# 随机复杂动力网络中的降维随机复杂动力网络中的降维

**作者：** 屠成毅[1,2*], 罗建宏[1], 潘旭伟[1*]

[1]浙江理工大学经济管理学院；中国杭州，310018。[2]加利福尼亚大学伯克利分校环境科学、政策与管理系；美国伯克利，94720。*通讯作者。电子邮箱：chengyitu1986@gmail.com 和 panxw@zstu.edu.cn

## 摘要

复杂系统通常会在高维空间中表现出多样的动力学行为，并受多种因素影响。降维是分析和理解复杂系统的有力工具，旨在找到一种能够保留复杂系统基本特征、揭示其内在机制和长期动力学的低维表示。然而，现有的大多数降维方法仅适用于确定性系统，无法考虑真实世界复杂网络中普遍存在的随机效应。在此，我们提出一种用于随机复杂动力网络降维的一般解析框架，可通过低维有效方程捕捉原始系统的基本特征和长期动力学。有效方程是由一组有效参数构成的函数，这些参数与特定系统状态相关，并决定网络的动力学行为。我们表明，有效方程的标准差可用于分析随机复杂动力网络的动力学行为及其可能的收敛性。该框架可应用于各种类型的随机复杂动力网络，并能揭示这些系统的内在机制和涌现现象。

**关键词**：降维；随机复杂动力网络；确定性效应与随机效应

# 引言

复杂系统的降维是众多科学领域日益受到关注的课题，包括生物学、数据科学、化学、微电子学和社会经济学 [1-6]。复杂系统往往表现出丰富多样的动力学行为，并受多种因素影响，例如相互作用结构、参数配置和初始条件 [7, 8]。这些行为嵌入在高维空间中，给分析和理解带来了重大挑战。降维旨在为复杂系统找到一种低维表示，在保留其基本特征的同时，揭示其内在机制和长期动力学。这样的表示有助于系统的控制与设计，也有助于防止不良转变。因此，降维既是实际应用的宝贵工具，也是理论研究的重要工具。

尽管人们在复杂系统降维方面投入了大量努力[9], ，仍然存在许多挑战，尤其是针对复杂动力网络。以往的方法，例如一维方法[10] 和临界减速理论 [11-14], ，适用范围或普适性有限。Gao 等人首次尝试将降维应用于复杂动力网络，他们开发了一种分析工具，可利用平均场近似提取高维网络系统的有效参数[15]。然而，Tu 等人发现了一个新条件，严重限制了 Gao 框架的有效性[16]。他们还扩展了 Gao 框架，以考虑节点特定的自动力学和耦合动力学的异质性，并将其应用于研究各种网络化系统的崩溃或运行 [17]。此外，为处理任意网络结构，Laurence 等人提出了一种多项式近似框架，以降低动力网络的复杂性 [18, 19]。Wu 等人提出了一种基于信息熵的改进降维方法，用于预测网络韧性[20]。

然而，这些方法仅适用于不含随机效应的复杂动力网络。现实中，动力学行为和信号传输往往会受到各种随机噪声的影响，这些噪声可能源于不确定性释放过程中的随机波动或环境扰动。因此，随机模型对于捕捉更贴近现实的复杂网络动力学行为至关重要，许多研究已对含随机效应的复杂动力网络展开探索。为应对随机复杂动力网络降维在理论和实践方面的挑战，亟需一种能够考虑随机效应的通用框架。

在这项工作中，我们提出了一种用于随机复杂动力网络降维的一般解析框架。该框架可以将网络的序参量空间化简为一组有效参数的函数，这些有效参数被定义为决定网络动力学行为并与特定系统状态相关联的参数。由此得到的有效方程是原始高维随机复杂动力网络的低维表示，同时保留了其基本动力学特征。该框架还使我们能够利用……的标准差来分析随机复杂动力网络的动力学行为和可能的收敛。

有效方程。 我们的框架可应用于各种类型的随机复杂动力网络，例如生物学[21], 生态学 [22], 流行病学 [23], 神经科学 [24] 等等，并且能够揭示这些系统的内在机制和涌现现象。

# 方法

我们考虑一个由 个节点构成的随机复杂动力网络，其状态 遵循以下动力学方程演化：

$$dx_i = \left( F_i(x_i) + \sum_j^N A_{ij} G_i(x_i, x_j) \right) dt + H_i(x_i) dW_i \quad (1)$$

