arXiv:2305.03541v1 [math.PR] 5 May 2023

拉伸布朗链的缩放极限

Frank Aurzada、Volker Betz 和 Mikhail Lifshits

2023年5月8日

摘要

我们证明，经过适当缩放的长拉伸布朗链收敛于一个双参数随机过程，该过程由一个明确给出的确定性连续函数与零边界条件下随机热方程的解之和构成。

关键词——高斯过程、奥恩斯坦–乌伦贝克过程、相互作用粒子系统、随机热方程（SHE）

1 引言

相互作用粒子模型是研究材料中灾难性事件的常用工具，例如长聚合物链的断裂。针对这一问题，已有相当丰富的研究成果和方法。所有情况下的基本模型都是由 d 个粒子构成的链，用其随时间变化的位置 X_t^1、.....、X_t^d 描述，有时也考虑其随时间变化的动量。这些粒子受到热噪声和最近邻势 V 的作用，该势会在索引相邻的粒子之间产生吸引力。研究者关注的是粒子间距首次超过给定阈值的时刻；一旦达到该时刻，便认为链已断裂。

若将粒子动量纳入考虑，因而确定性动力学为牛顿动力学，则问题相当难以处理；尤其当 V 不是二次函数时，由此得到的牛顿方程便不是线性的。这是因为相应的确定性动力系统十分复杂。已有一些关于这一问题的早期非严格研究 [8, 17]，也有一些较新的严格研究[14, 15, 16],，不过这些研究只考察了平均断裂时间。在 [2], 中，研究者考察了一条很短的链，处于一种中间区域：当噪声趋于零时，粒子的质量也趋于零。

过阻尼情形更易处理： [3, 4, 5] 严格研究了有限链的断裂时间和位置的详细渐近分布，其中粒子链在右端被拉开，并考察拉伸速度和噪声方差同时趋于零的极限。在其他情形下，目前只有非严格的结果。 [18], 发现，当噪声不渐近趋于零时，粒子链的中部“更柔软”，也就是说，相较于边界附近，链在中部更容易断裂。这与 [3, 4, 5], 的结果相反；后者发现，在噪声渐近趋于零的情形下，除两个端点外，断裂点分布是均匀的，而在两个端点处，断裂的可能性只有一半。 [6]研究了断裂分布的一个有趣方面：作者发现，在链断裂前达到平衡的条件下（在 [3, 4, 5]的语境中，这对应于非常缓慢的拉伸），断裂时间分布在异常短时间一侧具有幂律尾部，并且该幂律与链的长度无关。这表明，仍有许多有趣的现象

有待在粒子链断裂模型的背景下加以理解，尤其是在粒子数趋于无穷的极限情形下。

本文是对存在外力时的相互作用粒子链进行严格研究的第一步，
in the limit of infinitely many particles。我们采用 [3]，中所调整的框架，其中链元素之间的作用力为线性，因此由此得到的过程是高斯的。在此情形下，我们确定了拉伸速度和噪声各自适当的缩放方式，从而得到一个非平凡且定义良好的极限过程。我们证明，存在唯一的极限过程，它由确定性部分（由拉伸导致）和均值为零的随机部分组成，后者代表噪声。极限过程的随机部分是满足零边界条件的随机热方程的解。

对包括我们研究的这一类相互作用粒子过程（但不含拉力分量）的收敛性研究，至少可追溯到[9], ，并已在 [10] 中以极大的普遍性和一种强收敛形式得以开展。因此，我们本可以通过应用这些理论推导出我们结果的 *non-deterministic part*。尽管如此，我们仍详细证明了所有结果。首先，我们的证明并不太长，将其纳入本文可使文章内容完整自足。此外，由于我们研究的是高斯测度，我们的证明不同于一般情形下的证明，而且清晰得多；这本身或许就是一项优点。其次，我们的结果表明，导出随机热方程的尺度并不适用于研究链的断裂。原因一方面在于，在极限方程中，解的粗糙性意味着任意两个相邻粒子之间的无穷小距离都会立即被突破。因此，不存在合理的断裂条件，使得断裂时间大于零且具有正概率。更根本地说，另一方面，相互作用链模型依赖于布朗链中各元素的顺序在演化过程中保持不变这一事实——否则，以粒子的初始排列来定义邻居的最近邻相互作用这一建模假设便难以成立。尽管文章 [6], 中从未明确出现任何尺度，但这意味着作者在声称其结果与链长无关时，心中所设想的尺度必定不同于本文所考察的尺度。研究能够导出非平凡断裂条件的其他尺度是一个有趣的问题，目前仍在进行中；而本文给出的详细且相当明确的证明，可作为寻找正确尺度并证明相应极限结论的良好参照。

本文结构如下。第 2 节汇总主要结果：我们首先精确说明模型，然后陈述当粒子数趋于无穷时，受拉链的极限结果。随后，我们讨论与 [10] 相关的齐次系统，以及它与随机热方程的关系。所有证明汇集于第 3 节。

2 主要结果

2.1 布朗链

对于每个正整数 d，由 $d+1$ 个粒子组成的拉伸布朗链都是以下系统的解：

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}X_t^i = (X_t^{i+1} - 2X_t^i + X_t^{i-1})\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t^{i,d}, \quad i = 1, \dots, d-1; \\ &X_t^0 = 0, \qquad X_t^d = d + \varepsilon\, t, \qquad X_0^i = i, \quad i = 1, \dots, d-1, \end{aligned} \tag{1}$$

其中（$B^{i,d}_t$）$_{t\geq 0}$ 是相互独立的布朗运动，且 ε、$\sigma \geq 0$ 为固定值。

这里，最左侧粒子 X_0 的位置固定不变，最右侧粒子以速度 ε被确定性地向右拉动，最近邻之间相互作用，并且粒子受到相互独立的布朗运动作用。

该系统曾在 [1, 2, 3, 4, 5] 中进行研究，旨在探究链断裂。在这些工作中，粒子数是固定的，并研究了系统行为随参数 σ 和 ε的变化。一个自然的问题是 *what happens when the number of particles grows to infinity?* 我们在本文中证明 *after an appropriate scaling of* σ ε *and time* t *the stretched Brownian chain converges* ，。*to a solution of the stochastic heat equation*

