arXiv:2305.03548v1 [math.DS] 5 May 2023

# 随机旋转浅水模型的噪声校准

Dan Crisan* OanaLang* Alexander Lobbe* Peter Jan van Leeuwen†
Roland Potthast‡, ⋄

*帝国理工学院数学系，伦敦皇后门街180号，SW7 2AZ，英国伦敦
†科罗拉多州立大学大气科学系，美国科罗拉多州柯林斯堡，科罗拉多州80523；以及雷丁大学气象系，英国厄利门，RG6 7BE

‡德国气象局（DWD），德国奥芬巴赫法兰克福大街135号，63067⋄雷丁大学数学与统计系，英国雷丁怀特奈茨，邮政信箱220号，RG6 6AX

**摘要**

随机偏微分方程已被用于多种场景，以模拟不确定动力系统的演化。近年来，它们在地球物理流体动力学中的应用大幅增加。为了恰当地用于流体演化建模，需要根据数据校准噪声的振幅。本文针对随机旋转浅水（SRSW）模型探讨这一需求。本研究是对 [LvLCP23], 的延续，后者为 SRSW 模型引入了一种数据同化方法。 [LvLCP 23] 中使用的噪声，是以傅里叶空间中的任意随机相移形式引入的。这未必与模型降阶过程所导致的不确定性一致。本文提出一种新的 SRSW 模型噪声校准方法，使其与模型降阶技术相兼容。该方法具有通用性，可应用于任意随机参数化。它也不受数据来源（真实数据或合成数据）的限制。该方法基于主成分分析技术，用于生成随机参数化协方差矩阵的特征向量和特征值。对于本文研究的 SRSW 模型，我们使用模型的水位变量来校准噪声，因为这一观测量在实际应用中容易获取；同时使用合成数据作为校准过程的输入。

# 目录

**1 引言 2**1.1 旋转浅水模型的校准方法.4 1.2 论文结构.5**2 旋转浅水模型 6 3 噪声相关性的校准 7**3.1 案例研究：旋转浅水方程.7**4 数值结果 11 5 结论与未来工作 15 附录 A 离散化 19 附录 B 随机偏微分方程的数值实现 21 附录 C 龙格-库塔近似格式 22**

# 1 引言

随机参数化用于模拟由未知或被忽略的物理效应、观测数据中的信息不完整或不准确，以及用于预测的理论模型表述不完善所导致的不确定性。过去二十年来，随机参数化一直是一个非常活跃的研究领域，部分原因是它们被用于模拟将高分辨率解降至较粗尺度时产生的不确定性。近年来，已有若干随机参数化被提出，用于模拟这类不确定性，参见例如 [BLBM21], [CCH+19], [Hol15], [M´em14], [CCH+20b]。

<escape>随机模型参数的正确校准对于确保随机参数化与数据同化相结合的过程得到有效应用至关重要。各种用于校准的数值方法，参见 [CCH+19], [BLBM21], [CCH+20b], [RLJ+21] 已被实现，以表明数据驱动模型与最先进的数据同化技术能够成功结合。</escape>

本文提出了一种新的方法，用于校准随机偏微分方程，其中随机性用于描述因模型以粗分辨率运行而未能捕捉到的小尺度效应。这是当前数据驱动模型设计工作的组成部分；这类模型根据测量数据和统计信息化初始数据，将真实的不确定性纳入考量。接下来，我们简要介绍随机参数化框架和校准方法。需要指出的是，本文提出的过程具有通用性。换言之，它可应用于任何满足 (2) 的模型，以及任何满足 (3) 的随机参数化。

我们将 $m^f$ 称为模型状态。我们假设 $m^f$ 的演化由偏微分方程控制。

$$\frac{dm^f}{dt} = \mathcal{A}(m^f), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

其中， $\mathcal{A}$ 是模型算子。我们将用 $m^c$ 表示粗尺度模型。 *unresolved scales*的影响可用如下形式的项进行数学建模。

$$\int_0^t \mathcal{M}(m_s^c) dW_s, \tag{2}$$

其中 $\mathcal{M}$ 是一个适合的 精心选取的算子，且 $W_t = W(t,x)$ 是时空布朗运动。换言之，th e

在粗尺度上运行的模型将满足随机（偏）微分方程

$$dm^c = \mathcal{A}(m^c)dt + \mathcal{M}(m^c)dW_t, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

我们注意到，从理论上讲，确定性方程 (2) 及其随机对应方程 (3) 的解都定义在同一个物理域上（$\mathbb{R}^n$、环面、水平条带等）。 $Numerically$ 它们是在不同的空间网格上进行近似的：(2) 的空间离散化比 (3) 的更精细。如果我们要指代 (2) 和 (3) 的数值分辨率，那么可以区分 (2) 的模型算子，并将其称为，例如 $\mathcal{A}^f$ ，以及 (3) 的模型算子，并将其称为，例如 $\mathcal{A}^c$。

