 表示为 $g(v_n^-)$ 和 $g(v_n^+)$ 的凸组合：

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}g(v_n^-)+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}g(v_n^+)=w(v_n^+),$$

也就是说，

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{g_1(v_n^+)-w_1(v_n^+)}{g_1(v_n^+)-g_1(v_n^-)}\,.\tag{5.4.4}$$

注 5.4.1。由于由 (5.4.1) 定义的 φ_n 生成了传递曲线 γ_n，因此我们有 $\langle g(\varphi_n)\rangle_{[0,1]}=w(v)$。此外，推论 5.1.4 保证 φ_n 属于 $\boldsymbol{A}_\Omega$，因此它是 $w(v)$ 的一个测试函数。

下面的定理将命题 5.2.5 推广到条件 2.1.7 不成立的情形。

定理 5.4.2。令 B 为 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,v)$ 上的标准候选函数。则，对于每个点 $x\in\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,v)$，存在一个单调不减测试函数序列 $\varphi_{n,\,x}$ 是在 x 处针对 的优化序列，此外，$\varphi_{n,\,x}\preceq g(v)$。

定理 5.4.2 的证明将分别针对条件 2.1.7 不成立的不同情形给出，即我们考虑三种情形：

(A) $\exp(-\int_{-\infty}^{v}\lambda)\neq 0$，即积分 $\int_{-\infty}^{v}\lambda$ 收敛；

(B) $\int_{-\infty}^{v}\lambda=+\infty$，以及函数

$$\vartheta_1(\tau)\overset{\text{def}}{=}\big(g_1(\tau)-w_1(\tau)\big)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big) \tag{5.4.5}$$

当 $\tau\to-\infty$ 趋于无穷时不趋于零；

(C) $\int_{-\infty}^{v}\lambda=+\infty$, $\vartheta_1(-\infty)=0$，以及函数

$$\vartheta_2(\tau)\overset{\text{def}}{=}\big(g_2(\tau)-w_2(\tau)\big)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big) \tag{5.4.6}$$

当 $\tau\to-\infty$ 时不趋于零。

注 5.4.3。对于任意函数 $\psi\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们使用记号 $\psi(-\infty)$ 表示有限极限或无穷极限 $\lim_{\tau\to-\infty}\psi(\tau)$。我们经常将此记号用于在 $-\infty$ 的某个邻域内单调的函数，例如，f、κ_3、$\mathfrak{K}$ 根据条件 2.1.10 和注 2.1.11 是单调的，以及 ϑ_1 和 ϑ_2，其单调性将在引理 5.4.4 中得到证明。

引理 5.4.4. 由公式 (5.4.5) 和公式 (5.4.6) 定义的函数 ϑ_1 和 ϑ_2 在 $-\infty$ 的某个邻域内单调，并且在 $-\infty$处有有限极限。此外，ϑ_1 和 ϑ_1' 为正，并且

$$\operatorname{sign}\vartheta_2'=\operatorname{sign}\vartheta_2=\operatorname{sign}g_2'=\operatorname{sign}\kappa_2=\operatorname{sign}\kappa \tag{5.4.7}$$

在 $-\infty$的某个邻域内。

证明。函数 ϑ_1 为正且递增：

$$\vartheta_1'(\tau)\overset{(5.2.1)}{=}g_1'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big)>0. \tag{5.4.8}$$

因此，$\vartheta_1(-\infty)$ 是有限的。

ϑ_2 的导数的类似公式

$$\vartheta_2'(\tau)=g_2'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big), \tag{5.4.9}$$

意味着 $\operatorname{sign}\vartheta_2'(\tau)=\operatorname{sign}\kappa_2(\tau)$，而 $\operatorname{sign}\vartheta_2(\tau)=\operatorname{sign}\kappa(\tau)$。根据域 Ω 的几何假设，点 $w(\tau)$ 位于连接 $g(\tau)$ 与某个 $g(\tau_-)$、$\tau_-<\tau$ 的线段上。由 Ω 的凸性可知

$$\kappa_2(\tau_-)<\kappa(\tau)<\kappa_2(\tau). \tag{5.4.10}$$

由此，在 $-\infty$ 的邻域内，符号 $\kappa_2=$符号 κ，且符号 $\vartheta_2'=$符号 ϑ_2 也成立。因此，极限$\vartheta_2(-\infty)$ 是有限的。□

为定理 5.4.2 的证明做准备，我们计算 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]}$:

$$\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} = \alpha_1 f(v_n^-) + (\alpha_2-\alpha_1) f(v_n^+) + \int_{\alpha_2}^{1} f(u(t))\,dt = \tag{5.4.11}$$

$$\overset{(5.4.2)}{=} \alpha_1 f(v_n^-) + (\alpha_2-\alpha_1) f(v_n^+) + \int_{v^+}^{v} f(u)\lambda(u)\,\text{指数}\left(-\int_u^v \lambda\right) du =$$

$$= \alpha_1 f(v_n^-) + (\alpha_2-\alpha_1) f(v_n^+) + f(u)\,\text{指数}\left(-\int_u^v \lambda\right)\Big|_{u=v_n^+}^{u=v} - \int_{v_n^+}^{v} f'(u)\exp\left(-\int_u^v \lambda\right) du =$$

$$= \alpha_1\big(f(v_n^-) - f(v_n^+)\big) + f(v) - \int_{v_n^+}^{v} f'(u)\,\text{指数}\left(-\int_u^v \lambda\right) du = \tag{5.4.12}$$

$$= -\frac{f(v_n^+)-f(v_n^-)}{g_1(v_n^+)-g_1(v_n^-)}\vartheta_1(v_n^+) + f(v) - \int_{v_n^+}^{v} f'(u)\exp\left(-\int_u^v \lambda\right) du\,; \tag{5.4.13}$$

在后一个等式中，我们使用了（5.4.4）、（5.4.3）和（5.4.5）。应用柯西中值定理可得 $v_n \in [v_n^-, v_n^+]$ 使得

$$\frac{f(v_n^+)-f(v_n^-)}{g_1(v_n^+)-g_1(v_n^-)} = \frac{f'(v_n)}{g_1'(v_n)} = \kappa_3(v_n).$$

利用这一点，我们将（5.4.13）改写为:

$$\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} = -\kappa_3(v_n)\vartheta_1(v_n^+) + f(v) - \int_{v_n^+}^{v} f'(u)\exp\left(-\int_u^v \lambda\right) du. \tag{5.4.14}$$

