arXiv:2305.03543v1 [math.PR] 5 May 2023

随机图的完美友好二分割

Dor Minzer、Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney

摘要。我们证明存在一个常数 $\gamma_{\text{crit}} \approx .17566$，使得若 $G \sim \mathbb{G}(n,1/2)$，那么对任意 $\varepsilon > 0$，以高概率 G 存在一种等分划分，其中每个顶点在所属部分中的邻居数比在另一部分中的邻居数多 $(\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon)\sqrt{n}$；并且对于间隔为 $(\gamma_{\text{crit}} + \varepsilon)\sqrt{n}$的划分，以高概率不存在这样的划分。证明运用了多种工具，包括由布尔函数生成的图的顶点传递集合上的等周结果、切换、度数枚举公式以及二阶矩方法。我们的结果大幅加强了 Ferber、Kwan、Narayanan 和最后两位作者近期关于 Füredi 于1988年提出的猜想的工作，并特别证明了在 $\mathbb{G}(n,1/2)$ 中存在完全友好二分割。

1. 引言

本文研究随机图 $\mathbb{G}(n,1/2)$ 在什么条件下可以划分为两个大小大致相等的集合 $A \cup B$，使得每个顶点在 A 中都有显著更多的邻居位于 A 中；对于 B 也有类似的性质。我们用「H-友好等分划分」这一概念将其形式化。

定义 1.1. 给定一个有 n 个顶点的图 G，H-友好等分划分是指一个划分 $A_1 \cup A_2 = V(G)$，满足 $||A_1| - |A_2|| \leq 1$，且对于所有 $i \in \{1,2\}$ 和 $v \in A_i$ 的取值，$\deg(v, A_i) \geq H + \deg(v, A_{i+1})$。（这里指标按模 2 计算，后文不再特别说明。）

现在我们定义一个常数 γ_{crit}，该常数将在全文中使用。

定义 1.2. 定义 $\gamma_{\text{crit}} > 0$ 为满足下式的常数

$$\log 2 + \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (-\alpha^2 + \log(\mathbb{P}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma + \alpha)\sqrt{2}])) = 0.$$

备注。注意到 $\gamma \mapsto$ 对数 $2 +$ 上确界$_{\alpha \in \mathbb{R}}(-\alpha^2 +$ 对数$(\mathbb{P}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma + \alpha)\sqrt{2}]))$ 是一个严格递减函数，因此 γ_{crit} 是唯一的。此外，可以通过数值计算证明 $.2484195 \leq \gamma_{\text{crit}} \leq .2484196$ (命题 B.11)。

我们的主定理证明，在数值假设 假设 1.5 成立的条件下，H-友好划分在 $\mathbb{G}(n,1/2)$ 中存在，其中 H 的阶为 $\Omega(\sqrt{n})$，并确定了最优 H 的精确首阶渐近行为。

定理 1.3。固定 $\varepsilon > 0$ 并令 $G \sim \mathbb{G}(n, 1/2)$。给定 假设 *1.5*，以高概率，$G$具有一个 $(\gamma_{\text{crit}}/\sqrt{2} - \varepsilon)\sqrt{n}$-友好的等分划分。此外，以高概率，$G$ 不具有一个$(\gamma_{\text{crit}}/\sqrt{2} + \varepsilon)\sqrt{n}$-友好的等分划分。

我们在假设 1.5中准确陈述第 1.2.3 节，并讨论对假设 1.5进行的一项相当严谨的浮点验证，该验证在附录 B中完成。附录 B 给出了一种将假设 1.5的验证归结为一系列非精确积分计算的过程。随后，我们使用区间算术验证这些数值计算中最精细的部分；所需的数值过程和实现细节将在第 1.2.3 节和附录 B中讨论。

Minzer 获得了斯隆研究奖学金和 NSF CCF 奖项 2227876 的资助。Sah 获得了 PD Soros 奖学金的资助。Sawhney 获得了丘吉尔基金会的资助。Sah 和 Sawhney 获得了 NSF 研究生研究奖学金计划 DGE-2141064 的资助。

1.1. **友好划分的背景**。 关于友好二分以及类似概念——友好划分（即不要求划分是均衡的）——的问题，近期 Behrens、Arpino、Kivva 和 Zdeborová 的研究指出，这些问题有许多不同的名称[5]，包括满意图划分 [4,23], 广义匹配割 [24], 局部最小割 [2], 同配划分 [5]。对图取补图后，自然也会考虑这样一种划分问题：目标是使割两侧的邻居数多于同侧邻居数；这一变体同样有许多不同的名称。

我们的主要动机是希望理解一条古老猜想所体现的行为规律。这条猜想由 Füredi 于 1988年提出[18]，并因被收录于 Green 的 100 个未解问题列表 [25, 中的问题 91]而广为人知。Füredi 猜想存在一种二分，使得只需两侧各有 $n - o(n)$个顶点满足 0-友好；特别要注意的是，这一猜想甚至弱于存在 0-友好二分的主张。Ferber、Kwan、Narayanan 和最后两位作者近期的工作解决了 Füredi 的这一猜想 [15]。然而，正如 [15], 中基于计算机模拟所提到的，甚至连 Füredi[1]，都认为，更强的猜想——存在一种划分，使所有节点都友好——似乎是合理的。

这一猜想也与 Sherrington–Kirkpatrick（SK）模型中存在有能隙态密切相关 [43]；Treves 和 Amit 的工作 [44]预测了这一现象。为精确描述该模型，考虑一个随机对称矩阵 J，其元素取 ± 1的概率相等。Treves 和 Amit 考察一种符号赋值的能隙 $\vec{x} \in \{\pm 1\}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \min_{i \in [n]} \sum_{j=1}^{n} J_{ij} x_i x_j$$

并猜想这种符号赋值 $\vec{x}$ 在间隙至少为 $2\gamma_{\text{crit}}$时存在。通过将 $\mathbb{G}(n, 1/2)$ 的边赋予状态 $+1$，并以显而易见的方式根据向量$\vec{x}$ 赋予划分，便可直接由定理 1.3 严格证明此类状态的存在性（事实上，$|\sum_i x_i| \le 1$）。

最后，Behrens、Arpino、Kivva 和 Zdeborová 的近期研究 [5] 基于统计物理中的副本法提出猜想，认为 定理 1.3 在底层图 G 为稀疏随机正则图时也成立。将这些作者的预测转换到与 $\mathbb{G}(n, 1/2)$ 相对应的稠密情形（参见 [5, 第 3 节，自旋玻璃中的有隙态在计算上难以寻找]）后，Behrens、Arpino、Kivva 和 Zdeborová 的研究 [5] 表明，满足以下条件的有隙态

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \min_{i \in [n]} \sum_{j=1}^{n} J_{ij} x_i x_j \ge \varepsilon \sqrt{n}$$

对于任何 $\varepsilon > 0$，找到此类结构在计算上都可能十分困难。此外，定理 1.3的证明还隐含地证明了，状态若满足 $(\gamma_{\text{crit}}/\sqrt{2} - \varepsilon)\sqrt{n}$友好，则以高概率具有重叠间隙性质（OGP）；具体而言，存在 $[\beta_1, \beta_2] \subseteq (0, 1/2)$，使得以高概率，任意两个 H友好划分在节点上的差异比例都不介于 β_1 与 β_2 之间。重叠间隙性质（及其变体）已被用于佐证众多约束满足问题在计算上的困难性（例如，参见 [9, 11, 21, 22, 28, 38]）；关于重叠间隙性质在随机结构优化中的关键作用，近期综述请参见 [19]。特别是，这些证据在一定程度上解释了我们为何不采用 [15] 中的构造性方法（该方法给出了一个 $O_\varepsilon(n^2)$时间算法，用于计算一个划分，其中两侧各有 $(1-\varepsilon)n$ 个节点是友好的），而转而采用基于二阶矩方法的非构造性方法。

我们在此简要指出，事实上，[5] 表明， H-友好划分的空间具有冻结的 1-RSB 结构。为这些预测提供进一步的数学证明仍然是一个值得研究的课题。特别是，我们认为，是否存在一种能够在多项式时间内计算.....的算法，这一问题值得关注。

[1]我们感谢 Benny Sudakov 提出的这一意见。

$\gamma\sqrt{n}$-友好划分（$\mathbb{G}(n,\ 1/2)$ 对于 $\gamma > 0$ 是一个引人入胜的开放性问题；特别是[5]（基于稀疏图类比中的证据）所做的工作表明，上述问题在计算上很可能是困难的，而基于重叠间隙性质或其较新变体提供证据，将会非常有吸引力。

1.2. **技术讨论**。 定理的证明 定理 1.3 总体上采用二阶矩方法，考察 H-友好划分的数量。通过对为枚举具有给定度序列的图而开发的工具进行专门调整，计算 H-友好划分数量的一阶矩和二阶矩。然而，底层矩似乎很可能并不在 $(1+o(1))$ 因子意义下相匹配，而只能相差一个常数因子。

因此，我们只能直接证明 H-友好划分的数量以某个正的常数概率非零，因此，我们需要借助单独的工具，将常数概率的结果提升为高概率结果。为此，我们依赖一种专门设计的等周结果，该结果最终源自近期关于布尔函数分析中 Talagrand 猜想的研究。因此，定理 1.3 的证明分为一系列实质上相互独立的步骤，下面我们将详细讨论这些步骤。

1.2.1. 图中的顶点适应等周性。 如前所述，我们证明了满足 $(\gamma_{\mathrm{crit}}/\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{n}$-友好的二等分数量的一阶矩和二阶矩相差一个常数因子。因此，应用 Paley–Zygmund 不等式可推出，在 定理 1.3 中存在一个划分，且其概率至少为常数。我们希望将其提升至 $1-o(1)$ 概率。

在深入探讨已证明的精确陈述之前，令 $\mathcal{F}$ 表示由 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 上具有 $(\gamma_{\mathrm{crit}}/\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{n}$-友好划分的图组成的图族，并先来看看直观的分析能告诉我们什么。仅仅把图看作 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 中的一个元素，应用超立方体上的边等周不等式便可得出，至少有 $1-\varepsilon$比例的图与 $\mathcal{F}$ 中某个图的编辑距离不超过 $O_\varepsilon(n)$ 条边。这立即给出一个划分，其中至多有 $O_\varepsilon(\sqrt{n})$ 个 $(\gamma_{\mathrm{crit}}/\sqrt{2}-\varepsilon^{1/2})\sqrt{n}$-不友好顶点。虽然这是一个很有希望的第一步，但这个证明忽略了 $\mathcal{F}$ 的底层 $\mathcal{S}_n$-不变性（因为具有 $(\gamma_{\mathrm{crit}}/\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{n}$-友好划分这一性质是图的性质）。

因此，我们想到，最优的顶点等周性陈述或许是：对于 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 上密度为常数的图族，如果允许在每个顶点处修改至多 $O_\varepsilon(1)$ 条边，就能到达几乎所有图。然而，可以考虑 Δ，使得概率$\mathbb{G}(n,1/2)$ 的最大度至多为 Δ 的概率为 ε。根据 Bollobás 的一项结果 [8], ，可以看出，若要有机会到达所有图中占 $1-\varepsilon$ 比例的图，就必须允~~许在某个~~顶点处修改大约为 $\log(1/\varepsilon)\sqrt{n}/\log\ n$ 条边。

我们的主要等周结果（定理 2.2）证明，上述例子在相差一个绝对常数的意义下已是最坏情形。这立即使我们能够推导出所需的尖锐阈值结果，因为在每个顶点处修改 $o(\sqrt{n})$ 条边，不会实质性改变图是否具有一个 $(\gamma_{\mathrm{crit}}/\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{n}$-友好划分。此外，我们指出，虽然这当然不是首次使用布尔函数来证明尖锐阈值定理（例如参见 [7, 16, 17]），但这里考察的底层性质在布尔立方体上并非单调，而且本文的论述还通过针对当前问题量身定制的度量（最大度距离）证明等周性，这也是一项新颖之处。

该等周结果的证明通过迭代应用 Talagrand 不等式来实现 [13, 14]。通过将（Talagrand 不等式的一个变体）应用于对称函数，可以发现，给定一个密度为 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$的图族，其中必然有许多点具有相当大的（正）敏感度，即，修改许多边后将产生许多新图的图。具体而言，我们得到了一组三分法，描述了可能成立的良好性质（引理 2.6）。利用这一点，可以根据每一步所处的情形，对底层图族 $\mathcal{F}$ 依次进行一系列“扩张操作”。我们可以借此证明，在相关度量（最大度

距离）中无需经过很远的距离，就可以将该图族扩张到密度翻倍，而这正是关键的 命题 2.3。要证明度量意义下的接近性，需要逆转扩张过程，并“回溯”某个图可能是如何被加入所考虑的图族中的。这一等周论证在 第 2 节 中完成，并且与本文其余部分相互独立。

最后，我们注意到，主要的等周性结果也可用于重新推导对称二元感知机的阈值（该结果最初由 Abbe、Li 和 Sly 证明 [1] ，并由 Perkins 和 Xu 独立证明[36]）；我们将在第 2.1 节进一步讨论这一关系。

1.2.2. 二阶矩计算。 在本文余下部分，我们将重点证明：如果X_γ 是 $\gamma\sqrt{n}$-友好划分的数量，那么 $\mathbb{E}X_\gamma^2 \lesssim (\mathbb{E}X_\gamma)^2$ 对于 $\gamma < \gamma_{\mathrm{crit}}$ 成立（见引理 3.2和3.3）。实际上，我们只会在临界阈值的邻域内证明这一结论；这是我们验证假设 1.5 所造成的限制，而将 γ 在这一计算中的取值范围扩展，自然会扩大引理 3.2和3.3的有效范围。在继续之前，值得指出的是，使解的数量的一阶矩和二阶矩一直匹配到临界阈值，绝非先验地 显然；特别是，这依赖于该模型冻结 1-RSB 的性质，这表明在临界点附近，相应的解空间由大小为次指数规模的簇组成。

为了了解 $\mathbb{E}X_\gamma$，注意到根据期望的线性性，只需计算给定划分为 $\gamma\sqrt{n}$-友好的概率。从启发式角度看，可以将每条边替换为均值为 $1/2$ 、方差为 $1/4$的高斯随机变量；这种模型与$\mathbb{G}(n,1/2)$具有相同的均值和方差。不过请注意，在这个高斯模型中， $\mathbb{G}(n,1/2)$中各顶点的度序列构成一个多维高斯向量。直接计算可知，这些度可以表示为该向量各分量之和以及一组独立随机变量的组合，每个顶点对应一个随机变量。Riordan 和 Selby 的工作中明确提出了这一启发式方法 [39, 第 3], 节，并用它计算了 $\mathbb{G}(n,1/2)$中给定图的最大度不超过 $n/2$的对数概率。因此，这种方法并不直接适用，因为其 $\exp(o(n))$ 阶的乘法误差项过大，无法直接派上用场（不过我们指出，若只要求存在一个至多有 $o(n)$ 个例外的友好划分，那么基于矩的这种计算就已足够，这归功于第 1.2.1 节概述的边等周论证）。然而，McKay、Wanless 和 Wormald 的工作 [32] 大幅改进了 Riordan 和 Selby 的工作，给出了 $\mathbb{G}(n,1/2)$中图的最大度不超过 $n/2$的渐近概率。这些结果又依赖于 McKay 和 Wormald 的有力工具 [33]，该工具能够枚举度序列足够规则的稠密图。

鉴于[33] McKay、Wanless 和 Wormald 的工作成果， [32]关键难点在于对具有给定最大度的所有度序列求和；在 McKay、Wanless 和 Wormald 的工作中， [32] 这是通过用某种倾斜的二项分布对度序列进行建模，并将问题归约为关于这些分布的局部中心极限定理的相关考量来实现的。尽管从理论上讲这种方法对于我们的问题是可行的，但它似乎并不合适，因为人们需要（对于二阶矩）追踪10 种不同的倾斜模式，而计算很快就会变得完全不可行。相反，我们采用 McKay 和 Wormald 的工作中给出的框架 [34] （由 McKay 和 Skerman 扩展到二部图 [31]），该框架通过首先对某个 $\mathbb{G}$（n， $1/2$）进行抽样来建立度序列模型，该量 p 接近 $1/2$ （它控制总边密度），然后在总和为偶数的条件下，将每个度视为独立的二项分布。需要注意的是，这一结果实际上立即使上一段中给出的启发式度分布变得严格明确。McKay 和 Wormald 的工作使用了这一点[34], 来（例如）计算 $\mathbb{G}$（n， $1/2$）中位数的渐近分布。然而，按原本的表述，McKay 和 Wormald 的工作 [34] 并不适用于指数稀有事件。相反，经过足够细致的考察可以发现，对其方法进行修改后，能够在概率中损失常数因子的情况下处理此类指数稀有事件。这一修改在第4节中进行处理。

利用第4节中的结果，经过直接但冗长的计算，可将一阶矩和二阶矩的计算归结为若干明确的3 维和10 维高斯积分。理论上，可以通过网格搜索求出这些积分的最大值，但这在计算上似乎难以实现。我们转而采用 Gamarnik 和 Li 的一项观察[20] ：他们研究了正则常度随机图中的友好划分，并指出，可以利用高斯随机变量某些尾概率的对数凹性来简化某个高斯优化问题。通过巧妙地运用这些技巧，一阶矩和二阶矩（其中结合利用对称性与对数凹性时需要谨慎处理）可归结为验证某个单变量函数和某个3维函数（见假设 1.5）的最优值以适当的方式相匹配。

最后，我们指出，上述讨论隐含地假设了 McKay 和 Wormald [33] 的度枚举结果（以及 McKay 和 Skerman [31] 对二部图的推广）对所有度序列都一致适用；遗憾的是，这些结果自然只适用于最大度和最小度均在中位度的 $O(n^{1/2+\delta})$ 范围内的度序列。因此，我们使用切换来 先验地 证明：即使以给定的一对重叠划分为 $\gamma\sqrt{n}$-友好这一指数级小概率为条件，非典型度序列的贡献仍然很小。McKay、Wanless 和 Wormald [32]，的工作也采用了类似策略，但该工作依赖于这样一个事实：低于给定最大度这一事件关于所有边都是单调的，而这一点在他们的论证中起着至关重要的作用。当考察一对重叠划分时，会遇到更复杂的约束，因此需要更加复杂的论证。

相反，该论证利用相对于约束自然递减或递增的边的子集，证明以超多项式高概率，恰好满足阈值约束的顶点比例至多为 $O(n^{-1/2+\eta})$。随后，在这类临界顶点极少这一事件下，可以用相对直接的切换论证来证明所需的最大度和最小度事件；这里利用临界顶点数量很少这一事实，来证明可进行的切换次数基本符合预期。

1.2.3. 对 假设 *1.5* 的验证。 现在，我们终于陈述关键的数值计算。首先，我们正式定义一系列将在全文中出现的特殊函数。

定义 1.4. 固定 $\gamma \in \mathbb{R}$。则

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &:= \log 2 - \alpha^2 + \log(\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma+\alpha)\sqrt{2}]), \\ f(\beta,\alpha) &:= \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_2 \geq \gamma+\alpha \wedge \sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_2 \geq \gamma+\alpha\right], \\ F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) &:= 2\log 2 - 2\beta\log\beta - 2(1-\beta)\log(1-\beta) - 2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 \\ &\quad + 2\beta\log f(\beta,\alpha_1) + 2(1-\beta)\log f(1-\beta,\alpha_2). \end{aligned}$$

通过计算机辅助计算验证的关键计算部分是以下命题。

假设 1.5。 固定 $\varepsilon_{1.5} = 10^{-25}$ 和 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$。我们有 that

$$\sup_{\substack{\beta\in[0,.001]\\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) = 2\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha)$$

and

$$\sup_{\substack{\beta\in[.001,.999]\\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) = 4\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha).$$

此外，令 $\alpha(\gamma) := \text{最大值点}_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha)$。那么，在 $(1/2, \alpha(\gamma)\ \alpha(\gamma))$ 处计算的 F_2 的海森矩阵是严格负定的，并且对于 $\beta \in [.001, .999]$，$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 的唯一最优解出现在 $(1/2, \alpha(\gamma)\ \alpha(\gamma))$ 处。

如假设 1.5 所述，该假设断言两个据推测为超越量的量相等，因此在验证此类假设时需要格外谨慎。假设 1.5 的一种等价表述是：$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 的最大值要么在 $(1/2, \alpha(\gamma)\ \alpha(\gamma))$ 处取得，要么在 $(0, 0, \alpha(\gamma))$ 处取得，要么在 $(1, \alpha(\gamma), 0)$ 处取得。直观来看，这意味着应验证 F_2 在这些点的邻域内是凹的，然后在参数空间的其余部分进行网格搜索。然而，这一过程在计算上似乎难以承受，因此我们选择一种更为精细的方法。$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 的关键特征在于，对于固定的 β，它是严格凸的；因此，至少对于固定的 β，可以直接构造一对值 (α_1, α_2)，并证明 $F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 足够小，且在 α_1, α_2 中的导数也足够小，从而不可能达到所需的上确界。

˜为了同时处理一系列 β，我们为 $F(\alpha_1, \alpha_2)$构造一个可统一处理一系列 β 的主控函数。此外，这个主控函数具有特定结构，能够通过某种类似牛顿迭代的过程˜生成 $F(\alpha_1, \alpha_2)$的近似最优值，从而实现高效优化。这使我们基本上能够处理 $\beta \notin [0, .001] \cup [.495, .505] \cup [.999, 1]$。由于对称性，只需处理 $\beta \in [0, .001] \cup [.495, .50]$。

对于第一个区间，可以通过直接的数学论证验证，对于所有相关的（α_1，α_2），都有 $F(0, \alpha_1, \alpha_2) \geq F(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$；这种论证是可行的，因为在 0 的邻域内，$\beta$ 中 $F(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 的导数为 $-\infty$（这是模型呈现冻结的1-RSB行为的一种表现）。最后，对于 $\beta \in [.495, .5]$，可以采用与最初处理不接近 0、$1/2$、1 的 β 部分时类似的数值过程，将（α_1，α_2）定位到目标最优解周围的某个小球内，并通过网格搜索计算验证海森矩阵为负定。

附录 B 中的各项数值断言均使用 Python 3 和 numpy、scipy 进行计算，随后又分别使用采用浮点运算的 mpmath，以及用于区间算术的严格数值计算库 python-flint 进行计算。（这里需要说明的是，python-flint 是 C++ [29] 中区间算术软件包 Arb 的一个封装。）除用于验证断言 B.4 的断言 B.19 至 B.21 外，我们均为数值附录中的所有断言给出了形式化证明；断言 B.19 至 B.21 的数值计算仅通过 numpy 和 scipy 以及 mpmath 分别进行了验证。这主要是因为作者尚不了解任何能够进行严格多维数值积分的软件包；不过，所需的界只要求精确到小数点后 2 位或 3 位，其敏感程度远低于其他界。我们已在 arXiv 页面中附上 Python 代码；断言 B.1 至 B.3 中由计算机辅助完成的部分由 InitialLocalizationViaConvexity.py 实现，而断言 B.4 中由计算机辅助完成的部分则由 VerificationOfHessianConditions.py 和 IntegralSupplement.py 实现。

1.3. 记号。全文采用标准的渐近记号，定义如下。对于函数 $f = f(n)$ 和 $g = g(n)$，我们写作 $f = O(g)$ 或 $f \lesssim g$，表示存在常数 C，使得当 n 充分大时，$|f(n)| \leq C|g(n)|$。类似地，我们写作 $f = \Omega(g)$ 或 $f \gtrsim g$，表示存在常数 $c > 0$，使得当 n 充分大时，$f(n) \geq c|g(n)|$。最后，我们写作 $f \asymp g$ 或 $f = \Theta(g)$，表示 $f \lesssim g$ 且 $g \lesssim f$；我们写作 $f = o(g)$ 或 $g = \omega(f)$，表示当 $n \to \infty$ 时，$f(n)/g(n) \to 0$。渐近记号的下标表示应视为常数的量。

此外，除非特别指定底数，否则对数均采用自然对数。对于整数 $k \geq 0$，我们将 $\log^{(k)} x$ 写作 k 次迭代对数 $\log \cdots \log x$。于是，$\log^* x$ 对于 $x \geq 1$ 定义为满足 $\log^{(k)} x \in [1, e)$ 的唯一非负整数 k。最后，我们用 $C_{2.2}$ 或 $c_{2.6}$ 表示存在这样一个正的绝对常数，使相关命题按所述形式成立，但我们并不关心指定其明确取值。

1.4. **论文结构**。 在第 2 节 中，我们证明主要的适应顶点的等周结果定理 2.2。在第 3 节 中，我们将定理 1.3 归约为两个矩计算（引理 3.2 和3.3）。在第4节 中，我们给出度序列与度序列模型之间所需的比较。在第 5 节 中，我们使用切换来消除非典型度序列的贡献。在第 6 节中，我们陈述并证明证明定理 1.3时所使用的必要的对数凸性结论。最后，在第 7 节 中，我们证明引理 3.2 和3.3。

在附录 A中，我们精确计算了若干二项式系数的尾部，这些计算用于主要的矩结论；在附录 B中，我们完成了假设 1.5的计算机辅助验证中的数学部分。

1.5. **同期工作**。在同期工作中，Dandi、Gamarnik 和 Zdeborová 证明了定理 1.3的一个类似结果，允许存在 $o(n)$ 个例外顶点。证明采用 Lindeberg 交换方法，将问题化简为关于稀疏图的问题。随后，他们扩展了 Gamarnik 和 Li 的工作 [20] ，证明了稀疏图的所需结论；在此处，稀疏性起着关键作用，因为它使得能够计算配置模型中的各种概率。

致谢。第二和第三位作者感谢 David Gamarnik 提请我们注意 [20] ，这成为我们工作的起点。第三位作者感谢 George Barbulescu 和 Naveen Rameen 帮助安装 python-flint 库，并协助编写多进程代码以缩短运行时间。

2. 通过布尔函数实现友善性的集中

现在，我们证明关于图子集的所需扩张结果，其中所采用的度量是在某个顶点处的最大度差异度量。

定义 2.1。 对于固定顶点集 V 上的任意两个图，令

$$d(G,H)=\Delta(G\triangle H),$$

其中， $\triangle$ 表示取边集等于给定边集的对称差的图，即 $(E(G)\setminus E(H))\cup(E(H)\setminus E(G))$，而 Δ 表示最大度。

注意， $d(G,H)$ 显然在图的集合上定义了一个度量。本节的主要结果如下所示的扩张结果。

定理 2.2。 设 $\mathcal{G}$ 是标号顶点集 V 上的一个图族，其具有 $\mathfrak{S}_n$-不变性 [2] ，并令 $\mu(\cdot)$ 表示 n 个顶点的标号图上的均匀测度。设 $\varepsilon\in(0,1)$，其可能依赖于 n。假设 $\mu(\mathcal{G})\geq\varepsilon$ ，并令

$$\mathcal{G}_T=\{H\colon \min_{G\in\mathcal{G}} d(G,H)\leq T\}.$$

Then

$$\mu(\mathcal{G}_{C_{2.2}\log(1/\varepsilon)\sqrt{n/\log n}})\geq 1-\varepsilon.$$

注。 由于考虑了 $\mathbb{G}(n,1/2)$ 中最大度低于某个固定阈值的图，并使用了 Bollobás [8]关于这一分布的结果，该定理在常数因子（包括对 n 和 ε 的依赖）意义下是最优的。

注记。 对于具有两侧 n,m 且满足 $n=\Theta(m)$ 的二部图的性质，如果这些性质具有 $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m$-不变性，则这一结果也有类似的结论。

我们首先进行一个初步简化。

[2] $\mathcal{G}$ 也可以等价地视为一族无向图。[3]等价地， $\mu(\mathcal{S})$ $=\mathbb{P}_{G\sim\mathbb{G}(n,1/2)}[G\in\mathcal{S}]$

命题 2.3。 设 $\varepsilon \in (0,1/4]$。设 $\mathcal{G}$ 是定义在标号顶点集 V 上的一个图族，且具有$\mathfrak{S}_n$-不变性；设 $\mu(\cdot)$ 为 n 个顶点上的标号图的均匀测度。假设$\mu(\mathcal{G}) \geq \varepsilon$，并令

$$\mathcal{G}_T = \{H\colon \min_{G\in\mathcal{G}} d(G,H) \leq T\}.$$

Then

$$\mu(\mathcal{G}_{C_{2.3}\sqrt{n/\log n}}) \geq 2\varepsilon.$$

我们简要概述这一化简过程。

定理 2.2 的证明（假设命题 2.3 成立）。迭代应用命题 2.3，即可立即证明 $\mu(\mathcal{G}_{C\log(1/\varepsilon)\sqrt{n/\log n}}) \geq 1/2$，其中绝对常数 C 选取得当。要将概率从 $1/2$ 提升到 $1-\varepsilon$，令 $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_{C\log(1/\varepsilon)\sqrt{n/\log n}}$。设对 $\delta \in (0,1/2]$，有 $\mu(\mathcal{G}_0) = 1-\delta$。考虑与 $\mathcal{G}_0$ 的距离至少为 $C\sqrt{n/\log n}$ 的图，记为 $\mathcal{G}_1$。应用命题 2.3 可得 $\mu(\mathcal{G}_1) \leq \delta/2$（因为 $C\sqrt{n/\log n}$ 邻域与 $\mathcal{G}_0$不相交）。迭代此过程 $O(\log(1/\varepsilon))$ 次，即得所述结果。□