第一步，我们通过转到以下系统，对参数 σ 和 ε 进行缩放

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X^i_t &= (X^{i+1}_t - 2X^i_t + X^{i-1}_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{d}\sigma\,\mathrm{d}B^{i,d}_t, \quad i = 1, \dots, d-1; \\ X^0_t &= 0, \qquad X^d_t = d + \frac{\varepsilon}{d}\,t, \qquad X^i_0 = i, \quad i = 1, \dots, d-1. \end{aligned} \tag{2}$$

请注意，与（1）中的 ε 相比，现在的拉力强度为 $\frac{\varepsilon}{d}$。类似地，我们用 $\sqrt{d}\sigma$ 代替 σ 作为噪声的标准差。

第二步，我们通过考虑过程$\Xi\left(t, \frac{i}{d}\right) := d^{-1}X^i_{d^2t}$对（2）中的时间和空间进行缩放，该过程满足

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Xi\left(t, \frac{i}{d}\right) &= d^2\left(\Xi\left(t, \frac{i+1}{d}\right) - 2\Xi\left(t, \frac{i}{d}\right) + \Xi\left(t, \frac{i-1}{d}\right)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{d}\sigma\,\mathrm{d}B^{i,d}_t, \quad i = 1, \dots, d-1; \\ \Xi(t,0) &= 0, \qquad \Xi(t,1) = 1 + \varepsilon t, \qquad \Xi\left(0, \frac{i}{d}\right) = \frac{i}{d}, \quad i = 1, \dots, d-1, \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$(B^{i,d}_t)_{t\geq 0}$ 再次表示相互独立的布朗运动（与系统（2）中的布朗运动不同）。

这里我们再次讨论 $d+1$ 相互作用粒子。最左侧粒子仍然保持固定，而最右侧粒子则以 ε 的速度向右移动。与（2）式的主要区别在于，此时粒子在初始时刻均匀分布在 $[0,1]$上。

最后一个缩放步骤是通过令离散质量变量趋于连续质量变量。

$$\Xi_d(t,v) := \Xi\left(t, \frac{\lfloor dv \rfloor}{d}\right), \qquad \text{for } t \geq 0,\ v \in [0,1]. \tag{4}$$

2.2 收敛到极限过程

我们的目标是证明，当 $d \to \infty$ 时，过程 Ξ_d 收敛于一个明确描述的极限过程 X，该极限过程满足具有特定初始条件（质量的均匀初始分布）和特定边界条件（以速度 ε 将质量的右端向右拉动）的随机热方程。具体而言，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \Delta X_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t, \\ X(t,0) &= 0, \qquad X(t,1) = 1 + \varepsilon t, \qquad X(0,v) = v, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 (B_t) 是一个无限维布朗运动，$\Delta X_t = \partial^2_{v,v}X(t,v)$。我们将在第 2.4 节概述为何我们的极限过程满足（5）。

我们来说明一下所采用的收敛类型。我们采用一种收敛类型，它广泛应用于所谓的随机游走强不变性原理中（Strassen [19], Koml´os–Major–Tusn´ady [11, 12], M. Cs¨org˝o–R´ev´esz [7] 等人）。具体而言，我们在一个共同概率空间上构造过程 Ξ_d 和极限过程 X，使得 $\Xi_d(t,v) \to X(t,v)$ 几乎必然在紧集上一致收敛。

以下定理是本文的主要结果。

定理 **1** *Fix ε $\sigma > 0$. Let B_t^k $_{t\geq 0}$ $k = 1$ 2 ... be a sequence of independent*, ( ), „ *Brownian motions. Then there exists an array of Brownian motions $B_t^{1\ d}$ ... $B_t^{d-1\ d}$* , (, , „)*linearly depending on $(B^k)_{k\geq 1}$ and independent for each fixed d such that the solutions Ξ_d to the system* **(3)** *(in the form* **(4)***) converge, as $d \to \infty$, to the limiting process*

$$X(t,v) := D(t,v) + S(t,v), \qquad t \geq 0, v \in [0,1], \tag{6}$$

where

$$D(t,v) := v(1+\varepsilon t) + \varepsilon \left[h(v) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\pi^2 k^2 t} \sqrt{2}\, \sin(k\pi v) \right] \tag{7}$$

and

$$S(t,v) := \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{-(t-u)\pi^2 k^2}\, \mathrm{d}B_u^k \cdot \sqrt{2}\, \sin(k\pi v) \tag{8}$$

with $h(v) := \frac{1}{6} v(v^2-1)$ and $c_k := \sqrt{2} \int_0^1 h(v)\, \sin(k\pi v)\, \mathrm{d}v$. Namely, for every fixed $T > 0$ it is true that

$$\sup_{t\in[0,T], v\in[0,1]} |\Xi_d(t,v) - X(t,v)| \to 0 \quad a.s., \quad as\ d \to \infty.$$

注 2 极限过程 $(X(t,v))_{t\geq 0, v\in[0,1]}$ 是高斯过程，其期望 $(D(t,v))_{t\geq 0, v\in[0,1]}$ 是确定情形 $\sigma = 0$下 Ξ_d 的极限。

过程 $(S(t,v))_{t\geq 0, v\in[0,1]}$ 是具有零初始条件和零边界条件的“齐次系统”解的极限。这将在下一小节中解释。

2.3 齐次系统的收敛性

我们所考虑的核心思想是将有限拉伸布朗链的运动分解为两个分量之和。第一个分量是确定性的，并考虑初始条件和边界条件。第二个分量满足初始条件和边界条件均为零的齐次随机方程。此外，它具有相当显式的表示，我们将在本节中对其进行描述。这两个分量分别对应于式 **(6)** 中的项 D 和 S。

为了表述该结果，我们需要以下定义：

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}. \tag{9}$$

这个矩阵是粒子系统 **(1)** 和 **(2)** 的相互作用矩阵。下面的引理 **4** 表明，可以借助特征向量和特征函数将 $\mathcal{A}$ 对角化。更确切地说，

$$\mathcal{A} = Q\Lambda Q^\top, \qquad \text{with} \qquad \Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}), Q_{j,k} := \sqrt{2/d} \cdot f_k^j, \tag{10}$$