5.4.2 情形（A）： $\int_{-\infty}^{v}\lambda$ 收敛

引理 5.4.5。 如果 $\int_{-\infty}^{v}\lambda < +\infty$， 则极限 $g(-\infty)$ 和 $w(-\infty)$ 均为有限值且相等。因此，$\vartheta_1(-\infty)=0$ 以及 $\vartheta_2(-\infty)=0$。

证明。 注意到 $\lambda > 0$，因此引理的假设等价于积分收敛。由（5.4.8）可得

$$\vartheta_1'(\tau) \leqslant g_1'(\tau) \leqslant \vartheta_1'(\tau)\exp\left(\int_{-\infty}^{v}\lambda\right).$$

根据引理 5.4.4 ϑ_1，$(-\infty)$ 是有限的，因此 $\int_{-\infty}^{v}\vartheta_1' < +\infty$。于是，$\int_{-\infty}^{v} g_1' < +\infty$，这意味着 $g_1(-\infty)$ 是有限的。

由于极限 $g_1(-\infty)$ 是有限的，且曲线 $(g_1,\ g_2)$ 是凸的，因此 g_2 在 $-\infty$ 处的极限不是 $-\infty$。所以， $g_2(-\infty)$ 要么有限，要么是 $+\infty$。若 $g_2(-\infty) = +\infty$，则 $g_2' < 0$ 在 $-\infty$ 的某个邻域内。从 (5.4.9) 可得

$$\vartheta_2'(\tau) \geqslant g_2'(\tau) \geqslant \vartheta_2'(\tau)\exp\left(\int_{-\infty}^{v}\lambda\right).$$

根据引理 5.4.4 $\vartheta_2(-\infty)$ 是有限的，因此 $\int_{-\infty}^{v}\vartheta_2' > -\infty$。于是， $\int_{-\infty}^{v} g_2' > -\infty$，这意味着 g_2 在 $-\infty$ 处有有限极限。这与假设矛盾。

我们已经证明 $g = (g_1,\ g_2)$ 在 $-\infty$ 处有有限极限。根据关于域 Ω 的几何假设，任意点 $w(\tau)$ 都位于连接 $g(\tau)$ 与某个 $g(\tau_-)$ 的线段上， $\tau_- < \tau$。由于点 $g(\tau)$ 和 $g(\tau_-)$ 都趋于同一个极限，因此 $w(\tau)$ 在 $\tau \to -\infty$ 时的极限存在，并且 $w(-\infty) = g(-\infty)$。 □

推论 5.4.6。 如果 $\int_{-\infty}^{v}\lambda < +\infty$，那么 （$\kappa_2-\kappa$） （$g_1-w_1$）在 $-\infty$处趋于0 。

证明。 根据引理 5.4.5，我们知道 $g_1 - w_1$ 在 $-\infty$处趋于 0。

如果 $\kappa_2 > 0$ 位于 $-\infty$ 的邻域内，那么 $\kappa_2(-\infty)$ 有限，因为 $\kappa_2' > 0$。由于任意点 $w(\tau)$ 都在线段 $g(\tau)$ 与某个 $g(\tau_-)$ 之间， $\tau_- < \tau$，我们得到不等式 $\kappa_2(\tau_-) < \kappa(\tau) < \kappa_2(\tau)$。因此， $\kappa(-\infty) = \kappa_2(-\infty)$，命题得证。

If $\kappa_2 < 0$ 在 $-\infty$ 的某个邻域内，则 $0 < \kappa_2 - \kappa < -\kappa$。因此，根据引理 5.4.5，我们有

$$|(\kappa_2 - \kappa)(g_1 - w_1)| \leqslant |\kappa(g_1 - w_1)| = |g_2 - w_2| \to 0$$

当参数趋于 $-\infty$ 时。 □

推论 5.4.7。如果 $\int_{-\infty}^{v} \lambda < +\infty$，那么 $\int_{-\infty}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa} \equiv +\infty$。

证明。 该结论由 (5.2.13) 和推论 5.4.6 得出。 □

引理 5.4.8. 如果 $\int_{-\infty}^{v} \lambda < +\infty$ 且 $f(-\infty) = -\infty$，那么 $\mathfrak{K}(-\infty) = -\infty$。

证明。 反设：对某个 $C_1 \in \mathbb{R}$， $\mathfrak{K} > C_1$ 在 $-\infty$ 的一个邻域内成立。那么，由于 $\kappa_2' > 0$，有 $\kappa_3' > C_1\kappa_2'$。对该不等式积分可得，对于某个 $C_2 \in \mathbb{R}$，有 $\kappa_3 < C_1\kappa_2 + C_2$。将其乘以正数 g_1'，得到 $f' < C_1 g_2' + C_2 g_1'$。对该不等式积分可得，对于某个 $C_3 \in \mathbb{R}$，有 $f > C_1 g_2 + C_2 g_1 + C_3$。这个不等式与假设 $f(-\infty) = -\infty$ 矛盾，因为根据引理 5.4.5，函数 g_1 和 g_2 在 $-\infty$ 处有有限极限。 □

命题 5.4.9. 若 $\int_{-\infty}^{v} \lambda < +\infty$ 且在$\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$, 上存在一个标准候选函数 B，则 $f(-\infty) > -\infty$。

证明。 反设：令 $f(-\infty) = -\infty$。那么，由引理 5.4.8 可得 $\mathfrak{K}(-\infty) = -\infty$，因此$\mathfrak{K}' > 0$ 在 $-\infty$ 的某个邻域内。根据 (3.3.5)， $\beta_2' > 0$ 也在 $-\infty$ 的同一邻域内。这与在 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$ 上存在标准候选函数 B 相矛盾，见定义 3.3.8。 □

命题 5.4.10. 若 $\int_{-\infty}^{v} \lambda < +\infty$ 且 $f(-\infty) = +\infty,$ ，则对于任意 $x \in \Omega \setminus \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$， $\boldsymbol{B}(x;\ f) = +\infty$ **命题** .