为证明 命题 2.3 我们需要布尔函数分析中的一些标准定义。

定义 2.4。 给定一个函数 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，定义第 i 个变量的影响力 为$I_i[f] = \mathbb{P}[f(x) \neq f(x\oplus e_i)]$,，其中 e_i是第 i个基向量， $\oplus$是 $\mathbb{F}_2$加法。此外，定义函数 f的总影响力 为 $I[f] = \sum_{i\in[n]} I_i[f]$。最后，定义函数 f 在点 x 处的正敏感度 为

$$s_f^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) = 1 \\ \sum_{i\in[n]} f(x\oplus e_i) & \text{if } f(x) = 0. \end{cases}$$

我们将需要以下 Talagrand 不等式强化形式的一个变体，该变体由 Eldan、Kindler、Lifshitz 和第一作者在 [14, 定理 1.2]给出的证明中推出。唯一需要的修改是注意到，[14, 引理 3.1] 可以替换为 $\mathbb{E}\left[\sqrt{s_f^+(x)}\right] \geq \sqrt{\sum_{i\in[n]} \hat{f}(\{i\})^2}$。

定理 2.5. 对于任意函数 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$,

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{s_f^+(x)}\right] \gtrsim \mathrm{var}(f)\cdot\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\sum_{i\in[n]} I_i[f]^2}\right)}.$$

特别地，如果 $\sum_{i\in[n]} I_i[f]^2 \leq n^{-1/4}$ 那么

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{s_f^+(x)}\right] \gtrsim \mathrm{var}(f)\sqrt{\log n}.$$

事实上，我们只会将定理 2.5 用于集合 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 上的函数 f；这些图在重新标号顶点后保持对称。因此我们有，$I_{(i_1,i_2)}[f]$ 与数对 (i_1,i_2) 独立。由此，我们现在为对称函数 f 推导出以下三分法。

引理 2.6. 设 $\varepsilon \in (0,1/4]$ 和 $f\colon \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} \to \{0,1\}$ 满足 $\mathbb{E}f \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$。那么，如果 f在自然的 $\mathfrak{S}_n$-作用下保持对称，则以下结论之一成立；其中，我们从标号图上的均匀测度中抽取 $x\colon \mu$

Inf1 $\mathbb{P}[s_f^+(x) > 0] \geq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n/n}$
推论 2 存在整数 $j \in [\lfloor(\text{对数}_2\, n)/2\rfloor, \lfloor\text{对数}_2\binom{n}{2}\rfloor]$ 使得

$$2^j\mathbb{P}[s_f^+(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \geq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{n}(\log n)^5.$$

推论 3 存在整数 $\ell \in [2, \text{对数}^* n - 1]$, $j \in [\lfloor \text{对数}_2 n + 30\text{对数}^{(\ell+1)} n \rfloor, \lfloor \text{对数}_2 n + 30\text{对数}^{(\ell)} n \rfloor]$ 使得

$$2^{j/2}\mathbb{P}[s_f^+(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \geq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n}/(\log^{(\ell)} n)^2.$$

证明。注意，我们可以假设 n 大于一个绝对常数（该常数不依赖于 ε）。假设 **Inf1** 不成立，即 $\mathbb{P}[s_f^+(x) > 0] < c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n/n}$ 其中常数将在稍后选定。此外，注意到

$$I[f] \asymp \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor} 2^j\mathbb{P}[s_f^+(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \lesssim \sum_{j=\lfloor (\log_2 n)/2 \rfloor}^{\lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor} 2^j\mathbb{P}[s_f^+(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] + n^{1/2}.$$

如果 $I[f] \geq n^{1/2}(\log n)^6$，那么存在 $j \in [\lfloor (\log_2 n)/2 \rfloor, \lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor]$，使得

$$2^j\mathbb{P}[s_f^+(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \gtrsim \sqrt{n}(\log n)^5,$$

它将满足 **Inf2** 只需适当选取 $c_{2.6} > 0$。

因此，若进一步假设 Inf2 不成立，那么在剩下的情形中，我们可以假设 $I[f] \leq n^{1/2}(\log n)^6$, $\mathbb{P}[s_f^+(x) > 0] \leq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n/n}$，且 $w_j := 2^j\mathbb{P}[s_f^+(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \leq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{n}(\log n)^5$对所有 $j \in [\lfloor (\log_2 n)/2 \rfloor, \lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor]$均成立。利用 f 是对称的这一点，我们有

$$\sum_{(i_1,i_2)\in\binom{[n]}{2}} I_{(i_1,i_2)}[f]^2 = \binom{n}{2}^{-1} I[f]^2 \leq n^{-1/2}.$$

因此，根据定理 2.5 以及关于 $\mathbb{E}f$ 的条件，$\mathbb{E}[\sqrt{s_f^+(x)}] \gtrsim \varepsilon\sqrt{\log n}$。注意到

$$\mathbb{E}[\sqrt{s_f^+(x)}] \asymp \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor} 2^{-j/2} w_j$$

并且

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n + 100 \rfloor} 2^{-j/2} w_j \leq 2^{(\log_2 n + 100)/2}\mathbb{P}[s_f^+(x) > 0] \lesssim c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n}.$$

此外

$$\sum_{j=\lfloor \log_2 n + 30\log\log n \rfloor}^{\lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor} 2^{-j/2} w_j \leq 2^{-(\log_2 n + 30\log\log n)/2} c_{2.6}\varepsilon\sqrt{n}(\log n)^5 \lesssim c_{2.6}\varepsilon(\log n)^{-1}.$$

Co结合这三个不等式（适当选取足够小的 $c_{2.6}$），可得 th at

$$\sum_{j=\lfloor \log_2 n + 100 \rfloor}^{\lfloor \log_2 n + 30\log\log n \rfloor} 2^{-j/2} w_j \gtrsim \varepsilon\sqrt{\log n}. \tag{2.1}$$

现在 $\ell \in [2, \log^* n - 1]$, $j \in [\lfloor \log n + 30\log^{(\ell+1)} n \rfloor, \lfloor \log n + 30\log^{(\ell)} n \rfloor]$ 覆盖了 j 在 $\lfloor \log_2 n + 100 \rfloor$ 与 $\lfloor \log_2 n + 30\log\log n \rfloor$之间的取值区间。因此，若所需的指标中没有一个满足**Inf3**，那么左侧 (2.1) 的总贡献可由以下方式界定

$$\sum_{j=\lfloor \log_2 n + 100 \rfloor}^{\lfloor \log_2 n + 30\log\log n \rfloor} 2^{-j/2} w_j \leq \sum_{\ell\in[2,\log^* n - 1]} \frac{c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n}}{\log^{(\ell)} n} \lesssim c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n}$$

这与 (2.1) 矛盾，前提是$c_{2.6}$ 足够小。 □

给定这些 我们现在已经可以证明以下事实命题 2.3，从而得到定理 2.2。

命题 *2.3* 的证明命题 *2.3*。我们定义 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}$ 的一系列展开如下，其中每一个都是一个$\mathfrak{S}_n$-对称布尔函数。对于每个 $i \geq 1$，如果 $\mu(\mathcal{F}_{i-1}) \geq 2\varepsilon$，则停止。否则，假设$\mu(\mathcal{F}_{i-1}) \in [\varepsilon, 2\varepsilon)$。令 $f_{i-1} = \mathbb{I}^{\mathcal{F}_{i-1}}$，并注意到 f_{i-1} 是一个对称布尔函数。

算法1 如果 $\mathbb{P}[s^+_{f_{i-1}}(x) > 0] \geq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n/n}$，定义 $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{i-1} \cup \{x\colon s^+_{f_{i-1}}(x) > 0\}$.

算法2 否则，如果存在 $j \in [\lfloor(\log_2 n)/2\rfloor, \lfloor\log_2 \binom{n}{2}\rfloor]$ 满足

$$2^j\mathbb{P}[s^+_{f_{i-1}}(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \geq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{n}(\log n)^5$$

然后定义 $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{i-1} \cup \{x\colon\ s^+_{f_{i-1}}(x) \in [2^j, 2^{j+1}]\}$。

算法3 否则，存在 $\ell \in [2, \log^* n - 1]$、$j \in [\lfloor\log_2 n + 30\log^{(\ell+1)} n\rfloor, \lfloor\log_2 n + 30\log^{(\ell)} n\rfloor]$，使得

$$2^{j/2}\mathbb{P}[s^+_{f_{i-1}}(x) \in [2^j, 2^{j+1}]] \geq c_{2.6}\varepsilon\sqrt{\log n}/(\log^{(\ell)} n)^2$$

然后定义 $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{i-1} \cup \{x\colon\ s^+_{f_{i-1}}(x) \in [2^j, 2^{j+1}]\}$。

根据 引理 2.6，这些情形中至少有一种会发生，因此这一定义良好。注意，在展开的每个阶段，f_{i-1} 的对称性意味着 f_i 也是对称的。结合 $2\varepsilon \leq 1 - \varepsilon$这一事实，我们看到 引理 2.6 的应用始终有效。此外，注意每个$H \in \mathcal{F}_i$ 要么属于 $\mathcal{F}_{i-1}$，要么是由 $\mathcal{F}_{i-1}$ 中的某个图通过翻转一条边（加入或移除）得到的。

请注意，$s^+_{f_{i-1}}(x) > 0$ 仅在 $x \notin \mathcal{F}_{i-1}$时才有可能。因此，如果算法1发生，则为 $\mu(\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}) \gtrsim \varepsilon\sqrt{\log n/n}$；如果参数为 j 的算法2发生，则为 $\mu(\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}) \gtrsim \varepsilon\sqrt{n}(\log n)^5/2^j$；如果参数为 ℓ 和 j 的算法3发生，则为 $\mu(\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}) \gtrsim \varepsilon\sqrt{\log n}/(2^{j/2}(\log^{(\ell)} n)^2)$。

由于密度达到 2ε 后我们就停止该过程，算法1最多执行 $O(\sqrt{n}/\log n)$ 步；对于每个可能的参数 j，算法2最多执行 $O(2^j/(\sqrt{n}(\log n)^5) + 1)$ 步；对于每种可能的参数选择 ℓ, j，算法3最多执行 $O(2^{j/2}(\log^{(\ell)} n)^2/\sqrt{\log n})$ 步，其中隐含常数与 ε 无关。因此，上述过程必定会在某个时刻 t 停止，且此时 $\mu(\mathcal{F}_t) \geq 2\varepsilon$。现在我们证明，$\mathcal{F}_t$ 中的任意图在图距离意义上都接近 $\mathcal{F}_0$（定义 2.1），由此即可完成证明。

考虑某个 $H \in \mathcal{F}_t$。令 $H_t = H$。此外，令 R_j，对于 $j \in [\lfloor(\log_2 n)/2\rfloor, \lfloor\log_2 \binom{n}{2}\rfloor]$ 以及 $R_{\ell,j}$，对于 $\ell \in [2, \log^* n - 1]$ 和 $j \in [\lfloor\log_2 n + 30\log^{(\ell+1)} n\rfloor, \lfloor\log_2 n + 30\log^{(\ell)} n\rfloor]$，它们是“记录图”，初始时均为空图，定义在 $V = V(H)$ 上。对于按降序排列的 $i \in [t]$，我们执行以下操作：

算法0’ 如果 $H_i \in \mathcal{F}_{i-1}$ 让 $H_{i-1} = H_i$。递减 i 并重新开始循环。算法1’ 否则，如果使用算法1生成了进一步的 $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$，则任意选择 $H_{i-1} \in \mathcal{F}_{i-1}$ 为与 H_i 距离为1的图之一（仅进行一次边翻转）。算法2’ 否则，如果使用带参数 j的算法2生成了 $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$，则选择 $H_{i-1} \in \mathcal{F}_{i-1}$ 为与 H_i距离为1的图之一。如果可能，我们选择它时还满足以下性质：如果 e_i 是差异边，则将 e_i 添加到记录图 R_j 不会增加 R_j的最大度。（如果 e_i 已存在于 R_j中，将其添加进去不会改变 R_j。）算法3’ 否则，如果使用参数为 ℓ、j的算法3生成了 $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$，则选择 $H_{i-1} \in \mathcal{F}_{i-1}$ 为与 H_i距离为1的图之一。如果可能，我们选择它时还满足以下性质：如果 e_i 是差异边，则将 e_i 添加到记录图 R_j 不会增加 R_j的最大度。

这显然是定义良好的，因为每个 $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$ 都是通过以下算法之一生成的：**算法1** 至**算法3**，并且 $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$ 中的任意图也都是通过翻转 $\mathcal{F}_{i-1}$中某个图的一条边生成的。此外，我们有$H_0 \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{G}$。

对于所有 $i \in [t]$，令 e_i 为 H_{i-1}、H_i之间的差异边。显然，$H_0 \triangle H_t$ 是所有这些边的并集的子图，记作 R（例如，如果某一步翻转了一条边，而另一步又再次翻转了它，那么 $H_0 \triangle H_t$ 可能是 R 的真子图）。只需给出 R的最大度上界即可。令 R^*

为以下各项中的边的并集：**算法1**，并令 R_j^*、$R_{\ell,j}^*$分别为各种参数选择下记录图 R_j、$R_{\ell,j}$的最终值。

与 e_i 相对应的 **算法1** 至多有 $O(\sqrt{n}/\log n)$ 条边。根据前面的分析，因此 $\Delta(R^*) = O(\sqrt{n}/\log n)$。

对于参数为 j 的算法2，令 $k = 2^j$，并回顾一下，至多存在 $O(k/(\sqrt{n}(\log n)^5) + 1)$ 个对应的相关步骤 i。对于满足 $k \le n(\log n)^2$, 的 j，这相当于总共 $O(\sqrt{n}/(\log n)^3)$ 条边，因此显然有 $\Delta(R_j^*) = O(\sqrt{n}/(\log n)^3)$。

对于满足 j $(\log n)^2 < k \le n^2$ 的 n，考虑任意相关步骤 i。设我们有一个图 $H_i \in \mathcal{F}_i$ 和一个当前的记录图 R_j，并选择一个与 H_i 距离为 1 的 $H_{i-1} \in \mathcal{F}_{i-1}$。令 $\Delta = \lfloor \sqrt{n}/(\log n)^2 \rfloor$。若在步骤 i 之前 $\Delta(R_j) < \Delta$，那么显然在步骤 i之后 $\Delta(R_j) \le \Delta$。否则，在步骤 i之前 $\Delta(R_j) \ge \Delta$。根据算法2的定义，至少有 k 种选择与 H_i 距离为 1 的 $H_{i-1} \in \mathcal{F}_{i-1}$。等价地，至少有 k 种 e_i 的选择。若所有这些选择都至少有一个端点在 R_j 中的度不小于 Δ，那么 R_j 至少有 k/n 个度不小于 Δ 的顶点，因此总边数至少为 $(k\Delta)/(2n)$。这与我们对参数为 j 的算法2步骤数的上界 $O(k/(\sqrt{n}(\log n)^5) + 1)$ 矛盾。也就是说，一旦最大度达到 Δ，总能找到一种选择使其保持不变。因此我们看到，$\Delta(R_j^*) \le \Delta = O(\sqrt{n}/(\log n)^2)$。

最后，对于参数为 ℓ, j 的算法3，令 $k = 2^j$，并回忆此前的分析表明，相关步骤总数至多为 $O(\sqrt{k}(\log^{(\ell)} n)^2/\sqrt{\log n})$ i。我们可以像前一种情形那样进行类似论证。令 $\Delta_{\ell,j} = Kn(\log^{(\ell)} n)^4/\sqrt{2^j \log n}$，其中 K 是一个充分大的绝对常数。根据算法3的定义，至少有 k 种 H_{i-1} 的选择，或者等价地说，有 e_i 条边。如果所有这些选择中至少有一个端点的度不小于 Δ_ℓ，那么 j 在 $R_{\ell,j}$ 中至少有 $R_{\ell,j}$ $(k\Delta_{\ell,j})/(2n)$ 条边。只要 K 选得足够大，这就会违反相关步骤数量的上界 i。因此，按照对算法2的分析中的类似论证可知，$\Delta(R_{\ell,j}^*) \le \Delta_{\ell,j}$。

最后，

$$\begin{aligned}
\Delta(R) &\le \Delta(R^*) + \sum_{j=\lfloor (\log_2 n)/2 \rfloor}^{\lfloor \log_2 \binom{n}{2} \rfloor} \Delta(R_j^*) + \sum_{\ell=2}^{\log^* n - 1} \sum_{j=\lfloor \log_2 n + 30\log^{(\ell)} n \rfloor}^{\lfloor \log_2 n + 30\log^{(\ell+1)} n \rfloor} \Delta(R_{\ell,j}^*) \\
&\lesssim \sqrt{\frac{n}{\log n}} + (\log n) \cdot \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2} + \sum_{\ell=2}^{\log^* n - 1} \frac{n(\log^{(\ell)} n)^4}{\sqrt{2^{\lfloor \log_2 n + 30\log^{(\ell+1)} n \rfloor} \log n}} \\
&\lesssim \sqrt{\frac{n}{\log n}} + \sqrt{\frac{n}{\log n}} \sum_{\ell=2}^{\log^* n - 1} \frac{(\log^{(\ell)} n)^4}{2^{15\log^{(\ell+1)} n}} \lesssim \sqrt{\frac{n}{\log n}} \left(1 + \sum_{\ell=2}^{\log^* n - 1} \frac{1}{\log^{(\ell)} n}\right) \lesssim \sqrt{\frac{n}{\log n}}.
\end{aligned}$$

结论成立，因为这证明了每个 $H \in \mathcal{F}_t$ 都满足 $\Delta(H \triangle H_0) = O(\sqrt{n}/\log n)$，其中某个 $H \in \mathcal{G}$ 存在；并且 $\mu(\mathcal{F}_t) \ge 2\varepsilon$。□

2.1. 本文之外的应用。最后，我们进一步阐述第 1.2.1 节中的一条评论：定理 2.2 可用于推导对称二元感知机的容量阈值。回顾一下，参数为κ 的对称二元感知机（具有伯努利无序）的阈值定义如下：依次取一系列随机向量 $x_1, \ldots \in \{\pm 1\}^n$，并询问首次出现 τ 时，是否不存在满足 $|\langle x_i, y\rangle| \le \kappa\sqrt{n}$ 对所有 $i \in [\tau]$均成立的 $y \in \{\pm 1\}^n$。Aubins、Perkins 和 Zdeborová 的工作 [3]（基于二阶矩方法）证明，存在一个连续函数 $\alpha(\kappa)$，使得在高斯无序的情况下，阈值以高概率小于 $(\alpha(\kappa) + o(1))n$，且以 $\Omega(1)$ 的概率至少为 $(\alpha(\kappa) - o(1))n$；他们的方法同样适用于伯努利无序。将向量 $x_1, \ldots, x_m$ 视为二部图的 $m \times n$ 邻接矩阵，定理 2.2 之后关于二部图的评论立即推出，当 $(\alpha(\kappa) - o(1))n$时，以高概率存在

一个向量 y 使得 $|\langle x_i,\ y\rangle| \le (\kappa + o(1))\sqrt{n}$。由 $\alpha(\kappa)$ 的连续性，这就确立了对称感知机模型的锐利阈值。我们还指出，基本相同的论证可以证明，给定 m的解的数量在指数尺度上集中。（需要指出的是，Abbe、Li 和 Sly 在没有定理 2.2 的情况下，已针对伯努利无序证明了阈值的锐利性并对解进行计数；而 Perkins 和 Xu [36] 则针对高斯无序得到了相同结果。）

我们注意到，在感知机模型的背景下，采用定理 2.2 这类思路的一般论证，在适当意义下给定“激活函数相对于变形的单调性”后，可以证明尖锐阈值。若能先验地证明该（未必尖锐的）阈值关于适当的“变形参数”连续，那么定理 2.2或类似论证便可能适用，从而得到尖锐性。这类一般性结果已由 Xu 的工作确立[46], ，Nakajima 和 Sun 的工作则给出了大幅简化的证明 [35]。我们在此指出，Perkins 和 Xu 的方法 [46] 以及 Nakajima 和 Sun 的方法 [35] 依赖于感知机模型中“逐行”的独立性，因此似乎根本不适用于证明我们所研究情形下的尖锐性。Xu 的工作[46] 则更类似地依赖于布尔函数和对称性；不过，它需要以 Hatami 的深刻工作为基础 [27]。最后，Abbe、Li 和 Sly 的工作 [1]基于稠密图中小子图条件化的一种类比方法，而且至少需要能够将定理 1.3 所涉及的矩计算到乘法$1+o(1)$精度。这在计算上似乎几乎不可行。此外，还需要证明各种相关度约束模型中子图计数的渐近正态性（这方面直到最近才取得进展 [42]）。

3. 二阶矩计算的准备工作

现在，我们给出本文后续部分所需的定义。

定义 3.1. 令 $G \sim \mathbb{G}(2n,1/2)$ 和 V 表示 G 的顶点集。此外，令 X_γ 表示 G 的等分划分 $V = Y_1 \cup Y_2$ 的数量，使得对于每个顶点 $y \in Y_1$，都有 $\deg_{Y_1}(y) \ge \deg_{Y_2}(y) + \gamma\sqrt{n}$，并且对于每个 $y \in Y_2$，都有 $\deg_{Y_2}(y) \ge \deg_{Y_1}(y) + \gamma\sqrt{n}$。我们始终考虑具有性质 $\gamma\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ 的 $\gamma \in [-1,1]$。

这两个关键 所有计算都给出了 $\mathbb{E}[X_\gamma]$ 和 $\mathbb{E}[X_\gamma^2$ 的精确（相差一个常数因子）渐近式。].

引理 3. **2.** 假设 $|\gamma| \le 1$ 且 $\gamma\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$。那么，采用定义 *3.1* 中的记号 ，

$$\mathbb{E}X_\gamma \asymp \binom{2n}{n}\left(\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \exp(-\alpha^2)\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \ge (\gamma+\alpha)\sqrt{2}]\right)^{2n} = 4^{-n}\binom{2n}{n}\exp(2n\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha)).$$

引理 3.3。 假设假设 *1.5* 成立。固定 $\eta > 0$ 并假设 $\gamma \in [\gamma_{\mathrm{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\mathrm{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$且$\gamma\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$。那么，采用定义 *3.1* 中的记号，

$$\mathbb{E}X_\gamma^2 \lesssim_\eta (1+\eta)^n \mathbb{E}X_\gamma + 16^{-n}\binom{2n}{n}^2 \exp\left(n \sup_{\substack{\beta\in[0,1]\\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2)\right).$$

备注。 我们当然相信引理 3.3 对所有 γ都成立；这里对 γ 取值范围的限制，恰恰源于假设1.5。

现在，在假设 1.5 和引理 3.2 及3.3给定的条件下，证明定理 1.3 。在下面的论证中，我们不会过于在意$\gamma\sqrt{n}$ 是否为整数，因为这在此处无关紧要；不过需要指出，在第 7 节 中，证明引理 3.2 和3.3 时，必须注意整数性问题。

证明。 选取足够小的 $\varepsilon > 0$，并注意到直接数值计算可验证 $0 \le \gamma_{\mathrm{crit}} \le 1/2$。我们首先证明，高概率下，$G \sim \mathbb{G}(2n,1/2)$不存在这样的等分划分：其中每个顶点在其所属部分中的顶点数至少比另一侧多$(\gamma_{\mathrm{crit}}/\sqrt{2} + \varepsilon)\sqrt{2n}$。注意

that $\gamma \mapsto \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}(-\alpha^2 + \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma+\alpha)\sqrt{2}])$ 显然是严格递减的函数。因此，根据引理 3.2 和定义 1.2，期望的 $(\gamma_{\text{crit}}/\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{2n}$-友好等分划分数量呈指数级小。由马尔可夫不等式可知，以 $1-\exp(-\Omega_\varepsilon(n))$ 的概率不存在此类等分划分。奇数情形的类似结果可由如下方式推出：若在 $\mathbb{G}(2n-1,1/2)$ 中存在一个足够友好的划分，那么向较小的一部分加入一个邻点均匀随机的顶点，使顶点总数变为偶数，就会以 $\Omega(1)$ 的概率得到一个 $(\gamma_{\text{crit}}/\sqrt{2}+\varepsilon/2)\sqrt{2n}$-友好划分（也就是说，概率大约等于额外顶点足够友好的概率），这与偶数情形矛盾。

接下来我们证明，高概率下，$G \sim \mathbb{G}(2n,1/2)$ 存在一个 $(\gamma_{\text{crit}}/\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{2n}$-友好的等分划分 whp。令 $\gamma = \gamma_{\text{crit}} - \varepsilon/2$。由于 $\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha)$ 随着 γ 增大而递减，且根据 γ_{crit} 的定义，结合假设 1.5，我们知道 $\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha) > 0$，因此 $\sup_{\beta\in[0,1]} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ $4F_1(\alpha)$。于是 引理 3.2 和 3.3 结合 η 取足够小，使其相对于 ε表明

$$\mathbb{E}X_\gamma^2 \lesssim_\varepsilon (\mathbb{E}X_\gamma)^2.$$

因此，由于 X_γ 取非负整数值，我们有 $\mathbb{P}[X_\gamma \neq 0] = \Omega_\varepsilon(1)$。也就是说，所求概率至少有一个常数下界。下一步是运用 第 2 节 中的技巧，将该概率提升至 $1-o(1)$。

令 $\mathcal{P}$ 表示具有 $(\gamma_{\text{crit}}-\varepsilon/2)$-友好二分的 $2n$ 个顶点图所满足的性质。根据上述分析，并沿用第 2 节中的记号，我们有 $\mu(\mathcal{P}) = \Omega_\varepsilon(1)$。于是定理 2.2 推出 $\mu(\mathcal{P}_{\sqrt{n}(\log n)^{-1/4}}) = 1-o(1)$。但请注意，按照定义 2.1中定义的度量，从 $\mathcal{P}$ 中的图变为 $\mathcal{P}_{\sqrt{n}(\log n)^{-1/4}}$ 时，每个顶点的邻居集合至多有 $\sqrt{n}(\log n)^{-1/4}$ 次增删变化。因此，在 $\mathcal{P}$ 中保证存在的 $(\gamma_{\text{crit}}-\varepsilon/2)$-友好二分，在 $\mathcal{P}_{\sqrt{n}(\log n)^{-1/4}}$ 中仍至少是 $(\gamma_{\text{crit}}-\varepsilon)$-友好的。于是结论对具有 $2n$ 个顶点的图成立。

最后，为了证明定理 1.3 中关于 $2n-1$ 个顶点的图的这一部分，只需添加一个邻域均匀随机的顶点，构成 $\mathbb{G}(2n,1/2)$，找出一个$(\gamma_{\text{crit}}-\varepsilon/2)$-友好二分，然后移除这个额外的顶点，并检查结果是否仍然是$(\gamma_{\text{crit}}-\varepsilon)$-友好的。证明完毕。□

在本文正文的其余部分，我们将着重证明引理 3.2和3.3。

4. 度模型

4.1. 度数枚举。我们首先需要以下关于度数枚举的结果，分别归功于 [33] 和 [10], 。

定理 4.1([33])。存在一个固定常数 $\varepsilon = \varepsilon_{4.1} > 0$，使得以下结论成立。考虑一个总和为偶数的序列$\mathbf{d} = (d_1,\dots,d_n)$，满足：记$\overline{d} = (1/n)\sum_{i=1}^n d_i$，则有

- $|d_i - \overline{d}| \leq n^{1/2+\varepsilon}$ *for* $1 \leq i \leq n$, *and*
- $\overline{d} \geq n/\log n$.