其中

$$\lambda_k := -2(1-\cos(k\pi/d)), \qquad f_k^m := \sin(km\pi/d), \quad m = 1, \dots, d-1, k = 1, \dots, d.$$

由引理 **4** 可知， Q 是一个正交矩阵。

现在我们可以陈述有限 d 的表示结果，以及齐次系统相应的收敛结果。

以下定理是证明定理 **1** 的重要一步。此外，我们认为，该定理也可能具有独立价值，可作为今后研究边界条件与我们不同的类似系统的基础。

定理 **3** *Fix $\sigma > 0$. Let B_t^k $_{t\geq 0}$ $k = 1$ 2 ... be a sequence of independent Brow-*( ) , „ , (. , „)
nian motions. Consider the independent Brownian motions $B_t^{1\ d}$ ... $B_t^{d-1\ d}$ =
:Q B_t^1 ... B_t^{d-1} $^\top$. The system (, ,)

$$\mathrm{d}\Sigma\left(t, \frac{i}{d}\right) = d^2\left(\Sigma\left(t, \frac{i+1}{d}\right) - 2\Sigma\left(t, \frac{i}{d}\right) + \Sigma\left(t, \frac{i-1}{d}\right)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{d}\sigma\,\mathrm{d}B_t^{i,d}, \qquad i = 1, \ldots, d-1; \tag{11}$$

$$\Sigma(t, 0) = 0, \qquad \Sigma(t, 1) = 0, \qquad \Sigma\left(0, \frac{i}{d}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{12}$$

allows the following explicit solution

$$\Sigma\left(t, \frac{i}{d}\right) = \sigma\sum_{k=1}^{d-1}\int_0^t e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B_u^k \cdot \sqrt{2}\sin(k\pi i/d).$$

Define $\Sigma_d(t, v) := \Sigma(t, \lfloor vd\rfloor/d)$. Then, for any $T > 0$,

$$\sup_{t\in[0,T], v\in[0,1]} |\Sigma_d(t, v) - S(t, v)| \to 0$$

almost surely, where $S(t, v)$ is given by (8)。

定理 3 的证明见下文的引理 10 和引理 11。

2.4 与随机热方程的联系

现在让我们讨论我们的极限过程与随机热方程（随机热方程）之间的联系。

我们从定理 3 中出现的过程 S 出发，并声称 $(S(t, v))$ 是一个具有平凡初始条件和边界条件的形式随机热方程的解。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \Delta S_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t, \\ S(t, 0) = 0, &\qquad S(t, 1) = 0, \qquad S(0, v) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

其中（B_t）是一个无限维布朗运动。

为精确表述这一事实，回顾函数系统 $\psi_k(v) := \sqrt{2}\sin(\pi kv)$（其中 $k = 1$、2、.....）是 $L_2[0, 1]$ 中满足狄利克雷问题的一个标准正交基，

$$\begin{aligned} \psi_k''(v) &= -\theta_k\,\psi_k(v), \\ \psi_k(0) &= \psi_k(1) = 0, \end{aligned}$$

其中特征值由 $\theta_k = \pi^2k^2$ 给出。

我们将取值于 $L_2[0, 1]$ 中的无限维布朗运动形式化地写成坐标形式：

$$B_t = \sum_{k=1}^{\infty} B_t^k\psi_k, \tag{14}$$

其中（B_t^k）$_{t\geq 0}$ 是相互独立的实值布朗运动。我们也将系统（13）的解 S 表示为相同的坐标形式：

$$S(t, v) = \sum_{k=1}^{\infty} S^k(t)\psi_k(v). \tag{15}$$

于是系统 (13) 变为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S^k(t) &= -\theta_k S^k(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t^k, \qquad k = 1, 2, ... \\ S^k(0) &= 0. \end{aligned}$$

这是一个经典的随机微分方程，由非平稳版本的奥恩斯坦–乌伦贝克过程求解

$$S^k(t) = \sigma \int_0^t e^{-(t-u)\theta_k} \, \mathrm{d}B_t^k.$$

现在，(15) 证明了 (8) 中给出的 S 满足系统 (13)。

然而，需要强调的是，表示 (14) 相当形式化，因为对于固定的 t 和 v，该和并不收敛。

接下来，利用基（ψ_k）的性质，可以很容易地验证，式 (7) 中定义的函数D 满足带有边界条件的确定性热偏微分方程:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}D_t &= \Delta D_t \, \mathrm{d}t, \\ D(t,0) = 0, \qquad D(t,1) &= 1 + \varepsilon t, \qquad D(0,v) = v. \end{aligned}$$

因此，通过将 D 和 S 的结果相加，我们可以看到，定理 1 中的极限过程 $X = D + S$ 满足随机偏微分方程 (5)。

3 证明

3.1 概述

我们将证明“确定性系统”的解收敛到 D。所谓“确定性系统”，是指带有 $\sigma = 0$ 的系统 (3)。这是第 3.3 小节的目的。此外，我们还将证明“随机系统”的解收敛到 S。所谓“随机系统”，是指 (11) 和 (12)。这是第 3.5–3.8 小节的目的。系统 (3) 的解是“确定性系统”的解与“随机系统”的解之和，因此我们将证明这个和收敛到 $D + S = X$。辅助章节 3.2 和 3.4 分别为确定性部分和随机部分准备预备事实。

3.2 确定性情形的预备知识

我们先做一些准备。首要目标是求出 (9) 中矩阵的显式特征值。

引理 4 *The eigenvalues of $\mathcal{A}$ defined in* (9) *are given by* $\lambda_k := -2(1 - \cos(k\pi/d))$ *and the coordinates of the corresponding eigenvectors* f_k $k = 1 \quad d-1$ *are given by,* , , . . . , , :sin( ) , $f_k^m =$ $km\pi/d$ $m = 1 \ \ldots \ d-1$. *Further the vectors* $\sqrt{2/d} \cdot f_k$ $k = 1 \ \ldots \ d-1$, , , , , ,*are orthonormal.*