证明。 只需证明 $\boldsymbol{B}(w(v);\ f) = +\infty$。根据 (5.4.1)，我们为点 $w(v)$ 构造测试函数序列 φ_n。条件 $\int_{-\infty}^{v} \lambda < +\infty$ 与 (5.4.3) 一起保证 α_2 与 0 保持距离。因此，由条件 $f(-\infty) = +\infty$ 和 (5.4.11)，可得 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n) \rangle_{[0,1]}$ 趋于$+\infty$，从而 $\boldsymbol{B}(w(v);\ f) = +\infty$。 □

命题 5.4.11。 假设 $\int_{-\infty}^{v} \lambda < +\infty$，且极限 $f(-\infty)$ 有限。令 B 为 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$ 上的标准候选函数。那么，对于每个点 $x \in \Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$，都存在一个单调不减测试函数序列 $\varphi_{n,\ x}$，它是 B 在 x 处的优化序列；此外，$\varphi_{n,\ x} \preceq g(v)$。

证明。 如前所述，只需证明情形 $x = w(v) = w_{\mathrm{R}}(v)$下的结论。下文中，我们在记号中省略下标 x。我们使用由 (5.4.1) 定义的函数序列 φ_n。这些函数都是非递减的，并满足不等式 $\varphi_n \preceq g(v)$。因此，我们只需验证$\langle \mathrm{f}(\varphi_n) \rangle_{[0,1]} \to B(w(v))$。

回顾（3.2.2）：

$$B(w(v)) = f(v) + \big(w_1(v) - g_1(v)\big)\Big[\kappa_3(v) + \big(\kappa(v) - \kappa_2(v)\big)\beta_2(v)\Big], \tag{5.4.15}$$

其中， β_2 由式（3.3.4）给出：

$$\begin{aligned} \beta_2(v) &= \mathfrak{K}(v) - \int_{-\infty}^{v} \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big)\, \mathfrak{K}'(\tau)\, d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{v} \exp\Big(-\int_{\tau}^{v} \frac{\kappa_2'}{\kappa_2 - \kappa}\Big) \frac{\kappa_3'(\tau)}{\kappa_2(\tau) - \kappa(\tau)}\, d\tau. \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

这里我们使用了引理 5.2.3，其中有 $\vartheta = \exp\big(-\int_\tau^v \frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\big)$ 和 $Y = \mathfrak{K}$；注意，根据推论 5.4.7，$\vartheta(-\infty) = 0$。

我们利用 (5.4.12) 求 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]}$ 的极限：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} &= f(v) - \int_{-\infty}^{v} f'(u)\exp\Big(-\int_u^v \lambda\Big)\,du = \\ &= f(v) - \int_{-\infty}^{v} \kappa_3(u) g_1'(u)\exp\Big(-\int_u^v \lambda\Big)\,du \overset{(5.4.8)}{=} f(v) - \int_{-\infty}^{v}\kappa_3(u)\vartheta_1'(u)\,du.\end{aligned}$$

利用引理 5.2.3 对 $Y = \kappa_3$ 和 $\vartheta = \vartheta_1$（由引理 5.4.5 可知 $\vartheta_1(-\infty) = 0$）进行分部积分，得到

$$\lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} = f(v) - \kappa_3(v)\big(g_1(v) - w_1(v)\big) + \int_{-\infty}^{v}\kappa_3'(u)\vartheta_1(u)\,du.$$

因此，要验证该极限与 (5.4.15) 相同，只需验证恒等式 :

$$\int_{-\infty}^{v}\kappa_3'(u)\vartheta_1(u)\,du = \big(\kappa(v)-\kappa_2(v)\big)\big(w_1(v)-g_1(v)\big)\int_{-\infty}^{v}\exp\Big(-\int_u^v\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\frac{\kappa_3'(u)}{\kappa_2(u)-\kappa(u)}\,du, \quad (5.4.17)$$

由 (5.2.13) 可得：

$$\vartheta_1(u) = (g_1(u)-w_1(u))\exp\Big(-\int_u^v\lambda\Big) = \frac{\big(\kappa_2(v)-\kappa(v)\big)\big(g_1(v)-w_1(v)\big)}{\kappa_2(u)-\kappa(u)}\exp\Big(-\int_u^v\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big). \quad (5.4.18)$$

□

命题 5.4.9、5.4.10 和 5.4.11 证明了定理 5.4.2 在**情形（A）**下成立。

5.4.3 情形（B）：$\int_{-\infty}^v \lambda = +\infty$，$\vartheta_1(-\infty) > 0$

命题 5.4.12。如果 $\int_{-\infty}^v \lambda = +\infty$，$\vartheta_1(-\infty) > 0$，且 $\kappa_3(-\infty) = -\infty$，那么 $\boldsymbol{B}(x;\ f) = +\infty$ 对于任意$x \in \Omega \setminus \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$。

证明。只需证明 $\boldsymbol{B}(w(v)) = +\infty$。我们考虑在 (5.4.1) 中定义的序列 φ_n，它们是 $w(v)$ 的测试函数，参见备注 5.4.1。由于 κ_3 的符号与 f' 的符号一致，由 (5.4.14) 可知 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} \to +\infty$。

□

引理 5.4.13。如果 $\int_{-\infty}^v \lambda = +\infty$, $\vartheta_1(-\infty) > 0$，那么极限 $\kappa_2(-\infty)$ 是有限的，并且 $\int_{-\infty}^v \frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa} = +\infty$.

证明。根据引理 5.4.4，$\vartheta_1(-\infty)$ 和 $\vartheta_2(-\infty)$ 都是有限的。由于 $\vartheta_1(-\infty) > 0$, $\kappa(-\infty) = \frac{\vartheta_2(-\infty)}{\vartheta_1(-\infty)}$ 也同样是有限的。由 (5.4.10) 以及 κ_2 的单调性，我们得出 $\kappa_2(-\infty) = \kappa(-\infty)$。

由（5.2.13）可得

$$\int_\tau^v \frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa} = \log\frac{\kappa_2(v)-\kappa(v)}{\kappa_2(\tau)-\kappa(\tau)} + \log\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(\tau)},$$

且右端在 τ 趋于 $-\infty$时趋于 $+\infty$ 。 □

命题 5.4.14. 若 $\int_{-\infty}^v \lambda = +\infty$, $\vartheta_1(-\infty) > 0$，且在$\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$上存在一个标准候选函数 B，则 $\kappa_3(-\infty) < +\infty$。

证明. 反设 $\kappa_3(-\infty) = +\infty$。首先，我们断言 $\mathfrak{K}(-\infty) = -\infty$。否则，对于 $-\infty$ 的某个邻域内的某个 $C_1 \in \mathbb{R}$，有$\mathfrak{K} > C_1$，即 $\kappa_3' > C_1\kappa_2'$。对该不等式积分可得$\kappa_3 < C_1\kappa_2 + C_2$，其中 $C_2 \in \mathbb{R}$。由引理 5.4.13，这与假设 $\kappa_3(-\infty) = +\infty$ 矛盾。因此，$\mathfrak{K}(-\infty) = -\infty$，且在 $-\infty$ 的某个邻域内 $\mathfrak{K}' > 0$。由 (3.3.5)，在 $-\infty$ 的同一邻域内 $\beta_2' > 0$，这与在 Ω 上存在标准候选函数 $B_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$矛盾。由此可得 $\kappa_3(-\infty) < +\infty$。 □