记$m = \overline{d}n/2 \in \mathbb{Z}$、$\mu = \overline{d}/(n-1)$以及 $\gamma_2^2 = (1/(n-1)^2)\sum_{i=1}^n (d_i-\overline{d})^2$,，度序列为$\mathbf{d}$ 的标号图数量为

$$(1\pm O(n^{-1/4}))\exp\left(\frac{1}{4} - \frac{\gamma_2^2}{4\mu^2(1-\mu)^2}\right)\binom{n(n-1)/2}{m}\binom{n(n-1)}{2m}^{-1}\prod_{i=1}^n\binom{n-1}{d_i}.$$

定理 4.2([10])。存在一个固定常数 $\varepsilon = \varepsilon_{4.2} > 0$，使得以下结论成立。考虑一对总和相同的序列($\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_n)$，$\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_m)$)，满足：记$\overline{s} = (1/n)\sum_{i=1}^n s_i$ 和 $\overline{t} = (1/n)\sum_{i=1}^m t_i$，则有

- $n/(\text{对数 } n)^{1/2} \leq m \leq n(\text{对数 } n)^{1/2}$,
- $|s_i - \overline{s}| \leq n^{1/2+\varepsilon}$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $|t_i - \overline{t}| \leq m^{1/2+\varepsilon}$ 对于 $1 \leq i \leq m$，以及13

- $\bar{s} \geq n/(\text{对数 } n)^{1/2}$ 和 $\bar{t} \geq m/(\text{对数 } m)^{1/2}$。

写作 $\mu = \sum_{i=1}^{n} s_i/(mn) = \sum_{i=1}^{m} t_i/(mn)$, $\gamma_2(\mathbf{s})^2 = (1/(mn))\sum_{i=1}^{n}(s_i - \bar{s})^2$ 以及 $\gamma_2(\mathbf{t})^2 = (1/(mn))\sum_{i=1}^{m}(t_i - \bar{t})^2$, 划分类的度序列分别为$\mathbf{s}$ 和$\mathbf{t}$ 的带标签二分图数量为

$$(1 \pm O(n^{-1/8}))\exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma_2(\mathbf{s})^2}{\mu(1-\mu)}\right)\left(1 - \frac{\gamma_2(\mathbf{t})^2}{\mu(1-\mu)}\right)\right)\binom{mn}{mn\mu}^{-1}\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{s_i}\prod_{i=1}^{m}\binom{n}{t_i}.$$

现在，我们定义大量用于随机图的度序列模型，这些模型将在后续计算中发挥作用。从总体上看，McKay 和 Wormald [34] 以及 McKay 和 Skerman[31]的研究表明，在给定边总数等条件下，随机图的各个顶点的度看起来是相互独立的。这些模型提供了一种以定量方式概括这些事实的方法；然而，[31, 34] 中的精确结果不足以满足我们的研究需求，因此我们还需要进行若干适当的修改。

定义 4.3（度序列域）。令 $I_n = \{0, \ldots, n-1\}^n$, E_n 为该集合中和为偶数的序列，令 I_n^ℓ 为和 ℓ 序列。我们通常用 $\mathbf{d}$ 表示这些集合中的元素。令 $I_{m,n} = \{0, \ldots, n\}^m \times \{0, \ldots, m\}^n$, $E_{m,n}$ 为两侧和相等的序列，令 $E_{m,n}^\ell$ 为和 ℓ 相等的序列。我们通常用长度为m 的 $\mathbf{s}$ 和长度为 n 的 $\mathbf{t}$ 表示这些集合中的元素。随机变量版本则用大写粗体表示。

定义 4.4（真实度模型）。$\mathcal{D}_p^n$ 是 $\mathbb{G}(n,p)$的度序列分布，它是一个取值于 $E_n \subseteq I_n$的随机变量。$\mathcal{D}_p^{m,n}$是一个二部图的度序列分布，该图一侧有 m 个顶点，另一侧有 n个顶点，每条边都以概率 p独立纳入；它是一个取值于$E_{m,n} \subseteq I_{m,n}$的随机变量。

定义 4.5（独立度模型）。$\mathcal{B}_p^n$是 n 个独立的二项分布$(n-1,p)$随机变量的分布，取值于 I_n。$\mathcal{B}_p^{m,n}$是 m 个独立的二项分布(n,p)变量和 n个独立的二项分布(m,p)变量的分布，取值于$I_{m,n}$。

定义 4.6（条件度模型）。$\mathcal{E}_p^n$ 是给定总和为偶数条件下$\mathcal{B}_p^n$ 的分布，取值于 E_n。$\mathcal{E}_p^{m,n}$是给定两侧总和相等条件下 $\mathcal{B}_p^{m,n}$的分布，取值于$E_{m,n}$。

定义 4.7（积分度模型）。$\mathcal{I}_p^n$ 是按如下方式抽样得到的分布：抽取$p' \sim \mathcal{N}(p, p(1-p)/(n^2-n))$, 条件是其取值在(0, 1)内。然后从 $\mathcal{E}_{p'}^n$中抽样。$\mathcal{I}_p^{m,n}$是按如下方式抽样得到的分布：抽取 $p' \sim \mathcal{N}(p, p(1-p)/(2mn))$，条件是其取值在(0, 1)内。然后从 $\mathcal{E}^{m,n}_{p'}$中抽样。

这些度模型将在我们的分析中发挥关键作用的原因是：它们可以在损失一个常数因子的情况下，估计随机图或二部图具有特定度序列的概率：

引理 4.8。固定 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{4.8}]$和 $C > 0$。若序列 $\vec{d} \in \mathbb{Z}^n$ 是（C, ε）-正则的，则：

A1 $\sup_{i\in[n]} |d_i - (n-1)/2| \leq n^{1/2+\varepsilon}$,

A2 $\sum_{i\in[n]} |d_i - (n-1)/2|^2 \leq Cn^2$,

A3 $2 | \sum_{i\in[n]} d_i$.

那么存在 $C' = C'_{4.8}(C, \varepsilon)$，使得对于所有$(C, \varepsilon)$-正则的 $\vec{d}$，我们都有

$$\frac{1}{C'} \leq \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{D}_{1/2}^n}[\mathbf{D} = \vec{d}]}{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{1/2}^n}[\mathbf{D} = \vec{d}]} \leq C'.$$

引理 4.9。 固定 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_{4.9}]$，$\theta>0$，以及 $C>0$。若一对度序列 $(\vec{s},\ \vec{t})\in\mathbb{Z}^{n_1}\times\mathbb{Z}^{n_2}$是 $(C,\ \theta,\ \varepsilon)$-正则的，则：

B1 $\theta\le n_1/n_2\le\theta^{-1}$,***B2*** $\sum_{i\in[n_1]}s_i=\sum_{i\in[n_2]}t_i$,***B***

3 $|s_i-n_2/2|\le n_2^{1/2+\varepsilon}$ 当 $i\in[n_1]$ 时，***B***

4 $|t_i-n_1/2|\le n_1^{1/2+\varepsilon}$ 当 $i\in[n_2]$ 时，***B***

5 $\sum_{i\in[n_1]}|s_i-n_2/2|^2+\sum_{i\in[n_2]}|t_i-n_1/2|^2\le Cn_1^2$。

那么存在 $C'=C'_{4.9}(C,\theta,\varepsilon)$，使得对于所有 (C,θ,ε)-正则的 $(\vec{s},\vec{t})$，我们都有

$$\frac{1}{C'}\le\frac{\mathbb{P}_{\mathcal{D}_{1/2}^{n_1,n_2}}[\mathbf{S}=\vec{s}\wedge\mathbf{T}=\vec{t}]}{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{1/2}^{n_1,n_2}}[\mathbf{S}=\vec{s}\wedge\mathbf{T}=\vec{t}]}\le C'.$$

这些引理可由定理 4.1 和4.2 以及一些基本计算推出，现将其列出。我们需要以下关于二项式系数的技术性估计。

引理 4.10。对于 $|t|\le n^{4/5}$,

$$\binom{n}{n/2+t}\binom{n}{n/2}^{-1}=\left(1+O\left(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{n^2}+\frac{t^6}{n^5}\right)\right)\exp\left(-\frac{2t^2}{n}-\frac{4t^4}{3n^3}\right).$$

证明。注意到

$$\begin{aligned}\binom{n}{n/2+t}\binom{n}{n/2}^{-1}&=\frac{(n/2)!^2}{(n/2+t)!(n/2-t)!}\\&=\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sqrt{\frac{n^2}{n^2-4t^2}}\left(1+\frac{2t}{n}\right)^{-(n/2+t)}\left(1-\frac{2t}{n}\right)^{-(n/2-t)}\\&=\left(1+O\left(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{n^2}\right)\right)\exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{4t^2}{n^2}+\frac{8t^4}{3n^4}+O\left(\frac{t^6}{n^6}\right)\right)\right)\\&=\left(1+O\left(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{n^2}+\frac{t^6}{n^5}\right)\right)\exp\left(-\frac{2t^2}{n}-\frac{4t^4}{3n^3}\right)\end{aligned}$$

利用 Stirling公式。 □

现在我们证明引理 4.8和4.9。

引理的证明：引理 *4.8*。令 $N=n(n-1)/2$ 和 $2m=\sum_{i\in[n]}d_i$。应用定理 4.1 并注意到相关统计量满足 $\gamma_2^2,\ \mu=\Theta_C(1)$ 在给定条件**A1**和**A2**下，我们有

$$\mathbb{P}_{\mathcal{D}_{1/2}^n}[\mathbf{D}=\vec{d}]\asymp_{C,\varepsilon}2^{-N}\binom{2N}{2m}^{-1}\binom{N}{m}\prod_{i=1}^n\binom{n-1}{d_i}\asymp_{C,\varepsilon}2^{-2N}\exp\left(\frac{(2m-N)^2}{2N}\right)\prod_{i=1}^n\binom{n-1}{d_i}.\tag{4.1}$$

第二部分来自

$$\binom{2N}{2m}^{-1}\binom{N}{m}(1/2)^N\asymp\frac{\binom{2N}{N}}{\binom{2N}{2m}}\cdot\frac{\binom{N}{m}}{\binom{N}{N/2}}\cdot(1/2)^{2N}\asymp_C(1/2)^{2N}\exp\left(\frac{(2m-N)^2}{2N}\right)$$

根据引理 4.10，由于 $m=N/2+O_C(N^{3/4})$ 由**A2**和柯西–施瓦茨不等式推出。

另一方面，$\mathcal{I}_{1/2}^n$ 和 [34, 引理 2.2] 表明

$$\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{1/2}^n}[\mathbf{D}=\vec{d}]\asymp\prod_{i=1}^n\binom{n-1}{d_i}\int_0^1\frac{2}{1+(2p'-1)^{2N}}(p')^{2m}(1-p')^{2N-2m}\cdot\sqrt{\frac{4N}{\pi}}\exp(-4N(p'-1/2)^2)dp'$$

$$\asymp \prod_{i=1}^{n}\binom{n-1}{d_i}\int_0^1 2\sqrt{\frac{4N}{\pi}}\exp(-4N(p'-1/2)^2)(p')^{2m}(1-p')^{2N-2m}dp'. \tag{4.2}$$

只需证明表达式 (4.1) 和 (4.2) 之间相差一个乘法常数。

为计算所需的积分，我们令 $2m = N + y\sqrt{N}$（回顾一下，$|y| \lesssim_C N^{1/4}$），并设$p' = 1/2+z/(2\sqrt{N})$、$z_0 = -\sqrt{N}$、$z_1 = \sqrt{N}$。随后，可以对所讨论的积分进行重新参数化，得到

$$T(m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} t(z)dz$$

其中

$$t(z) = \exp\big(-z^2 + (N+y\sqrt{N})\log(1/2+z/(2\sqrt{N})) + (N-y\sqrt{N})\log(1/2-z/(2\sqrt{N}))\big).$$

我们将分情况讨论，以证明该积分在相差常数因子的意义下，其数量级为$2^{-2N}\exp((2m-N)^2/(2N))$。首先，我们对满足$|z| \geq 2|y| + N^{1/4}$的 z 所对应的积分部分进行上界估计。注意，

$$\begin{aligned}&(N+y\sqrt{N})\log\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2\sqrt{N}}\right)+(N-y\sqrt{N})\log\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2\sqrt{N}}\right)\\ &\qquad\leq (N+y\sqrt{N})\log\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2\sqrt{N}}\right)+(N-y\sqrt{N})\log\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2\sqrt{N}}\right)\leq -2N\log 2+2y^2\end{aligned}$$

因此，我们有

$$t(z) \leq 2^{-2N}\exp(-z^2+2y^2)$$

因此，可以很容易地看出，$|z| \geq 2|y| + N^{1/4}$ 所产生的贡献相对于目标值而言可以忽略不计。现在，当 $|z| \leq 2|y| + N^{1/4}$ 时，我们由泰勒级数可得，

$$t(z) = 2^{-2N}\exp\left(\frac{y^2-4(z-y/2)^2}{2}+O\left(\frac{z^4}{N}+\frac{z^2y}{N}\right)\right).$$

注意到在此范围内，$z = O_C(N^{1/4})$至多相差一个依赖于 C的常数乘法因子，我们看到，注意到 $\exp((2m-N)^2/(2N)) = \exp(y^2/2)$ 后，这显然可积并给出所需结果。□

引理 4.9 的证明。设 $N = n_1n_2$ 且 $m = \sum_{i\in[n_1]} s_i$。应用 定理 4.2 和 引理 4.10，类似于 引理 4.8 的证明，我们有 $m = N/2 + O_C(N^{3/4})$并得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{D}_{1/2}^{n_1,n_2}}[\mathbf{S}=\vec{s}\wedge\mathbf{T}=\vec{t}] &\asymp_{C,\theta,\varepsilon} 2^{-N}\binom{N}{m}^{-1}\prod_{i=1}^{n_1}\binom{n_2}{s_i}\prod_{i=1}^{n_2}\binom{n_1}{t_i}\\ &\asymp_{C,\theta,\varepsilon} 2^{-2N}N^{1/2}\exp\left(\frac{(2m-N)^2}{2N}\right)\prod_{i=1}^{n_1}\binom{n_2}{s_i}\prod_{i=1}^{n_2}\binom{n_1}{t_i}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

另一方面，$\mathcal{I}^{n_1}{}_{1/2}{}^{n_2}$ 的定义表明

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{1/2}^{n_1,n_2}}[\mathbf{S}=\vec{s}\wedge\mathbf{T}=\vec{t}]}{\prod_{i=1}^{n_1}\binom{n_2}{s_i}\prod_{i=1}^{n_2}\binom{n_1}{t_i}} &\asymp \int_0^1\left(\frac{N}{\pi(1/2)^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{N}{(1/2)^2}(p'-1/2)^2\right)\frac{(p')^{2m}(1-p')^{2(N-m)}}{\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(N,p')=\mathrm{Bin}(N,p')]}dp'\\ &\asymp N\int_0^1\exp\left(-\frac{N}{(1/2)^2}(p'-1/2)^2\right)(p')^{2m}(1-p')^{2(N-m)}dp',\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中第二行利用了当 $\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(N,p') = \mathrm{Bin}(N,p')] = \Theta(1/\sqrt{N})$ 时 $p' \in [1/3, 2/3]$，并且由于当 $p \notin [1/3, 2/3]$ 时被积函数非常小，因此它只贡献低阶项。

因此，只需证明 $4^{-N}\exp((2m-N)^2/(2N))$ 和

$$T(m) = \int_0^1\left(\frac{N}{\pi(1/2)^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{N}{(1/2)^2}(p'-1/2)^2\right)(p')^{2m}(1-p')^{2(N-m)}dp'$$

相差一个常数因子。现在我们按照引理 4.8的证明方法进行。设$2m = N + y\sqrt{N}$， $p' = 1/2 + z/(2\sqrt{N})$并注意到

$$T(m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} t(z)dz$$

其中

$$t(z) = \exp\big(- z^2 + (N + y\sqrt{N}) \log(1/2 + z/(2\sqrt{N})) + (N - y\sqrt{N}) \log(1/2 - z/(2\sqrt{N}))\big).$$

这与引理 4.8证明结尾处的情形相同，我们以同样的方式完成证明。 □

5. 消除非典型度序列

为了应用引理 4.8 和4.9 ，我们需要消除过于非典型的度序列。这包括消除最大度比最小度大 $n^{1/2+\eta}$ 的图，以及存在子集 S使得$\sum_{v\in V(G)} |\deg(v, S) - |S|/2|^2 \geq Cn^2$对于 C 足够大的图。

为了消除过高和过低的度，我们采用第 4]节中类似的切换方法；然而， [32, 第 4] 节的论证利用了所考虑的图类关于子图关系向下封闭这一性质。但在我们的模型中，针对不同顶点的约束具有“双边性”，因此分析更为细致。关键的观察是，在以图不含非常稠密的子图为条件时，只有 $n^{-1/2+\eta}$ 比例的顶点可能相对于这些约束而言是临界的（见引理 5.9）。这一点本身通过切换得到证明，而在此假设下，直接的论证即可证明所需的度界。

第二个条件要容易得多，只需注意，对于充分大的 C ，上述情况发生的概率（极）小，且随规模呈指数级衰减。所需的论述本质上见于 [15, 引理 4.11] ，但其中多了一个不交条件，而我们很容易将其去掉。

5.1. 消除高度不规则的子图。 我们首先证明，通常情况下， $\mathbb{G}(n, 1/2)$ 的度序列以及其所有稠密子图（按适当意义而言）的方差都具有 n 阶。这一结论以充分高的概率成立，因此即使在极不可能发生的事件上进行条件化，它仍具有稳健性。

我们将需要经典伯恩斯坦不等式的一个版本。

定理 5.1 ([45,定理 2.8。1])。 对于随机变量 X ， 定义其 ψ_1-范数

$$\|X\|_{\psi_1} = \inf\{t > 0 \colon \mathbb{E}[\exp(|X|/t)] \leq 2\}.$$

存在一个绝对常数 $c = c_{5.1} > 0$ ，使得以下结论成立。若 $X_1, \dots, X_N$ 是独立随机变量，则

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{N} X_i\right| \geq t\right] \leq 2\exp\left(- c\min\left(\frac{t^2}{\sum_{i=1}^{N}\|X_i\|_{\psi_1}^2}, \frac{t}{\max_i\|X_i\|_{\psi_1}}\right)\right)$$

对所有 $t \geq 0$。

引理 5.2。给定 c， $K > 0$，存在 $C = C_{5.2}(K) > 0$，使得下述结论成立。设 $G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$，并设 $\mathcal{E}_{\text{big}}$ 为这样一个事件：存在某个 $S \subseteq [2n]$，使得

$$\sum_{v\in[2n]} (\deg(v, S) - |S|/2)^2 \geq Cn^2.$$

那么，对于 n 足够大时， $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{big}}] \leq \exp(-Kn)$ 。

证明。 假设存在某个 S ，使得

$$\sum_{v\in[2n]} (\deg(v,S)-|S|/2)^2 \geq Cn^2,$$

其中 C 足够大，具体取值稍后确定。令 T 为 S 和 $U=S\setminus T$ 的均匀随机子集。记 $\mathbb{E}_T$ 为仅对 T 的随机性取平均所得的结果。那么，对于给定的某个 $v\in[2n]$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_T[\mathbb{1}_{v\notin T}(\deg(v,T)-|T|/2)^2+\mathbb{1}_{v\notin U}(\deg(v,U)-|U|/2)^2]&\\ \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}_T[(\deg(v,T)-|T|/2)^2+(\deg(v,U)-|U|/2)^2]&\\ \geq \frac{1}{4}\mathbb{E}_T[(\deg(v,S)-|S|/2)^2]&\end{aligned}$$

其中，第一行源于 $\deg(v,U)$、$\deg(v,T)$ 完全由 $T\cap(S\setminus\{v\})$ 的信息决定，并且 $v\notin T$ 和 $v\notin U$ 在给定条件下出现的概率至少为 $1/2$；第二行则由柯西–施瓦茨不等式以及 $S=T\cup U$（其中 T、U 不相交）推出。对 v 求和后，我们得到

$$\mathbb{E}_T\Big[\sum_{v\in[2n]}\Big(\mathbb{1}_{v\notin T}(\deg(v,T)-|T|/2)^2+\mathbb{1}_{v\notin U}(\deg(v,U)-|U|/2)^2\Big)\Big]\geq Cn^2/4$$

因此，存在某个 $T\subseteq S$，使得 $\sum_{v\in[2n]\setminus T}(\deg(v,T)-|T|/2)^2\geq Cn^2/8$。也就是说，如果 $\mathcal{E}_{\mathrm{big}}$ 成立，那么 2^{2n} 个可能的 T 中至少有一个满足该不等式。因此，根据并集界，并适当调整 K 的取值，我们只需研究对于固定的 T， $\sum_{v\in[2n]\setminus T}(2\deg(v,T)-|T|)^2\geq Cn^2/2$ 发生的概率。

现在注意，关于 $\mathbb{G}(n,1/2)$ 的随机性，每个 $(2\deg(v,T)-|T|)^2$ 都服从 X^2 其中 X 是 $|T|$ 个独立的拉德马赫变量（在 $\{\pm1\}$ 上均匀分布）的和。此外，随着我们改变 $v\in[2n]\setminus T$，这些变量相互独立。容易验证 $\|X^2\|_{\psi_1}=O(|T|)=O(n)$，因此由定理 5.1 可得

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{v\in[2n]\setminus T}(2\deg(v,T)-|T|)^2\geq t\Big]\leq 2\exp\big(-\Omega(\min\{t^2/n^3,t/n\})\big).$$

代入 $t=Cn^2/2$，并选择相对于 K 足够大的 C，即可得到结果。 □

接下来我们证明，友好划分不至于呈超指数级罕见（特别是，尽管条件化为两个固定划分都是友好的会使概率空间发生偏移，但 $\mathcal{E}_{\mathrm{var}}$ 来自引理 5.2 的事件在参数选择适当时仍然成立）。

引理 *5.3.* 给定 $c>0$，存在 $C=C_{5.3}(c)>0$，使得对于所有 $|\gamma|\leq 1$，以下结论成立。固定 $[2n]=A_1\cup A_2=B_1\cup B_2$ 的一对等分划分，使得 $cn\leq|A_1\cap B_1|\leq(1-c)n$。对 $G\sim\mathbb{G}(2n,1/2)$ 进行采样，并令 $\mathcal{E}_2$ 为满足以下条件的事件：对于所有 $v\in A_i$，$\deg(v,A_i)\geq\deg(v,A_{i+1})+\gamma\sqrt{n}$，且对于所有 $v\in B_i$，$\deg(v,B_i)\geq\deg(v,B_{i+1})+\gamma\sqrt{n}$。那么当 n 足够大时，

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_2]\geq\exp(-Cn).$$

证明。考虑事件 $\mathcal{E}$：对于每个 i、$j\in\{1,2\}$ 和 $v\in A_i\cap B_j$，我们都有 $\deg(v,A_i\cap B_j)-|A_i\cap B_j|/2\in[4\sqrt{n},8\sqrt{n}]$，并且对于每个 $(i',j')\neq(i,j)$，都有 $\deg(v,A_{i'}\cap B_{j'})-|A_{i'}\cap B_{j'}|/2\in[-\sqrt{n},\sqrt{n}]$。容易验证，在这种情况下，$\mathcal{E}_2$ 成立。现在我们利用定理 4.1 和 4.2 计算 $\mathbb{P}[\mathcal{E}]$ 的下界。

注意，对于每个 $G[A_i\cap B_j]$，都有 4 个度序列，记作 $(d_v^{(i,j)})_{v\in A_i\cap B_j}$；对于每个 $G[A_i\cap B_j,A_{i'}\cap B_{j'}]$，都有 12 个度序列，记作 $(d^{(i,j,i',j')}_v)_{v\in A_i\cap B_j}$（交换 (i,j)、(i',j') 的角色即可得到给定一对部分两侧的度）。事件 $\mathcal{E}$ 仅仅是一个系统

这些度序列中的元素所满足的约束。考虑任意一个满足 $\mathcal{E}$ 所给约束的数值序列，并且还满足以下两个性质：

- $2 | \sum_{v \in A_i \cap B_j} d_v^{(i,j)}$ for all $i, j \in \{1,2\}$;
- $\sum_{v \in A_i \cap B_j} d_v^{(i,j,i',j')} = \sum_{v \in A_{i'} \cap B_{j'}} d_v^{(i',j',i,j)}$ for all $i, j, i', j' \in \{1,2\}$ with $(i,j) \neq (i',j')$.

我们很容易看出，满足这一性质的度序列至少有 $(\Omega(\sqrt{n}))^{8n}$ 种选择：对于 $v \in [2n]$ 和 i、$j \in \{1,2\}$，每个单独的值 $\deg(v, A_i \cap B_j)$至少有 $\sqrt{n}$ 种选择，并且不难看出，在所有这些选择中，至少有 $\exp(-n)$ 的比例满足上述约束。为了解决奇偶约束，很容易看出，对于每个 i、j，大约有一半的序列 $d_v^{(i,j)}$可行。为了解决相等约束，可以验证，由于方差考量，大多数序列对 $(d^{(i,j,i',j')}_v)_{v \in A_i \cap B_j}$ 和 $(d^{(i',j',i,j}_v)^{v \in A_{i'} \cap B_{j'}}$ 的和相差约 $O(n \log n)$；随后，将两个序列中的 $O(\sqrt{n}(\log n)^2)$ 个值分别修改约 $\sqrt{n}/\log n$，即可实现适当的平衡。通过这一过程得到的可能序列比例至少为 $(1/\sqrt{n})^{O(\sqrt{n}(\log n)^2)} \geq \exp(-n)$。

此外，定理 4.1 和 4.2 适用于这些度序列。如果令 $n_{ij} = |A_i \cap B_j|$ 和$2m_{ij} = \sum_{v \in A_i \cap B_j} d_v^{(i,j)}$，那么 定理 4.1 应用于 $(d_v^{(i,j)})_{v \in A_i \cap B_j}$ 得到 $\mu = 1/2 + O(1/\sqrt{n})$，$\gamma_2^2 = \Theta(1)$，因此其数量至少为

$$\gtrsim \binom{n_{ij}(n_{ij}-1)/2}{m_{ij}} \binom{n_{ij}(n_{ij}-1)}{2m_{ij}}^{-1} \prod_{v \in A_i \cap B_j} \binom{n_{ij}-1}{d_v^{(i,j)}}.$$

可以验证，乘积中的每个二项式系数都是 $\Omega(2^{n_{ij}-1}/\sqrt{n})$，而除法中的两个初始二项式系数至少贡献 $\exp(-Kn)2^{-n_{ij}(n_{ij}-1)/2}$，其中某个常数 K 仅取决于 c。相乘后，我们得到至少为（比如）

$$\exp(-2Kn) \cdot 2^{\binom{n_{ij}}{2}} (1/\sqrt{n})^{n_{ij}}$$

给定这个度序列，图 $G[A_i \cap B_j]$ 有很多种可能。

同样， $G[A_i \cap B_j, A_{i'} \cap B_{j'}]$ 的选择数量可以看出至少为，譬如说，

$$\exp(-2Kn) \cdot 2^{n_{ij} n_{i'j'}} (1/\sqrt{n})^{n_{ij} + n_{i'j'}}.$$

将 4 个图 $G[A_i \cap B_j]$ 和 6 个图 $G[A_i \cap B_j, A_{i'} \cap B_{j'}]$ 相乘后，这至少变为 $\exp(-20Kn)2^{\binom{2n}{2}}(1/\sqrt{n})^{8n}$ 个。再乘以前面得到的度序列选择数，我们至少可以说有 $\exp(-40Kn)2^{\binom{2n}{2}}$ 个实现 $G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$ 的选择满足所需性质 $\mathcal{E}$ （从而满足 $\mathcal{E}_2$），只要将 K 取得足够大。取 $C = 40K$（其仅依赖于 c）即可立即得到所需结果。□

作为直接推论，我们有以下命题。

命题 5.4。 在 引理 5.3 的设定和记号下，存在 $K = K_{5.4}(c) > 0$，使得以下结论成立。设 $G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$，并设 $\mathcal{E}_{\text{var}}$ 为以下事件：

$$\sum_{v \in [2n]} (\deg(v, S) - |S|/2)^2 \leq Kn^2$$

对所有 $S \subseteq [2n]$。那么对于 n 较大时， $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{var}} | \mathcal{E}_2] \geq 1 - \exp(-n)$。

证明。 令 $C = C_{5.3}(c)$ 并应用 引理 5.2，其中 K 替换为 $1 + 2C_{5.3}(c)$。我们有 $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{big}} | \mathcal{E}_2] \leq \mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{big}}]/\mathbb{P}[\mathcal{E}_2] \leq \exp(-(2C+1)n)/\exp(-Cn) \leq \exp(-n)$，结论由此得出。 □

5.2. **消除高次数顶点**。 我们需要一个基于尾部首个值的二项随机模型尾界，以及将这一估计推广到任意向上封闭的集合族。

引理 5.5。 对于 $0 \le \ell \le n$，我们有的是。

$$\frac{\binom{n}{\ell}}{\sum_{k=\ell}^{n}\binom{n}{k}} \lesssim \frac{|\ell - n/2|}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

证明。 对于 $\ell \le n/2 + \sqrt{n}$，我们有 $\binom{n}{\ell} \lesssim 2^n/\sqrt{n}$ 和 $\sum_{k=\ell}^{n}\binom{n}{k} \gtrsim 2^n$，因此结论成立。对于 $|\ell - n/2| \ge n/5$，结论显然。最后，当 $n/2 + \sqrt{n} \le \ell \le n/2 + n/5$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=\ell}^{n}\binom{n}{k}}{\binom{n}{\ell}} &\ge \sum_{t=0}^{\sqrt{n}} \binom{n}{\ell+t}\binom{n}{\ell}^{-1} \\ &\ge \sum_{t=0}^{\sqrt{n}} ((\ell+t)/(n-\ell-t+1))^{-t} \\ &\gtrsim \sum_{t=0}^{\sqrt{n}} (1 + 16|\ell - n/2|/n)^{-t} \gtrsim n/|\ell - n/2|. \end{aligned}$$

□

引理 5.6。 设 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 的一个向上封闭子集族，即，如果 $F_1 \in \mathcal{F}$ 且 $F_2 \supseteq F_1$，那么 $F_2 \in \mathcal{F}$。设 $\mathcal{F}_\ell$ 是 $\mathcal{F}$ 中大小为 ℓ 的元素。那么

$$\frac{|\mathcal{F}_\ell|}{|\mathcal{F}_\ell| + |\mathcal{F}_{\ell+1}| + \cdots + |\mathcal{F}_n|} \le \frac{\binom{n}{\ell}}{\sum_{i=\ell}^{n}\binom{n}{i}} \lesssim \frac{|\ell - n/2|}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

证明。 每个大小为 ℓ 的 $\mathcal{F}$ 集合中，恰有 $\binom{n-\ell}{s-\ell}$ 个大小为 s 的集合包含于其中，这是由向上封闭条件得出的。此外，每个大小为 s的 $\mathcal{F}$ 集合中，至多有 $\binom{s}{\ell}$ 个大小为 ℓ 的集合 $\mathcal{F}$ 包含于其中。因此，$\binom{n-\ell}{s-\ell}|\mathcal{F}_\ell| \le \binom{s}{\ell}|\mathcal{F}_s|$ 对所有 $\ell \le s \le n$均成立。注意到$\binom{n-\ell}{s-\ell}/\binom{s}{\ell} = \binom{n}{s}/\binom{n}{\ell}$，再利用引理 5.5，即可轻松得到结果。 □

现在我们证明，对于 $\mathbb{G}(2n, 1/2)$ 中的友好划分，各种结构性质以高概率成立 .