对于我们的分析，将 $W$ 分解如下很方便。

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k W_t^k \tag{4}$$

其中，系数 ($\xi_k$) 是依赖于空间的向量场，过程 ($W^k$) 是一维标准布朗运动。

本文所要解决的挑战是：使用有限组单个噪声 $W_k$ 获得不确定性的近似表示，并校准这些单个噪声的振幅（换言之，即向量场 $\xi_k$）。更准确地说，我们将使用以下方式对不确定性进行建模

$$\int_0^t \mathcal{M}(m_s^c)dW_s^N \tag{5}$$

在足够大的时间窗口 $[0,T]$ 内，其中

$$W_t^N = \sum_{k=1}^{N} \xi_k W_t^k \tag{6}$$

并且 $\xi_k$ 和 $N$ 都必须根据数据进行估计。校准过程完成后，我们可以在粗尺度上模拟经过校准的随机方程 (3)，而不是在精细尺度上模拟确定性方程 (2)。这种模型降阶可以显著减少计算量。

下文介绍的校准过程不受输入数据来源的影响。输入可以是真实数据，例如海洋海面高度等卫星观测、再分析数据（如 ERA5，[Her20]），也可以是对（2）进行模型运行所得到的合成数据，且运行时间窗口 $[0,T]$足够大。随后，我们会对模型运行结果进行光滑化，以消除小尺度/快速尺度效应，例如使用低通滤波器、高斯光滑核、亥姆霍兹投影、子采样等方法，或将这些方法结合使用。我们将所得的数据光滑化结果记为$C(m^f)$。注意， $m^f$ 和 $C(m^f)$属于同一空间。我们强调， $C(m^f)$并非（3）的解。不过，我们假设这两个过程之差 $\hat{}m := m^f - C(m^f)$具有由（5）给出的随机表示，因此，在足够小的时间区间 $[t, t+\delta]$ 内，我们将有

$$\hat{m}_{t+\delta} - \hat{m}_t = \int_t^{t+\delta} \mathcal{M}(C(m_s^f))dW_s^N \approx \sum_{k=1}^{N} \mathcal{M}(C(m_t^f))\xi_k \Delta W_t^k. \tag{7}$$

注意，在表示式 (7) 中，我们采用近似，因为差值 $\hat{}m_{t+\delta} - \hat{}m_t$ 的首项为 $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}(C(m_t^f))\xi_k \Delta W_t^k$，误差项的阶为 $\mathcal{O}(\delta)$；当 $\mathcal{M}(C(m^f))$ 为常数时（即加性噪声情形），则完全没有误差项。

因此，对于时间区间 $[0,T]$ 的一个适当选取的划分 $0 \leq t_1 < t_1 + \delta < \ldots t_n < t_n + \delta \leq T$（详见下文），我们需要根据数据估计向量场 $\xi_k$：

$$\hat{m}_{t_k+\delta} - \hat{m}_{t_k}, \quad k = 2, ..., n \tag{8}$$

这将取决于　　取决于为考虑模型不确定性而选择的扰动。以下是一些..... e

示例:

- 加性噪声，例如 [LvLCP23]。在这个简单的情形下， $\mathcal{M}(C(m_s^f)) \equiv 1$，换言之，

$$\hat{m}_{t+\delta} - \hat{m}_t \approx \sum_{k=1}^{N} \xi_k \Delta W_t^k. \tag{9}$$

因此，$\hat{m}_{t_k+\delta} - \hat{m}_{t_k}$ 可以被解释为来自多维高斯随机变量 $M$ 的样本，其中

$$M \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{k=1}^{N} (\xi_k)(\xi_k)^T t\right). \tag{10}$$

- 乘性噪声（例如 [PvL22]）。在这种情况下， $\mathcal{M}(C(m_t^f)) = f(C(m_t^f))$ 换句话说，

$$\hat{m}_{t+\delta} - \hat{m}_t \approx f(C(m_t^f)) \sum_{k=1}^{N} \xi_k \Delta W_t^k. \tag{11}$$

其中， $f(C(m_t^f))$ 是 $C(m_t^f)$ 的一个标量函数，因此， $f\ C\ m_t^{f\ (())}{}^{m_{t_k+\delta}-m_{t_k}}$ 可以被解释为来自具有分布（10）的多维高斯随机变量 $M$ 的样本。

- 输运噪声。我们介绍一类特定输运噪声随机参数化的处理流程，该类参数化涵盖二维不可压缩欧拉方程 [CCH+19]、双层准地转模式 [CCH+20a] （这两种情形下，流体涡度均为模型状态）、二维热准地转（TQG）模式（此情形下，流体浮力为模型状态）、旋转浅水模型 [LvLCP23], [Hol15], [LvLCP23]（此情形下，流体高度为模型状态）。在所有这些情形中，模型状态定义在 $\mathbb{R}^2$ （或其子集 $\mathbb{R}^2$）上，并且假设

$$\begin{aligned}
\hat{m}_{t+\delta} - \hat{m}_t &\approx \sum_{k=1}^{N} (\xi_k^1 \partial^1 C(m_s^f) + \xi_k^2 \partial^2 C(m_s^f)) \Delta W_t^k. \\
&= \sum_{k=1}^{N} (\partial^2 \psi_k \partial^1 C(m_s^f) - \partial^1 \psi_k \partial^2 C(m_s^f)) \Delta W_t^k \\
&= \left(-\partial^2 C(m_s^f)\partial^1 + \partial^1 C(m_s^f)\partial^2\right) \left(\sum_{k=1}^{N} \psi_k \Delta W_t^k\right),
\end{aligned} \tag{12}$$