命题 5.4.15. 假设 $\int_{-\infty}^{v} \lambda = +\infty$, $\vartheta_1(-\infty) > 0$，且 $\kappa_3(-\infty)$ 有限。令 B 为 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$ 上的标准候选函数。那么，对于每个点 $x \in \Omega_{\mathrm{R}}(-\infty, v)$，存在一个单调不减测试函数序列 $\varphi_{n,x}$，它是 B 在 x, 处的优化序列; 此外, $\varphi_{n,x} \preceq g(v)$。

证明. 只需证明 $x = w(v) = w_{\mathrm{R}}(v)$ 这一情形下的结论。下文中，我们在记号中省略下标x。我们使用由 (5.4.1) 定义的函数序列 φ_n。所有这些函数均单调不减，并满足不等式 $\varphi_n \preceq g(v)$。因此，我们只需验证 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} \to B(w(v))$。

我们利用 (5.4.14) 计算极限:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} &= -\kappa_3(-\infty)\vartheta_1(-\infty) + f(v) - \int_{-\infty}^{v} f'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big)\,d\tau = \\ &= -\kappa_3(-\infty)\vartheta_1(-\infty) + f(v) - \int_{-\infty}^{v} \kappa_3(\tau)\vartheta_1'(\tau)\,d\tau = \\ &= f(v) - \kappa_3(v)(g_1(v) - w_1(v)) + \int_{-\infty}^{v} \kappa_3'(\tau)\vartheta_1(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

然后，我们利用 (5.4.15)、(5.4.16) 和 (5.4.17) 得出 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} \to B(w(v))$。 □

命题 5.4.12、5.4.14 和 5.4.15 证明了定理 5.4.2 在情形 **(B)** 下成立。

5.4.4 情形（C）：$\int_{-\infty}^{v} \lambda = +\infty, \quad \vartheta_1(-\infty) = 0, \quad \vartheta_2(-\infty) \neq 0$

引理 5.4.16。 如果 $\int_{-\infty}^{v} \lambda = +\infty$, $\vartheta_1(-\infty) = 0$，且 $\vartheta_2(-\infty) \neq 0$，那么 $\kappa_2(-\infty) = \kappa(-\infty) = -\infty$。特别是，$g_2' < 0$ 在 $-\infty$ 和 $\vartheta_2(-\infty) < 0$ 的某个邻域内。

证明。我们很容易得到 $\kappa(-\infty) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}(-\infty)$ 是无穷的。由 (5.4.10) 以及 κ_2 的单调性，我们得出 $\kappa_2(-\infty) = \kappa(-\infty)$ 也是无穷的。由于函数 κ_2 递增，这两个极限都是 $-\infty$。于是，在 $-\infty$ 的某个邻域内，$g_2' = g_1'\kappa_2 < 0$，并且由 (5.4.7) 可得 $\vartheta_2(-\infty) < 0$。 □

命题 5.4.17。 若 $\int_{-\infty}^{v} \lambda = +\infty$, $\vartheta_1(-\infty) = 0$, $\vartheta_2(-\infty) \neq 0$，且 $\mathfrak{K}(-\infty) = +\infty$，则对任意 $x \in \Omega \setminus \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$，有 $\boldsymbol{B}(x;\ f) = +\infty$。

证明。只需证明 $\boldsymbol{B}(w(v)) = +\infty$。我们考虑在 (5.4.1) 中定义的序列 φ_n，它们是 $w(v)$ 的测试函数，参见备注 5.4.1。利用 (5.4.6)，我们将 (5.4.12) 改写为

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} &= -\frac{f(v_n^+) - f(v_n^-)}{g_2(v_n^+) - g_2(v_n^-)}\vartheta_2(v_n^+) + f(v) - \int_{v_n^+}^{v} f'(u)\exp\Big(-\int_{u}^{v}\lambda\Big)\,du = \\ &= -\frac{f'(v_n)}{g_2'(v_n)}\vartheta_2(v_n^+) + f(v) - \int_{v_n^+}^{v} f'(u)\exp\Big(-\int_{u}^{v}\lambda\Big)\,du, \qquad (5.4.19)\end{aligned}$$

对于某个 $v_n \in (v_n^-,\ v_n^+)$。由于 $\vartheta_2(-\infty) < 0$ 和 $g_2' < 0$ 在 $-\infty$ 的一个邻域内（见引理 5.4.16），因此只需证明 $\frac{f'}{g_2'}(-\infty) = +\infty$。这可由恒等式 $\frac{f'}{g_2'} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2}$ 和洛必达法则推出：$\kappa_2(=\infty) = -\infty$，且 $\frac{\kappa_3'}{\kappa_2'}(-\infty) = \mathfrak{K}(-\infty) = +\infty$。由此可见，$\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} \to +\infty$。 □

命题 5.4.18。 如果 $\int_{-\infty}^{v}\lambda=+\infty$, $\vartheta_1(-\infty)=0$, $\vartheta_2(-\infty)\neq 0$，并且在 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,v)$ 上存在一个标准候选函数 B，那么 $\mathfrak{K}(-\infty)>-\infty$。

证明。反设，令 $\mathfrak{K}(-\infty)=-\infty$。那么在 $-\infty$ 的某个邻域内， $\mathfrak{K}'>0$ 。由 (3.3.5) 可知 $\beta_2'>0$，这对于标准候选函数 B 来说是不可能的，参见定义 3.3.8。 □

命题 *5.4.19.* 设 $\int_{-\infty}^{v}\lambda=+\infty$, $\vartheta_1(-\infty)=0$, $\vartheta_2(-\infty)\neq 0$，并设 $\mathfrak{K}(-\infty)$ 有限。若 B 是 $\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,v)$ 上的标准候选函数，则对于每个点 $x\in\Omega_{\mathrm{R}}(-\infty,v)$，存在一个单调不减测试函数序列 $\varphi_{n,x}$ ，它是在 x 处针对 B 的优化序列；此外，$\varphi_{n,x}\preceq g(v)$。

证明。只需证明 $x=w(v)=w_{\mathrm{R}}(v)$ 这一情形。下文的记号中省略下标 x 。我们使用由 (5.4.1) 定义的函数序列 φ_n 。这些函数都是单调不减的，并满足不等式 $\varphi_n\preceq g(v)$。因此，只需验证 $\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]}\to B(w(v))$。

首先, 根据引理 5.4.16，我们注意到 $\frac{f'}{g_2'}=\frac{\kappa_3}{\kappa_2}$ and $\kappa_2(-\infty)=-\infty$ ，因此由洛必达法则 ,

$$\frac{f'}{g_2'}(-\infty)=\frac{\kappa_3'}{\kappa_2'}(-\infty)=\mathfrak{K}(-\infty).$$