命题 5.7。 固定 $\eta > 0$ 并考虑 $|\gamma| \le 1$。固定一个等分划分 $[2n] = A_1 \cup A_2$。抽取$G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$，并令 $\mathcal{E}_1$ 表示以下事件：对于所有 $v \in A_i$，$\deg(v, A_i) \ge \deg(v, A_{i+1}) + \gamma\sqrt{n}$。令$\mathcal{E}_{\text{irreg},1}$表示存在顶点 $v \in [2n]$和 $i \in \{1, 2\}$，使得 $|\deg(v, A_i) - n| \ge n^{1/2+\eta}$。那么当 n足够大时，

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{irreg},1}|\mathcal{E}_1] \le n^{-\omega(1)}.$$

命题 *5.8*。固定 $c, \eta > 0$并考虑 $|\gamma| \le 1$。固定 $[2n] = A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$ 的一对等分划分，使得 $cn \le |A_1 \cap B_1| \le (1-c)n$。抽取 $G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$，并令 $\mathcal{E}_2$ 表示以下事件：对于所有 $v \in A_i$，$\deg(v, A_i) \ge \deg(v, A_{i+1}) + \gamma\sqrt{n}$；对于所有$v \in B_i$，$\deg(v, B_i) \ge \deg(v, B_{i+1}) + \gamma\sqrt{n}$。令 $\mathcal{E}_{\text{irreg},2}$ 表示存在顶点 $v \in [2n]$和 $i, j \in \{1, 2\}$，使得$|\deg(v, A_i \cap B_j) - |A_i \cap B_j|/2| \ge n^{1/2+\eta}$。那么当 n足够大时，

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{irreg},2}|\mathcal{E}_2] \le n^{-\omega(1)}.$$

为了证明这些命题，我们需要以下关于友好划分中“临界”顶点的估计。

引理 5.9。 固定 $c > 0$ 和一个正整数 k，并考虑满足 $\gamma\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ 的 $|\gamma| \le 1$。固定 $[2n] = A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$ 的一对等分划分，使得 $cn \le |A_1 \cap B_1| \le (1-c)n$。抽取$G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$，令 $\mathcal{E}_2$ 为以下事件：对于所有 $v \in A_i$，均有 $\deg(v, A_i) \ge \deg(v, A_{i+1}) + \gamma\sqrt{n}$，并且

$\deg(v,B_i) \geq \deg(v,B_{i+1})+\gamma\sqrt{n}$ 对所有 $v \in B_i$ 均成立。令 $\mathcal{E}_1$ 为该条件仅对 A 成立的事件。若某个顶点满足 $v \in A_i$，且 $\deg(v,A_i) = \deg(v,A_{i+1})+\gamma\sqrt{n}$，则称该顶点为 A 的临界顶点；令 A 的临界顶点数为 X。那么

$$\mathbb{E}[X^k|\mathcal{E}_b] \lesssim_{c,k} n^{k/2} \quad \text{for } b \in \{1,2\}.$$

证明。令 Y为 $A_1\cap B_1$内 A 个顶点的临界数量。我们将证明$\mathbb{E}[Y^k|\mathcal{E}_2] \lesssim_{c,\ k} n^{k/2}$。根据对称性，我们可以发现，对于每个 $A_i \cap B_j$，同样的结论都成立，这将推出关于 $b=2$的结果。 $b=1$ 的情形类似，因此我们不再赘述细节。

进一步揭示所有 i、$j \in \{1,2\}$ 和 $v \in V(G) \setminus (A_i \cap B_j)$ 对应的 $\deg(v, A_i \cap B_j)$ 的值。因此，剩余的随机性来自每个 i、$j \in \{1,2\}$ 对应的 $\mathbb{G}(A_i \cap B_j, 1/2)$，并且我们对这些图施加某些度不等式作为条件。注意，由于我们已经揭示了各部分之间的度信息，因此这四个部分彼此独立。因此，一个顶点是否为临界顶点也仅取决于其在所属部分内的度。我们将重点关注部分 $A_1 \cap B_1$，这将使我们能够控制 Y。图 $G[A_i \cap B_j]$ 是一个满足其各顶点度的各种下界条件的均匀随机图。对于每个顶点，在给定已揭示的其与外部顶点之间的度信息后，条件 $\deg(v, A_1) \geq \deg(v, A_2) + \gamma\sqrt{n}$ 和 $\deg(v, B_1) \geq \deg(v, B_2) + \gamma\sqrt{n}$ 恰好导出关于 $\deg(v, A_i \cap B_j)$ 的这些条件。如果后一个不等式比前一个不等式更严格，那么 v 对于 A 就不会是临界的。如果前一个不等式更严格，那么当且仅当它取允许的最小值时，v 才可能对于 A 是临界的。

令 $\mathcal{G}$ 为 $A_1 \cap B_1$ 之外 G 中所有边的信息。由期望的线性性，我们有

$$\mathbb{E}[Y(Y-1)\cdots(Y-k+1)|\mathcal{E}_2,\mathcal{G}] \leq \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_k \in A_1\cap B_1 \\ \text{distinct}}} \mathbb{P}[v_1,\ldots,v_k \text{ are critical for } A|\mathcal{E}_2,\mathcal{G}]. \tag{5.1}$$

现在，给定 $v_1,\ldots,v_k$ 的一种取值后，我们进一步揭示图 $G[A_1 \cap B_1]$ 中除 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ 与 $A_1 \cap B_1$ 之间的边以外的所有信息，并揭示 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ 内部的边。剩余的随机部分是在 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ 与 $(A_1 \cap B_1) \setminus \{v_1,\ldots,v_k\}$ 之间均匀随机生成的二部图，并满足两侧度的某些下界（这些下界来自原先的不等式）。现在，给定 $v_2,\ldots,v_k$ 的邻域后，我们考虑 v_1 为临界的最大概率。我们把 v_1 可能的邻域（不计 $\{v_2,\ldots,v_k\}$ 之间已揭示的部分）视为 $(A_1 \cap B_1) \setminus \{v_1,\ldots,v_k\}$ 的子集。由于已知信息仅给出某些度的下界（这些下界可能会、也可能不会迫使某些顶点连接到 v_1，以满足其“配额”），我们看到可能情况的族 $\mathcal{F}$ 是向上封闭的。由引理 5.6 可知，v 为临界的概率至多为

$$O\left(\frac{|\ell - (|A_1 \cap B_1| - k)/2|}{cn} + \frac{1}{\sqrt{cn}}\right)$$

其中，ℓ是由条件 $\deg(v, A_1) \geq \deg(v, A_2) + \lceil\gamma\sqrt{n}\rceil$得出的 $N(v) \cap ((A_1 \cap B_1) \setminus \{v_1,\ldots,v_k\})$ 大小的下界。也就是说，

$$\ell = \deg(v_1, A_2) - \deg(v_1, A_1 \cap B_2) - \deg(v_1, \{v_2,\ldots,v_k\}) + \lceil\gamma\sqrt{n}\rceil.$$

由于 k 是常数，该界变为

$$O\left(\frac{|\deg(v_1, A_2) - \deg(v_1, A_1 \cap B_2) - |A_1 \cap B_1|/2|}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

将 $v_1,\ldots,v_k$ 的结果相乘，得到所有 $v_1,\ldots,v_k$ 均为临界的概率上界（注意，上述结果是对 v_1 的上界，即使在给定其他顶点任意结果的条件下也成立，因此此处的推导有效）。代入 (5.1)，可得

$$\mathbb{E}[Y(Y-1)\cdots(Y-k+1)|\mathcal{E}_2,\mathcal{G}] \lesssim \left(\sum_{v\in A_1\cap B_1} \frac{|\deg(v, A_2) - \deg(v, A_1 \cap B_2) - |A_1 \cap B_1|/2|}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$\lesssim n^{k/2} + n^{-k}\left(\sum_{v\in A_1\cap B_1} |\deg(v,A_2) - \deg(v,A_1\cap B_2) - |A_1\cap B_1|/2|\right)^k$$
$$\lesssim n^{k/2} + n^{-k/2}\left(\sum_{v\in A_1\cap B_1} |\deg(v,A_2) - \deg(v,A_1\cap B_2) - |A_1\cap B_1|/2|^2\right)^{k/2}.$$

现在由 命题 5.4，存在一个足够大的常数 A，使得在给定 $\mathcal{E}_2$ 的条件下，以至少 $1-\exp(-n)$ 的概率，有 $\sum_{v\in[2n]}(\deg(v,S) - |S|/2)^2 \le An^2$ 对所有 $S\subseteq[2n]$(事件 $\mathcal{E}_{\mathrm{var}}$) 成立。特别地，注意到

$$\sum_{v\in A_1\cap B_1} |\deg(v,A_2) - \deg(v,A_1\cap B_2) - |A_1\cap B_1|/2|^2 \le 4An^2 \tag{5.2}$$

在事件 $\mathcal{E}_{\mathrm{var}}$ 下成立。此外，这个特定不等式是否成立，只取决于 $\mathcal{G}$ 的信息。因此，我们很容易看出

$$\mathbb{E}[Y(Y-1)\cdots(Y-k+1)|\mathcal{E}_2] \lesssim (n^{k/2} + n^{-k/2}(4An^2)^{k/2}) + \exp(-n)\cdot n^k \lesssim n^{k/2}$$

只需考察 $\mathcal{G}$ 是否满足 (5.2) 。所需的估计立即成立。 □

现在我们利用切换来证明 命题 5.7 和 5.8。

命题 *5.7* 和 *5.8*的证明。 我们重点讨论 命题 5.8；命题 5.7 的情形类似但更简单，因此我们略去细节。此外，只需对 i^*、$j^*\in\{1,2\}$ 和 $v\in V(G)$的某一个取值证明该概率估计即可。不妨设 $v\in A_1\cap B_1$。我们希望研究 $\mathbb{P}[|\deg(v,\ A_{i^*}\cap B_{j^*}) - |A_{i^*}\cap B_{j^*}|/2| \ge n^{1/2+\eta}|\mathcal{E}_2]$。

让我们揭示 G 中除 v 与 V（G）之间的潜在边以外的所有边的身份。将这些信息记为 $\mathcal{G}$。在给定 $\mathcal{E}_2$、$\mathcal{G}$ 的条件下，我们关于 v 邻域的分布，在满足 v 的两个度不等式且其他每个顶点也满足其不等式的所有选择中是均匀的。但请注意，对于通常的其他顶点而言， v 是否与其相连，并不会影响这些不等式是否成立。事实上，只有最终在图 G 中成为临界顶点（对于 A 或 B）的顶点才会出现这种情况。根据引理 5.9，只要 k 作为 n 的函数增长得足够慢，我们就能看到，以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，对于 A 至多有 $n^{1/2+\eta/4}$ 个临界顶点；根据对称性，对于 B 的临界顶点也同样如此。因此，我们可以假设 $\mathcal{G}$ 使得与 v 之间具有“强制”边和非边的顶点总数至多为 $n^{1/2+\eta/2}$。

现在， v 的邻域服从如下分布：到四个部分 $A_i\cap B_j$ 的指定强制边和非边总数至多为 $n^{1/2+\eta/2}$，其余边则在满足约束 $\deg(v,A_1) - \deg(v,A_2) \ge \gamma\sqrt{n}$ 以及 $\deg(v,B_1) - \deg(v,B_2) \ge \gamma\sqrt{n}$的条件下均匀分布。我们希望了解在此模型中， $|\deg(v,A_{i^*}\cap B_{j^*}) - |A_{i^*}\cap B_{j^*}|/2| \ge n^{1/2+\eta}$ 的概率，将此事件记为 $\mathcal{E}_{\mathrm{bad}}$。令 C 为被强制与 v连接或断开的顶点集合，其中 C_1 连接， C_0 断开。启发式地说，我们接近一个二项分布的随机情形，其中存在一些由 C 带来的“植入”偏差，其量级为 $n^{1/2+\eta/2}$；因此，某个度偏离 $n^{1/2+\eta}$ 的概率理应极小。

为完成证明，我们将这一启发式论证严格化。在揭示上述信息后，我们来考察在 $V(G)\backslash(C\cup\{v\})$ 中均匀随机抽取 v 的邻域时 $\mathbf{\Delta}$ 的分布。上述分析表明，在这一模型中，只需给出 $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\mathrm{bad}}\cap\mathcal{E}_2]/\mathbb{P}[\mathcal{E}_2]$ 的上界（给定已揭示的信息，包括 C_0、C_1）。

首先，我们声称 $\mathbb{P}[\mathcal{E}_2]\ge\exp(-n^{3\eta/2})$。事实上，选取正整数 n_{ij}，使得对于 i、$j\in\{1,2\}$，有 $n_{11}+n_{12}-n_{21}-n_{22}\ge\gamma\sqrt{n}+n^{1/2+\eta/2}$ 和 $n_{11}+n_{21}-n_{12}-n_{22}\ge\gamma\sqrt{n}+n^{1/2+\eta/2}$；并且对于 i、$j\in\{1,2\}$，有$|n_{ij}-|A_i\cap B_j|/2|\le 4n^{1/2+\eta/2}$。这很容易看出是可能的，因为 $|A_i\cap B_j|\in[cn,(1-c)n]$且 $|A_i|=|B_j|=n$。那么，在分布 $\mathbf{\Delta}$ 中，对于每个 i、$j\in\{1,2\}$， v有 n_{ij} 个邻点属于 $(A_i\cap B_j)\setminus C$ 的概率很容易看出至少为 $\exp(-O((n^{1/2+\eta/2})^2/n))\ge$

当 n 足够大时，$\exp(-n^{3\eta/2})$。这里我们使用了容易得到的估计 $\binom{x}{x/2+t}/2^x = \exp(-\Theta(t^2/x))$，其中$t \in [-x/2, x/2]$ 满足 $|t| \geq x^{1/2+\eta/4}$。

类似地，我们看到 $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{bad}}] \leq \exp(-\Omega(n^{2\eta}))$，因为如果 $\mathcal{E}_{\text{bad}}$ 成立，那么 $\deg(v, (A_i \cap B_j) \setminus C) \geq |(A_i \cap B_j) \setminus C|/2 + n^{1/2+\eta}/2$ 很容易验证，而在独立分布 $\mathbf{\Delta}$ 下，这可以像上面那样进行界定。相除后，我们得到

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{bad}} \cap \mathcal{E}_2]/\mathbb{P}[\mathcal{E}_2] \leq n^{-\omega(1)},$$

结合前面的分析，我们便完成了证明。 □

6. Convexity via the Prékopa–Leindler Inequality

在本节中，我们汇总了两个关于对数凸性的论断，其证明基于这样一个事实：对数凹函数的边缘函数仍然是对数凹的。这一事实是普雷科帕-莱因德勒不等式[30, 37]的一个众所周知的推论。我们在此指出，Gamarnik 和 Li 的研究中也使用了此类高斯泛函的对数凹性 [20, 引理 4。6]（其目的同样是简化二阶矩计算中出现的相关最大化问题）；本节将简要证明所需的结果。

定理 6.1。 如果 $f(x, y)$ 是定义在$(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$上的对数凹函数，那么 $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dy$是定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的对数凹函数。

对于一阶矩，我们将需要以下对数凹性。

引理 6.2。 以下函数是对数凹的：

$$\alpha \mapsto \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma + \alpha)\sqrt{2}].$$

证明。 通过平移和缩放，只需证明以下结论。

$$\alpha \mapsto \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \geq \alpha]$$

是对数凹的。注意，

$$\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \geq \alpha] = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x+\alpha)^2}{2}\right) dx$$

并且_久久爱

$$\mathbb{I}^{x\geq 0} \exp\left(\frac{-(x+\alpha)^2}{2}\right)$$

是 x 和 α的对数凹函数。 定理 6.1 通过对 x取边缘分布，即完成证明。 □

关于二阶矩，我们将反复使用以下对 引理 6.2 的推广（可将其视为特殊情形 $\beta = 1/2$）。

引理 6.3。 固定 $\beta \in [0, 1]$。函数

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \mathbb{P}_{Z_1,Z_2\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_2 \geq (\gamma + \alpha_1)\sqrt{2} \wedge \sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_2 \geq (\gamma + \alpha_2)\sqrt{2}\right]$$

是对数凹的。

证明。 通过平移并应用线性变换，只需证明

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \mathbb{P}_{Z_1,Z_2\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(Z_1-\alpha_1)+\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}(Z_2-\alpha_2) \geq 0 \wedge \sqrt{\frac{\beta}{2}}(Z_1-\alpha_1)-\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}(Z_2-\alpha_2) \geq 0\right]$$

是对数凹的。注意，

$$\mathbb{P}_{Z_1,Z_2\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(Z_1 - \alpha_1) + \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}(Z_2 - \alpha_2) \geq 0 \wedge \sqrt{\frac{\beta}{2}}(Z_1 - \alpha_1) - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}(Z_2 - \alpha_2) \geq 0\right]$$

$$= \int_{\substack{\sqrt{\frac{\beta}{2}}z_1+\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}z_2\geq 0 \\ \sqrt{\frac{\beta}{2}}z_1-\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}z_2\geq 0}} \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-(z_1+\alpha_1)^2-(z_2+\alpha_2)^2}{2}\right)dz_1dz_2.$$

应用定理 6.1 于 z_1所给出的对数凹函数 z_2， α_1， α_2 如下

$$\mathbb{I}_{\sqrt{\frac{\beta}{2}}z_1+\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}z_2\geq 0}\mathbb{I}_{\sqrt{\frac{\beta}{2}}z_1-\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}z_2\geq 0}\exp\left(\frac{-(z_1+\alpha_1)^2-(z_2+\alpha_2)^2}{2}\right)$$

并对 z_1、 z_2 取边缘分布，即可得到所需结果。 □

7. 矩计算

现在我们来已准备好进行矩计算。回想一下， $|\gamma|\leq 1$ 满足 $\gamma\sqrt{n}\in$ $\mathbb{Z}$.

7.1. **的二阶矩** X_γ。 我们先详细计算二阶矩，证明引理 3.3。更简单的一阶矩计算则留到第 7.2 节，届时我们会略去各种重复或相似的细节。设 $c\in(0,1/2)$ 为稍后选定的一个小常数。

7.1.1. 设置与初始截断。 考虑 $n_1'\in\{0,\dots,n\}$ 和 $n_2'=n-n_1'$，并令 $A_1=[n]$ 和 $A_2=\{n+1,\dots,2n\}$ 和 $B_1=[n_1']\cup\{n+n_1'+1,\dots,2n\}$ 和 $B_2=\{n_1'+1,n_1'+2,\dots,n+n_1'\}$。令 $n_{ij}=|A_i\cap B_j|$，使得 $n_{ij}=n'_{i+j-1}$，其中指标按模 2 计算。此外，定义 $\beta=n_{11}/n$。在此设置下，令 $Y_A(n_1')$：如果 $G\sim\mathbb{G}(2n,1/2)$ 满足 $A_1\cup A_2$ 是一个 $\gamma\sqrt{n}$-友好划分，则取值为 $=1$，否则取值为 0；类似地定义 $Y_B(n_1')$。由期望的线性性可得。

$$\mathbb{E}X_\gamma=\binom{2n}{n}\mathbb{P}[Y_A(n_1')=1], \tag{7.1}$$

$$\mathbb{E}X_\gamma^2=\binom{2n}{n}\sum_{n_1'=0}^{n}\binom{n}{n_1'}^2\mathbb{P}[Y_A(n_1')=1\wedge Y_B(n_1')=1]. \tag{7.2}$$

这意味着，只要 c 足够小于 η，我们就有

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}\sum_{n_1'<cn}\binom{n}{n_1'}^2\mathbb{P}[Y_A(n_1')=1\wedge Y_B(n_1')=1]+\binom{2n}{n}\sum_{n_1'>(1-c)n}\binom{n}{n_1'}^2\mathbb{P}[Y_A(n_1')=1\wedge Y_B(n_1')=1]&\\ \leq 2\sum_{n_1'<cn}\binom{n}{n_1'}^2\binom{2n}{n}\mathbb{P}[Y_A(n_1')=1]&\\ \leq(1+\eta)^n\mathbb{E}X_\gamma&\end{aligned} \tag{7.3}$$

对于 n 很大的情形。因此，只需考虑满足 $n_1'\in[cn,(1-c)n]$ （等价地， $\beta\in[c,1-c]$）的项，我们希望计算 $\mathbb{P}[Y_A(n_1')=Y_B(n_1')=1]$。请注意，所需事件是否成立，完全取决于 4 个图 $G[A_i\cap B_j]$ for$i,j\in\{1,2\}$ 的度序列，以及 6 个二部图 $G[A_i\cap B_j,A_{i'}\cap B_{j'}]$ for i,j,i', $j'\in\{1,2\}$ 的度序列，其中 either$i<i'$ or $i=i'$ and $j<j'$。因此，我们希望应用引理 4.8 和 4.9，将其转化为这些度序列的简单模型，从而更容易计算所需的概率。

7.1.2. 转移与定义积分度模型。为此，我们使用第 5 节的结果。令 $\mathcal{E}_2$ 为事件： $Y_A(n_1')=Y_B(n_1')=1$ （这与第 5 节中的用法一致）。令 K 为关于 c 的某个较大常数，具体取值待定。首先应用命题 5.4。令 $\mathcal{E}_{\text{var}}$ 为事件：对所有 $S\subseteq[2n]$， $\sum_{v\in[2n]}(\deg(v,S)-|S|/2)^2\geq Kn^2$，其中 K 是引理中给出的某个合适常数。我们有 $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{var}}|\mathcal{E}_2]\geq 1-\exp(-n)$。根据命题 5.8，将 η 替换为 $\min(\varepsilon_{4.8},\varepsilon_{4.9})/2$，可得 $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\text{irreg},2}|\mathcal{E}_2]\leq n^{-\omega(1)}$。因此

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_2]=(1\pm n^{-\omega(1)})\mathbb{P}[\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_{\text{irreg},2}^c\wedge\mathcal{E}_{\text{var}}]. \tag{7.4}$$

注意，$\mathcal{E}^c_{\text{irreg}}$,2, $\mathcal{E}_{\text{var}}$ 确保上述定义的 $4+6$ 图具有度序列，且这些度序列满足引理 4.8 的 A1 至 A3，并带有适当的参数（也就是说，$G[A_i \cap B_j]$ 的度序列是 $(O(1)^{\varepsilon}4.8)$-正则的）；或者满足引理 4.9 的 B1 至 B5，并带有适当的参数（也就是说，G 的 6 个二部图部分的度序列是 $(O(1), \Omega(1)^{\varepsilon}4.9)$-正则的）。这里我们还利用了 $cn \le n_1', n_2' \le (1-c)n$，例如用它来证明 B1。

我们推导出

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}^c_{\text{irreg},2} \wedge \mathcal{E}_{\text{var}}] \lesssim \rho, \tag{7.5}$$

其中，ρ 是以下概率：

- 对于 i，$j \in \{1,2\}$ 从 $\mathcal{I}_{1/2}^{|A_i \cap B_j|}$ 中抽取“度” $d_{(i,j)v}$，对应于 $v \in A_i \cap B_j$（应将其视为内部度 $\deg(v, A_i \cap B_j)$，其中 $v \in A_i \cap B_j$）；
- 对于 i、j、i'、$j' \in \{1,2\}$，在 $i < i'$ 或 $i = i'$ 且满足 $j < j'$ 的条件下，从 $\mathcal{I}_{1/2}^{|A_i \cap B_j|\,|A_{i'} \cap B_{j'}|}$，联合抽取 $d_{(i,j,i',j')v}$（即“度”），其中 $v \in A_i \cap B_j$ 对应于 $d_{(i',j',i,j)v}$（对应于二部度 $\deg(v, A_{i'} \cap B_{j'})$，其中 $v \in A_i \cap B_j$，反之亦然）。
- 计算对每个 i、$j \in \{1,2\}$ 和 $v \in A_i \cap B_j$，满足以下条件的概率：

$$d_v^{(i,j)} - d_v^{(i,j,i+1,j+1)} + d_v^{(i,j,i,j+1)} - d_v^{(i,j,i+1,j)} \ge \gamma\sqrt{n}, \tag{7.6}$$

$$d_v^{(i,j)} - d_v^{(i,j,i+1,j+1)} - d_v^{(i,j,i,j+1)} + d_v^{(i,j,i+1,j)} \ge \gamma\sqrt{n}, \tag{7.7}$$

其中指标按模 2 取值。

这可以解释为：如果我们的 $4+6$ 图按引理 4.8 和 4.9中的方式抽样，那么 $A_1 \cup A_2$ 和 $B_1 \cup B_2$ 都 $\gamma\sqrt{n}$-友好。

理解“度”分布相对简单：

- 为 i、$j \in \{1,2\}$ 和 p_{ij}抽取样本参数 $4+6$（$1/2$，$1/(4n_{ij}^2 - 4n_{ij})$），以及为 i、j、i'、$j' \in \{1,2\}$ 抽取样本参数 $\mathcal{N}$（$1/2$，$1/(8n_{ij}n_{i'j'})$），其中 $i < i'$ 或 $i = i'$，且 $j < j'$（均以取值在 (0,1) 内为条件），并令 $p_{i'j'、\ ij} = p_{ij、\ i'j'}$；
- 完全独立地抽取 $d_{(i,\ j)\ v} \sim \text{Bin}(n_{ij} - 1, p_{ij})$ 和 $d_{(i,\ j,\ i',\ j')\ v} \sim \text{Bin}(n_{i'j'}, p_{ij,\ i'j'})$；
- 以 4 个整除条件和 6 个等式条件为条件

$$2 \mid \sum_{v \in A_i \cap B_j} d_v^{(i,j)}, \tag{7.8}$$

$$\sum_{v \in A_i \cap B_j} d_v^{(i,j,i',j')} = \sum_{v \in A_{i'} \cap B_{j'}} d_v^{(i',j',i,j)}. \tag{7.9}$$

第一步可以通过对 $4+6$ 参数进行高斯积分来处理，第二步则是独立的。因此，主要困难在于第三步引入的条件约束。我们将借助贝叶斯定理、局部中心极限定理和反集中不等式来处理这一问题（参见例如 [41, 第 2.3.2 节、第 2.3.3] 节），但应将其更多地视为一个技术细节：如果没有这一条件约束，概率 ρ理应基本不变，尽管实际上不能直接去掉和相等条件。

7.1.3. 转移模型中的贝叶斯定理。 为简单起见，我们假设涉及二项分布(n,p) 的任意 $p \notin [0,1]$ 事件均不成立。令 $p_{ij} = 1/2 + \alpha_{ij}/\sqrt{4n_{ij}^2 - 4n_{ij}}$和 $p_{ij,i'j'} = 1/2 + \alpha_{ij,i'j'}/\sqrt{8n_{ij}n_{i'j'}}$。此外，我们将使用下标 $\vec{d}$ 表示关于联合“度”分布的随机性，而下标 d^* 表示在以 (7.8)和 (7.9) 为条件之前的该分布（因此，若揭示 $\vec{p}$，它就是一组独立二项分布）。现在我们有

$$\rho = \mathbb{P}_{\vec{p},\vec{d}}[\text{(7.6) and (7.7)}] = (1+o(1)) \int_{\alpha_{ij},\alpha_{ij,i'j'}} \mathbb{P}_{\vec{d}}[\text{(7.6) and (7.7)}] \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\alpha_{ij}^2 - \frac{1}{2}\sum\alpha_{ij,i'j'}^2}}{(2\pi)^5} d\alpha$$

$$\lesssim e^{-32n} + \int_{\|\alpha\|_\infty \le 8\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d}}[(7.6) \text{ and } (7.7)] e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^2 - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^2} d\alpha$$

$$\lesssim e^{-32n} + \int_{\|\alpha\|_\infty \le 8\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.6) \text{ and } (7.7) | (7.8) \text{ and } (7.9)] e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^2 - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^2} d\alpha$$

$$\lesssim e^{-32n} + \int_{\|\alpha\|_\infty \le 8\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.6) \text{ and } (7.7)] \frac{\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.8) \text{ and } (7.9) | (7.6) \text{ and } (7.7)]}{\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.8) \text{ and } (7.9)]} e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^2 - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^2} d\alpha.$$