证明：令 $g_k^m := e^{ikm\pi/d}$, $m = 0, \ldots, d$。那么对于 $m = 1, \ldots, d-1$，我们有

$$g_k^{m+1} - 2g_k^m + g_k^{m-1} = (e^{ik\pi/d} - 2 + e^{-ik\pi/d})g_k^m = -2(1 - \cos(k\pi/d))g_k^m = \lambda_k g_k^m.$$

通过取该恒等式的虚部，我们得到

$$\sin(k(m+1)\pi/d) - 2\sin(km\pi/d) + \sin(k(m-1)\pi/d) = \lambda_k \sin(km\pi/d).$$

考虑到 sin($0k\pi/d = 0 =$ $dk\pi/d$ $\mathcal{A}f_k =$) sin(), 我们得到所述结论。 $\lambda_k f_k$

由于 f_k 是对称矩阵对应不同特征值的特征向量，因此它们彼此正交。要确认 $\sqrt{2/d}$ 是正确的归一化，只需注意到

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{d-1} (f_k^m)^2 &= \sum_{m=0}^{d-1} \sin(mk\pi/d)^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{d-1} (1 - \cos(2mk\pi/d)) \\ &= \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{d-1} \cos(2mk\pi/d) = \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

□

3.3 确定性系统解的收敛性

我们从确定性系统（即带有 $\sigma = 0$ 的系统 (3)）的解的表示开始。

引理 **5** *Let* $(\Delta(t, \frac{i}{d}))_{i=0,\dots,d;t\geq 0}$ *be the solution of the system*

$$\mathrm{d}\Delta(t, \frac{i}{d}) = d^2 \left(\Delta\left(t, \frac{i+1}{d}\right) - 2\Delta\left(t, \frac{i}{d}\right) + \Delta\left(t, \frac{i-1}{d}\right)\right) \mathrm{d}t, \quad i = 1, \dots, d-1; \tag{16}$$

$$\Delta(t, 0) = 0, \qquad \Delta(t, 1) = 1 + \varepsilon t, \qquad \Delta\left(0, \frac{i}{d}\right) = \frac{i}{d}, \quad i = 1, \dots, d-1.$$

Then the following explicit representation holds:

$$\Delta(t, \frac{i}{d}) = \frac{i}{d}(\varepsilon t + 1) + \varepsilon \left(\frac{h^i}{d^2} - \left[e^{d^2 t\mathcal{A}} \frac{1}{d^2} h \right]^i \right), \tag{17}$$

where $h = (h^1, \dots, h^d)^\top$, $h^i = \frac{i}{6d}(i^2 - d^2)$。

证明：设 $(X_t^i)_{i=0,\dots,d;t\geq 0}$ 为满足 $\sigma = 0$ 的系统 (2) 的解。系统 (2) 的解的表示见 [3, 引理 4 和引理 5]。容易看出，$\Delta(t, \frac{i}{d}) := d^{-1} X^i_{d^2 t}$ 由式 (17) 给出。另一方面，$\Delta(t, \frac{i}{d})$ 是式 (16) 的解。□

引理 **6** *Under the assumptions of Lemma 5, we have the following alternative explicit representation:*

$$\Delta(t, \frac{i}{d}) = \frac{i}{d}(\varepsilon t + 1) + \varepsilon \left(\frac{h^i}{d^2} - \frac{2}{d^3} \sum_{k=1}^{d-1} \left[\left(\sum_{m=1}^{d-1} h^m f_k^m \right) \cdot e^{d^2 t \lambda_k} \cdot f_k^i \right] \right),$$

where $h = (h^1, \dots, h^d)^\top$, $h^i = \frac{i}{6d}(i^2 - d^2)$ *and* $f_k^m = \sin(km\pi/d)$.

证明：利用式（10）中引入的 $\mathcal{A}$的对角化，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\left[e^{d^2 t\mathcal{A}} h \right]^i = \left(e^{d^2 t\mathcal{A}} h \right)^\top e_i &= \left(Q e^{d^2 t\Lambda} Q^\top h \right)^\top e_i \\
&= h^\top Q e^{d^2 t\Lambda} Q^\top e_i \\
&= \sqrt{\frac{2}{d}} \sum_{k=1}^{d-1} h^\top Q e^{d^2 t\Lambda} f_k^i e_k \\
&= \sqrt{\frac{2}{d}} \sum_{k=1}^{d-1} h^\top Q e_k e^{d^2 t\lambda_k} f_k^i \\
&= \frac{2}{d} \sum_{k=1}^{d-1} h^\top f_k e^{d^2 t\lambda_k} f_k^i \\
&= \frac{2}{d} \sum_{k=1}^{d-1} \left(\sum_{m=1}^{d-1} h^m f_k^m \right) e^{d^2 t\lambda_k} f_k^i,
\end{aligned}$$

正如所声称的。这里，我们在第四步中使用了 $Q^\top e_i = \sqrt{2/d} \sum_{k=1}^{d-1} f_k^i e_k$，在第六步中使用了 $Q e_k = \sqrt{2/d} \cdot f_k$，在第七步中使用了 $h^\top f_k = \sum_{m=1}^{d-1} h^m f_k^m$。□

引理 **7** *The solution of the system (16) converges, as $d \to \infty$, to*

$$D(t,v) = v(\varepsilon t + 1) + \varepsilon \left(\frac{v}{6}(v^2 - 1) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-k^2\pi^2 t} \cdot \sqrt{2}\sin(k\pi v) \right),$$

where

$$c_k := \int_0^1 \frac{x}{6}(x^2 - 1)\sqrt{2}\sin(xk\pi)\,\mathrm{d}x.$$

证明：我们使用引理 6 中的表示。注意,

$$\frac{1}{d^3}\sum_{m=1}^{d-1} h^m f_k^m = \frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d-1} \frac{m}{6d}\left(\left(\frac{m}{d}\right)^2 - 1\right)\sin\left(\frac{m}{d}k\pi\right) \to \int_0^1 \frac{x}{6}(x^2-1)\sin(xk\pi)\,\mathrm{d}x.$$