其中 表示节点的 自动力学，表示节点 与其邻居之间的耦合动力学， 表示节点与节点之间的相互作用强度， 而 表示节点随机微分方程中的扩散项，其中 是维纳过程。

由式（1）可知，每个节点的动力学受三个因素影响：自动力学、与其最近邻节点的相互作用（由相互作用网络 和耦合动力学）以及随机项。为分析随机复杂动力网络的动力学行为，我们引入平均场算子，其中 是矩阵 [15], 的出度向量，并将加权平均节点状态作为随机复杂动力网络的有效状态。对于线性时不变（LTI）函数和哈达玛积，该算子 均适用，即 以及 [17]。

在某些假设下，我们可以使用平均场算子简化方程（1）。首先，如果网络的度相关性较低（意味着节点具有相似的邻域），那么我们可以将相互作用项近似为。其次，如果 关于 是线性的， 或者向量 的标准差较小，那么我们可以将平均场项近似为，其中 是网络的有效状态。因此，我们可以将方程（1）重写为，并且以向量形式表示为，

$(\ )_{1\ 1}\ (\ ,\ )\ (\ ,),,(\ ,)_{T\ 有效\ 有效\ N\ N\ 有效}\ x\ G\ x\ x\ G\ x\ x = \quad \ldots G$ $\quad {}_{1}(\ ,\ ,\ )\ 输入\ 输入\ 输入\ T\ N\ S\ S = \quad (\ )_{1\ 1}\ (\ )\ (\ ),,(\ )^{T}_{N\ N} H\ x\ H\ x = \quad \ldots H\ x$

，，和。

$(\ )_{1},\ ,\ {}_{T}\ {}_{N}W$

$W = \quad \ldots W$

如果假设每个自动力学项 都是以下函数的线性组合，我们可以进一步简化子函数，即 。利用算子 的线性性质，我们可以写成 。然后，利用算子 的哈达玛积性质，我们可以近似得到 其中是矩阵 的第列。由于所有节点的子函数都相同，我们还可以进一步近似得到 其中 。我们可以采用类似的方法

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathcal{L} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 1 & 1 \\ & \mathcal{L} & \\ ,1 & 1 & \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1,m & 1 \\ & \\ , & \end{pmatrix} \mathcal{L}$$

$(\ )_{m\ N\ N\ N\ N\ N\ m\ m\ N}\ F\ x\ b\ f\ x\ b\ f\ x\ F\ x\ b\ f\ x\ b\ f\ x\ F\ x$

$\mathcal{L}$

$\mathcal{L}_{1\ 1}\ (\ (\ ))\ (\ (\ ))\ (\ (\ ))^{m}_{m}\ B\ f\ B\ f$

$= \quad \circ \quad + \quad + \quad \circ\ F\ x\ x\ x_{1\ 1}\ (\ )\ (\ (\ ))\ (\ )\ (\ (\ ))^{m}_{m}$

$B\ f\ B\ f \approx \mathcal{L} \quad + \cdots + x\ x \quad \mathcal{L} \quad \mathcal{L}$

$(\ )_{1,\ ,,\ T\ k\ k\ Nk}$

$B\ b\ b = \quad \ldots \quad k \quad \mathbf{B}$

$\mathcal{L} \approx (\ )_{1\ 1}\ (\ )\ (\ (\ ))\ (\ )\ (\ (\ ))^{m}_{m}\ B\ f\ B\ f \quad \mathcal{L} \quad \mathcal{L}$

$\mathcal{L}_{1\ 1} \quad + \ldots + \quad \mathcal{L} \approx F\ x\ x\ x$

$\mathcal{L}_{1\ 1} \quad + \ldots + \quad \mathcal{L} = \sum_{=1} (\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )_{m\ m\ k\ 有效\ m\ 有效\ 有效\ k\ 有效\ k\ B\ f\ x\ B\ f\ x\ B\ f\ x} \quad (\mathcal{L}\ k\ k\ 有效$

来简化耦合动力学项 和随机项 。如果假设每个都是子函数的线性组合，即 ，那么我们可以利用算子 的线性性质和哈达玛积性质，近似得到其中 且是矩阵 的第列。类似地，如果假设每个 都是 子函数的线性组合，那么我们可以近似得到 其中 且是矩阵 的第-列。 此外，我们可以近似得到 其中是一个维纳过程。最后，我们得到 。对向量方程两边应用该算子，可得有效方程。