我们使用 (5.4.19) 计算极限:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} &= -\mathfrak{K}(-\infty)\vartheta_2(-\infty)+f(v)-\int_{-\infty}^{v}f'(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\lambda\Big)\,d\tau=\\ &= -\mathfrak{K}(-\infty)\vartheta_2(-\infty)+f(v)-\int_{-\infty}^{v}\kappa_3(\tau)\vartheta_1'(\tau)\,d\tau=\\ &= -\mathfrak{K}(-\infty)\vartheta_2(-\infty)+f(v)-\kappa_3(v)(g_1(v)-w_1(v))+\int_{-\infty}^{v}\kappa_3'(\tau)\vartheta_1(\tau)\,d\tau;\end{aligned}$$

在后一个等式中，我们使用引理 5.2.3 对 $Y=\kappa_3$ and $\vartheta=\vartheta_1$ 进行分部积分。然后，我们利用 (5.4.17) 将该公式改写为以下形式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{f}(\varphi_n)\rangle_{[0,1]} =& f(v)+\big(w_1(v)-g_1(v)\big)\kappa_3(v)+\big(w_1(v)-g_1(v)\big)\big(\kappa(v)-\kappa_2(v)\big)\times\\ &\times\left(\frac{-\mathfrak{K}(-\infty)\vartheta_2(-\infty)}{\big(w_1(v)-g_1(v)\big)\big(\kappa(v)-\kappa_2(v)\big)}+\int_{-\infty}^{v}\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\frac{\kappa_3'(\tau)}{\kappa_2(\tau)-\kappa(\tau)}\,d\tau\right).\end{aligned}$$

我们需要验证大括号中的表达式与由 (3.3.4) 给出的 β_2 一致。关于 β_2，我们有以下公式:

$$\mathfrak{K}(v)-\int_{-\infty}^{v}\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\mathfrak{K}'(\tau)\,d\tau=\mathfrak{K}(-\infty)\exp\Big(-\int_{-\infty}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)+\int_{-\infty}^{v}\exp\Big(-\int_{\tau}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\frac{\kappa_3'(\tau)}{\kappa_2(\tau)-\kappa(\tau)}\,d\tau.$$

因此，只需验证

$$\begin{aligned}-\vartheta_2(-\infty)&\overset{?}{=}\big(g_1(v)-w_1(v)\big)\big(\kappa_2(v)-\kappa(v)\big)\exp\Big(-\int_{-\infty}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)= \qquad (5.4.20)\\ &=\big(g_1(v)-w_1(v)\big)\big(\kappa_2(v)-\kappa(v)\big)\lim_{u\to-\infty}\exp\Big(-\int_{u}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}\Big)\overset{(5.4.18)}{=}\\ &=\lim_{u\to-\infty}\big(\kappa_2(u)-\kappa(u)\big)\vartheta_1(u)=\lim_{u\to-\infty}\Big(\frac{\kappa_2(u)}{\kappa(u)}-1\Big)\vartheta_2(u),\end{aligned}$$

其中所有极限均存在。由于极限 $\vartheta_2(-\infty)$ 是有限且非零的，只需证明 $\frac{\kappa_2}{\kappa}(-\infty)=0$；注意，这个极限存在。我们将 κ_2 和 κ 改写为关于 ϑ_1 和 ϑ_2 的形式：

$$\kappa=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1},\qquad \kappa_2=\frac{g_2'}{g_1'}=\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_1'},$$

因此

$$\frac{\kappa_2}{\kappa}(-\infty)=\frac{(\log|\vartheta_2|)'}{(\log\vartheta_1)'}(-\infty). \tag{5.4.21}$$

Since $\log\vartheta_1(-\infty)=-\infty$，且极限 (5.4.21) 存在，我们通过洛必达法则完成证明：

$$0=\frac{\log|\vartheta_2|}{\log\vartheta_1}(-\infty)=\frac{(\log|\vartheta_2|)'}{(\log\vartheta_1)'}(-\infty)=\frac{\kappa_2}{\kappa}(-\infty).$$

□

注 5.4.20。与情况 **(A)** 和 **(B)** 相反，在情况 **(C)** 下，我们有 $\int_{-\infty}^{v}\frac{\kappa_2'}{\kappa_2-\kappa}<\infty$，这由 (5.4.20) 得出。

命题 5.4.17、5.4.18 和 5.4.19 证明了情况 **(C)** 下的定理 5.4.2。因此，我们完成了该定理的证明。

5.4.5 在 $+\infty$ 上的行为

我们针对 $+\infty$ 上的行为表述定理 5.4.2 的类似结论；当条件 2.1.8 不成立时，该结论推广了命题 5.2.7。

定理 5.4.21。设 B 是$\Omega_{\mathrm{L}}(v,+\infty)$上的标准候选函数。则，对于每个点 $x\in\Omega_{\mathrm{L}}(v,+\infty)$，存在一个非递增测试函数序列 $\varphi_{n,\,x}$，它是 B 在 x 处的优化序列；此外，$g(v)\preceq\varphi_{n,\,x}$。

由于情形完全对称，我们省略此定理的证明。

5.4.6 当 $B=+\infty$ 时?

我们汇总了函数 f 在无穷远点处的行为条件，这些条件保证对于任意 $x\in\Omega\setminus\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$，$B(x;\,f)=+\infty$。

命题 5.4.10、5.4.12、5.4.17 和 5.2.6 描述了关于 $-\infty$ 的条件：

Ω 上的条件	关于 f 的条件
(A)：$\exp\left(-\int_{-\infty}^{v}\lambda_{\mathrm{R}}\right)\neq 0$	$f(-\infty)=+\infty$
(B)：$\exp\left(-\int_{-\infty}^{v}\lambda_{\mathrm{R}}\right)=0$, $\vartheta_1(-\infty)\neq 0$	$\kappa_3(-\infty)=-\infty$
(C)：指数 $\left(-\int_{-\infty}^{v}\lambda_{\mathrm{R}}\right)=0$，$\vartheta_1(-\infty)=0$，$\vartheta_2(-\infty)\neq 0$	$\mathfrak{K}(-\infty)=+\infty$
(2.1.7)：指数 $\left(-\int_{-\infty}^{v}\lambda_{\mathrm{R}}\right)=0$，$\vartheta_1(-\infty)=0$，$\vartheta_2(-\infty)=0$	$\int_{-\infty}^{v}f'(\tau)$ 指数 $\left(-\int_{\tau}^{v}\lambda_{\mathrm{R}}\right)d\tau=-\infty$