此外,

$$d^2\lambda_k = -2d^2(1 - \cos(k\pi/d)) \to -k^2\pi^2$$

and

$$f_k^i = \sin(ki\pi/d) \to \sin(k\pi v).$$

□

3.4 随机情形的预备知识

这里，我们汇集了一些其他工具，以便证明随机系统解的收敛性。

引理 **8** *Let*

$$w_k := \int_0^t e^{-k^2\pi^2(t-u)}\,\mathrm{d}B_u^k \qquad \textit{and} \qquad w_{k,d} := \int_0^t e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B_u^k.$$

Then there is an absolute constant $c > 0$ such that

$$\mathrm{Var}[w_k] \le ck^{-2} \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{Var}[w_{k,d}] \le ck^{-2}.$$

证明：第一个断言的证明很简单:

$$\mathrm{Var}[w_k] = \int_0^t e^{-2k^2\pi^2(t-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2k^2\pi^2}\left(1 - e^{-2k^2\pi^2 t}\right) \le \frac{1}{2k^2\pi^2}.$$

要看出第二个断言，请回忆存在一个 $c > 0$，使得对于任意 $|u| \le \pi$，$\cos(u) \le 1 - cu^2$，从而对于所有 k，$-d^2\lambda_k = 2d^2(1 - \cos(\pi k/d)) \ge 2c\pi^2 k^2$。这意味着

$$\mathrm{Var}[w_{k,d}] = \int_0^t e^{2d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{-2d^2\lambda_k}\left(1 - e^{2d^2\lambda_k t}\right) \le \frac{1}{-2d^2\lambda_k} \le \frac{1}{4c\pi^2k^2},$$

对于所有 k。 □

我们还需要以下关于高斯过程的大偏差结果:

引理 **9** *Let $\{Y_t, 0 \le t \le T\}$ be a centered Gaussian process such that $Y_0 = 0$ and for some $c > 0$, $H \in (0,1]$*

$$\mathbb{E}\left[(Y_{t_1} - Y_{t_2})^2\right] \le c|t_1 - t_2|^{2H}, \qquad 0 \le t_1, t_2 \le T.$$

Then there exist c_1, c_2 depending only on c, H such that for all $r \ge 1$ it is true that

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} Y_t \ge c_1 r T^H\right) \le \exp\{-c_2 r^2\}.$$

证明：我们可以将引理的假设写作

$$\mathbb{E}\left[(Y_{t_1}-Y_{t_2})^2\right] \le c\,\mathbb{E}\left[(W^H_{t_1}-W^H_{t_2})^2\right], \qquad 0 \le t_1, t_2 \le T,$$

其中 W^H 是一个 H-分数布朗运动。根据 Sudakov–Fernique比较原理 [13, p.190], , 可得此不等式。

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T} Y_t \le \sqrt{c}\,\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T} W^H_t := \sqrt{c}\,q_H\,T^H.$$

设 m 为随机变量 $\sup_{0\le t\le T} Y_t$ 的一个中位数。那么

$$m \le \mathbb{E}\sup_{0\le t\le T} Y_t \le \sqrt{c}\,q_H\,T^H,$$

其中，对于第一个不等式，可以参见 [13,p.143]。

另一方面，在引理的假设下，以下结论成立：

$$\theta^2 := \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\,Y_t^2 \le c\,T^{2H}.$$

现在，对于每个 $r \ge 1$ ，我们根据集中原理得到 [13, p.141]

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} Y_t \ge (2\sqrt{c}\,q_H) r T^H\right) &\le \mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} Y_t - m \ge (2\sqrt{c}\,q_H r - \sqrt{c}\,q_H) T^H\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} Y_t - m \ge \sqrt{c}\,q_H r\,T^H\right) \\
&\le \bar{\Phi}\left(-\sqrt{c} q_H r T^H/\theta\right) \\
&\le \bar{\Phi}\left(-q_H r\right) \le \exp(-q_H^2 r^2/2),
\end{aligned}$$

其中 $\bar{\Phi}(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > x)$，如所需。 □

3.5 随机系统的收敛

本小节首先介绍随机系统收敛的主要结果。

引理 **10** *Let* $B^k_{u\ u\ge 0}$ $k = 1\ 2\ \ldots$ *be a sequence of independent Brownian mo-*( ) , „ , *tions. Consider*

$$\Sigma\left(t, \frac{i}{d}\right) := \sigma \sum_{k=1}^{d-1} \int_0^t e^{(t-u)d^2\lambda_k}\,\mathrm{d}B^k_u \ \cdot\ \sqrt{2}\sin(k\pi i/d)$$

and

$$S(t,v) := \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{-(t-u)\pi^2 k^2}\,\mathrm{d}B^k_u \ \cdot\ \sqrt{2}\sin(k\pi v).$$

Define $\Sigma_d(t,v) := \Sigma(t, \lfloor vd \rfloor/d)$. *Then, for any* $T > 0$,

$$\sup_{t\in[0,T], v\in[0,1]} |\Sigma_d(t,v) - S(t,v)| \to 0$$

almost surely.

我们将此结果的证明推迟到第3.8小节，转而说明引理10为何能推出定理1和定理3：

引理 **11** *Let*$(B^{1,\ d}_{\ t},\dots,B^{d-1,\ d}_{\ t})^\top := Q(B^1_t,\dots,B^{d-1}_t)^\top$. *Consider the system*

$$\mathrm{d}\Sigma\left(t,\frac{i}{d}\right)=d^2\left(\Sigma\left(t,\frac{i+1}{d}\right)-2\Sigma\left(t,\frac{i}{d}\right)+\Sigma\left(t,\frac{i-1}{d}\right)\right)\mathrm{d}t+\sqrt{d}\sigma\,\mathrm{d}B^{i,d}_t,\qquad i=1,\dots,d-1;$$

$$\Sigma(t,0)=0,\qquad \Sigma(t,1)=0,\qquad \Sigma\left(0,\frac{i}{d}\right)=0,\quad i=1,\dots,d. \tag{18}$$

An explicit solution of the system (18) *is given by*

$$\Sigma\left(t,\frac{i}{d}\right)=\sigma\sum_{k=1}^{d-1}\int_0^t e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B^k_u\cdot\sqrt{2}\sin(ik\pi/d).$$

注意到，引理 11 中随机系统的表示与引理10中研究的项一致。因此，定理 3 可由引理10和引理 11 推出。最后，定理 1 可由此以及确定性部分的引理 7 推出。