$\mathcal{L}$

$\mathcal{L} \approx {}_{1}\ {}_{1}\ \mathcal{L} \quad + \ldots + \quad \mathcal{L} = \sum_{=1} (\ (\ ,\ ))\ (\ )\ (\ ,\ )\ (\ )\ (\ ,\ )\ (\ ,\ )_{n\ n\ l\ 有效\ 有效\ 有效\ n\ 有效\ 有效\ 有效\ l\ 有效\ 有效\ l\ x\ C\ g\ x\ x\ C\ g\ x\ x\ C\ g\ x\ x\ G\ x} \quad (\mathcal{L}\ l\ l\ 有效$

$(\ )_{1,\ ,,\ T\ l}$

$l\ {}_{Nl}C\ c\ c = \quad \ldots \quad l \quad \mathbf{C} \quad {}_{i}H\ x$

$t \quad \mathcal{L}(\ )\ \mathbf{H} \approx \sum_{=1} (\ )\ (\ )\ t\ s\ 有效\ s\ 有效 \quad (\mathcal{L}\ s\ s\ 有效$

$s\ D\ h\ x\ x$

$(\ )_{1,\ ,,\ T\ s}$

$N_{s}D\ d\ d = \quad \ldots \quad s \quad \mathbf{D} \quad \mathcal{L}(\ )_{\ 有效}W \approx \quad W_{eff}$

$\mathcal{L}(\ )_{1}\ (\ )\ (\ )\ t\ s\ 有效\ s\ 有效\ 有效\ s\ D\ h$

$x\ W\ \mathbf{H} \quad \circ \quad = \sum_{=} x\ W \quad \mathcal{L}$

$(\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ ,\ (\ ))\ (\ )\ 输入\ 有效\ dx\ dt\ d = \quad + \quad \circ \quad + \quad \circ\ F$

$x\ s\ G\ x\ x\ H\ x\ W \approx \left( \sum_{=1} \quad \mathcal{L} + \quad \sum_{=1} \quad \right) + \sum_{=1} (\ )\ (\ ,\ )\ (\ )_{m\ n\ t}$

$k\ l\ s\ 有效\ k\ 有效\ 有效\ 有效\ l\ 有效\ 有效\ 有效\ s\ 有效\ 有效\ k\ l\ s\ B\ f\ x\ A\ C\ g\ x\ x\ dt\ D\ h\ x\ dW$

在某些情况下，自动力学函数 可能不是 子函数的线性组合，或者可能有所不同$m$

$_{i}\ {}_{i}F\ x$

对于每个节点。在这种情况下，我们可以使用切比雪夫多项式来逼近 为 ，从而最小化逼近误差 [25, 26]。然后，我们可以应用算子得到 。类似地，我们可以使用切比雪夫多项式来逼近 为 并应用算子得到其中 收集所有满足 的项。我们可以对执行相同操作并得到 。最后，我们得到随机复杂动力网络的有效方程 [17]

$$dx_{eff} \approx \left( \sum_{k=1}^{m} B_{eff}^{k} x_{eff}^{(k-1)} + A_{eff} \sum_{l=1}^{n} C_{eff}^{l} x_{eff}^{(l-1)} \right) dt + \sum_{s=1}^{t} D_{eff}^{s} x_{eff}^{(s-1)} dW_{eff} \quad (2)$$

有效方程（式（2））是随机复杂动力网络（式（1））的低维近似，因此我们可以利用其动力学行为来推断随机复杂动力网络的集体动力学行为。如果随机复杂动力网络的涨落较小，那么有效方程的涨落也较小，其实现的标准差也较小。这意味着，与漂移项相比，扩散项可以忽略不计，随机效应并不显著。此外，如果随机复杂动力网络收敛，那么有效方程标准差的轨迹会在初始跳变后下降。因此，有效方程的标准差是反映随机复杂动力网络动态特征的有用指标：数值较小表明随机效应对随机复杂动力网络并不重要，而呈下降趋势则表明随机复杂动力网络正在收敛。