$1 + o(1)$来自这样一种概率： α 满足每个 $p_{ij} \in (0,1)$等条件；而e^{-32n} 则来自这样一个事实：当 α 的任一坐标的绝对值大于 $8\sqrt{n}$ 时，对积分的贡献非常小。我们指出，总和$\sum \alpha_{ij,i'j'}^2$ 是对满足 $i < i'$或 $i = i'$ 且满足 $j < j'$的配对求和；此外，对$\alpha_{ij,i'j'}$ 的积分也仅在这些配对上进行；请记住，我们令$\alpha_{ij,i'j'} = \alpha_{i'j',ij}$。

7.1.4. 估计贝叶斯比。 现在我们使用局部中心极限定理来估计最终被积函数中的概率比。由于我们只关心 ρ在常数因子意义下的结果，因此细节上会稍作简化（类似的精确计算见 [41, 第 2] 节）。分母是在完全独立分布中（我们将其标记为 $\vec{d^*}$）满足给定整除条件和等式条件的概率。对于分母，注意到(7.8) 和 (7.9) 中的每个条件彼此独立。此外，(7.9) 中的每个等式条件都等价于一个独立二项分布之和等于另一个独立二项分布之和（而每个整除条件都确保一个独立二项分布之和为偶数）。容易推出，分母的数量级为 $\Theta((1/2)^4(1/n)^6) = \Theta(n^{-6})$ ，例如可利用局部中心极限定理（或显式的二项分布计算）得到。这里我们隐含地假设 $\|\alpha\|_\infty$ 不太大。

现在我们关注分子。它与分母类似，但我们首先以不等式条件 (7.6) 和 (7.7)为条件。在此阶段，只需给出一个上界，因此我们只关注对 $\mathbb{P}[(7.9) | (7.6)$和 $(7.7)]$进行上界估计。

请注意，即使在给定条件后，“度”$(d_v^{(i,j)}, d_v^{(i,j,i,j+1)}, d_v^{(i,j,i+1,j+1)}, d_v^{(i,j,i+1,j)})$ 对所有 $v \in A_i \cap B_j$（以及 $i, j \in \{1,2\}$ 的取值）都是相互独立的。因此，得到的上界可由一种埃尔德什–利特尔伍德–奥福德式论证推出。具体而言，首先揭示所有 $v \in A_1 \cap B_1$ 的“度”。然后，揭示 $v \in A_1 \cap B_2$ 的“度”，并考虑 (7.9) 对 $i = 1, j = 1, i' = 1, j' = 2$ 成立的概率。接着，揭示 $v \in A_2 \cap B_1$ 的“度”，并考虑 (7.9) 对 $i' = 2, j' = 1$ 以及 $(i,j) \in \{(1,1),(1,2)\}$ 成立的概率。最后，揭示 $v \in A_2 \cap B_2$ 的“度”，并考虑 (7.9) 对 $i' = 2, j' = 2$ 以及 $(i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ 成立的概率。我们声称，在给定先前揭示的信息后，这些概率分别有上界 $O(n^{-1})$、 $O(n^{-2})$ 和 $O(n^{-3})$。我们重点讨论最后一个断言：注意，对每个 $v \in A_2 \cap B_2$ ， $(d_v^{(2,2)}, d_v^{(2,2,2,1)}, d_v^{(2,2,1,1)}, d_v^{(2,2,1,2)})$ 的分布是 合乐

$$\big(\mathrm{Bin}(n_{22} - 1, p_{22}), \mathrm{Bin}(n_{21}, p_{22,21}), \mathrm{Bin}(n_{11}, p_{22,11}), \mathrm{Bin}(n_{12}, p_{22,12})\big)$$

在由(7.6) 和(7.7)给出的不等式条件下，不难看出，存在一个维度为4的轴对齐晶格立方体，其边长为$\Omega(\sqrt{n})$ ，使得该立方体中的每个格点在此条件分布下出现的概率均为$\Omega(n^{-4/2})$（这几乎可以直接由无条件二项分布的同一性质推出）。投影后，这意味着存在一个维度为3的轴对齐立方体，其边长为$\Omega(\sqrt{n})$ ，使得该立方体中的每个格点在分布$(d_v^{(2,2,2,1)}, d_v^{(2,2,1,1)}, d_v^{(2,2,1,2)})$ 下出现的概率均为$\Omega(n^{-3/2})$。

现在只需证明，取该分布的 $n_{22} = \Omega(n)$ 个独立副本，其和具有这样的性质： $\mathbb{R}^3$ 中的每个点以概率 $O(n^{-3})$ 被取到。如果我们知道该分布实际上在维度为 $\Omega(\sqrt{n})$ 的三维立方体上均匀分布，那么只需分别考虑各个维度并进行一些明确计算，结论便显而易见（或者

莱维–柯尔莫哥洛夫–罗戈津不等式 [40]）。我们可以通过以下过程化归到这种情形：抽取 $X = x \in \mathbb{R}^3$ 个变量加入总和后，抽取一枚正面朝上的概率为 $p_x \in [0,1]$ 的加权硬币，选择权重 p_x，以确保在正面朝上的条件下，X 的结果在上述晶格立方体上均匀分布。容易验证，我们还可以进一步做到：以概率 $1-\exp(-\Omega(n))$，正面朝上的次数至少为 $\Omega(n)$。揭示哪些指标对应正面、哪些对应反面，然后注意到，正面对应的指标所对应的和，是取值在晶格立方体上的随机变量的独立和。

有了这些结论，最终的结果是

$$\frac{\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.8) \text{ and } (7.9) | (7.6) \text{ and } (7.7)]}{\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.8) \text{ and } (7.9)]} \leq O(1).$$

7.1.5. 独立模型。我们现在推导出

$$\rho \lesssim e^{-32n} + \int_{\|\alpha\|_\infty \leq 8\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.6) \text{ and } (7.7)] e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^2 - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^2} d\alpha,$$

现在，我们正在对来自纯独立模型（该模型取决于参数 α）的概率进行积分。接下来，在这一阶段，我们定义 $p_{ij} = 1/2 + \alpha_{ij}^*/\sqrt{4n_{ij}^2}$ 和 $p_{ij,\ i'j'} = 1/2 + \alpha_{ij,\ i'j'}^*/\sqrt{8n_{ij}n_{i'j'}}$。

Let

$$\rho^* := \int_{\|\alpha^*\|_\infty \leq 8\sqrt{n}} \prod_{v \in V(G)} \mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.6) \text{ and } (7.7) \text{ for } v] e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^{*2} - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^{*2}} d\alpha^*,$$

且不 e 该 $\alpha^* = (1 + O(1/n))\alpha$ 和被积函数中的 $\|\alpha\|_\infty \leq 8\sqrt{n}$ 很容易推出

$$\rho \lesssim e^{-32n} + \rho^*. \tag{7.10}$$

（注意，从 α 变为 α^* 会略微改变积分区域，但这个误差可以并入已有的 e^{-32n} 误差项中。）

现在我们将重点关注 ρ^*。回顾一下，$n_{11} = n_{22} = \beta n$ 以及 $n_{12} = n_{21} = (1-\beta)n$，并注意，对于 (7.6) 和 (7.7) 中的每个条件，v 都对应于某些二项分布和差值不等式。这些概率可以利用附录 A中的结果估计，误差不超过 $O(1/n)$。对于二阶矩，我们使用引理 A.4 来得到

$$\begin{aligned}
\rho^* &= \int_{\|\alpha\|_\infty \leq 8\sqrt{n}} \prod_{v \in V(G)} \mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.6) \text{ and } (7.7) \text{ for } v] e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^{*2} - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^{*2}} d\alpha^* \\
&= \int_{\|\alpha^*\|_\infty \leq 8\sqrt{n}} (q_{11}(\alpha) q_{22}(\alpha))^{\beta n} (q_{12}(\alpha) q_{21}(\alpha))^{(1-\beta)n} e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}^{*2} - \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij,i'j'}^{*2}} d\alpha^*
\end{aligned}$$

其中

$$q_{ij}(\alpha) := \mathbb{P}\begin{bmatrix} X^{(i,j)} - X^{(i,j,i+1,j+1)} + X^{(i,j,i,j+1)} - X^{(i,j,i+1,j)} \geq \gamma\sqrt{n} \\ X^{(i,j)} - X^{(i,j,i+1,j+1)} - X^{(i,j,i,j+1)} + X^{(i,j,i+1,j)} \geq \gamma\sqrt{n} \end{bmatrix}$$

其中 $X^{(i,j)} \sim$ 二项分布$(n_{ij}-1, p_{ij})$ 和 $X^{(i,j,i',j')} \sim$ 二项分布$(n_{i'j'}, p_{ij,i'j'})$。

我们分别应用 引理 A.4，参数如下：

$$\begin{aligned}
&k = \beta n, && (a_1,a_2,a_3,a_4) = \left(\frac{\alpha_{11}^*}{\sqrt{\beta^2 n}}, \frac{\alpha_{11,12}^*}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}, \frac{\alpha_{11,22}^*}{\sqrt{2\beta^2 n}}, \frac{\alpha_{11,21}^*}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}\right); \\
&k = \beta n, && (a_1,a_2,a_3,a_4) = \left(\frac{\alpha_{22}^*}{\sqrt{\beta^2 n}}, \frac{\alpha_{22,12}^*}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}, \frac{\alpha_{22,11}^*}{\sqrt{2\beta^2 n}}, \frac{\alpha_{22,21}^*}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}\right); \\
&k = (1-\beta)n, && (a_1,a_2,a_3,a_4) = \left(\frac{\alpha_{12}^*}{\sqrt{(1-\beta)^2 n}}, \frac{\alpha_{12,11}^*}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}, \frac{\alpha_{12,21}^*}{\sqrt{2(1-\beta)^2 n}}, \frac{\alpha_{12,22}^*}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}\right);
\end{aligned}$$

$$k=(1-\beta)n,\quad (a_1,a_2,a_3,a_4)=\Big(\frac{\alpha^*_{21}}{\sqrt{(1-\beta)^2n}},\frac{\alpha^*_{21,11}}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}},\frac{\alpha^*_{21,12}}{\sqrt{2(1-\beta)^2n}},\frac{\alpha^*_{21,22}}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}\Big).$$

这些给出了形式为 $g(\tau,a_1,a_2,a_3,a_4)$（定义 A.3）的表达式，其中，对于函数 $q_{11}(\alpha^*)$ $q_{22}(\alpha^*)$ $q_{12}(\alpha^*)$ $q_{21}(\alpha^*)$，相应地有 $\tau\in\{\beta,1-\beta\}$，误差不超过 $O(1/n)$；将这些表达式记为 $q^\dagger_{ij}(\alpha^*)$。它们是连续函数（省略对 γ、β 的依赖）。事实上，根据引理 6.3，每个 $q^\dagger_{ij}(\alpha^*)$ 关于 $\mathbb{R}^{10}$ 都是对数凹的（回顾 $\alpha^*_{ij,\ i'j'}=\alpha^*_{i'j',\ ij}$）。这是因为 $g(\tau,a_1,a_2,a_3,a_4)$ 可见关于 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是对数凹的。此外，在范围 $\|\alpha^*\|_\infty\le 8\sqrt{n}$ 内，它们还以下界为一个绝对常数，这意味着

$$\rho^*\lesssim\int_{\|\alpha^*\|_\infty\le 8\sqrt{n}}\Big[(q^\dagger_{11}(\alpha^*)q^\dagger_{22}(\alpha^*))^{\beta n}(q^\dagger_{12}(\alpha^*)q^\dagger_{21}(\alpha^*))^{(1-\beta)n}\Big]e^{-\frac12\sum\alpha^{*2}_{ij}-\frac12\sum\alpha^{*2}_{ij,i'j'}}d\alpha^*.\tag{7.11}$$

现在注意到，方括号中被积函数的初始部分具有这样的性质：同时交换 $\alpha^*_{12}\leftrightarrow\alpha^*_{21}$,$\alpha^*_{12,\ 11}\leftrightarrow\alpha^*_{21,\ 11}$,$\alpha^*_{12,\ 22}\leftrightarrow\alpha^*_{21,\ 22}$ 时（以一种仍能保持对称性 $\alpha^*_{ij,\ i'j'}=\alpha^*_{i'j',\ ij}$ 的方式），它保持对称。这可以看作是“交换划分 A 和 B的角色”，可以看出，这相当于在所有出现之处交换指标“12”和“21”。此外，被积函数的初始部分在同时交换 $\alpha^*_{11}\leftrightarrow\alpha^*_{22}$,$\alpha^*_{11,\ 12}\leftrightarrow\alpha^*_{22,\ 12}$,$\alpha^*_{11,\ 21}\leftrightarrow\alpha^*_{22,\ 21}$时也保持对称。这可以看作是“交换 A_1 和 B_2的角色，以及 A_2 和 B_1的角色”，这相当于在所有出现之处交换“11”和“22”。

我们可以利用这些对称性和对数凹性，得到式 (7.11) 中被积函数的一个上界。（例如，若 $g(x,y)$ 是对数凹且对称的，则 $g(x,y)=\sqrt{g(x,y)g(y,x)}\le g((x+y)/2,(x+y)/2)$。）我们得到

$$(q^\dagger_{11}(\alpha^*)q^\dagger_{22}(\alpha^*))^{\beta n}(q^\dagger_{12}(\alpha^*)q^\dagger_{21}(\alpha^*))^{(1-\beta)n}\le(q^\dagger_{11}(\alpha')q^\dagger_{22}(\alpha'))^{\beta n}(q^\dagger_{12}(\alpha')q^\dagger_{21}(\alpha'))^{(1-\beta)n}\tag{7.12}$$

其中

$$\alpha'_{11}=\alpha'_{22}=\frac{\alpha^*_{11}+\alpha^*_{22}}{2},\quad \alpha'_{12}=\alpha'_{21}=\frac{\alpha^*_{12}+\alpha^*_{21}}{2},$$
$$\alpha'_{11,12}=\alpha'_{11,21}=\alpha'_{22,12}=\alpha'_{22,21}=\frac{\alpha^*_{11,12}+\alpha^*_{11,21}+\alpha^*_{22,12}+\alpha^*_{22,21}}{4},$$
$$\alpha'_{12,21}=\alpha^*_{12,21},\quad \alpha'_{11,22}=\alpha^*_{11,22}.$$

我们有

$$q^\dagger_{11}(\alpha')=g\Big(\beta,\frac{\alpha'_{11}}{\sqrt{\beta^2n}},\frac{\alpha'_{11,12}}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}},\frac{\alpha'_{11,22}}{\sqrt{2\beta^2n}},\frac{\alpha'_{11,21}}{\sqrt{2\beta(1-\beta)n}}\Big)$$

并且其他取值也类似。但由定义 A.3 可知，$g(\tau,a_1,a_2,a_3,a_4)$ 仅取决于 β,a_1-a_3,a_2-a_4。由 $\alpha'_{11,12}=\alpha'_{11,21}$ 以及类似的关系，我们可以推得

$$q^\dagger_{11}(\alpha')=g\Big(\beta,\frac{\alpha'_{11}\sqrt2-\alpha'_{11,22}}{\sqrt{2\beta^2n}},0,0,0\Big),\qquad q^\dagger_{22}(\alpha')=g\Big(\beta,\frac{\alpha'_{22}\sqrt2-\alpha'_{22,11}}{\sqrt{2\beta^2n}},0,0,0\Big),$$
$$q^\dagger_{12}(\alpha')=g\Big(1-\beta,\frac{\alpha'_{12}\sqrt2-\alpha'_{12,21}}{\sqrt{2(1-\beta)^2n}},0,0,0\Big),\qquad q^\dagger_{21}(\alpha')=g\Big(1-\beta,\frac{\alpha'_{21}\sqrt2-\alpha'_{21,12}}{\sqrt{2(1-\beta)^2n}},0,0,0\Big).$$

现在，由于 $g(\tau,a_1,a_2,a_3,a_4)$ 关于 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是对数凹的，我们可以看出

$$q^\dagger_{11}(\alpha')q^\dagger_{22}(\alpha')\le g\Big(\beta,\frac{\alpha'_{11}\sqrt2-\alpha'_{11,22}}{\sqrt{2\beta^2n}},0,0,0\Big)^2=f\Big(\beta,\frac{\alpha'_{11,22}-\alpha'_{11}\sqrt2}{2\sqrt{2n}}\Big)^2,\tag{7.13}$$

$$q^\dagger_{12}(\alpha')q^\dagger_{21}(\alpha')\le g\Big(1-\beta,\frac{\alpha'_{12}\sqrt2-\alpha'_{12,21}}{\sqrt{2(1-\beta)^2n}},0,0,0\Big)^2=f\Big(1-\beta,\frac{\alpha'_{12,21}-\alpha'_{12}\sqrt2}{2\sqrt{2n}}\Big)^2,\tag{7.14}$$

使用 $\alpha'_{11}=\alpha'_{22}$、 $\alpha'_{11,\ 22}=\alpha'_{22,\ 11}$等，以及 g 与 f 之间在定义 A.3 （回忆一下 f 来自定义 1.4）。现在 (7.11) 至 (7.14) 可得

$$\rho^* \lesssim \int_{\|\alpha^*\|_\infty \le 8\sqrt{n}} f\Big(\beta, \frac{\alpha'_{11,22}-\alpha'_{11}\sqrt{2}}{2\sqrt{2n}}\Big)^{2\beta n} f\Big(1-\beta, \frac{\alpha'_{12,21}-\alpha'_{12}\sqrt{2}}{2\sqrt{2n}}\Big)^{2(1-\beta)n} e^{-\frac{1}{2}\sum \alpha^{*2}_{ij}-\frac{1}{2}\sum \alpha^{*2}_{ij,i'j'}} d\alpha^*. \tag{7.15}$$

Now,

$$\frac{\alpha'_{11,22}-\alpha'_{11}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha'_{11,22}+\alpha'_{11}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha'_{12,21}-\alpha'_{12}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha'_{12,21}+\alpha'_{12}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

是 α^* 的线性组合，即对于向量 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^{10}$， $v_1\cdot\alpha^*, v_2\cdot\alpha^*, v_3\cdot\alpha^*, v_4\cdot\alpha^*$ （这里假设 α^* 中每个对称对 $\alpha^*_{ij,i'j'}=\alpha^*_{i'j',ij}$ 只包含其中一个）。容易验证， v_1, v_2, v_3, v_4 是 $\mathbb{R}^{10}$ 中的标准正交向量。因此，存在一个标准正交基的补全 $\{v_1,\dots,v_{10}\}$， 使得

$$\sum \alpha^{*2}_{ij}+\sum \alpha^{*2}_{ij,i'j'} = \frac{(\alpha'_{11,22}-\alpha'_{11}\sqrt{2})^2+(\alpha'_{11,22}+\alpha'_{11}\sqrt{2})^2+(\alpha'_{12,21}-\alpha'_{12}\sqrt{2})^2+(\alpha'_{12,21}+\alpha'_{12}\sqrt{2})^2}{2} + \sum_{j=5}^{10}(v_j\cdot\alpha^*)^2.$$

通过此基变换重新参数化 (7.15) 中的积分坐标，我们得到

$$\begin{aligned}
\rho^* &\lesssim \int_{\|x\|_\infty\le 32\sqrt{n}} f\Big(\beta,\frac{x_1}{2\sqrt{n}}\Big)^{2\beta n} f\Big(1-\beta,\frac{x_2}{2\sqrt{n}}\Big)^{2(1-\beta)n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}x_j^2}dx\\
&\lesssim \int_{|x_1|,|x_2|\le 32\sqrt{n}} f\Big(\beta,\frac{x_1}{2\sqrt{n}}\Big)^{2\beta n} f\Big(1-\beta,\frac{x_2}{2\sqrt{n}}\Big)^{2(1-\beta)n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}dx\\
&\lesssim n\int_{|x_1|,|x_2|\le 16} f(\beta,x_1)^{2\beta n} f(1-\beta,x_2)^{2(1-\beta)n}\exp(-(2x_1^2+2x_2^2)n)dx\\
&\lesssim n\int_{|x_1|,|x_2|\le 16} \exp\big(n\big(-2x_1^2-2x_2^2+2\beta\log f(\beta,x_1)+2(1-\beta)\log f(1-\beta,x_2)\big)\big)dx. \qquad (7.16)
\end{aligned}$$

令 Q 为区域 $[-16,16]^2\subseteq\mathbb{R}^2$。最后， (7.4)、(7.5)、(7.10)和 (7.16) 表明

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_A(n'_1)=Y_B(n'_1)=1]=\mathbb{P}[\mathcal{E}_2] &\lesssim e^{-32n}+n\int_Q e^{n(-2x_1^2-2x_2^2+2\beta\log f(\beta,x_1)+2(1-\beta)\log f(1-\beta,x_2))}dx.\\
&\lesssim n\int_Q e^{n(-2x_1^2-2x_2^2+2\beta\log f(\beta,x_1)+2(1-\beta)\log f(1-\beta,x_2))}dx.
\end{aligned}$$

对于 $n'_1/n\in[c,1-c]$。这里我们利用 $|\gamma|\le 1$，注意到靠近 $x_1=x_2=-2$ 的区域至少贡献 $\exp(-32n)$，从而消去了 e^{-32n}。

将其与（7.2）和（7.3）结合可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_\gamma^2 &\lesssim (1+\eta)^n\mathbb{E}X_\gamma+\binom{2n}{n}\sum_{c\le\beta\le 1-c}\binom{n}{\beta n}^2 n\int_Q e^{n(-2x_1^2-2x_2^2+2\beta\log f(\beta,x_1)+2(1-\beta)\log f(1-\beta,x_2))}dx\\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{c\le\beta\le 1-c}\int_Q e^{n(2\log 2-2\beta\log\beta-2(1-\beta)\log(1-\beta)-2x_1^2-2x_2^2+2\beta\log f(\beta,x_1)+2(1-\beta)\log f(1-\beta,x_2))}dx\\
&\quad+(1+\eta)^n\mathbb{E}X_\gamma\\
&\lesssim (1+\eta)^n\mathbb{E}X_\gamma+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{c\le\beta\le 1-c}\int_Q e^{nF_2(\beta,x_1,x_2)}dx.
\end{aligned}$$

这里的求和遍历 β，其中有 $\beta n \in \mathbb{Z}$。我们使用了 Stirling公式。

现在我们将关于 β的求和拆分为两个区域。首先考虑 $\beta \in [c, .001] \cup [.999, 1-c]$。注意到 F_2 在 $\beta \leftrightarrow 1-\beta$下是对称的，因此损失一个常数因子后，不妨设 $\beta \in [c, .001]$。根据 假设 1.5的第一部分，我们看到 $F_2(\beta, x_1, x_2) \le 2$上确界$_{y\in\mathbb{R}} F_1(y)$，因此

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta\in[c,.001]\cup[.999,1-c]} \int_Q e^{nF_2(\beta,x_1,x_2)} dx \lesssim (1+\eta/2)^n \exp(2 \sup_{y\in\mathbb{R}} F_1(y)).$$

结合 引理 3.2 中的下界（将在下文证明），该量可由 $(1+\eta)^n \mathbb{E}X_\gamma$控制，因此可以将其吸收。

最后，我们考虑 $\beta \in [.001, .999]$。根据假设 1.5 的第二部分，$\beta \in [.001, .999]$ and $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$时，$F_2(\beta, x_1, x_2)$ 的唯一最优解出现在 $(1/2, x^*, x^*)$，其中 x^* =最大值点$_{x\in\mathbb{R}} F_1(x)$。此外，在 $(1/2, x^*, x^*)$ 处取值时，F_2 的海森矩阵是严格负定的。因此，存在某些小的绝对常数 $\theta, \theta' > 0$ 以及一个盒 $Q^* = (1/2, x^*, x^*) + [-\theta, \theta]^3$，使得对所有 $(\beta, x_1, x_2) \in Q^*$，我们有

$$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le F_2(1/2, x^*, x^*) - \theta((\beta - 1/2)^2 + (x_1 - x^*)^2 + (x_2 - x^*)^2)$$

以及 $F_2(\beta, x_1, x_2) \le F_2(1/2, x^*, x^*) - \theta'$对于满足 $\beta \in [.001, .999]$的 $(\beta, x_1, x_2) \notin Q^*$。令$Q' = (x^*, x^*) + [-\theta, \theta]^2$，于是我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{.001\le\beta\le.999} \int_Q e^{nF_2(\beta,x_1,x_2)} dx &\lesssim \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta\in[1/2\pm\theta]} \int_{Q'} e^{nF_2(1/2,x^*,x^*) - \theta n((\beta-1/2)^2 + (x_1-x^*)^2 + (x_2-x^*)^2)} dx_1 dx_2 \\
&\quad + e^{(F_2(1/2,x^*,x^*) - \theta')n} \\
&\lesssim \frac{e^{nF_2(1/2,x^*,x^*)}}{n^{3/2}} \sum_{\beta\in[1/2\pm\theta]} e^{-\theta n(\beta-1/2)^2} + e^{(F_2(1/2,x^*,x^*)-\theta')n} \\
&\lesssim n^{-1} e^{nF_2(1/2,x^*,x^*)} \lesssim 16^{-n} \binom{2n}{n}^2 \exp\left(n \sup_{\substack{\beta\in[0,1] \\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)\right).
\end{aligned}$$

我们推得

$$\mathbb{E}X_\gamma^2 \lesssim (1+\eta)^n \mathbb{E}X_\gamma + 16^{-n} \binom{2n}{n}^2 \exp\left(n \sup_{\substack{\beta\in[0,1] \\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)\right),$$

如所需，从而证明了 引理 3.3。

7.2. **的一阶矩。** 现在我们证明 引理 3.2。如前所述，这要简单得多，因此我们略去一些细节（不过请注意，引理 3.2 给出了相匹配的下界，而我们在证明引理 3.3时使用的定理 1.3 和引理 3.3并未给出）。

7.2.1. 设置与转移。 令 $A_1 = [n]$ 和 $A_2 = \{n+1, \dots, 2n\}$。令 $\mathcal{E}_1$ 表示以下事件：$G \sim \mathbb{G}(2n, 1/2)$ 使得 $A_1 \cup A_2$ 是一个 $\gamma\sqrt{n}$-友好划分。根据期望的线性性，我们有

$$\mathbb{E}X_\gamma = \binom{2n}{n} \mathbb{P}[\mathcal{E}_1]. \tag{7.17}$$

根据 命题 5.4 和 5.7，将 η 替换为 $\min(\varepsilon_{4.8}, \varepsilon_{4.9})/2$，可得

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_1] = (1 \pm n^{-\omega(1)}) \mathbb{P}[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}^c_{\text{irreg},1} \wedge \mathcal{E}^*_{\text{var}}]. \tag{7.18}$$

这里我们将 $\mathcal{E}^*_{\text{var}}$ 定义为恰当的一组条件（某种意义上说，是从 $\mathcal{E}_{\text{var}}$ 中选取的子集），以确保 $G[A_1]$、$G[A_2]$、$G[A_1, A_2]$ 的度序列满足**引理 4.8** 的A2 或**引理 4.9**的B5。因此，$\mathcal{E}^c_{\text{irreg},\,1}$，$\mathcal{E}^*_{\text{var}}$ 确保对于图 $2+1$ 和 $G[A_1]$ 以及二部图 $G[A_2]$

$G[A_1, A_2]$，其度序列分别满足 **引理 4.8** 中的 **A1** 至 A3以及 **引理 4.9** 中的 **B1** 至 B5。由此我们推得

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}^c_{\text{irreg},1} \wedge \mathcal{E}^*_{\text{var}}] \asymp \rho', \tag{7.19}$$

其中 ρ' 为以下概率：

- 对于 $i \in \{1,2\}$，从 $\mathcal{I}^n_{1/2}$中抽样 $v \in A_i$ 的“度” d^i_v（应将其视为对应于 $v \in A_i$的内部度 deg(v,{v6)）；
- 从 $\mathcal{I}^n$, $_{1/2}{}^n$中联合抽样 $v \in A_1$ 的“度” $d_{(1,2)v}$ 以及 $d_{(2,1)v}$ 的“度” $v \in A_2$（它们分别对应于 $v \in A_1$ 的二部度 deg(v, A_2)，反之亦然）；
- 计算以下概率：(a) 对于每个 $i \in \{1,2\}$ 和 $v \in A_i$，我们都有

$$d^i_v - d^{(i,i+1)}_v \geq \gamma\sqrt{n}, \tag{7.20}$$

其中指标取 (模 2)，并且 (b) 所得到的度序列满足 $\mathcal{E}^c_{\text{irreg},\ 1} \wedge \mathcal{E}^*_{\text{var}}$。这可以解释为：如果我们的 $1+2$ 图按照引理 4.8 和 4.9中的方式进行抽样，则 $A_1 \cup A_2$ 是 $\gamma\sqrt{n}$-友好的概率（且度序列不会过于不规则）。令 ρ 表示不加条件 (b) 时的相同概率。