这里 $v\in\mathbb{R}$ 是任意的，这些条件不依赖于 v。我们强调，条件 2.1.10 对于这些结果至关重要。如果违反条件 2.1.10，那么刻画使得 B 为无穷大的函数 f 的问题会更加复杂，参见 [17] 中的引理 6.1.4。

注 5.4.22. 在情形 (**A**) 下，条件 $f(-\infty) = +\infty$ 和 $\int_{-\infty}^{v} f'(\tau) \exp\Big(- \int_{\tau}^{v} \lambda_{\mathrm{R}} \Big)\, d\tau = -\infty$ 等价。在情形 (**B**) 和 (**C**) 下，关于 f 的条件有所不同，但在情形 (**C**) 下，条件 $\mathfrak{K}(-\infty) = +\infty$ 等价于 $\frac{f'}{g_2'}(-\infty) = +\infty$，后者与情形 (**B**) 中出现的条件 $\frac{f'}{g_1'}(-\infty) = \kappa_3(-\infty) = -\infty$ 对称。

照例，我们省略 $+\infty$ 情形下的对称陈述，但汇总相应的结果：

Ω 上的条件	f 上的条件
(**A**)：$\exp\big(\int_v^{+\infty} \lambda_{\mathrm{L}}\big) \neq 0$	$f(+\infty) = +\infty$
(**B**)：$\exp\big(\int_v^{+\infty} \lambda_{\mathrm{L}}\big) = 0,\ \vartheta_1^{\mathrm{L}}(+\infty) \neq 0$	$\kappa_3(+\infty) = +\infty$
(**C**)：指数 $\big(\int_v^{+\infty} \lambda_{\mathrm{L}}\big) = 0,\ \vartheta_1^{\mathrm{L}}(+\infty) = 0,\ \vartheta_2^{\mathrm{L}}(+\infty) \neq 0$	$\mathfrak{K}(+\infty) = +\infty$
(2.1.8)：指数 $\big(\int_v^{+\infty} \lambda_{\mathrm{L}}\big) = 0,\ \vartheta_1^{\mathrm{L}}(+\infty) = 0,\ \vartheta_2^{\mathrm{L}}(+\infty) = 0$	$\int_v^{+\infty} f'(\tau)$ 指数 $\Big(\int_v^{\tau} \lambda_{\mathrm{L}}\Big)\, d\tau = +\infty$

Here

$$\vartheta^{\mathrm{L}}(\tau) = \big(g(\tau) - w_{\mathrm{L}}(\tau)\big) \exp\Big(\int_v^{\tau} \lambda_{\mathrm{L}} \Big), \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

其中 v 是一个固定参数，$v \in \mathbb{R}$。

注 5.4.23. 如果配对 $(\Omega\ f)$ 满足本小节所列各表中的任一条件，则函数 $\boldsymbol{B}(\cdot\,;\ f)$ 在 $\Omega \setminus \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ 上为无穷大。如果 $(\Omega\ f)$ 不满足所有条件，则函数 $\boldsymbol{B}(\cdot\,;\ f)$ 在 Ω 上有限，并且可以按照本文所述的步骤构造。

5.4.7 定义域示例

在第2.1.1节中，我们已经看到了几个满足条件（2.1.7）和（2.1.8）的区域的例子。现在，我们给出满足条件 (**A**)、(**B**)或(**C**)的区域。我们提供了当 t 趋于 $-\infty$时所需行为的例子。$+\infty$ 的情形显然是对称的。

- (**A**) $\quad g(t) = \big(e^t + e^{t/2}, e^{2t} + 2e^{3t/2}\big), \qquad w(t) = \big(e^t, e^{2t}\big), \qquad \lambda(t) = e^{t/2}.$
- (**B**) $\quad g(t) = \big(t, (1 + t + t^2)e^{-t^2}\big), \qquad w(t) = \big(-t^2, e^{-t^2}\big), \qquad \lambda(t) = -\dfrac{2}{t+1}.$
- (**C**) $\quad g(t) = \Big(t + \dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}\Big), \qquad w(t) = \big(t, e^{-t}\big), \qquad \lambda(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2}.$

符号索引

T_{ε}, 12 Ω^{ang}, 41
$\mathfrak{B}_{\Omega,f}$, 17 $\boldsymbol{B}_{\varepsilon}$, 14
Ω_{bird}, 42 C_{L}, 28
C_{R}, 28 $\Omega_{\mathrm{ch}}(I)$,
26 Ω^{ClMcup}, 50
$\boldsymbol{A}_{\Omega}$, 14 D_{L}, 28 D_{R},
28 $\mathcal{F}_{I}$, 37 $F_{\mathrm{L}}(t,$
$\Omega_{\mathrm{ch}}(I))$, 39 $F_{\mathrm{R}}(t,$
$\Omega_{\mathrm{ch}}(I))$, 38 Γ,
54 $\Omega_{\mathrm{tr,L}}$, 42 $\Lambda_{\Omega,f}$,
17 $\Omega_{\mathrm{L}}(I)$, 25 Ω
$_{\mathrm{Mbird}}$, 49 Ω^{Mcup},
49 $\Omega_{\mathrm{Mtr,L}}$, 49
$\Omega_{\mathrm{Mtr,R}}$, 49
Ω_{ε}, 12
$\Omega_{\mathrm{tr,R}}$, 42
$\Omega_{\mathrm{R}}(I)$,
24 S_{L}, 11
S_{R}, 11 Ξ_{ε},
11 β, 21 $\biguplus$,
44 $\varepsilon_{\max}$,
11 γ, 15 κ,
12, 21 κ_{2},
16 κ_{3}, 16 λ,
13, 80 t^{L},
39 $\mathfrak{K}$,
16 $\mathbf{T}$, 15
t^{R}, 38 ϑ_{1},
93 ϑ_{2}, 93
w_{L}, 11 w_{R},
11

索引

角, 41, 70, 88

贝尔曼候选函数, 18 定义域，15 小鸟，42，71

弦，20 个关于 f 的条件，16 叶根条件，74 非退化力条件，74 杯形区域, 28 原点，28 标准候选函数，28 杯形方程，26

交付曲线，77 微分，28 定义域 弦域，26，61，65，86 弦域的流, 63 线性区域，20，41 切域，23, 80

方程 平衡方程，60，65 杯形方程，26 本质的根，15 本质临界点，76 极值线段, 17

围栏，23 固定边界，13 叶状分解, 18 力函数，62

单调力流，64 自由边界, 13

图，54 可容许的图, 74 简单图，57 光滑图, 76

入射节点，91 诱导凸集，20 归纳步骤，57

局部凹函数，17

Monge–Amp´ere 方程，18 单调重排，19 多重小鸟，49、71、91 多杯形，49、66、87 闭合多杯结构，50、87 多图形, 48 多重无轨电车，49、69、70、90