引理 11 的证明：第一步是将系统 (18) 的解写为

$$\Sigma\left(t,\frac{i}{d}\right)=\sqrt{d}\sigma e^{d^2\mathcal{A}t}\int_0^t e^{-d^2\mathcal{A}u}\,\mathrm{d}\bar{B}^d_u,$$

其中， $\bar{B}^d_t=Q\sum_{k=1}^{d-1}e_kB^k_t$和 $(B^k_t)_{t\geq0}$、 $k=1$、.....、 $d-1$ 是给定的相互独立的布朗运动。系统 (18) 的解的这一表示是 [3] 中引理 6 陈述的一部分。

然后我们可以按如下方式计算：

$$\begin{aligned}\Sigma\left(t,\frac{i}{d}\right)&=\sqrt{d}\sigma e^{d^2\mathcal{A}t}\int_0^t e^{-d^2\mathcal{A}u}Q\,\mathrm{d}\bar{B}^d_u\\&=\sqrt{d}\sigma Qe^{d^2\Lambda t}Q^\top\int_0^t Qe^{-d^2\Lambda u}Q^\top\sum_{k=1}^{d-1}Qe_k\,\mathrm{d}B^k_u\\&=\sqrt{d}\sigma\sum_{k=1}^{d-1}\int_0^t Qe_k\cdot e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B^k_u\\&=\sqrt{d}\sigma\sum_{k=1}^{d-1}\int_0^t\sqrt{\frac{2}{d}}f_k\cdot e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B^k_u\\&=\sigma\sum_{k=1}^{d-1}\int_0^t e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B^k_u\cdot\sqrt{2}f_k,\end{aligned}$$

如所述。 □

3.6 二次均值估值

引理10的证明将基于若干关于二次均值的上界，我们在此汇总这些上界。

我们使用以下缩写

$$w_k:=w_k(t):=\int_0^t e^{-k^2\pi^2(t-u)}\,\mathrm{d}B^k_u,\qquad w_{k,d}:=w_{k,d}(t):=\int_0^t e^{d^2\lambda_k(t-u)}\,\mathrm{d}B^k_u,$$

$\phi_{k,d}:=\phi_{k,d}(\lfloor vd\rfloor/d):=\sin(k\pi\lfloor vd\rfloor/d)$, 且 $\phi_k=\phi_k(v)=\sin(k\pi v)$】【。

在这种记号下，

$$S(t,v)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(t)\sqrt{2}\phi_k(v)\qquad\text{and}\qquad\Sigma_d(t,v)=\sum_{k=1}^{d-1}w_{k,d}(t)\sqrt{2}\phi_{k,d}(\lfloor vd\rfloor/d).$$

步骤 1：对于任意固定的$t \geq 0$ 和 $v \in [0,1]$，$\Sigma_d(t,v)$ 均方收敛于 $\to S(t,v)$。

我们将其分解为

$$\begin{aligned}\Sigma_d(t,v) - S(t,v) &= \sum_{k=1}^{d-1} w_{k,d}\sqrt{2}\phi_{k,d} - \sum_{k=1}^{\infty} w_k\sqrt{2}\phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} w_{k,d}\sqrt{2}(\phi_{k,d}-\phi_k) + \sum_{k=1}^{d-1}(w_{k,d}-w_k)\sqrt{2}\phi_k - \sum_{k=d}^{\infty} w_k\sqrt{2}\phi_k \\ &=: S_1 + S_2 + S_3.\end{aligned}$$

为了估计 $\Sigma_d(t,v) - \Sigma(t,v)$ 的方差，我们将估计

$$\mathrm{Var}[\Sigma_d(t,v) - \Sigma(t,v)] = \mathrm{Var}[S_1+S_2+S_3] \leq 3(\mathrm{Var}[S_1] + \mathrm{Var}[S_2] + \mathrm{Var}[S_3]) \quad (19)$$

并分别控制各个 S_i 的方差。

首先注意到

$$\mathrm{Var}[S_1] = \sum_{k=1}^{d-1} \mathrm{Var}[w_{k,d}] \cdot 2|\phi_{k,d} - \phi_k|^2.$$

利用 $|\phi_{k,d} - \phi_k| = |\sin(k\pi\lfloor vd\rfloor/d) - \sin(k\pi v)| \leq |k\pi\lfloor vd\rfloor/d - k\pi v| \leq k\pi/d$ 以及引理 8 中的估计，我们得到

$$\mathrm{Var}[S_1] \leq 2\sum_{k=1}^{d-1} ck^{-2} \cdot (k\pi/d)^2 = c'd^{-1}. \quad (20)$$

此外，

$$\mathrm{Var}[S_2] = \sum_{k=1}^{d-1} \mathrm{Var}[w_{k,d} - w_k] \cdot 2|\phi_k|^2 \leq 2\sum_{k=1}^{d-1} \mathrm{Var}[w_{k,d} - w_k].$$

我们观察到

$$\mathrm{Var}[w_{k,d} - w_k] = \int_0^t |e^{d^2\lambda_k u} - e^{-\pi^2k^2u}|^2 \,\mathrm{d}u.$$

回想一下

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty |e^{-ru} - e^{-su}|^2 \,\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{-ru}|1 - e^{-(s-r)u}|^2 \,\mathrm{d}u \\ \leq\ &\int_0^\infty e^{-ru}(s-r)^2u^2 \,\mathrm{d}u = (s-r)^2cr^{-3}.\end{aligned}$$

将此结果用于 $r = -d^2\lambda_k$、$s = \pi^2k^2$，并进一步利用 $|s-r| = |\pi^2k^2 + d^2\lambda_k| = d^2\lambda_k + \pi^2k^2 = -2d^2(1-\cos(k\pi/d)) + \pi^2k^2 \leq cd^2k^4/d^4 = ck^4/d^2$（其中，我们对充分大的常数 c 和所有 x 使用了 $\cos x \leq 1 - x^2/2 + cx^4$）以及 $r = -d^2\lambda_k \geq c\pi^2k^2$（这是由于对所有 $|x| \leq \pi$ 和充分小的常数 $c > 0$，都有 $\cos x \leq 1 - cx^2$），可得

$$\mathrm{Var}[S_2] \leq 2\sum_{k=1}^{d-1} \mathrm{Var}[w_{k,d} - w_k] \leq c\sum_{k=1}^{d-1} (k^4/d^2)^2(k^2)^{-3} \leq c'd^3/d^4 = c'd^{-1}. \quad (21)$$