# 结果

## 多元 Ornstein-Uhlenbeck 过程的动态特征

最常见的随机过程之一是奥恩斯坦-乌伦贝克过程 [27]，它用于描述粒子在摩擦力作用下的随机运动。它在金融学、物理学和生物学中有许多应用。我们以多元奥恩斯坦-乌伦贝克过程为例，检验我们框架的有效性。该过程由以下方程描述：

$$d\mathbf{x} = -\mathbf{A}\mathbf{x}dt + \mathbf{B}d\mathbf{W} \quad (3)$$

其中 是 A 一个矩阵，而 是 B 一个元素为常数的向量 表示随机强度，$B_i$ 且是一个维纳过程向量。我们希望回答有关此过程的一些问题：漂移项如何影响总体趋势？扩散项需要多弱才能实现收敛？随机强度需要多小？我们运用本框架来解答这些问题。方程 (3) 的有效方程为

$$dx_{eff} = -A_{eff}\, x_{eff}\, dt + B_{eff}\, dW_{eff} \qquad (4)$$

其中，$x_{eff}$ = $\mathcal{L}$ ，$s_{in}$ = $\mathcal{L}$ 有效 A = 和 $B_{eff}$ = $\mathcal{L}$ = $\epsilon$ 有效 W = $\mathcal{L}$ W

为验证我们的框架，我们进行数值模拟，以考察随机强度如何影响随机复杂动力网络的动力学行为。参数设置如下：， 取自一个均值为 、标准差为 且随机强度在10^-1.5 到10^0.5 之间变化。我们用 0 到 1 之间的随机值初始化 。结果如图 1 所示。我们观察到，当原始随机动力网络的随机强度较小\大（图 1 b\d）时，有效方程的实现的标准差也较小\大（图 1 c\e），这表明扩散\漂移项主导了动力学。因此，有效方程是随机复杂动力网络的良好近似，尤其适用于判定确定性效应是否强于随机效应。

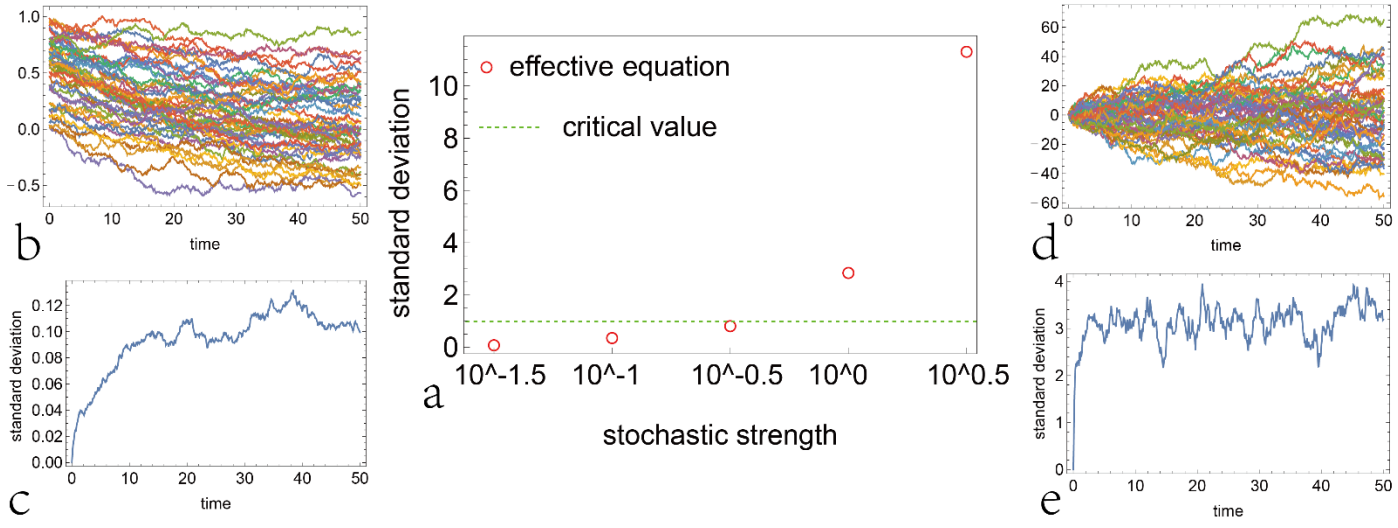


**图 1**：随机强度对随机复杂动力网络和有效方程动力学的影响。(a) 不同随机强度下有效方程实现的标准差：10^-1.5， 10^-1， 10^-0.5， 10^0 和 10^0.5。(b-c) 随机强度为 10^-1.5 时随机复杂动力网络的一次样本实现，以及有效方程标准差的相应轨迹。(d-e) 随机强度为 10^0.5 时随机复杂动力网络的一次样本实现，以及有效方程标准差的相应轨迹。每次模拟重复 50 次。