理解“度”分布相对简单：

- 样本 $2+1$ 参数 $p_1, p_2 \sim \mathcal{N}(1/2, 1/(4n^2-4n))$ 和 $p_{1,2} \sim \mathcal{N}(1/2, 1/(8n^2))$（均以取值在 (0,1) 为条件），并令 $p_{2,1} = p_{1,2}$;
- 样本 $d^i_v \sim$二项分布$(n-1, p_i)$ 和 $d_{(i,i+1)v} \sim$二项分布$(n, p_{i,i+1})$ 完全独立；
- 以两个整除条件和一个相等条件为条件。

$$2 \mid \sum_{v \in A_i} d^i_v, \tag{7.21}$$

$$\sum_{v \in A_1} d^{(1,2)}_v = \sum_{v \in A_2} d^{(2,1)}_v. \tag{7.22}$$

第一步可以通过对 $2+1$ 参数进行高斯积分来处理，而第二步是独立的。再次，我们利用贝叶斯定理和类似于 第 7.1.4 节的局部中心极限定理来处理第三步中的条件化，但这次使用的局部中心极限定理结果将完全是 一维的。与之前不同，我们还需要一个双侧界。

7.2.2. 上界。 显然，我们有 $\rho' \leq \rho$。现在令 $p_i = 1/2 + \alpha_i/\sqrt{4n^2-4n}$ 和 $p_{1,\ 2} = 1/2 + \alpha_{1,\ 2}/\sqrt{8n^2}$。令 $\vec{d}$ 表示联合“度”分布上的分布，而 $\vec{d^*}$ 表示在条件化于 (7.21) 和 (7.22) 之前的分布。与 第 7.1.3 节 类似，我们有，

$$\begin{aligned}
\rho &\lesssim \int_\alpha \mathbb{P}_{\vec{d}}[(7.20)] e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_{1,2}^2)} d\alpha \\
&\lesssim e^{-8n} + \int_{\|\alpha\|_\infty \leq 4\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.20)] \frac{\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.21) \text{ and } (7.22) | (7.20)]}{\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.21) \text{ and } (7.22)]} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_{1,2}^2)} d\alpha.
\end{aligned}$$

现在，分母很容易看出是 $\Theta(1/n)$。事实上，对于分母，我们要求两个独立的随机变量和为偶数，并且一个带符号的随机变量和为 0。由对数凹随机变量的局部中心极限定理（[6]），以及注意到这个带符号和的均值与 0 的距离处于标准差范围内（相差至多一个常数因子）这一事实，即可推出该结论。（这里我们利用了二项分布随机变量是对数凹的，因此一对独立二项分布是对数凹的；进而，对单个线性不等式进行条件化后仍保持分布的对数凹性；最后，对数凹离散分布的边缘分布也是对数凹的 [26]。）

为了估计分子，首先注意，在以 (7.20) 以及所有取值 $d_v^{(1,2)}$、$d_v^{(2,1)}$为条件后，对于 d_v^1 和 d_v^2 的取值，我们还剩下相互独立的随机性。很容易看出，两个和均为偶数的概率约为 $1/4$。因此，我们得到

$$\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.21) \text{ and } (7.22)|(7.20)] = (1/4 + o(1))\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.22)|(7.20)].$$

现在注意到 $d_v^{(1,2)}$，$d_v^{(2,1)}$彼此联合独立，因此很容易看出（例如通过 Lévy– Kolmogorov–Rogozin 不等式 [40]） $\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.22)|(7.20)] \lesssim 1/n$。总之，我们推得

$$\rho' \le \rho \lesssim e^{-8n} + \int_{\|\alpha\|_\infty \le 4\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.20)]d\alpha.$$

现在，在这个阶段，让我们定义 $p_i = 1/2 + \alpha_i^*/(2n)$ 和 $p_{i,\ i+1} = 1/2 + \alpha_{i,\ i+1}^*/(2n\sqrt{2})$。我们看到$\alpha^* = (1 + O(1/n))\alpha$，因此不难推导出

$$\rho' \lesssim e^{-8n} + \int_{\|\alpha^*\|_\infty \le 4\sqrt{n}} \mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.20)]e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1^{*2}+\alpha_2^{*2}+\alpha_{1,2}^{*2})}d\alpha^* \tag{7.23}$$

与.....的开头类似第7.1.5节。在这一阶段，注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.20)] =& \mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n-1, 1/2 + \alpha_1^*/(2n)) - \mathrm{Bin}(n, 1/2 + \alpha_{1,2}^*/(2n\sqrt{2})) \ge \gamma\sqrt{n}]^n \\ &\cdot \mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n-1, 1/2 + \alpha_2^*/(2n)) - \mathrm{Bin}(n, 1/2 + \alpha_{1,2}^*/(2n\sqrt{2})) \ge \gamma\sqrt{n}]^n.\end{aligned}$$

根据引理 A.2，我们推得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\vec{d}^*}[(7.20)] &\asymp \left(\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[Z \ge \gamma\sqrt{2} + \frac{\alpha_{1,2}^* - \alpha_1^*\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}\right]\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[Z \ge \gamma\sqrt{2} + \frac{\alpha_{1,2}^* - \alpha_2^*\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}\right]\right)^n \\ &\lesssim \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[Z \ge \gamma\sqrt{2} + \frac{\alpha_{1,2}^* - (\alpha_1^* + \alpha_2^*)\sqrt{2}/2}{2\sqrt{n}}\right]^{2n}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

根据 引理 6.2。

现在，与 第7.1.5节 类似，我们可以合并 (7.23) 和 (7.24)，并沿着与 $\alpha_{1,2}^* - (\alpha_1^* + \alpha_2^*)\sqrt{2}/2$ 正交的方向对高斯函数进行积分。使用一个适当的恒等式

$$\alpha_1^{*2} + \alpha_2^{*2} + \alpha_{1,2}^{*2} = \frac{(\alpha_{1,2}^*\sqrt{2} - \alpha_1^* - \alpha_2^*)^2 + (v_2 \cdot \alpha^*) + (v_3 \cdot \alpha^*)}{4}$$

并进行变量代换（其中 $x = (\alpha_{1,\ 2}^*\sqrt{2} - \alpha_1^* - \alpha_2^*)/2$），我们得到

$$\begin{aligned}\rho' &\lesssim e^{-8n} + \int_{|x|\le 8\sqrt{n}} \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[Z \ge \gamma\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2n}}\right]^{2n} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &\lesssim e^{-8n} + \int_{|x|\le 4} \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \ge (\gamma + x)\sqrt{2}]^{2n} e^{-2x^2 n}dx.\end{aligned}$$

最后，注意到 $h(x) := \log(\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \ge (\gamma + x)\sqrt{2}])$ 是凹函数，因此加上 $-x^2$ 后便成为严格凹函数。此外，设 x^* 为 $-x^2 + h(x)$ 在 $\mathbb{R}$上的唯一极大值点。我们很容易得到

$$\rho' \lesssim e^{-8n} + e^{2n\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}(F_1(\alpha) - \log 2)},$$

类似于第7.1.5节。此外，我们很容易验证，对于 $|\gamma| \le 1$， e^{-8n} 在此处比上确界低阶。

He因此， $\rho' \lesssim 4^{-n}\exp(2n\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha))$。结合(7.17) 至(7.19) 我们得到

$$\mathbb{E}X_\gamma \lesssim 4^{-n}\binom{2n}{n}\exp(2n\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha))$$

符合上界的要求。

7.2.3. 下界。对于下界，我们必须首先找到一种方法来去除上述条件 (b)。为此，我们进一步考虑由 ρ' 定义、并附加条件 $|p_1-p_2|\le 2/n$ 和 $\|p-1/2\|_\infty\le 1/\sqrt{n}$ 的事件，并设其概率为 ρ'_0。类似地，由 ρ 定义、并附加条件 $|p_1-p_2|\le 2/n$ 的事件为 ρ_0。显然 $\rho'\ge\rho'_0$。

我们声称 $\rho'_0=(1\pm n^{-\omega(1)})\rho_0$。为此，注意到 ρ'_0/ρ_0 是如下概率：按上述方式抽取"度"分布，并附加条件 $|p_1-p_2|\le 2/n$ 和 $\|p-1/2\|_\infty\le 1/\sqrt{n}$，然后再以 (7.20) 为条件。接着考虑 $\mathcal{E}^c_{\mathrm{irreg},1}$ 和 $\mathcal{E}^*_{\mathrm{var}}$ 同时成立的概率。容易看出，这个新的分布可以如下理解：适当地抽取 p，然后对每个 $v\in A_i$，抽取 $(d^i_v,d^{(i,i+1)}_v)\sim$(二项分布$(n-1,p_i)$, 二项分布$(n,p_{i,i+1})$)，以 $d^i_v-d^{(i,i+1)}_v\ge\gamma\sqrt{n}$ 为条件，再进一步以 $2|\sum_{v\in A_i}d^i_v$ 和 $\sum_{v\in A_1}d^{(1,2)}_v=\sum_{v\in A_2}d^{(2,1)}_v$ 为条件。

我们声称，后述条件以$\Omega((1/2)^2(1/n))$的概率成立。偶数性条件可按第 7.2.2 节中的方法处理；唯一值得关注的条件是(7.22)。对此，若$p_1=p_2$，那么这就是若干独立同分布二项分布变量的交错和等于0的概率，而对数凹局部极限定理 [6] 将给出所需结果。对于 $|\alpha_1-\alpha_2|=O(1/n)$，我们再次使用 [6]，并只需注意，二项分布变量的带符号和的均值与0的距离不超过一个标准差的范围（即 $O(n)$）。。

将仅通过抽取 p、d^i_v、$d^{(i,i+1)}_v$而不再施加任何条件$\vec{}$所构成的随机模型记为 d^*，因此我们只需证明

$$\mathbb{P}_{\vec{d^\dagger}}[\mathcal{E}^c_{\mathrm{irreg},1}\wedge\mathcal{E}^*_{\mathrm{var}}]\le n^{-\omega(1)}. \tag{7.25}$$

利用测度集中很容易证明这一点。注意，例如，$d^{(1,2)}_v$和 $d^{(2,1)}_v$在$\vec{}$中联合 $d^\dagger$独立。因此，利用测度集中不难证明(7.25)，不过我们省略相对标准的细节。

因此，$\rho'\gtrsim\rho_0$。现在，ρ_0 与 ρ 非常相似，可以按照第 7.2.2 节中的方法进行分析。令 R 表示 $\mathbb{R}^3$ 中由 $\|\alpha\|_\infty\le 2\sqrt{n}$ 和 $|\alpha_1-\alpha_2|\le 4$定义的区域。我们有

$$\begin{aligned}\rho'&\gtrsim\int_R\mathbb{P}_{\vec{d}}[(7.20)]e^{-\frac12(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_{1,2}^2)}d\alpha\\&\ge\int_R\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.20)]\frac{\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.21)\text{ and }(7.22)|(7.20)]}{\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.21)\text{ and }(7.22)]}e^{-\frac12(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_{1,2}^2)}d\alpha.\end{aligned}$$

现在，很容易看出分母为 $\Theta(1/n)$，与第 7.2.2 节类似；而由上文可知，分子为 $\Omega(1/n)$。进一步重新参数化为 $p_i=1/2+\alpha^*_1/(2n)$ 和 $p_{i,\,i+1}=1/2+\alpha^*_{i,\,i+1}/(2n\sqrt{2})$，综上可得

$$\rho'\gtrsim\int_{R^*}\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.20)]e^{-\frac12(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_{1,2}^2)}d\alpha \tag{7.26}$$

其中 R^* 是区域$\|\alpha^*\|_\infty\le\sqrt{n}$ 和 $|\alpha_1-\alpha_2|\le 2$。

现在，利用 (7.24) 的第一行(7.24)，$|\alpha^*_1-\alpha^*_2|=O(1)$，以及 $\|\alpha^*\|_\infty=O(\sqrt{n})$，我们很容易推得 t

$$\mathbb{P}_{\vec{d^*}}[(7.20)]\gtrsim\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\Big[Z\ge\gamma\sqrt{2}+\frac{\alpha^*_{1,2}-(\alpha^*_1+\alpha^*_2)\sqrt{2}/2}{2\sqrt{n}}\Big]^{2n}.$$

我们将重点放在区域 Q^*，其中还满足

$$|\alpha^*_{1,2}-(\alpha^*_1+\alpha^*_2)\sqrt{2}/2-(2\sqrt{2n})x^*|\le\sqrt{2},$$

其中 $x^*=$最大值点$_{x\in\mathbb{R}}F_1(x)$。

对(7.26)中的坐标进行变换，类似于第 7.2.2 节，其中 $x=(\alpha^*_{1,2}\sqrt{2}-\alpha^*_1-\alpha^*_2)/2$。对其他坐标积分，我们得到

$$\rho'\gtrsim\int_{|x-(2\sqrt{n})x^*|\le1}\mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z\ge(\gamma+x/(2\sqrt{n}))\sqrt{2}]^{2n}e^{-\frac12x^2}dx$$

$$\gtrsim \sqrt{n}\int_{|x-x^*|\le 1/(2\sqrt{n})} \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}[Z \ge (\gamma+x)\sqrt{2}]^{2n} e^{-2x^2 n}dx$$
$$\gtrsim \sqrt{n}\int_{|x-x^*|\le 1/(2\sqrt{n})} \exp(2n(F_1(x)-\log 2))dx.$$

由于 $x = x^*$ 使被积函数指数中的表达式达到最大值，我们可以看出，当 $|x - x^*| \le 1/(2\sqrt{n})$ 时，$2n(F_1(x)-\log 2)$ 保持在一个大小为 $O(1)$ 的范围内，因此

$$\rho' \gtrsim \sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\exp(2n\sup_{x\in\mathbb{R}}(F_1(x)-\log 2)).$$

将其与(7.17) 至(7.19)结合，得到

$$\mathbb{E}X_\gamma \gtrsim 4^{-n}\binom{2n}{n}\exp(2n\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}F_1(\alpha)),$$

从而完成了引理 3.2 的下界证明。

参考文献

[1] Emmanuel Abbe、Shuangping Li 和 Allan Sly，《对称感知机相邻性猜想的证明及对数正态极限》，2021 年 IEEE 第 62 届计算机科学基础年会—FOCS 2021，IEEE 计算机学会，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州， [2022] ©2022，第 327–338 页。4, 12[2] Ahmed El Alaoui、Andrea Montanari 和 Mark Sellke，《大度数局部树状正则图上的最大割与最小二分割的局部算法》。[3] Benjamin Aubin、Will Perkins 和 Lenka Zdeborová，《对称二元感知机的存储容量》，《物理学杂志 A》52 (2019)，294003，32。11[4] Cristina Bazgan、Zsolt Tuza 和 Daniel Vanderpooten，《满意图划分、变体及推广》，《欧洲运筹学杂志》206 (2010)，271–280。2[5] Freya Behrens、Gabriel Arpino、Yaroslav Kivva 和 Lenka Zdeborová，《随机正则图上的（非）同配划分》，《物理学杂志 A：数学与理论》 **55** 2022 395004 2, 3 ( )，。[6] Edward A. Bender，《应用于渐近计数的中心极限定理与局部极限定理》，《组合理论杂志 A 辑》15 (1973)，91–111。31, 33[7] Itai Benjamini、Gil Kalai 和 Oded Schramm，《布尔函数的噪声敏感性及其在渗流中的应用》，《高等科学研究所数学出版物》（ 1999 5 43 2001 3 ），– ()。[8] Béla Bollobás，《随机图最大度的分布》，《离散数学》32 (1980)，201–203。3, 7[9] Guy Bresler 和 Brice Huang，《低次多项式的随机 k-SAT 算法相变》，2021 年 IEEE 第 62 届计算机科学基础年会—FOCS 2021，IEEE 计算机学会，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州， [2022] 2022， 298 309 2 ©，第 – 页。[10] E. R. Canfield、C. Greenhill 和 B. D. McKay，《具有指定行和的稠密 0-1 矩阵的渐近计数》，《组合理论杂志 A 辑》115 (2008)，32–66。13[11] Wei-Kuo Chen、David Gamarnik、Dmitry Panchenko 和 Mustazee Rahman，《一类最大割问题中局部算法的次优性》，《概率年刊》 **47** 2019 1587 1618 2 ( )，–。[12] Zvi Drezner 和 G. O. Wesolowsky，《二元正态积分的计算》，《统计计算与模拟杂志》 **35** 1990 101 107 40 ( )，–。[13] Ronen Eldan 和 Renan Gross，《通过逐路径随机分析研究布尔超立方体上的集中》，《数学发明》230 (2022)，935–994。3[14] Ronen Eldan、Guy Kindler、Noam Lifshitz 和 Dor Minzer，《让等周不等式更简单》，arXiv:2204.06686。3, 8[15] Asaf Ferber、Matthew Kwan、Bhargav Narayanan、Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney，《随机图的友好二分割》，《美国数学会通讯》 **2** 2022 380 416 2, 17 ( )，–。[16] Ehud Friedgut，《图性质的尖锐阈值及 k-sat 问题》，《美国数学会杂志》12 (1999)， 1017 1054， 3 –。附录由 Jean Bourgain 撰写。[17] Ehud Friedgut 和 Gil Kalai，《每个单调图性质都有尖锐阈值》，《美国数学会会刊》 **124** 1996 2993 3002 3 ( )，–。[18] Z. Füredi，私人通信。[19] David Gamarnik，《重叠间隙性质：优化随机结构的拓扑障碍》，《美国国家科学院院刊》118 (2021)。2

[20] David Gamarnik 和 Quan Li，《稀疏随机图的最大割》，《随机结构与算法》52 (2018 219 262 5, 7, 23)，–。[21] David Gamarnik 和 Madhu Sudan，《稀疏随机图上的局部算法极限》，《概率年刊》45 (2017)，2353–2376。2[22] David Gamarnik 和 Madhu Sudan，《随机 NAE-K-SAT 问题的序贯局部算法性能》，《SIAM 计算杂志》**46** 2017 590 619 2 ( )，–。Michael U. Gerber 和 Daniel Kobler，《满意图划分问题的[23]算法方法》，第 125, 2000, 1998 283 291 2《组合优化》（哥本哈根，）卷，第 – 页。[24] Guilherme C. M. Gomes 和 Ignasi Sau，《寻找有界度数割：复杂性、固定参数可处理性与精确算法，以及核化》，《Algorithmica》**83** 2021 1677 1706 2 ( )，–。B. Green，未解决问题，手稿，可索取。2[26] Diana Halikias、Bo'az Klartag[25] 和 Boaz A Slomka，《Brunn-Minkowski 型不等式的离散变体》，arXiv:1911.04392。31[27] Hamed Hatami，《总影响较小的布尔函数的结构定理》，《数学年刊》（第 2 辑）176 (2012)，509–533。12[28] Brice Huang 和 Mark Sellke，《优化均场自旋玻璃的紧 Lipschitz 困难性》，2022 年 IEEE 第 63 届计算机科学基础年会—FOCS 2022，IEEE 计算机学会，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州，[2022] ©2022，第 312–322 页。2[29] Fredrik Johansson，《Arb：高效的任意精度中点半径区间算术》，《IEEE 计算机汇刊》**66** 2017 1281 1292 6 ( )，–。L. Leindler，《关于 Hölder 不等式的某个逆命题。II》，《Acta Sci. Math. (Szeged)》[30]**33** 1972 217 223 23 ( )，–。Brendan D. McKay 和 Fiona Skerman，《随机有向图和二分图的度序列》，《组合学杂志》7 (2016 21 49 4, 5, 14)，–。[31] Brendan D. McKay、Ian M. Wanless 和 Nicholas C. Wormald，《对最大度有给定上界的图的渐近计数》，《组合概率与计算》**11** 2002 373 392 4, 5, 17 ( )，–。[32] Brendan D. McKay 和 Nicholas C. Wormald，《高度数图按度序列进行的渐近计数》，《欧洲组合学杂志》[33]**11** 1990 565 580 4, 5, 13 ( )，–。Brendan D. McKay 和 Nicholas C. Wormald，《随机图的度序列。I. 模型》，《随机结构与算法》11 (1997)，97–117。4, 14, 15[35] Shuta Nakajima 和 Nike Sun，《伊辛感知机模型的尖锐阈值序列与普适性》，arXiv:2204.03469。12[36] Will Perkins 和 Changji Xu，《对称伊辛感知机的冻结[34]1-RSB 结构》，STOC '21—第 53 届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，ACM，纽约，[2021] ©2021，第 1579 1588 4, 12 –页。András Prékopa，《对数凹测度及其在随机规划中的应用》，《Acta Sci. Math. (Szeged)》[37]**32** 1971 301 316 23 ( )，–。Mustazee Rahman 和 Bálint Virág，《独立集的局部算法至多达到最优值的一半》，《概率年刊》45 (2017 1543 1577 2)，–。Oliver Riordan 和 Alex Selby，《随机图的最大度》，《组合概率[38]与计算》9 (2000)，549–572。4[40] B. A. Rogozin，《独立随机变量之和的离散程度增大问题》，《Teor. Verojatnost. i Primenen》**6** 1961 106 108 27, 32 ( )，–。Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney，《多数动力学：一个人的力量》，[39]arXiv: 2105 13301 25, 26 。。Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney，《稠密随机正则图中的子图分布》，arXiv:2209.00734。12[43] David Sherrington 和 Scott Kirkpatrick，《自旋玻璃的可解模型》，《物理评论快报》35 (1975)，1792。2[44] Alessandro Treves 和 Daniel J Amit，《非对称稀疏化 Hopfield 网络中的亚稳态》，《物理学杂志 A：数学与一般》**21** 1988 3155 2 ( )，。R. Vershynin，《高维概率》，剑桥统计与概率数学丛书，第 47 卷，剑桥大学出版社，剑桥，[41]2018，《数据科学中的应用导论》，Sara van de Geer 撰写序言。[42][46] Changji Xu，《伊辛感知机模型的尖锐阈值》，《概率年刊》49 (2021)，2399–2415。12

附录 A. 二项分布计算我们需要用到若干与二项随机变量相关的精确渐近估计。

引理 A.1。 固定 $C \geq 1$，使得 最大值$\{|a_1|, |a_2|\} \leq C$。那么对于足够大的 n，

$$\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n, 1/2 + a_2/(2\sqrt{n})) - \mathrm{Bin}(n-\ell, 1/2 + a_1/(2\sqrt{n})) = t]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\left(\frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{-t + \ell/2}{\sqrt{n}}\right)^2 + O_{C,|\ell|}\left(\frac{1}{n} + \frac{t^4}{n^3}\right)\right) \pm \exp(-\Omega((\log n)^2)).$$

证明。 如果$|t| \geq \sqrt{n}\log\, n/4$，则由 Azuma–Hoeffding不等式可轻易得到该结果，因此假设 $|t| < \sqrt{n}$ log $n/4$。考虑取值范围 $k \in [0, n]$，并令 $\tau = k - n/2$。注意到

$$\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n, 1/2 + a_2/(2\sqrt{n})) - \mathrm{Bin}(n-\ell, 1/2 + a_1/(2\sqrt{n})) = t]$$
$$= \sum_{|k-n/2| \leq \sqrt{n}\log n} \binom{n}{k}\binom{n-\ell}{k-t}\left(\frac{1}{2} + \frac{a_2}{2\sqrt{n}}\right)^k \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{2\sqrt{n}}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{n}}\right)^{k-t} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{2\sqrt{n}}\right)^{n-\ell-k+t}$$
$$\pm \exp(-\Omega((\log n)^2))$$
$$= \sum_{|k-n/2| \leq \sqrt{n}\log n} \binom{n}{n/2+\tau}\binom{n-\ell}{n/2-t+\tau}\left(\frac{1}{4} - \frac{a_2^2}{4n}\right)^{n/2} \left(\frac{1/2 + a_2/(2\sqrt{n})}{1/2 - a_2/(2\sqrt{n})}\right)^{\tau}$$
$$\left(\frac{1}{4} - \frac{a_1^2}{4n}\right)^{(n-\ell)/2} \left(\frac{1/2 + a_1/(2\sqrt{n})}{1/2 - a_1/(2\sqrt{n})}\right)^{\tau+\ell/2-t} \pm \exp(-\Omega((\log n)^2))$$
$$= \frac{2}{\pi n} \sum_{|k-n/2| \leq \sqrt{n}\log n} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2} - \frac{a_2^2}{2} + \frac{2a_2\tau}{\sqrt{n}} + \frac{2a_1(\tau + \ell/2 - t)}{\sqrt{n}} - \frac{2\tau^2}{n} - \frac{2(\tau - t + \ell/2)^2}{n}\right)$$
$$\cdot \left(1 + O_{C,|\ell|}\left(\frac{1}{n} + \frac{\tau^4 + t^4}{n^3}\right)\right) \pm \exp(-\Omega((\log n)^2))$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{4n}(\ell - a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{n} - 2t)^2}}{\sqrt{\pi n}} \sum_{|k-n/2| \leq \sqrt{n}\log n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n/8)}} \exp\left(-\frac{4}{n}\left(\tau + \frac{\ell - a_1\sqrt{n} - a_2\sqrt{n} - 2t}{4}\right)^2\right)$$
$$\cdot \left(1 + O_{C,|\ell|}\left(\frac{1}{n} + \frac{\tau^4 + t^4}{n^3}\right)\right) \pm \exp(-\Omega((\log n)^2))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\left(\frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{-t + \ell/2}{\sqrt{n}}\right)^2 + O_{C,|\ell|}\left(\frac{1}{n} + \frac{t^4}{n^3}\right)\right) \pm \exp(-\Omega((\log n)^2))$$

其中我们使用了 Stirling公式，以及对 $|t| \leq 1/2$，$\exp(2t) - (1+t)/(1-t) = O(t^3)$，并通过黎曼积分近似求和。□

现在我们将 анапх 推导出若干进一步的估计，而这些估计最终都基于 引理 A.1 .