最后，利用引理 8，可得

$$\mathrm{Var}[S_3] = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{Var}[w_k] \cdot 2\phi_k^2 \leq 2\sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{Var}[w_k] \leq c\sum_{k=d}^{\infty} k^{-2} = c'd^{-1}. \quad (22)$$

将（19）、（20）、（21）和（22）合并可得

$$\mathrm{Var}[\Sigma_d(t,v) - S(t,v)] \leq cd^{-1}, \qquad \text{for all } t \geq 0, v \in [0,1]. \quad (23)$$

步骤 2： v 中的平均涨落

固定 $t > 0$。对于任意 v、$v' \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S(t,v) - S(t,v')] &= \mathrm{Var}[\sum_{k=1}^{\infty} w_k(\sin(\pi k v) - \sin(\pi k v'))] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}[w_k] |\sin(\pi k v) - \sin(\pi k v')|^2 \\
&\le c \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \min\{1, k^2 |v - v'|^2\} \\
&= c \sum_{k \le 1/|v-v'|}^{\infty} k^{-2} k^2 |v - v'|^2 + c \sum_{k > 1/|v-v'|}^{\infty} k^{-2} \\
&\le c|v - v'|. \qquad (24)
\end{aligned}$$

我们强调，常数 c 不依赖于 t.

步骤 3： t 中的平均涨落

考虑 $t' > t > 0$ 并固定 $v \in [0,1]$。则有

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Var}[S(t,v) - S(t',v)] \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}[w_k(t) - w_k(t')] \cdot 2 \cdot \phi_k^2 \\
\le & 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}[w_k(t) - w_k(t')] \cdot 1 \\
= & 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (1 - e^{-(t'-t)})^2 e^{-(t-u)2\pi^2 k^2} \, \mathrm{d}u + \int_t^{t'} e^{-(t'-u)2\pi^2 k^2} \, \mathrm{d}u \right]. \qquad (25)
\end{aligned}$$

我们分别处理这两个积分。

$$\begin{aligned}
\int_0^t (1 - e^{-(t'-t)})^2 e^{-(t-u)2\pi^2 k^2} \, \mathrm{d}u &\le (t'-t)^2 \int_0^t e^{-(t-u)2\pi^2 k^2} \, \mathrm{d}u \\
&= (t'-t)^2 \int_0^t e^{-u 2\pi^2 k^2} \, \mathrm{d}u \le \frac{(t'-t)^2}{2\pi^2 k^2}.
\end{aligned}$$

将其在 k 中求和可得 $c(t'-t)^2$。(25) 式中的第二项等于

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t'-t} e^{-2u\pi^2 k^2} \, \mathrm{d}u &= 2 \sum_{k \le (t'-t)^{-1/2}} \int_0^{t'-t} e^{-2\pi^2 k^2 u} \, \mathrm{d}u \\
&\quad + 2 \sum_{k > (t'-t)^{-1/2}} \int_0^{t'-t} e^{-2\pi^2 k^2 u} \, \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

在第一求和中，我们将被积函数估计为 1，因此整个求和有如下界：

$$2(t'-t)^{-1/2}(t'-t) = 2(t'-t)^{1/2}.$$

第二求和有界于

$$2 \sum_{k > (t'-t)^{-1/2}} \int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 k^2 u} \, \mathrm{d}u = 2 \sum_{k > (t'-t)^{-1/2}} \frac{1}{2\pi^2 k^2} \le c(t'-t)^{1/2}.$$

这表明

$$\mathrm{Var}[S(t,v)-S(t',v)] \le c|t'-t|^{1/2} \qquad \text{for all } t,t' \ge 0, v \in [0,1]. \tag{26}$$

我们强调，常数 c 不依赖于 v。

使用完全相同的论证，并结合对所有 k 都有 $d^2\lambda_k \le -c\pi^2k^2$这一事实以及适当的常数 $c>0$，我们可以得到以下与估计式 (26) 类似的结果：

$$\mathrm{Var}[\Sigma_d(t,v)-\Sigma_d(t',v)] \le c|t'-t|^{1/2} \qquad \text{for all } t,t' \ge 0, v \in [0,1]. \tag{27}$$

我们再次强调，常数 $c>0$ 不依赖于 v。

3.7 ($S(t,v)$) 的联合连续性。

根据估计式 (24) 和 (26)，可以直接得到幂次估计

$$\mathrm{Var}[S(t,v)-S(t',v')] \le 2c(|t'-t|^{1/2}+|v'-v|),$$

对任意 (t,v)、$(t',v') \in [0,T]\times[0,1]$均成立。现在，由高斯场的经典连续性判据（例如参见 [13, 第 220], 页），可知 $(S(t,v))$ 关于 t、v几乎处处连续，其中 t、$v \in [0,T]\times[0,1]$。由于后一个集合是紧集，$(S(t,v))$ 甚至是一致连续的。

3.8 几乎处处收敛（引理10的证明）

固定 $T>0$。我们将考虑以下时间和空间离散化：

$$t_j := \frac{jT}{d}, \qquad j=0,\dots,d. \tag{28}$$

$$v_i := \frac{i}{d}, \qquad i=0,\dots,d. \tag{29}$$

对于 $t \in [t_j, t_{j+1})$，我们记 $\widehat{t}=\widehat{t}(t) = t_j$。对于 $v \in [v_{i-1}, v_i)$，令 $\widehat{v}=\widehat{v}(v) := v_i$。

首先注意到

$$\begin{aligned}\Sigma_d(t,v)-S(t,v) &= \Sigma_d(t,\widehat{v})-S(t,v)\\ &= \Sigma_d(t,\widehat{v})-\Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v})\\ &\quad + \Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v})-S(\widehat{t},\widehat{v})\\ &\quad + S(\widehat{t},\widehat{v})-S(t,v).\end{aligned}$$