# 实证网络中的广义 Lotka-Volterra 动力学动态特征

本节中，我们将所提出的框架应用于具有随机效应的广义 Lotka–Volterra（GLV）动力学 [28-30] 。GLV 动力学是一组一阶非线性微分方程，广泛用于群落生态学，以模拟相互作用物种的种群动态。物种间的相互作用可用具有不同类型连边的网络表示，例如互利共生（++）、偏利共生（+0）、竞争（–）、偏害共生（-0）和捕食（±）。物种的随机效应 GLV 动力学表示为

$$dx_i = \left( \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j \right) dt + \epsilon x_i dW_i \quad (5)$$

其中 是群落中的物种数量， 是物种的种群规模， 是物种的内禀增长率， 是物种之间的相互作用强度，， 是物种的维纳过程，且是一个表示随机强度的常数。式（5）的有效方程为

$$dx_{eff} = \left( \alpha_{eff} x_{eff} + A_{eff} x_{eff}^2 \right) dt + \epsilon x_{eff} dW_{eff} \quad (6)$$

其中，，且

例如，我们考虑一个由物种组成的群落，其中包含 种植物和 种动物，例如充当传粉者的昆虫，其中 [31-35]。我们用向量 表示群落中每个物种的种群规模，其中 和 分别表示第 个植物物种和第 个动物物种的丰度。向量 表示每个物种的内禀增长率。相互作用矩阵由四个区块组成：其中两个表示植物之间（）和动物之间（）的直接竞争相互作用，另外两个则描述植物与动物之间（）以及反向的相互利他相互作用（）。相互作用矩阵的结构如下所示 ，其元素既有正值也有负值，且具有非零相关性[32]。我们设定矩阵 和 来表示植物与动物之间的竞争系数 。我们从最大值为 -0.001、均值为 和 的均匀分布中抽取。矩阵和 表示植物与动物之间的相互利他作用。我们使用一个权衡函数来定义物种之间的相互利他依赖关系

$$\begin{bmatrix} \Omega_{pp} & \Omega_{aa} \\ \Gamma_{pa} & \Gamma_{ap} \end{bmatrix}$$

并作为其度的函数：，其中 是从中抽取的

来自均值为 、标准差为 ， 是物种的度，并且如果物种和相互作用；否则为零 [32]。我们使用 Web-of-Life 数据库（http://www.web-of-life.es）构建相互作用矩阵，该数据库包含来自世界不同地区的实证植物-传粉者网络。为降低分析的计算成本，我们选取了 134 个物种数不超过 200 的网络 [3]。我们将参数设置如下： 和 。我们将初始化为 0 到 1 之间的随机值。

$$\mu_\alpha = 1, \sigma_\alpha = |\mu_\alpha \quad 3| \qquad \mu_\gamma = 0\ 4, \sigma_X = |\mu_\gamma \quad 3| \qquad (0)t =$$

我们通过数值模拟研究随机强度如何影响随机复杂动力网络的动力学行为。图 2 展示了基于实证网络的广义 Lotka-Volterra 动力学数值模拟结果。我们观察到，有效方程各次实现的标准差始终较小（图 2a），这表明漂移项主导了动力学，随机效应并不显著。此外，标准差在初始跃升后有所下降（图 2c 和 e），表明随机复杂动力网络的各次实现趋于收敛（图 2b 和 d）。因此，有效方程能够很好地近似随机复杂动力网络。