引理 A.2。 固定 $C \geq 1$，使得 $\max\{|a_1|, |a_2|\} \leq C$。那么

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{Bin}\left(n-1, \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{n}}\right) - \mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2} + \frac{a_2}{2\sqrt{n}}\right) \geq k\right] = \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[Z \geq \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{2}}\right] + O_C\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明。 应用 引理 A.1 我们得到

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{Bin}\left(n-1, \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{n}}\right) - \mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2} + \frac{a_2}{2\sqrt{n}}\right) \geq k\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2} + \frac{a_2}{2\sqrt{n}}\right) - \mathrm{Bin}\left(n-1, \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{n}}\right) \leq -k\right]$$
$$= \sum_{-\sqrt{n}\log n \leq t \leq -k} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\left(\frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{-t + 1/2}{\sqrt{n}}\right)^2 + O_C\left(\frac{1}{n} + \frac{|t|^4}{n^3}\right)\right) \pm \exp(-\Omega((\log n)^2))$$

$$= \sum_{-\sqrt{n}\log n \le t \le -k} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\left(\frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{-t + 1/2}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) + O_C\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{-k+1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\left(\frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{-t + 1/2}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) dt + O_C\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{-k} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\left(\frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) dt + O_C\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\frac{-k\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) dz + O_C\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \mathbb{P}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[Z \ge \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{2}} \right] + O_C\left(\frac{1}{n}\right)$$

其中，为了用相应的积分替换求和，我们使用了用于近似积分的中点法则（而这又可由欧拉–麦克劳林公式直接推出）。□

对于第二个估计，为便于使用，我们引入一些记号。

定义 A.3. 给定 $\gamma \in [-1,1]$ 和 $\beta \in (0,1)$ 以及 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$，定义

$$g_\gamma(\beta, a_1, a_2, a_3, a_4) = \mathbb{P}_{Z_i\sim\mathcal{N}(0,1)}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2}} Z_1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} Z_2 \ge \gamma + \frac{(a_3 - a_1)\beta + (a_4 - a_2)(1-\beta)}{2} \right.$$
$$\left. \wedge \sqrt{\frac{\beta}{2}} Z_1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} Z_2 \ge \gamma + \frac{(a_3 - a_1)\beta - (a_4 - a_2)(1-\beta)}{2} \right].$$

我们常在记号中省略 γ。我们看到 $g(\beta, a_1, 0, 0, 0) = f(\beta, -a_1\beta/2)$，采用定义 1.4中的记号。

引理 A.4. 固定 $C \ge 1$。令 $|a_i| \le C$，其中 $i \in [4]$ 和 $k = \beta n$ 满足$\min(\beta, 1-\beta) \ge 1/C$。此外，令 $X_1 \sim$ 二项分布$\left(k-1, \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{n}}\right)$，$X_2 \sim$ 二项分布$\left(n-k, \frac{1}{2} + \frac{a_2}{2\sqrt{n}}\right)$，$X_3 \sim$ 二项分布$\left(k, \frac{1}{2} + \frac{a_3}{2\sqrt{n}}\right)$，以及$X_4 \sim$ 二项分布$\left(n-k, \frac{1}{2} + \frac{a_4}{2\sqrt{n}}\right)$。最后，令 Γ 为整数，且 $\gamma = \Gamma/\sqrt{n}$。则

$$\mathbb{P}[X_1 - X_3 + X_2 - X_4 \ge \Gamma \wedge X_1 - X_3 - X_2 + X_4 \ge \Gamma]$$
$$= g_\gamma(\beta, a_1, a_2, a_3, a_4) + O_C\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明。设 $T_1 = X_1 - X_3$ 且 $T_2 = X_2 - X_4$。根据 引理 A.1 可得

$$\mathbb{P}[X_1 - X_3 + X_2 - X_4 \ge \Gamma \wedge X_1 - X_3 - X_2 + X_4 \ge \Gamma] = \sum_{t_1 \pm t_2 \ge \Gamma} \mathbb{P}[T_1 = t_1]\mathbb{P}[T_2 = t_2]$$
$$= \sum_{\Gamma \le t_1 \pm t_2 \le \sqrt{n}\log n} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \exp\left(-\left(\frac{(a_3 - a_1)\sqrt{k}}{2\sqrt{n}} + \frac{t_1 + 1/2}{\sqrt{k}} \right)^2 - \left(\frac{(a_4 - a_2)\sqrt{n-k}}{2\sqrt{n}} + \frac{t_2}{\sqrt{n-k}} \right)^2 \right.$$
$$\left. + O_C\left(\frac{1}{n} + \frac{t_1^4 + t_2^4}{n} \right) \right) + \exp(-\Omega((\log n)^2))$$
$$= \sum_{\Gamma \le t_1 \pm t_2 \le \sqrt{n}\log n} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \exp\left(-\left(\frac{(a_3 - a_1)\sqrt{k}}{2\sqrt{n}} + \frac{t_1 + 1/2}{\sqrt{k}} \right)^2 - \left(\frac{(a_4 - a_2)\sqrt{n-k}}{2\sqrt{n}} + \frac{t_2}{\sqrt{n-k}} \right)^2 \right)$$
$$+ O_C\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\Gamma \le t_1 \pm t_2 \le \sqrt{n}\log n} \int_{t_1-1/2}^{t_1+1/2} \int_{t_2-1/2}^{t_2+1/2} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \exp\Bigg(-\left(\frac{(a_3-a_1)\sqrt{k}}{2\sqrt{n}} + \frac{\ell+1/2}{\sqrt{k}}\right)^2 \\
&\quad -\left(\frac{(a_4-a_2)\sqrt{n-k}}{2\sqrt{n}} + \frac{m}{\sqrt{n-k}}\right)^2\Bigg) dm d\ell + O_C\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{\Gamma \le t_1 \pm t_2 \le \sqrt{n}\log n} \int_{t_1}^{t_1+1} \int_{t_2-1/2}^{t_2+1/2} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \exp\Bigg(-\left(\frac{(a_3-a_1)\sqrt{k}}{2\sqrt{n}} + \frac{\ell}{\sqrt{k}}\right)^2 \\
&\quad -\left(\frac{(a_4-a_2)\sqrt{n-k}}{2\sqrt{n}} + \frac{m}{\sqrt{n-k}}\right)^2\Bigg) dm d\ell + O_C\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{\Gamma \le t_1 \pm t_2 \le \sqrt{n}\log n} \int_{t_1/\sqrt{k}}^{(t_1+1)/\sqrt{k}} \int_{(t_2-1/2)/\sqrt{n-k}}^{(t_2+1/2)/\sqrt{n-k}} \frac{1}{\pi} \exp\Bigg(-\left(\frac{(a_3-a_1)\sqrt{\beta}}{2} + \ell\right)^2 \\
&\quad -\left(\frac{(a_4-a_2)\sqrt{1-\beta}}{2} + m\right)^2\Bigg) dm d\ell + O_C\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{\Gamma \le t_1 \pm t_2 \le \infty} \int_{t_1/\sqrt{k}}^{(t_1+1)/\sqrt{k}} \int_{(t_2-1/2)/\sqrt{n-k}}^{(t_2+1/2)/\sqrt{n-k}} \frac{1}{\pi} \exp\Bigg(-\left(\frac{(a_3-a_1)\sqrt{\beta}}{2} + \ell\right)^2 \\
&\quad -\left(\frac{(a_4-a_2)\sqrt{1-\beta}}{2} + m\right)^2\Bigg) dm d\ell + O_C\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \int_{\Gamma \le \ell\sqrt{k} \pm m\sqrt{n-k}} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\left(\frac{(a_3-a_1)\sqrt{\beta}}{2} + \ell\right)^2 - \left(\frac{(a_4-a_2)\sqrt{1-\beta}}{2} + m\right)^2\right) d\ell dm + O_C\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \mathbb{P}_{Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2}} Z_1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} Z_2 \ge \frac{\Gamma}{\sqrt{n}} + \frac{(a_3-a_1)\beta + (a_4-a_2)(1-\beta)}{2}\right. \\
&\quad \left. \wedge \sqrt{\frac{\beta}{2}} Z_1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} Z_2 \ge \frac{\Gamma}{\sqrt{n}} + \frac{(a_3-a_1)\beta - (a_4-a_2)(1-\beta)}{2}\right] + O_C\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

在倒数第二行，通过考察直线 $\Gamma = \ell\sqrt{k} + m\sqrt{n-k}$ 处的误差项与给定方框之间的关系，可以看出所需的等式（类似于 引理 A.2证明中欧拉–麦克劳林公式在求和与积分之间的转移）。□

附录 B. 计算机辅助验证

现在，我们将通过一项精细的计算机辅助验证来证明假设 1.5。我们陈述一系列数值断言，用以证明假设 1.5。注意，利用变分问题的对称性，我们可以假设 $\beta \in [0, 1/2]$。第一个断言将处理该断言中数值上最不稳定的情形，即 β 包含在初始区间$\beta \in [0, .001]$中。

断言 B.1. 设 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$。则

$$
\sup_{\substack{\beta \in [0,.001] \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) = 2 \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} F_1(\alpha).
$$

接下来，我们处理 $\beta \in [.001, .495]$ 的情形。

命题 B.2。 令 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$。那么

$$
\sup_{\substack{\beta \in [.001,.495] \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) < -10^{-5}.
$$

接下来，我们将关注区域局部化到 $\beta \in [.495, .5]$ 和 $\alpha_i \in [-.449, -.441]$.

命题 B.3. 令 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$。那么

$$\sup_{\substack{\beta \in [.495,.5] \\ (\alpha_1,\alpha_2) \notin [-.449,-.441]^2}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) < 10^{-6}.$$

最后，在这个局部区域内，我们验证相应的海森矩阵严格负定。

断言 B.4. 令 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$。存在一个绝对常数 $\delta > 0$ 使得$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_1 \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_2^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_2 \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_1 \partial \beta} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_2 \partial \beta} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} \end{pmatrix} \preceq -\delta I_3$$

对于 $\beta \in [.495, .505]$ 和 $\alpha_i \in [-.449, -.441]$，其中 I_3 是单位矩阵，$\preceq$ 表示半定序。

现在根据上述命题推导出该结果。

假设 *1.5* 的证明假设 *1.5*。 我们首先注意到

$$\sup_{\substack{\beta \in [0,1] \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \geq \max(4 \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} F_1(\alpha), 2 \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} F_1(\alpha)).$$

这可通过分别在 $(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 处、$(1/2, \alpha(\gamma)\ \alpha(\gamma))$ 处以及 $(0, -1, \alpha(\gamma))$ 处计算 $F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 得出。此外，注意对于 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$，我们有

$$\log 2 + \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} -\alpha^2 + \mathbb{P}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma + \alpha)\sqrt{2}] = \log 2 + \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} -\alpha^2 + \mathbb{P}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}[Z \geq (\gamma_{\text{crit}} + \alpha)\sqrt{2}] \pm \varepsilon_{1.5}$$
$$\in [-\varepsilon_{1.5}, \varepsilon_{1.5}]$$

其中我们用到了 $x \to \mathbb{P}[Z \geq x]$ 的导数的绝对值不超过 $1/\sqrt{2\pi}$。因此，在此范围内，$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} F_1(\alpha)$ $\in [-\varepsilon_{1.5}, \varepsilon_{1.5}]$。

因此，根据 命题 B.2 和 $\varepsilon_{1.5} = 10^{-25}$，只需考虑 $\beta \in [0, .001]$ 或者$\beta \in [.495, .5]$ 的情形。对于前一种情形，注意到结论可由 断言 B.1 立即得出。对于后一种情形，注意到根据 $\beta \in [.495, .5]$ 和 α_1, $\alpha_2 \in [-.449, -.441]$ 只需验证 命题 B.3。注意，这也意味着对于 $\gamma \in [\gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}, \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon_{1.5}]$，有 $\alpha(\gamma) \in [-.449, -.441]$。

最后注意到 F_2 在变换 $F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) = F_2(1 - \beta, \alpha_2, \alpha_1)$下是对称的。这意味着 F_2 的梯度在$(1/2, \alpha(\gamma)\ \alpha(\gamma))$处消失。根据断言 B.4，我们知道 F_2在此区域上是凹的，因此所需结果立即成立。□

现在，我们继续证明剩余各小节中的每一项具体命题。这些命题的证明均借助计算机辅助完成，但绝大部分计算工作集中在命题 B.2 和命题 B.3。

B.1. **的性质** $f(\beta, \alpha)$。 我们收集了 $f(\beta, \alpha)$ 的一系列一般性质，这些性质将在整个验证过程中使用。首先给出 $f(\beta, \alpha)$ 的一个显式公式，以便更便于直接计算。

命题 B.5。我们有

$$f(\beta, \alpha) = \int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta(1-\beta)}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2 + t_2^2) - \frac{1/2 - \beta}{\beta(1-\beta)} t_1 t_2 \right) dt_1 dt_2$$

证明。这是以下事实的直接推论：$T_1 = \sqrt{\beta/2}Z_1 + \sqrt{(1-\beta)/2}Z_2$ 和$T_2 = \sqrt{\beta/2}Z_1 - \sqrt{(1-\beta)/2}Z_2$ 是联合高斯的，且二者的方差均为 $1/2$，协方差为$\beta - 1/2$。特别地，T_1、T_2 的协方差矩阵为 Σ，其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1/2 & \beta - 1/2 \\ \beta - 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{\beta(1-\beta)} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 - \beta \\ 1/2 - \beta & 1/2 \end{bmatrix}$$

因此

$$f(\beta, \alpha) = \int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta(1-\beta)}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2 + t_2^2) - \frac{1/2 - \beta}{\beta(1-\beta)} t_1 t_2 \right) dt_1 dt_2. \qquad \square$$

我们还需要以下效率显著更高且数值稳定性更好的命题 B.5版本。效率提升源于这样一个事实：二维积分比其一维对应项更难计算，精度也更低。

命题 B.6。我们有

$$f(\beta, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho} (1 - x^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-2(\gamma+\alpha)^2}{1+x} \right) dx + \left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}(\gamma+\alpha)} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \right)^2$$

其中 $\rho = 2\beta - 1$。

证明。这恰好就是 [12, (6)]，其中 $\rho = 2\beta - 1$ 且 $h = k = (\gamma + \alpha)\sqrt{2}$（注意，证明$T_1$、$T_2$ 时所用的高斯函数命题 B.5 的方差为 $1/2$，而非1，因此需要进行归一化）。$\square$

我们注意到，在使用严格的 $f(\beta, \alpha)$ python-flint命题 B.8计算以及相关导数（参见）时，必须将若干积分截断到一个较大的有限区域。我们通过用截断值替代 ∞ 来截断此类积分（10^8），并且简单的界限表明，这种截断带来的误差很容易纳入所报告的误差界。

我们的分析中有一个关键部分将依赖于以下关于 $f(\beta, \alpha)$ 的上下界，其中 β 和 α 被限制在特定区间内。这些界将使我们能够通过一个一致函数来界定 $F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$，该函数可以一次性处理指定区间内的所有 β。这一点至关重要，因为该区间上相应的包络函数还将关于 α_1、α_2 呈凸性，因此可以通过不动点迭代来求得相应的最大值。我们将在接下来的小节中回到这一迭代的具体形式。在下面的陈述中，概率事件$X \pm Y \geq t$ 将作为 $X + Y \geq t \wedge X - Y \geq t$ 的简写形式。

引理 B.7. 固定 γ，并假设 $\beta \in [\eta_1, \eta_2] \subseteq [0, 1]$。如果 $-\gamma \leq \alpha \leq 0$，那么

$$f(\eta_1, \alpha) \leq f(\beta, \alpha) \leq f(\eta_2, \alpha).$$

否则，如果 $\alpha \leq -\gamma$ 那么

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{\eta_1}{2}} Z_1 \pm \sqrt{\frac{1-\eta_1}{2}} Z_2 \geq \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}(\gamma + \alpha) \right] \leq f(\beta, \alpha) \leq \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{2}} Z_1 \pm \sqrt{\frac{1-\eta_2}{2}} Z_2 \geq \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}(\gamma + \alpha) \right].$$

证明。我们考虑第二个不等式的上界（$\alpha \leq -\gamma$的情形）。注意，$f(\beta, \alpha)$对应于对直线 $\sqrt{\frac{\beta}{2}} z_1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} z_2 \geq \gamma + \alpha$和 $\sqrt{\frac{\beta}{2}} z_1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} z_2 \geq \gamma + \alpha$之间的标准二元正态密度进行积分。注意，这些直线交于点$\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}(\gamma + \alpha) \;\; 0 \right)$，且从该点出发的直线斜率分别为 $\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$和 $-\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$。注意，将 β 平移至 η_2，并将直线的交点移至 $\left(\sqrt{\frac{2}{\eta_1}}(\gamma + \alpha) \, 0 \right)$，会得到一个严格更大的区域，对应于上界。其余三个不等式也可用完全相同的方法得到。$\square$

我们还将 还需要以下关于 $f(\beta, \alpha)$ 对 α 的偏导数的显式公式 .

命题 B.8. 我们有

$$\partial_a f(\beta, a) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\gamma+a)^2)\mathbb{P}[\sqrt{2\beta(1-\beta)}Z \geq (2-2\beta)(\gamma+a)].$$

证明。 由对称性可知，我们计算得到大发彩票

$$\begin{aligned}
\partial_a f(\beta, a) &= -2\int_{\gamma+a}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta(1-\beta)}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2 + (\gamma+a)^2) - \frac{1/2-\beta}{\beta(1-\beta)}(\gamma+a)t_1\right) dt_1 \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\gamma+a)^2) \int_{\gamma+a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta(1-\beta)}} \exp\left(-\frac{(t+(1-2\beta)(\gamma+a))^2}{4\beta(1-\beta)}\right) dt \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\gamma+a)^2)\mathbb{P}[\sqrt{2\beta(1-\beta)}Z \geq (2-2\beta)(\gamma+a)].
\end{aligned}$$

□

最后，我们将反复用到以下初等估计：结合一个 先验的 二阶导数估计和梯度界，可以利用导数较小的点推导出函数的上界。

引理 B.9. 令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \leq -M < 0$。那么

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq \inf_{z\in\mathbb{R}} f(z) + \frac{f'(z)^2}{2M}.$$

证明。 对于任意 $z \in \mathbb{R}$，直接应用泰勒定理可得，

$$f(x) \leq f(z) + f'(z)(x-z) - \frac{M}{2}(x-z)^2.$$

右侧的二次函数在 $x = z - f'(z)/M$ 时取得最大值，这意味着 $f(x) \leq f(z) + f'(z)^2/(2M)$。现在对 x 取上确界并对 z 取下确界即可完成。□

上述结论的二元版本可由单变量版本直接推出，只需考虑所关注的点 x 和 z 之间的直线。

引理 B.10. 令 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $\nabla^2 f(x) \preceq -MI_2 \prec 0$，其中 I_2 是 2×2 单位矩阵，$\preceq$ 表示半定序。则

$$\sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^2} f(x) \leq \inf_{\vec{z}\in\mathbb{R}^2} f(\vec{z}) + \frac{\|\nabla f(\vec{z})\|_2^2}{2M}.$$

B.2. 关于 γ_{crit}的界。 为了继续分析，我们需要对 γ_{crit}的取值给出足够精确的界。

断言 B.11. 我们有

$$.24841951 \leq \gamma_{\text{crit}} \leq .24841959.$$

证明。 注意到 $F_1(\alpha)$ 满足 $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} F_1(\alpha) \leq -2$，这是由 引理 6.2得到的。

令 $\gamma = .24841951$ 和 $\alpha = -0.445183267$，我们通过数值计算得到 $F_1(\alpha) \geq 4\cdot 10^{-8}$，这给出了 γ_{crit}所需的下界。

对于上界，我们令 $\gamma = .24841959$ 和 $\alpha = -0.44518333$。通过数值计算可得 $F_1(\alpha) \leq -2\cdot 10^{-8}$以及 $|F_1'(\alpha)| \leq 10^{-5}$。由此，根据 引理 B.9，即可得到所需结果。□

关于命题 B.11，最重要的技术要点隐藏在生成命题 B.11候选值的过程中。理论上，这些界可以通过重复二分过程生成，但也存在一种更具针对性的优化方法，它以精确的方式利用 F_1 和F_2 的结构。关键思路是采用不动点迭代，其中不动点对应于我们所需函数的临界点。特别地，请注意

$$F_1'(\alpha) = -2\alpha - \frac{\exp(-(\gamma+\alpha)^2)}{\sqrt{\pi}\mathbb{P}[Z \geq (\gamma+\alpha)\sqrt{2}]}.$$

重新排列根据方程 $F_1'(\alpha) = 0$，我们自然会采用一种迭代过程，随着

$$\alpha_{i+1} = \frac{-\exp(-(\gamma+\alpha_i)^2)}{2\sqrt{\pi}\mathbb{P}[Z \geq (\gamma+\alpha_i)\sqrt{2}]}.$$

即使从对 α_0 的估计非常粗略开始，上述过程也能极快地收敛到一个数值不动点（因为从本质上说，这相当于针对该问题定制的牛顿迭代）。

此外，$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 关于变量 α_1，α_2 的可分离性使得我们可以通过本质上相同的过程，为 $F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 在固定 β 时求得上界。因此，引理 B.7 的关键在于，我们所采用的函数形式既要能够对一个区间内的β 值一致地给出界限，又要允许指定形式的不动点迭代成功收敛。

B.3. **断言 B.1 的证明。** 证明断言 B.1的关键思路是：对于固定的 α_1，α_2，函数 $F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ 关于 β 的导数 $-\infty$ 在 $\beta = 0$处。这体现了该模型呈现冻结的 1-RSB 结构这一事实，而证明则是对这一事实的一个足够精确的定量刻画。

证明 *断言 B.1*。 注意到

$$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \leq 2\log 2 - 2\beta\log\beta - 2(1-\beta)\log(1-\beta) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\beta)\log f(1-\beta, \alpha_2).$$

因此，令

$$G_2(\beta, \alpha_2) = 2\log 2 - 2\beta\log\beta - 2(1-\beta)\log(1-\beta) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\beta)\log f(1-\beta, \alpha_2),$$

我们将证明更强的断言：

$$\sup_{\substack{\beta\in[0,.001]\\ \alpha_2\in\mathbb{R}}} G_2(\beta, \alpha_2) = 2\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha).$$

我们首先证明，只需考虑 $-.53 \leq \alpha_2 \leq -.37$ 的情形。通过数值计算和 $\beta \in [0, .001]$，我们得到

$$G_2(\beta, \alpha_2) \leq 2\log 2 + .01582 + 2(1-.001)(-\alpha_2^2 + \log\mathbb{P}[Z \geq (\gamma+\alpha_2)\sqrt{2}]).$$

注意，根据引理 6.2，这个上界（记作 $H(\alpha_2)$）是关于 α_2 的凹函数。通过数值计算，我们可以验证 $H(\alpha_2) \leq -10^{-3}$ 对于 $\alpha_2 \in \{-.53, -.37\}$，且 $H(-.45) \geq 10^{-2}$。因此，H 在 $(-\infty, -.53]$ 上递增，在 $[-.37, +\infty)$ 上递减，所以对于 $\alpha_2 \notin [-.53, -.37]$，$H(\alpha_2) \leq -10^{-3}$。回顾假设 1.5 的证明可知，$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} F_1(\alpha) \in [-\varepsilon_{1.5}, \varepsilon_{1.5}]$。因此我们立即得到，只需考虑 $\alpha_2 \in [-.53, -.37]$。

一个平凡的不等式以及引理 B.7 的第二部分（回顾一下命题 B.11）可得

$$f(1-\beta, \alpha_2) \geq f(1-\beta, -.37) \geq \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{.999}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{.001}{2}}Z_2 \geq \sqrt{.999}(\gamma - .37)\right] \geq .538$$

最后一个不等式由数值计算得出。接下来注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}G_2(\beta, \alpha_2) &= 2\log(1-\beta) - 2\log\beta - 2\log f(1-\beta, \alpha_2) + \frac{2(1-\beta)}{f(1-\beta, \alpha_2)}\frac{\partial}{\partial\beta}[f(1-\beta, \alpha_2)] \\ &\leq 1.239 - 2\log\beta + \frac{2(1-\beta)}{f(1-\beta, \alpha_2)}\frac{\partial}{\partial\beta}[f(1-\beta, \alpha_2)]\end{aligned}$$

根据前一个不等式、数值计算以及 $\beta \in [0, .001]$，可得。

由命题 B.5 和积分号下求导可知

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[f(1-\beta, \alpha_2)] = \int_{[\gamma+\alpha,\infty)^2} \frac{P(t_1, t_2, \beta)}{4(\beta(1-\beta))^2}\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2) - \frac{\beta-1/2}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)}{2\pi\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right)dt_1dt_2$$

其中

$$\begin{aligned}P(t_1,t_2,\beta) &= 2(1-\beta)(\beta)(-1+2\beta)+(1-\beta)^2(t_1-t_2)^2-\beta^2(t_1+t_2)^2\\ &\le 2(1-\beta)\beta^2+(1-\beta)^2((t_1-t_2)^2-2\beta).\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[f(1-\beta,\alpha_2)] \le \frac{f(1-\beta,\alpha_2)}{2(1-\beta)} + \int_{[\gamma+\alpha,\infty]^2} \frac{((t_1-t_2)^2-2\beta)}{4\beta^2}\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\beta-1/2}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)}{2\pi\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right)dt_1dt_2.$$

进行与 命题 B.5 中相同的变量变换（方向相反，并将β 替换为 $1-\beta$），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}G_2(\beta,\alpha_2) &\le 1.239-2\log\beta+\frac{2(1-\beta)}{f(1-\beta,\alpha_2)}\frac{\partial}{\partial\beta}[f(1-\beta,\alpha_2)]\\ &\le 2.239-2\log\beta+\frac{(1-\beta)}{\beta}\frac{\mathbb{E}\left[(Z_2^2-1)_{\mathbb{I}}\left[\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_1\pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_2\ge\gamma+\alpha_2\right]\right]}{f(1-\beta,\alpha_2)}.\end{aligned}$$

注意到一个平凡的不等式和 引理 B.7 给出

$$f(1-\beta,\alpha_2)\le f(1-\beta,-.53)\le\mathbb{P}\left[Z_1\ge\frac{1}{\sqrt{.999}}(\gamma-.53)\right]\le 0.611$$

通过数值计算得到。

现在我们得到 $\mathbb{E}\left[(Z_2^2-1)_{\mathbb{I}}\left[\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_1\pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_2\ge\gamma+\alpha_2\right]\right]\le 0$，因为对于 Z_1 的任意固定值，这甚至也成立（将高斯函数限制在包含 0 的对称区间内只会减小其方差）。事实上，利用变换 $z_1=\sqrt{2/(1-\beta)}(\gamma+\alpha_2)+\sqrt{\beta/(1-\beta)}t$，我们有不等式

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(Z_2^2-1)_{\mathbb{I}}\left[\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_1\pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_2\ge\gamma+\alpha_2\right]\right]\\ &\quad=\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\int_{t\ge0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{1-\beta}}(\gamma+\alpha_2)+t\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)^2\right)\int_{-t}^{t}\frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dxdt\\ &\quad\le\frac{\exp(-(\gamma-.53)^2/.999)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\beta}\int_0^{10}\int_{-t}^{t}\frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dxdt\\ &\quad\le-0.29\sqrt{\beta}\end{aligned}$$

最后一行通过数值计算得到。在第一个不等式中，我们利用了对于 $t\in[0,10]$，通过数值计算可得 $\gamma-.53\le z_1\le-(\gamma-.53)$。我们还使用了先前的观察：将高斯函数限制在 $[-t,t]$ 中只会减小其方差，这对应于事实 $\int_{-t}^{t}(x^2-1)e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}dx<0$。

综合前面三个中心化不等式可得，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}G_2(\beta,\alpha_2) &\le 2.239-2\log\beta+\frac{1.635}{\beta}\mathbb{E}\left[(Z_2^2-1)_{\mathbb{I}}\left[\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}Z_1\pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}Z_2\ge\gamma+\alpha_2\right]\right]\\ &\le 2.239-\log\beta-\frac{.47}{\sqrt{\beta}}\end{aligned}$$

通过数值计算。

通过数值计算可知，上述右侧从 $\beta=0$ 到 .001 的积分严格为负。因此，当 $\beta=0$ 时，$G_2(\beta,\alpha_2)$ 在 $\alpha_2\in[-.53,-.37]$ 上达到最大值。根据 F_1 和 G_2 的定义，结论随即得证。□

B.4. **断言 B.2 的证明。** 注意，由于 $f(\beta,\alpha)$ 是 γ 的递减函数，只需验证断言 B.2 在 $\gamma = .2484195 \le \gamma_{\text{crit}} - \varepsilon_{1.5}$ 时成立（此处用到了 命题 B.11）。

B.4.1. 命题 *B.2* 的初始部分**命题 *B.2*。** 我们首先通过舍去变量 $\beta \in [.001, .005]$ 来处理 α_1 的情形，这与 断言 B.1 的证明类似；这样做是因为 $f(\beta,\alpha_1)$ 在 β 足够小时，数值计算对其非常敏感。

命题 B.12. 设 $\gamma = .2484195$。我们有

$$\sup_{\substack{\beta\in[.001,.005]\\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\\ \alpha_2\le-\gamma}} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) \le -10^{-3}.$$

证明。 假设 $\beta \in [\eta_1,\eta_2]$ 满足 $\eta_2 \le 1/2$ 和 $\alpha_2 \le -\gamma$。注意到

$$\begin{aligned}
F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) &= 2\log 2 - 2\beta\log\beta - 2(1-\beta)\log(1-\beta) - 2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 \\
&\quad + 2\beta\log f(\beta,\alpha_1) + 2(1-\beta)\log f(1-\beta,\alpha_2) \\
&\le 2\log 2 - 2\beta\log\beta - 2(1-\beta)\log(1-\beta) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\beta)\log f(1-\beta,\alpha_2) \\
&\le 2\log 2 - 2\eta_2\log\eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log f(1-\beta,\alpha_2) \\
&\le 2\log 2 - 2\eta_2\log\eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2) - 2\alpha_2^2 \\
&\quad + 2(1-\eta_2)\log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{1-\eta_1}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{\eta_1}{2}}Z_2 \ge \sqrt{\frac{1-\eta_1}{1-\eta_2}}(\gamma+\alpha_2)\right]\right)
\end{aligned}$$

其中我们在引理 B.7 最后一行中用到了该引理。

现在我们将 β 分割为区间 $[j\cdot 10^{-4}, (j+1)\cdot 10^{-4}]$，其中 $j = 10$ 取值从 $j = 49$ 到 $[\eta_1,\eta_2]$，并注意到上述不等式给出了一个关于 α_2 的单变量函数，它独立于 β，我们可以用它为 $F_2(\beta,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$ 提供上界，适用于指定区间内的 β 以及 $\alpha_2 \le -\gamma$。此外，此函数满足应用 引理 B.9 所需的二阶导数条件，从而可以将检验简化为有限的数值计算。 □

命题 B.13。 令 $\gamma = .2484195$。我们有

$$\sup_{\substack{\beta\in[.001,.005]\\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\\ \alpha_2\ge-\gamma}} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) \le -10^{-2}.$$

证明。 设 $\beta \in [\eta_1,\eta_2]$，其中 $\eta_2 \le 1/2$ 且 $\alpha_2 \ge -\gamma$。注意到

$$\begin{aligned}
F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) &= 2\log 2 - 2\beta\log\beta - 2(1-\beta)\log(1-\beta) - 2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 \\
&\quad + 2\beta\log f(\beta,\alpha_1) + 2(1-\beta)\log f(1-\beta,\alpha_2) \\
&\le 2\log 2 - 2\eta_2\log\eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log f(1-\eta_1,\alpha_2)
\end{aligned}$$

根据 引理 B.7。现在我们将 β 划分为区间 $[j\cdot 10^{-3}, (j+1)\cdot 10^{-3}]$，其中 $j = 1$ 至 $j = 4$。需要注意的是，使右侧达到最大值的 $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ 将位于 $\alpha_2 \ge -\gamma$ 所在范围之外。

Let

$$G(\alpha_2) = 2\log 2 - 2\eta_2\log\eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log f(1-\eta_1,\alpha_2)$$