优化器，18，77 优化序列, 92 出射节点，91

实根，15 标准候选杯, 28 在单弦中，44 在单切线中，46 在小鸟中，44 在多图形中，48 在无轨电车中，44

切线，20 测试函数, 18 无轨电车，42, 67，89

参考文献

[1] O. Beznosova 和 A. Reznikov，涉及 A_∞ 和 L对数 L 常数的尖锐估计及其在偏微分方程中的应用，《代数与分析》26 (2014年)，第 1 期，40–67。MR 3234812[2] B. Bojarski、C. Sbordone 和 I. Wik，Muckenhoupt 类 A_1(R)，《数学研究》101 (1992年)，第 2 期，155–163。MR 1149569[3] Almut Burchard、Galia Dafni 和 Ryan Gibara，重排的平均振荡界，《美国数学会汇刊》375 (2022)，第 6 期，4429–4444。MR 4419064[4] D. L. Burkholder，鞅变换的边值问题与尖锐不等式，《概率年刊》12 (1984)，第 3 期，647–702。MR 744226[5] L. Caffarelli、L. Nirenberg 和 J. Spruck，退化 Monge-Amp ̀ère 方程的狄利克雷问题，《伊比利亚美洲数学杂志》2 (1986)，第 1–2 期，19–27。MR 864651[6] Michael Cwikel、Yoram Sagher 和 Pavel Shvartsman，重新审视 BMO 的 John-Nirenberg 与 John- Str ¨omberg 定理，《泛函分析杂志》263 (2012)，第 1 期，129–166。MR 2920844[7] Martin Dindoˇs 和 Treven Wall，逆 H ¨older 类中权的尖锐 A_p 常数，《伊比利亚美洲数学杂志》25 (2009)，第 2 期，559–594。MR 2569547[8]E. Dobronravov，John–Nirenberg 不等式的一个尖锐对称积分形式，https://arxiv.org/abs/2302.12755。[9] Mohammad Ghomi，局部凸曲面的边界挠率与凸帽，《微分几何杂志》105 (2017)，第 3 期，427–487。MR 3619309[10] Bo Guan，非凸区域中的 Monge-Amp ̀ère 方程狄利克雷问题及常高斯曲率类空超曲面，《美国数学会汇刊》350 (1998)，第 12 期，4955–4971。MR 1451602[11] H. Hedenmalm、D. M. Stolyarov、V. I. Vasyunin 和 P. B. Zatitskiy，改进 H ¨older 不等式，《泛函分析杂志》275 (2018年)，第 5 期，1280–1319。MR 3815251[12] Sergei V. Hruˇsˇcev，满足 Muckenhoupt A_∞ 条件的权的描述，《美国数学会会刊》90 (1984)，第 2 期，253–257。MR 727244[13] Paata Ivanishvili、Nikolay N. Osipov、Dmitriy M. Stolyarov、Vasily I. Vasyunin 和 Pavel B. Zatit- skiy，关于 BMO 极值问题的贝尔曼函数，《巴黎科学院数学报告》350 (2012)，第 11–12 期，561–564。MR 2956143[14] Paata Ivanisvili，Burkholder 鞅变换的不等式，分析与偏微分方程 8 (2015年)，第 4 期，765– 806。MR 3366003

[15] Paata Ivanisvili、Nikolay N. Osipov、Dmitriy M. Stolyarov、Vasily I. Vasyunin 和 Pavel B. Zatit- skiy，《小平均振荡函数类上的积分泛函尖锐估计》，《巴黎科学院数学报告》353（2015），第12期，1081–1085。MR 3427912[16] ，《BMO 中极值问题的贝尔曼函数》，《美国数学会汇刊》368（2016），第5期，3415–3468。MR 3451882[17] Paata Ivanisvili、Dmitriy M. Stolyarov、Vasily I. Vasyunin 和 Pavel B. Zatitskiy，《BMO 中极值问题的贝尔曼函数 II：演化》，《美国数学会回忆录》255（2018），第1220号，v+133。MR 3843150[18]Lukasz Kami ´nski 和 Adam Os ekowski，《BMO 鞅的尖锐洛伦兹范数估计》，Statist. Probab. Lett. 173（2021），论文编号109068，共7页。MR 4229453[19] Samuel Karlin 和 William J. Studden，《切比雪夫系统：及其在分析学与统计学中的应用》，纯粹与应用数学，第XV卷，Interscience Publishers John Wiley & Sons，纽约-伦敦-悉尼，1966年。MR 0204922[20] J. H. B. Kemperman，《一般矩问题：一种几何方法》，《数学统计年刊》39（1968年），93–122。MR 247645[21] Ivo Klemes，《一个平均振荡不等式》，《美国数学会会刊》93（1985），第3期，497–500。MR 774010[22] A. A. Korenovski ı，《平均振荡与函数可和性的精确指数之间的联系》，Mat. Sb. 181（1990），第12期，1721–1727。MR 1099524[23] ，《反向 H ¨older 不等式的尖锐扩展与 Muckenhoupt 条件》，Mat. Zametki 52（1992），第6期，32–44，158。MR 1208001[24] M. G. Kre ın 和 A. A. Nudelman，《马尔可夫矩问题与极值问题》，《数学专著译丛》第50卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1977年；P. L. ˇCeby ˇsev 和 A. A. Markov 的思想与问题及其进一步发展。由 D. Louvish 从俄文译出。MR 0458081[25] N. V. Krylov，《定义域中可控扩散过程的收益函数的光滑性》，Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53（1989），第1期，66–96。MR 992979[26] Andrei K. Lerner，《具有最佳常数的约翰-尼伦伯格不等式》，《巴黎科学院数学报告》351（2013），第11–12期，463–466。MR 3090130[27] F. Nazarov、S. Treil 和 A. Volberg，《随机控制与调和分析中的贝尔曼函数》，《系统、逼近、奇异积分算子及相关主题》（波尔多，2000），《算子理论：进展与应用》第129卷，Birkh ¨auser，巴塞尔，2001年，第393–423页。MR 1882704[28] F. L. Nazarov 和 S. R. Tre ıl，《贝尔曼函数探寻：在奇异积分算子估计及其他经典调和分析问题中的应用》，《代数与分析》8（1996），第5期，32–162。MR 1428988[29] Adam Os ekowski，《综述文章：贝尔曼函数方法与鞅的尖锐不等式》，Rocky Mountain J. Math. 43（2013），第6期，1759–1823。MR 3178444[30] ，《BMO 函数的尖锐不等式》，《中国数学年刊B辑》36（2015），第2期，225–236。MR 3305705