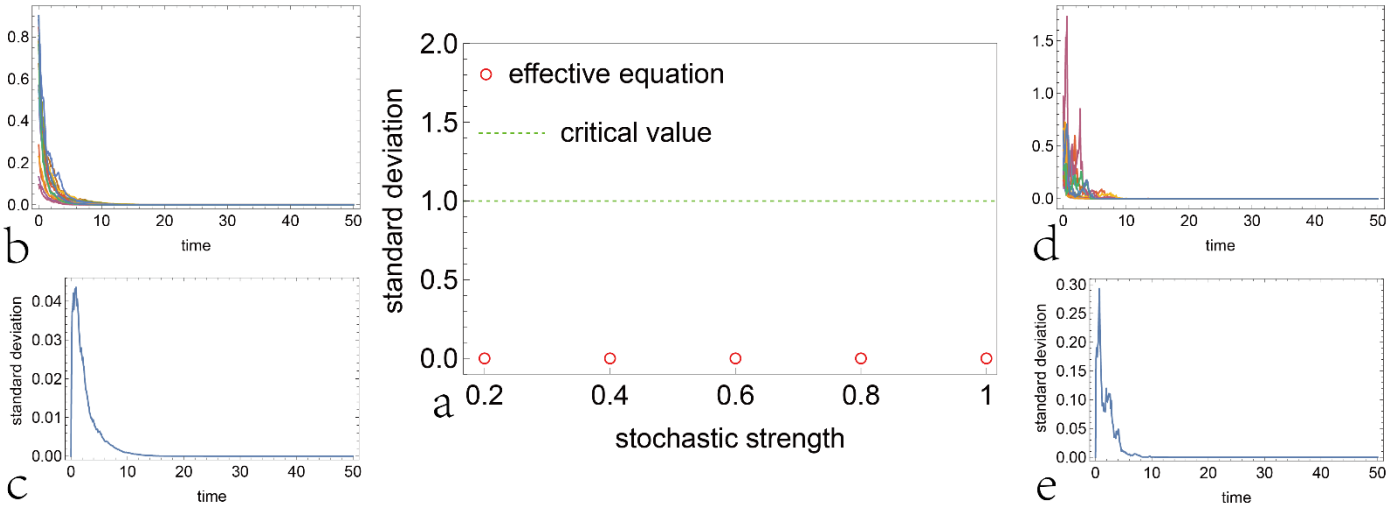


**图 2**：（a）不同随机强度值（0.2、0.4、0.6、0.8 和 1）下，有效方程实现的标准差。（b-c）随机强度为 0.2 的随机复杂动力网络的一个样本实现，以及有效方程标准差的对应轨迹。（d-e）随机强度为 1 的随机复杂动力网络的一个样本实现，以及有效方程标准差的对应轨迹。每次模拟重复 50 次。

# 讨论

复杂动力网络在自然界和工程领域无处不在，但其分析与控制受到高维特性以及其动力学对多种因素的依赖所阻碍，例如相互作用的拓扑结构、参数配置和节点的初始条件。此外，现有的大多数复杂动力网络降维方法都假设系统具有确定性，而许多现实系统则受到随机波动的影响。为克服这些挑战，我们提出了一个面向随机复杂动力网络的通用降维框架，可将含随机项的高维系统映射为低维有效系统，该系统仅包含一个有效状态变量和少量有效参数。我们的框架稳健且通用，能够处理不同类型的动力学模型、网络结构和节点动力学，并能捕捉随机复杂动力网络的集体动力学，包括确定性、随机性和收敛的影响。

我们在多个合成数据和实证数据示例中测试了针对随机复杂动力网络的降维框架，并证明该框架能够准确再现原始高维系统的集体动力学。具体而言，我们展示了有效方程各实现的标准差能够捕捉随机复杂动力网络集体动态行为的范围与轨迹。我们的方法具有普适性和灵活性，可应用于生物、生态、流行病学和神经系统等多种系统与情境，并能帮助深入了解确定性、随机性和收敛对复杂网络动力学的影响。

## 数据和代码可用性

用于复现本研究结果的即用型笔记本代码已在 OSF 上提供，访问码为 r7x3u（https://osf.io/r7x3u/）。

## 致谢

本研究得到中国浙江省自然科学基金（项目编号：LZ22G010001）、浙江省自然科学基金（LQ19G010004）以及浙江理工大学科学基金（项目编号：18092125-Y 和 22092034-Y）的资助。