且 $\alpha_2^* =$最大值点$_{\alpha_2\in\mathbb{R}} G(\alpha_2)$。由 $f(1-\eta_2,\ \alpha_2)$ (引理 6.3)，我们有$G''(\alpha_2) \le -2$ 因此

$$\widetilde{G}(\alpha_2) = G(\alpha_2) + 2(\alpha_2 - \alpha_2^*)^2$$

~ ~ ~ ~是凹的。由于 $G'(\alpha_2^*) = 0$ 且 G 是凹的，对于所有 α_2，我们有 $G(\alpha_2) \le G(\alpha_2^*) = G(\alpha_2^*)$。这意味着

$$G(\alpha_2) \le G(\alpha_2^*) - 2(\alpha_2 - \alpha_2^*)^2$$

因此

$$\sup_{\alpha_2 \ge -\gamma} G(\alpha_2) \le \sup_{\alpha_2 \in R} G(\alpha_2) - 2(\alpha_2^* + \gamma)^2 \mathbb{I}^{\alpha_2^* \le -\gamma}.$$

这使我们能够在某些情况下加入一个额外的修正项。我们通过求出 G 的一个“数值最优解”并验证其接近 α_2^* 来证明这一点；具体做法是检查其导数是否足够小。数值计算至此完成。□

B.4.2. 非临界区域中命题 *B.2* 的上部区间。对于 $\gamma \approx \gamma_{\text{crit}}$ 和 $\beta \approx 1/2$，我们有最大化点满足 α_1, $\alpha_2 \approx -.445$。因此，如果 $\gamma + \alpha_1 \le 0$ 和 $\gamma + \alpha_2 \le 0$ 不同时成立，那么只要采用足够精细的区间分解，就能验证所需的上界，甚至可以达到 $\beta = 1/2$，而不只是。495。我们在本小节中执行这一过程。与前文一样，由于我们只关心上界，可以假设 $\gamma = .2484195$；此外，由于这些证明与命题 B.12和B.13中推导的上界性质十分接近，以下证明会愈发简略。

命题 B.14. 设 $\gamma = .2484195$。我们有

$$\sup_{\substack{\beta \in [.005,.5] \\ \alpha_1, \alpha_2 \ge -\gamma}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le -10^{-3}.$$

证明。Suppo 使得 $\beta \in [\eta_1, \eta_2]$ 满足 $\eta_2 \le 1/2$ 且 α_1, $\alpha_2 \ge -\gamma$。注意，根据 引理 B.7 ，

$$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le 2\log 2 - 2\eta_2 \log \eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2) - 2\alpha_1^2 + 2\eta_1 \log f(\eta_2, \alpha_1)$$
$$- 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log f(1-\eta_1, \alpha_2).$$

现在我们将 β 划分为 $[j \cdot 10^{-3}, (j+1) \cdot 10^{-3}]$，对于 $j = 5$ 到 $j = 19$ 以及 $[j \cdot 10^{-2}, (j+1) \cdot 10^{-2}]$，对于$j = 2$ 到 $j = 49$，并在适用时纳入如 命题 B.13 中所做的针对 α_1 和 α_2 的修正，也就是说，当所有 $\mathbb{R}$上的最优值与所需区间内的最优值不一致时。（注意，我们可以分别对这两个变量进行优化，再将所得结果相加。）数值计算完成。□

命题 B.15. 设 $\gamma = .2484195$。我们有

$$\sup_{\substack{\beta \in [.005,.5] \\ \alpha_1 \le -\gamma, \alpha_2 \ge -\gamma}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le -10^{-3}.$$

证明。设 $\beta \in [\eta_1, \eta_2]$ 满足 $\eta_2 \le 1/2$ 且 $\alpha_1 \le -\gamma$ 且 $\alpha_2 \ge -\gamma$。引理 B.7 给出

$$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le 2\log 2 - 2\eta_2 \log \eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2) - 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log f(1-\eta_1, \alpha_2)$$
$$- 2\alpha_1^2 + 2\eta_1 \log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{2}} Z_1 \pm \sqrt{\frac{1-\eta_2}{2}} Z_2 \ge \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}(\gamma + \alpha_1)\right]\right)$$

现在我们将 β划分为 $[j \cdot 10^{-3}, (j+1) \cdot 10^{-3}]$从 $j = 5$到 $j = 19$以及 $[j \cdot 10^{-2}, (j+1) \cdot 10^{-2}]$从 $j = 2$ 到 $j = 49$，并在适用时，根据 命题 B.13 对 α_1 和 α_2进行修正。数值计算完成验证。□

命题 B.16。 令 $\gamma = .2484195$。我们有

$$\sup_{\substack{\beta \in [.005,.5] \\ \alpha_1 \ge -\gamma, \alpha_2 \le -\gamma}} F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le -10^{-3}.$$

证明。假设 满足 $\beta \in [\eta_1, \eta_2]$ 且 $\eta_2 \le 1/2$ 以及 $\alpha_1 \ge -\gamma$ 以及 $\alpha_2 \le -\gamma$。 引理 B.7 给出

$$F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2) \le 2\text{对数 } 2 - 2\eta_2\text{对数 } \eta_2 - 2(1-\eta_2)\text{ 对数}(1-\eta_2) - 2\alpha_1^2 + 2\eta_1\text{对数 } f(\eta_2, \alpha_1)$$
$$- 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{1-\eta_1}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{\eta_1}{2}}Z_2 \ge \sqrt{\frac{1-\eta_1}{1-\eta_2}}(\gamma+\alpha_2)\right]\right).$$

现在将 β划分为 $[j\cdot 10^{-3},(j+1)\cdot 10^{-3}]$，对于 $j = 5$到 $j = 19$以及 $[j\cdot 10^{-2},(j+1)\cdot 10^{-2}]$，对于 $j = 2$ 到 $j = 49$，并按照 命题 B.13 中的规定，酌情对 α_1 和 α_2 进行修正。数值计算完成。□

B.4.3. 命题 *B.2* 的上部区间命题 *B.2* 中的临界区域。 现在我们处理命题 B.2的最后一个区域。此过程与前面的命题基本相同，但所需的区间集合要复杂得多，因为最大值在此区域内取得，且接近于0。

命题 B.17. 设 $\gamma = .2484195$。我们有

$$\sup_{\substack{\beta\in[.005,.495]\\ \alpha_1,\alpha_2\le-\gamma}} F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) \le -10^{-5}.$$

证明。 假设 $\beta \in [\eta_1, \eta_2]$，其中 $\eta_2 \le 1/2$ 且 α_1， $\alpha_2 \le -\gamma$。注意到

$$F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) \le 2\log(2) - 2\eta_2\log\eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2)$$
$$- 2\alpha_1^2 + 2\eta_1\log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{1-\eta_2}{2}}Z_2 \ge \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}(\gamma+\alpha_1)\right]\right)$$
$$- 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{1-\eta_1}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{\eta_1}{2}}Z_2 \ge \sqrt{\frac{1-\eta_1}{1-\eta_2}}(\gamma+\alpha_2)\right]\right).$$

β在此区域中的划分要复杂得多；我们取 $[j\cdot 10^{-3},(j+1)\cdot 10^{-3}]$，使其从$j = 5$到 $j = 19$； $[j\cdot 10^{-2},(j+1)\cdot 10^{-2}]$，使其从 $j = 2$到 $j = 24$； $[j\cdot 10^{-3},(j+1)\cdot 10^{-3}]$，使其从 $j = 250$到$j = 424$； $[j\cdot 10^{-4},(j+1)\cdot 10^{-4}]$，使其从 $j = 4250$到 $j = 4724$； $[j\cdot(5\cdot 10^4)^{-1}$、$(j+1)\cdot(5\cdot 10^4)^{-1}]$，使其从 $j = 23625$到 $j = 24299$； $[j\cdot 10^{-5},(j+1)\cdot 10^{-5}]$，使其从 $j = 48600$到 $j = 48799$； $[j\cdot(2\cdot 10^5)^{-1}$、$(j+1)\cdot(2\cdot 10^5)^{-1}]$，使其从$j = 97600$到 $j = 98749$；最后取 $[j\cdot(4\cdot 10^5)^{-1}$、$(j+1)\cdot(4\cdot 10^5)^{-1}]$，使其从 $j = 197500$到 $j = 197999$。数值计算至此完成。□

现在我们可以证明 命题 B.2。

关于.....的证明 *CI* 引理 *B.2*。 这是结合断言 B.12 至B.17后直接得出的结论。 □

B.5. **断言的证明 命题 B.3。** 命题 命题 B.3 的证明与 命题 B.2中给出的各个命题的证明密切相关。注意， 命题 B.14 至 B.16 处理 β 直至 1/2的情况，因此我们只需细化临界区域中的估计，其中 α_1， $\alpha_2 \le -\gamma$。此外，根据 $\beta \in [.495, .5]$，我们可以假设 命题 B.17。

然而，在 $(\alpha_1, \alpha_2) = (-.445, -.445)$ 的邻域内，我们的函数可能为正。因此，需要谨慎证明，在该点的某个邻域之外，函数为负。为此，我们证明，在这个邻域中存在一个点，其函数值不太大（可能为正），并且关于 α_1, α_2 的偏导数很小。然而，我们的函数是强凹的。因此，只要从该点移开足够远，函数值就必定为负。

证明命题 *B.3*。 与之前一样，只需在给定 $\gamma = .2484195$的条件下证明该命题。此外，只需考虑 α_1， $\alpha_2 \le -\gamma$依据命题 B.14 至 B.16 以及 $\beta \in [.495, .5]$ 依据 命题 B.17。现在，若 $\beta \in [\eta_1, \eta_2]$ 满足 $\eta_2 \le 1/2$ 且 α_1， $\alpha_2 \le -\gamma$则

$$F_2(\beta,\alpha_1,\alpha_2) \le 2\log 2 - 2\eta_2\log\eta_2 - 2(1-\eta_2)\log(1-\eta_2)$$
$$- 2\alpha_1^2 + 2\eta_1\log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{1-\eta_2}{2}}Z_2 \ge \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}(\gamma+\alpha_1)\right]\right)$$

$$- 2\alpha_2^2 + 2(1-\eta_2)\log\left(\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{1-\eta_1}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{\eta_1}{2}}Z_2 \geq \sqrt{\frac{1-\eta_1}{1-\eta_2}}(\gamma+\alpha_2)\right]\right)$$
$$=: G_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

我们将 β 划分为若干段 $[j\cdot(4\cdot 10^5)^{-1}$、$(j+1)\cdot(4\cdot 10^5)^{-1}]$，从 $j = 198000$ 到 $j = 199999$。对于形如 $[\eta_1, \eta_2]$ 的每个区间，我们通过数值计算得到一点 (α_1^*, α_2^*)，使得

- $G_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \leq 10^{-5}$;
- $|\alpha_1^* + .445| \leq 1.5\cdot 10^{-3}$ 和 $|\alpha_2^* + .445| \leq 1.5\cdot 10^{-3}$;
- $\left|\frac{\partial}{\partial\alpha_1}G_2(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1^*,\alpha_2^*)}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}G_2(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1^*,\alpha_2^*)}\right| \leq 10^{-5}$。

这些条件与 G_2 的强凹性结合起来，再加上数值计算，即可推出所声称的结果。特别地，我们利用了以下事实：α_1、α_2 中的二阶导数均一致小于 -2，且 G_2 是一个关于 α_1 的函数与一个关于 α_2 的函数之和。□

B.6. **断言 断言 B.4 的证明。** 为了证明所需的海森矩阵界，我们将证明关于断言 B.4 所涉及区域内坐标二阶偏导数的若干估计。为证明所需断言，我们将证明以下一组二阶导数估计。

引理 B.18。 设 $\gamma = .2484195$。对于满足 $\beta \in [.495, .505]$ 和 α_1，$\alpha_2 \in [-.45, -.44]$ 的点，我们有：对 $i \in \{1, 2\}$，

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2} \leq -2.15, \quad \left|\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta\partial\alpha_i}\right| \leq 2.05.$$

根据上述这组估计，我们现在证明关于 F_2 的海森矩阵的所需结论。

断言 断言 *B.4* 的证明。注意，根据 $f(\beta, \alpha)$ 的对数凹性（见 引理 6.3），通过直接计算可知，对所有满足 γ 且 β，α_i 使得 F_2 有定义的情形，均有

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha_i^2} \leq -4.$$

此外，F_2 的函数形式直接意味着

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0.$$

此外，注意到，对 γ 进行微小平移，等价于在计算 $\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}$，$\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta\partial\alpha_i}$ 时，对 α_1，α_2 的取值作微小平移。因此，应用 引理 B.18，对于指定范围内的 γ 以及 α_1，$\alpha_2 \in [-.449, -.441]$ 引理 B.18 中列出的二阶导数界仍然适用。

然后，通过考虑海森矩阵的相反数，并应用西尔vester判据检验矩阵各阶子式的行列式，即可得出所需结果。由于行列式也可证明严格远离零，因此该矩阵严格负半定；而紧致性保证存在一个绝对常数 $\delta > 0$，使所需结果成立。□

引理 B.18 的证明主要是计算，所用函数形式见命题 B.5，并通过各种网格过程验证某些基本二维不等式成立。由于我们希望验证的不等式并不特别微妙，这一过程虽不完全令人愉快，但仍是机械性的。

我们需要以下三个关于 $f(\beta, \alpha)$ 的命题，以及关于某些经过特别选择的导数组合的命题。这些组合自然地源自基于显式计算的分析；为简化验证，我们将这些命题表述为一系列缺乏动机的数值命题。

断言 B.19. 设 $\gamma = .2484195$、$\beta \in [.495, .505]$ 和 $\alpha \in [-.45, -.44]$。则有

$$f(\beta, \alpha) \in [.36544, .37761].$$

证明. 根据引理 B.7 和数值计算，我们得到

$$f(\beta,\alpha) \le f(\beta,-.45) \le \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{.505}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{.495}{2}}Z_2 \ge (\gamma-.45)\sqrt{\frac{.505}{.495}}\right] \le .37761$$

and

$$f(\beta,\alpha) \ge f(\beta,-.44) \ge \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{.495}{2}}Z_1 \pm \sqrt{\frac{.505}{2}}Z_2 \ge (\gamma-.44)\sqrt{\frac{.495}{.505}}\right] \ge .36544. \qquad \square$$

下一个命题给出了 $f(\beta,\alpha)$ 关于 β 的一阶导数大小的界；证明的思路是将问题化归为一个特定的、易于处理的二元积分，其取值范围可通过直接进行网格搜索并结合粗略的界定过程来确定。由于这些计算在数值上要稳定得多，我们仅使用 scipy 完成了这些计算。

命题 B.20. 设 $\gamma = .2484195$, $\beta \in [.495,.505]$ 和 $\alpha \in [-.45,-.44]$。则有

$$\frac{\partial f(\beta,\alpha)}{\partial \beta} \in [.2780,.3110].$$

证明. 设 $\eta = 1/2-\beta$。结合命题 B.5 中给出的形式，利用积分号下求导可得

$$\frac{\partial f(\beta,\alpha)}{\partial \beta} = \int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{t_1t_2+\eta(2t_1^2+2t_2^2-1)+4\eta^2t_1t_2+4\eta^3}{8\pi(\beta(1-\beta))^{5/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2.$$

我们将这个积分拆成两部分。注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{\eta(2t_1^2+2t_2^2-1)+4\eta^2t_1t_2+4\eta^3}{8\pi(\beta(1-\beta))^{5/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2\right| \\
&\le \int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty} \frac{|\eta(2t_1^2+2t_2^2-1)|+|4\eta^2t_1t_2|+|4\eta^3|}{8\pi(\beta(1-\beta))^{5/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2 \\
&\le \int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty} \frac{|\eta(2t_1^2+2t_2^2-1)|+|4\eta^2t_1t_2|+|4\eta^3|}{8\pi(\beta(1-\beta))^{5/2}} \exp\left(-.99(t_1^2+t_2^2)\right)dt_1dt_2 \le .00975
\end{aligned}$$

通过对 $|\eta| \le .005$ 和 $(\beta(1-\beta))^{-5/2} \le (.495\cdot.505)^{-5/2}$ 取上界，然后对所得积分进行数值计算。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \left(\frac{t_1t_2}{8\pi(\beta(1-\beta))^{5/2}}-\frac{4t_1t_2}{\pi}\right)\exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2\right| \\
&\le \int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} |t_1t_2|\left(\frac{1}{8\pi(.495\cdot.505)^{5/2}}-\frac{4}{\pi}\right)\exp\left(-.99(t_1^2+t_2^2)\right)dt_1dt_2 \le .0001
\end{aligned}$$

通过数值计算可得。

因此，只需了解其值

$$\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{4t_1t_2}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{1/2-\beta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2$$

对于 $\beta \in [.495,.505]$ 和 $\alpha \in [-.45,-.44]$。我们首先处理 α 中的平移；注意，上述表达式关于 α 的导数的绝对值至多为

$$\frac{8}{\pi}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}|(\gamma+\alpha)t_1|\cdot\exp(-.99(\gamma+\alpha)^2-.99t_1^2)dt_1 \le \frac{8|\gamma-.45|}{\pi}\int_{\gamma-.45}^{\infty}|t_1|\cdot\exp(-.99t_1^2)dt_1 \le .27$$

因此，将 α 平移至 α' 后，积分中的差异有界于 $.27|\alpha-\alpha'|$。 |.

类似地，根据不等式 $|\exp(x) - \exp(y)| \leq \exp(\max(x,y))|x-y|$，我们有将 β移动到 β' 所产生的误差有界于

$$|\beta-\beta'| \int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty} \frac{4|t_1t_2|}{\pi} \exp\big(-.99(t_1^2+t_2^2)\big)(.041(t_1^2+t_2^2)+4.01|t_1t_2|)dt_1dt_2 \leq 1.1|\beta-\beta'|$$

通过数值计算。我们分别对 β 和 α 取间隔为 .00025 的网格。进行网格验证并应用上述误差后，我们通过数值计算得到所述结果。□

最后，我们需要对以下混合偏导数表达式给出一个上界。其策略与前面的证明基本相同，但具体公式要复杂得多，因此计算也不那么简洁。

命题 B.21. 设 $\gamma = .2484195$、$\beta \in [.495, .505]$ 和 $\alpha \in [-.45, -.44]$。则有

$$\frac{\beta\partial^2 f(\beta,\alpha)}{\partial\beta^2} + \frac{2\partial f(\beta,\alpha)}{\partial\beta} \leq .630.$$

证明。 设 $\eta = 1/2-\beta$ 并对 命题 B.5应用积分号下求导。我们有

$$\frac{\beta\partial^2 f(\beta,\alpha)}{\partial\beta^2}+\frac{2\partial f(\beta,\alpha)}{\partial\beta} = \int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{P(t_1,t_2,\beta)}{32\pi\beta^{7/2}(1-\beta)^{9/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2$$

其中

$$\begin{aligned}
&P(t_1,t_2,\beta)\\
&= 16\eta^5(-1+2t_1t_2)+4\eta^4(1-4t_1t_2+6t_1^2+6t_2^2+4t_1^2t_2^2)+8\eta^3(1-(t_1-t_2)^2+2t_1t_2(t_1^2+t_2^2))\\
&\quad +2\eta^2(-1-2t_1^2-2t_2^2+8t_1^2t_2^2+2t_1^4+2t_2^4)+\eta(-1+2t_1^2-6t_1t_2+2t_2^2+4t_1t_2(t_1^2+t_2^2))\\
&\quad +1/4(1-2(t_1-t_2)^2+4t_1^2t_2^2)\\
&\leq \eta^2(4.5t_1^4+4.5t_2^4+17t_1^2t_2^2)+\eta(-1+2t_1^2-6t_1t_2+2t_2^2+4t_1t_2(t_1^2+t_2^2))\\
&\quad +1/4(1-2(t_1-t_2)^2+4t_1^2t_2^2)
\end{aligned}$$

其中，我们非常粗略地应用了 $|\eta| \leq .005$ 和 AM-GM 不等式，以消去 η 的各次幂系数中出现的若干高阶项。为简便起见，令

$$\begin{aligned}
Q_1(t_1,t_2,\beta) &= \eta^2(4.5t_1^4+4.5t_2^4+17t_1^2t_2^2),\\
Q_2(t_1,t_2,\beta) &= (-1+2t_1^2-6t_1t_2+2t_2^2+4t_1t_2(t_1^2+t_2^2))\eta+1/4(1-2(t_1-t_2)^2+4t_1^2t_2^2).
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{Q_1(t_1,t_2,\beta)}{32\pi\beta^{7/2}(1-\beta)^{9/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2\\
&\leq \int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty} \frac{Q_1(t_1,t_2,\beta)}{32\pi\beta^{7/2}(1-\beta)^{9/2}} \exp\big(-.99(t_1^2+t_2^2)\big)dt_1dt_2 \leq .0007
\end{aligned}$$

通过数值计算和 $|\eta| \leq .005$。

接下来，我们进一步简化剩余的积分项。注意，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty} \frac{Q_2(t_1,t_2,\beta)}{32\pi\beta^{7/2}(1-\beta)^{9/2}} - \frac{4Q_2(t_1,t_2,\beta)}{\pi(1-\beta)} \exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2\right|\\
&\leq 9\cdot10^{-4}\cdot\int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty} |Q_2(t_1,t_2,\beta)| \exp\big(-.99(t_1^2+t_2^2)\big)dt_1dt_2 \leq .00041
\end{aligned}$$

通过数值计算以及 $|\eta| \leq .005$ 和 $\alpha \geq -.45$。

因此，只需理解

$$\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\frac{4Q_2(t_1,t_2,\beta)}{\pi(1-\beta)}\exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2.$$

注意，如果上述积分为负，我们将立即得到所需的界，因此只需给出一个上界即可

$$\frac{4}{\pi(.495)}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}Q_2(t_1,t_2,\beta)\exp\left(-\frac{1}{4\beta(1-\beta)}(t_1^2+t_2^2)-\frac{\eta}{\beta(1-\beta)}t_1t_2\right)dt_1dt_2.$$

我们希望将其替换为下面这个更简单的积分来考察：

$$\frac{4}{\pi(.495)}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}Q_2(t_1,t_2,\beta)\exp\big(-(1+4\eta^2)(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2\big)dt_1dt_2. \tag{B.1}$$

注意到，利用 $|\exp(x)-\exp(y)|\le|x-y|\exp(\max(x,y))$ 以及 $\exp(\cdot)$ 是一个递增函数，可以对上述两个积分之差进行界定。利用这一点和数值计算，我们可以发现这些积分的差异至多为

$$\frac{4}{\pi(.495)}\int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty}|Q_2(t_1,t_2,\beta)|\cdot(2\cdot10^{-8}\cdot(t_1^2+t_2^2)+2\cdot10^{-6}|t_1t_2|)\exp\big(-.99(t_1^2+t_2^2)\big)dt_1dt_2\le2\cdot10^{-6}.$$

接下来，我们通过将其与积分进行比较， η 从 (B.1) 的指数中移除

$$\frac{4}{\pi(.495)}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}Q_2(t_1,t_2,\beta)(1-4\eta^2(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2)\exp(-t_1^2-t_2^2)dt_1dt_2 \tag{B.2}$$

代价是引入一个有界的加性误差。

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\pi(.495)}\int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty}|Q_2(t_1,t_2,\beta)|\exp(-t_1^2-t_2^2)\\&\qquad\times|1-4\eta^2(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2)-\exp(-4\eta^2(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2)|dt_1dt_2\\&\le.0003\end{aligned}$$

采用数值计算，依据不等式 $|\exp(x)-x-1|\le\exp(|x|)-|x|-1$。现在我们可以对 (B.2)进行网格搜索；注意， α 中的导数有如下界

$$\frac{8}{\pi(.495)}\int_{\gamma+\alpha}^{\infty}\sup_{\substack{t_2\in[\gamma-.45,\gamma-.44]\\|\eta|\le.005}}|Q_2(t_1,t_2,1/2-\eta)|\cdot|1-4\eta^2(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2|\exp(-t_1^2)dt_1$$

通过数值计算可得其上界为 4.2。因此，将 α 移至 α' 会造成不超过 $4.2|\alpha-\alpha'|$ 的变化。为计算 β 的变化，注意到 $Q_2(t_1,t_2,\beta)(1-4\eta^2(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2)$ 是关于 β 的多项式。因此，在积分号下求导后，只需对以下量给出上界

$$\frac{8}{\pi(.495)}\int_{\gamma-.45}^{\infty}\int_{\gamma-.45}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial\beta}Q_2(t_1,t_2,\beta)(1-4\eta^2(t_1^2+t_2^2)-4\eta t_1t_2)\right|\exp(-t_1^2-t_2^2)dt_1dt_2.$$

（回忆一下 $\eta=1/2-\beta$。）通过直接进行数值计算，我们发现上述量的上界为 8.76，因此，将 β 移至 β' 会造成不超过 $8.76|\beta-\beta'|$ 的变化。

在 β 中取宽度为 。00025 的网格，并在 α 中取宽度为 。00025 的网格。注意，沿两个坐标方向移动时，最近的网格点至多相距半个网格宽度。通过数值计算并对舍入到网格点所产生的误差进行界定，我们得到 (B.2) 的一个上界。结合之前的分析，可得所求值的最大值不超过 。630 ，如所述。 □

现在开始证明引理 B.18。正如我们将看到的，这个区域中的估计并不是特别精确，尤其是我们可以容忍相当大的数值误差。

引理 *B.18* 的证明。注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2} &= \frac{-2}{\beta(1-\beta)} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(2\beta\log f(\beta,\alpha_1)) + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(2(1-\beta)\log f(1-\beta,\alpha_2)) \\ &\le -8 + 4\max_{\substack{\beta\in[.495,.505]\\ \alpha_1\in[-.45,-.44]}} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\beta\log f(\beta,\alpha_1)) \\ &\le -8 + 4\max_{\substack{\beta\in[.495,.505]\\ \alpha_1\in[-.45,-.44]}} \frac{\beta\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}f(\beta,\alpha_1) + 2\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1)}{f(\beta,\alpha_1)} - \frac{\beta(\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1))^2}{f(\beta,\alpha_1)^2} \\ &\le -8 + 4\left(\frac{.630}{.36544} - .495\left(\frac{.2775}{.37761}\right)^2\right) \le -2.17,\end{aligned}$$

使用断言 B.19至B.21 以及数值计算。至此，断言引理 B.18第一项的证明完成。对于第二项，根据对称性（交换 α_1、 α_2 并将 β 替换为 $1-\beta$），不妨设 $i=1$。注意，根据命题 B.8，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta\partial\alpha_1}\right| &= \left|\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha_1}(2\beta\log f(\beta,\alpha_1))\right| \\ &= \left|\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\beta}{f(\beta,\alpha_1)}\mathbb{P}\left[Z\ge(\gamma+\alpha_1)\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{\beta}}\right]\right)\right| \cdot \left|\frac{4\exp(-(\gamma+\alpha_1)^2)}{\sqrt{\pi}}\right| \\ &\le 2.176\cdot\left|\frac{\mathbb{P}\left[Z\ge(\gamma+\alpha_1)\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{\beta}}\right]}{f(\beta,\alpha_1)}\left(1-\frac{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1)}{f(\beta,\alpha_1)}\right) + \frac{(\gamma+\alpha_1)\exp(-(\gamma+\alpha_1)^2(1-\beta)/\beta)}{2\sqrt{\pi\beta(1-\beta)}f(\beta,\alpha_1)}\right| \\ &\le 5.955\left|\mathbb{P}\left[Z\ge(\gamma+\alpha_1)\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{\beta}}\right]\left(1-\frac{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1)}{f(\beta,\alpha_1)}\right) + \frac{(\gamma+\alpha_1)\exp(-(\gamma+\alpha_1)^2(1-\beta)/\beta)}{2\sqrt{\pi\beta(1-\beta)}}\right|\end{aligned}$$

其中使用了断言 B.19。通过粗略而直接的界估计，我们注意到

$$\frac{(\gamma+\alpha_1)\exp(-(\gamma+\alpha_1)^2(1-\beta)/\beta)}{2\sqrt{\pi\beta(1-\beta)}} \in [-.110,-.103].$$

因此，只需证明

$$\left|\mathbb{P}\left[Z\ge(\gamma+\alpha_1)\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{\beta}}\right]\left(1-\frac{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1)}{f(\beta,\alpha_1)}\right)\right| \in [-.234,.447].$$

注意

$$\mathbb{P}\left[Z\ge(\gamma+\alpha_1)\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{\beta}}\right] \le \mathbb{P}\left[Z\ge(\gamma-.45)\sqrt{\frac{2(.505)}{.495}}\right] \le .614$$

因此，只需证明

$$\left|1-\frac{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1)}{f(\beta,\alpha_1)}\right| \in [-.381,.728], \text{ or equivalently} \frac{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}f(\beta,\alpha_1)}{f(\beta,\alpha_1)} \in [-.272,.619].$$

这由断言 B.19和B.20 以及 $\beta\in[.495,.505]$得出。我们（终于）完成了。 □

美国马萨诸塞州剑桥市马萨诸塞理工学院数学系，邮编 02139电子邮箱：minzer.dor@gmail.com, {asah,msawhney}@mit.edu