[31] _____, BMO函数的弱L^∞ 不等式，纽约数学杂志 21（2015年），699–713。MR 3386542
[32] , Muckenhoupt 类 A_∞ 与BMO的尖锐估计，《正性》23（2019年），第3期，711–725。MR 3977592[33] ,将 BMO嵌入加权 BMO，《数学出版物》65（2021年），第1期，335–361。MR 4185837[34] Adam Ose.kowski，《鞅与半鞅的尖锐不等式》，波兰科学院数学研究所。数学专著（新系列） [波兰科学院数学研究所。数学专著（新系列）], 第72卷，Birkh¨äuser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012年。MR 2964297[35] Guillermo Rey，关于将 A_1 嵌入 A_∞，美国数学会会刊 144（2016年），第10期，4455–4470。MR 3531194[36] Alexander Reznikov，Muckenhoupt类A_{p_1,p_2}中权的尖锐弱型估计，《伊比利亚数学杂志》29（2013年），第2期，433–478。MR 3047424[37] V. D. Sedyh，R^3, 中曲线的凸包的奇点，《泛函分析及其应用》11（1977年），第1期，81–82。MR 0494154[38] V. D. Sedykh，凸空间曲线的四个顶点，《伦敦数学会通报》26（1994年），第2期，177–180。MR 1272305[39] L. Slavin，BMO^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$的约翰-尼伦伯格常数，https://arxiv.org/abs/1506.04969。[40]L. Slavin和V. Vasyunin，贝尔曼函数辛辛那提讲座，https://arxiv.org/abs/1508.07668。[41] L. Slavin和V. Vasyunin，积分形式约翰-尼伦伯格不等式的尖锐结果，美国数学会汇刊 363（2011年），第8期，4135–4169。MR 2792983[42] L. Slavin和P. Zatitskii，单调重排不会增大小有界平均振荡空间VMO中的广义Campanato范数，https://arxiv.org/abs/2301.01846。[43] Leonid Slavin和Vasily Vasyunin，BMO上的尖锐 L^p 估计，《印第安纳大学数学杂志》61（2012年），第3期，1051–1110。MR 3071693[44] Leonid Slavin和Pavel Zatitskii，半群BMO与 A_p的无维数依赖估计，《印第安纳大学数学杂志》70（2021年），第6期，2677–2692。MR 4359922[45] Elias M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书，第43卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。在Timothy S. Murphy协助下编写，《调和分析专著》第III卷。MR 1232192[46] D. M. Stolyarov和P. B. Zatitskiy，局部凹函数理论及其在积分泛函尖锐估计中的应用，《数学进展》291（2016年），228–273。MR 3459018[47] Dmitriy Stolyarov、Vasily Vasyunin和Pavel Zatitskiy，BMO的尖锐乘法不等式 I，《数学分析与应用杂志》492（2020年），第2期，124479，17页。MR 4144269[48] Dmitriy Stolyarov、Vasily Vasyunin、Pavel Zatitskii和Ilya Zlotnikov，具有一致有界平方函数的鞅的尖锐矩估计，《数学杂志》302（2022年），第1期，181–217。MR 4462673

[49] Dmitriy Stolyarov 和 Pavel Zatitskiy，有界平均振荡及 的尖锐传递原理，泛函分析杂志 **281** （2021年），第 6 期，论文编号 109085，21 页。MR 4257978

[50] Dmitriy M. Stolyarov、Vasily Vasyunin、PavelZatitskiy 和 Ilya Zlotnikov，具有有界平方函数的鞅的分布，巴黎科学院数学报告 **357** （2019），第 8 期，671–675。MR 4015331

[51] Dmitriy M. Stolyarov、Vasily I. Vasyunin 和 Pavel B. Zatitskiy，小平均振荡函数的单调重排，数学研究**231** （2015年），第 3 期，257–267。MR 3471053

[52] V. Vasyunin 和 L. Slavin，空间的约翰–尼伦贝格常数 BMO^p，$p > 2$，《代数与分析》**28** (2016年), 第2期，72–96。MR 3593004

[53] V.I. Vasyunin，穆肯霍普特权的逆 *H ̈older* 不等式中的精确常数，《代数与分析》**15** (2003), 第1期，73–117。MR 1979718

[54] ———, 关于 L^p范数与贝尔曼函数的相互估计，《圣彼得堡数学研究所斯捷克洛夫数学研究所分部学术札记》（POMI）**355** (2008), 第“线性算子与函数论研究”辑。36，81–138，237–238。MR 2744535

[55] ———,*BMO*空间中极值问题的贝尔曼函数构造示例，《斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部科学研讨会论文集》（POMI）**424** （2014），第42卷《线性算子与函数论研究》，33–125。MR 3481444

[56] Vasily Vasyunin 和 Alexander Volberg，*John-Nirenberg* 不等式经典弱形式中的最佳常数，《伦敦数学会会刊》（第三辑）**108** （2014），第 6 期，1417–1434 页。MR 3218314

[57] ———, 调和分析中的贝尔曼函数技术，《剑桥高等数学研究丛书》第186卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020年。MR4411371

[58] Vasily Vasyunin、Pavel Zatitskiy 和 Ilya Zlotnikov，有界平均振荡的尖锐乘法不等式 *II*，《J. Math. Anal. Appl.》**515** （2022），第 2 期，论文编号 126430，58 页。MR 4444738

[59] V. M. Zakaljukin，《光滑流形凸包的奇点》，《泛函分析与应用》**11** （1977），第 3 期，76–77。MR 0458475

[60] P. B. Zatitski ̆ı、P. Ivanisvili 和 D. M. Stolyarov，《Bellman 与 Beurling：L^p 空间一致凸性的锐估计》，《代数与分析》**27** （2015年），第 2 期，218–231。MR 3444467

[61] P. B. Zatitskiy 和 D. M. Stolyarov，《关于最简单的非凸域上的局部凹函数》，《斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部科学研讨会论文集》（POMI）**512** （2022），《线性算子与函数理论研究》.50，40–87。MR4508359

Paata Ivanisvili 加利福尼亚大学欧文分校,
pivanisv@uci.edu;

Dmitriy Stolyarov 圣彼得堡国立大学,
d.m.stolyarov@spbu.ru;

Vasily Vasyunin 圣彼得堡国立大学，vasyunin@pdmi.ras.ru;

Pavel Zatitskii 辛辛那提大学、圣彼得堡国立大学,
pavelz@pdmi.ras.ru。