# 参考文献

[1] Hughes TP, Kerry JT, Baird AH, Connolly SR, Dietzel A, Eakin CM, et al. 全球变暖改变了珊瑚礁群落。《自然》。2018;556:492-6。[2] Gauthier S, Bernier P, Kuuluvainen T, Shvidenko AZ, Schepaschenko DG. 北方森林健康与全球变化。《科学》。2015;349:819-22。[3] Huang H, Tu C, D'Odorico P. 生态系统复杂性增强了植物—传粉者系统的韧性。《同一个地球》。2021;4:1286- 96。[4] Tu C, Suweis S, D'Odorico P. 全球化对自然资源韧性和可持续性的影响。Nature Sustainability. 2019。[5] Schilders WHA, Van der Vorst HA, Rommes J. 模型降阶：理论、研究方面与应用：施普林格；2008。[6] Brunton SL, Kutz JN. 数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制：剑桥大学出版社；2022。[7] Jörg T. 复杂生成世界中的生成复杂性：一场正在酝酿的生成革命：施普林格·自然；2021。[8] Thurner S, Hanel R, Klimek P. 复杂系统理论导论：牛津大学出版社；2018。[9] Cheng X, Scherpen J. 复杂网络系统的模型降阶方法。arXiv 预印本 arXiv:201202268。2020。[10] Lyapunov AM. 运动稳定性的一般问题。《国际控制杂志》。1992;55:531-4。[11] Scheffer M, Bascompte J, Brock WA, Brovkin V, Carpenter SR, Dakos V, et al. 临界转变的早期预警信号。《自然》。2009;461:53。[12] Scheffer M, Carpenter SR, Lenton TM, Bascompte J, Brock W, Dakos V, et al. 预见临界转变。《科学》。2012;338:344-8。[13] Suweis S, D'Odorico P. 社会—生态网络中的早期预警信号。《公共科学图书馆·综合》。2014;9:e101851。[14] Tu C, D'Odorico P, Suweis S. 加密货币中的临界减速与临界转变及崩溃风险相关联。《英国皇家学会开放科学》。2020;7。[15] Gao J, Barzel B, Barabási A-L. 复杂网络中的普适韧性模式。《自然》。2016;530:307。[16] Tu C, Grilli J, Schuessler F, Suweis S. 广义洛特卡–沃尔泰拉动力学及其他情形下韧性模式的崩溃。《物理评论E》。2017;95:062307。[17] Tu C, D'Odorico P, Suweis S. 复杂动力系统的降维。《iScience》。2021:101912。[18] Laurence E, Doyon N, Dubé LJ, Desrosiers P. 复杂动力网络的谱维数约简。《物理评论X》。2019;9:011042。[19] Vegué M, Thibeault V, Desrosiers P, Allard A. 模块化异质有向网络上的动力学降维。arXiv 预印本 arXiv:220611230。2022。[20] Wu C, Duan D, Xiao R. 一种利用信息熵评估网络韧性的新型降维方法。《物理学A辑：统计力学及其应用》。2023:128727。[21] Wilkinson DJ. 系统生物学的随机建模：CRC 出版社；2018。[22] Black AJ, McKane AJ. 生态模型的随机表述及其应用。Trends Ecol Evol. 2012;27:337-45。[23] Chen W-Y, Bokka S. 非线性流行病学的随机建模。J Theor Biol. 2005;234:455-70。[24] Laing C, Lord GJ. 神经科学中的随机方法：牛津大学出版社；2009。[25] Battles Z, Trefethen LN. 将 MATLAB 扩展至连续函数和算子。《工业与应用数学学会科学计算杂志》。2004;25:1743-70。[26] Trefethen LN. 逼近理论与逼近实践：工业与应用数学学会；2013。[27] Gardiner CW. 随机方法手册：施普林格，柏林；1985。[28] Holling CS. 通过对小型哺乳动物捕食欧洲松叶蜂的研究揭示捕食的组成要素。《加拿大昆虫学家》。1959;91:293-320。[29] Holling CS. 捕食者对猎物密度的功能反应及其在拟态和种群调节中的作用。《加拿大昆虫学会会刊》。1965;97:5-60。[30] Holling CS. 简单类型捕食和寄生的一些特征。《加拿大昆虫学家》。1959;91:385-98。

[31] Suweis S, Simini F, Banavar JR, Maritan A. 生态互惠网络结构和动力学性质的涌现。《自然》. 2013;500:449-52.tworks. 2013;500:449-52.[32] Dakos V, Bascompte J. 临界减速作为互惠群落崩溃开始的早期预警。《美国国家科学院院刊》. 2014;111:17546-51.[33] Suweis S, Grilli J, Banavar JR, Allesina S, Maritan A. 局部化对互惠生态网络稳定性的影响。《自然·通讯》. 2015;6:10179-.[34] Cenci S, Song C, Saavedra S. 透过环境变化的视角重新思考生态网络的重要性。bioRxiv. 2017:219691.[35] Grilli J, Adorisio M, Suweis S, Barabás G, Banavar JR, Allesina S, et al. 大型生态群落的可行性与共存。《自然·通讯》. 2017;8.