我们将为前两项给出概率界，而对于第三项，我们只需注意到

$$\lim_{d\to\infty}\sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |S(\widehat{t},\widehat{v})-S(t,v)| = 0 \qquad \text{a.s.} \tag{30}$$

这是由过程 S 的连续性得出的，参见上一小节。

A bound for the first term. 注意，

$$\sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(t,\widehat{v})-\Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v})| = \max_{0\le j\le d-1}\max_{0\le i\le d}\sup_{0\le\tau\le T/d}|\Sigma_d(t_j+\tau,v_i)-\Sigma_d(t_j,v_i)|.$$

固定 $\varepsilon>0$，并对 Y_τ 使用引理 9：$=\Sigma_d(t_j+\tau,v_i)-\Sigma_d(t_j,v_i)$，其中 $\tau\in[0,T/d]$。由 (27) 可验证引理的假设，其中 $H=1/4$。

通过 r 定义 $r := \varepsilon(d/T)^{1/4}/c_1$，其中 c_1 是引理 9 中的常数。于是 $c_1 r(T/d)^{1/4} = \varepsilon$，并且当 d 足够大时，$r \geq 1$。由此得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq\tau\leq T/d} |\Sigma_d(t_j+\tau, v_i) - \Sigma_d(t_j, v_i)| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq\tau\leq T/d} |Y_\tau| \geq \varepsilon\right) \\ \leq \quad & 2\,\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq\tau\leq T/d} Y_\tau \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-c_2\varepsilon^2(d/T)^{1/2}/c_1^2\right). \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(t,v) - \Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v})| \geq \varepsilon\right) \leq (d+1)^2 \exp\left(-c_2\varepsilon^2(d/T)^{1/2}/c_1^2\right)$$

由 Borel–Cantelli引理可得

$$\lim_{d\to\infty} \sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(t,\widehat{v}) - \Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v})| = 0 \qquad \text{a.s.} \tag{31}$$

*A bound for the second term.*注意

$$\sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v}) - S(\widehat{t},\widehat{v})| = \max_{0\leq j\leq d} \max_{0\leq i\leq d} |\Sigma_d(t_j,v_i) - S(t_j,v_i)|.$$

对每一对 (i, j) 使用方差界 (23)，可得

$$\mathbb{P}\left(|\Sigma_d(t_j,v_i) - S(t_j,v_i)| \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\varepsilon^2 d^2/(2c^2)\right),$$

因此，

$$\mathbb{P}\left(\sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v}) - S(\widehat{t},\widehat{v})| \geq \varepsilon\right) \leq (d+1)^2 \exp\left(-\varepsilon^2 d^2/(2c^2)\right)$$

由 Borel–Cantelli引理可得

$$\lim_{d\to\infty} \sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(\widehat{t},\widehat{v}) - S(\widehat{t},\widehat{v})| = 0 \qquad \text{a.s.} \tag{32}$$

结合（30）、（31）和（32）可得

$$\lim_{d\to\infty} \sup_{(t,v)\in[0,T]\times[0,1]} |\Sigma_d(t,v) - S(t,v)| = 0 \qquad \text{a.s.},$$

如所述。

参考文献

[1] M. Allman 和 V. Betz。Breaking the chain。*Stochastic Processes and Their Applications* **119** 2009 2645 2659 ( )，–。[2] M. Allman、V. Betz 和 M. Hairer。应变下的相互作用粒子链。*Stochastic Processes and Their Applications* **121** (2011)，2014–2042。[3] F. Aurzada、V. Betz 和 M. Lifshits。布朗粒子链断裂。*Annals of Applied Probability* **31** (2021)，2585–2611。[4] F. Aurzada、V. Betz 和 M. Lifshits。相互作用布朗粒子链断裂，Gumbel极限定理。*Theory of Probability and its Applications* **66** 2021 84 208 2021 ( )，–（英文）。*Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya* **66** ( )，231–260（俄文）。

[5] F. Aurzada、V. Betz 和 M. Lifshits。最近邻相互作用布朗粒子链的普适断裂定律。*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **54** 2021 305204

( )， 。[6] H. Charan、A. Hansen、H.G.E. Hentschel 和 I. Procaccia。张力作用下聚合物链的老化与失效。 *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021)，085501[7] M. Cs¨org˝o 和 P. R´ev´esz。《概率与统计中的强逼近》。Springer，纽约，1981。[8] T. Doerr 和 P. Taylor。聚合物链断裂。I. 谐链，

J. ( )， 。 *Chem. Phys.* **101** 1994 10107

[9] T. Funaki。弦的随机运动及相关随机演化方程。*Nagoya Mathematical Journal* **89** (1983)，129–193。[10] I. Gy¨ongy。由时空白噪声驱动的随机拟线性抛物型偏微分方程的格点逼近 I。 *Potential Analysis* **9** (1998)，1–25。[11] J. Koml´os、P. Major 和 G. Tusn´ady。独立随机变量部分和及样本分布函数的逼近。I。 *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*32 (1975)，111–131。[12] J. Koml´os、P. Major 和 G. Tusn´ady。独立随机变量部分和及样本分布函数的逼近。II。

Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. ( )， – **34** 1976 34 58 。[13] M. Lifshits。《高斯随机函数》。Kluwer，Dordrecht，1995。[14] V.A. Malyshev 和 S.A. Muzychka。最简单分子链模型中的动力学相变。 *Theoret. and Math. Phys.* **179(1)** (2014)，490–499。[15] V.A. Malyshev。一维机械网络与晶体。 *Moscow Math. J.* **6** 2 2006 353 358 ( ) ( )， – 。[16] S.A. Muzychk。

$N = 2\ 3\ 4$ *Moscow*个 *University Math. Bull.* **68** 4 2013 206 210

[17] ，振子的链的平均离开时间。( ) ( )， – 。 *J. Chem. Phys.* **101** F.A. Oliveira 和 P.L. Taylor。聚合物链断裂。II. Lennard-Jones链。[18] (11) (1994)，10118–10125。 *Soft Matter* **15** M. Razbin、P. Benetatos 和 A. Moosavi-Movahedia。离散一维链热断裂的首次通过方法。[19] (2019)，2469。

Z. V. *Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.* **3** 1964 211 226 Strassen。迭代对数律的一个不变性原理。( )，– 。