其中， $\partial^i$ 是标准偏导数，并且我们施加了 $\xi_k \equiv \boldsymbol{\nabla}^\perp \psi_k$的附加假设。这将确保 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\ \xi_k = 0$，这是上述所有模型中都作出的假设。由（12）可知，线性双曲方程的解

$$f = \vec{q} \cdot \nabla \psi \tag{13}$$

其中， $f := -(\hat{m}_{t+\delta} - \hat{m}_t)$和 $\vec{q} := -\nabla^\perp C(m_t^f)$可以解释为多维高斯随机变量的样本

$$M \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{k=1}^{N} (\psi_k)(\psi_k)^T t\right). \tag{14}$$

这一解释是校准过程的基础，具体内容详见第3节。

## 1.1 旋转浅水模型的校准方法

我们针对一类旋转浅水模型的随机参数化应用新的校准过程，见下方公式 (15)。这里，我们使用来自高程变量的数据作为校准数据 $h$ ，该变量属于旋转浅水系统；我们将假设其随机参数化由下方公式 (18) 给出。对于 $h$ 而言，这种形式的 $h$ 方程对于以下两者都是通用的 [LvLCP23], [LvLCP23]。其中的模型 [LvLCP23]基于最初由 [M´em14], 首次引入的位置不确定性范式，而 [LvLCP23]中的模型是

基于随机平流的李输运范式，该范式首次引入于 [Hol15]。

旋转浅水模型以其复杂的结构而闻名（例如参见 [Kal03], [Val17], [Zei18]），该结构捕捉了海洋和大气动力学的重要特征，例如位涡和能量守恒，或重力波的存在。这些特征使其成为地球物理湍流建模中最受青睐的系统之一。此外， [Hol15]和 [M´em14], 另见 [LvLCP23] 以及 [LvLCP23], 中提出的随机参数化，为描述在较粗网格上运行模型状态时仍未解析的小尺度／快尺度分量提供了可能的方法。具体而言，这些随机参数化方案既是从底层确定性／细尺度动力学在数学上推导出来的，也与之在物理上保持一致。

为估计随机噪声，我们将使用合成数据作为校准过程的输入。具体而言，我们将使用在细网格矩形网格上运行的旋转浅水模型模拟。在上文中，我们用通用记号 $m^f$ 表示该模型运行。我们将校准对应于两个较粗网格的随机参数化，一个网格大小为 $556 \times 80$，另一个为 $256 \times 40$。随后，我们使用低通滤波器构造细网格轨迹的光滑化版本。我们将光滑化后的解称为 *coarse gridtrajectory*。也可以使用高斯光滑核或子采样技术进行其他粗化。在上文中，我们用通用记号 $C(m^f)$表示这一光滑化后的解。具体步骤如下：

1. 计算细分辨率和粗分辨率轨迹之间差异的时间增量。 2. 选择一个 *calibration time grid*，使数据去相关。为此，我们首先估计对应于细网格轨迹的数据的*decorrelation time* 。3. 计算校准时间网格上各时刻对应的样本噪声。在我们的案例中，这相当于求解一系列形式为 (13) 的双曲方程，详见第3节。4. 提取随机噪声的一组基及其对应的特征值，以解释数据中足够大部分的方差。为此，我们使用 [CCH+19] 中使用的主成分分析算法。

如上所述，此处介绍的校准过程具有通用性，可用于各种随机参数化。在 [CCH+19] 和 [CCH+20a] 中，采用了不同的校准过程。这些研究中的校准过程利用了李输运随机平流（SALT）模型的特殊性，因此无法应用于非 SALT 随机参数化。

上述方法用于在数值模拟中考虑分辨率误差。我们通过开展若干不确定性量化测试来评估该方法，详情见第1.2节。

我们通过代入上述估计的参数，并模拟与随机偏微分方程轨迹相关的一个 *particles* 集合，开展不确定性量化（UQ）分析。我们的目标是利用采用所选随机参数化生成的集合，量化从细网格转到两个较粗网格时引入的不确定性（这些网格用于运行该集合，并最终用于运行数据同化方法）。

## 1.2 论文结构

下面介绍本文的内容，以此结束引言：

- 在第2节中，我们将在确定性和随机两种设定下介绍随机旋转浅水模型。校准过程所需的输入数据将从在高分辨率网格上运行的确定性版本中提取。

- 第3节详细介绍了随机模型的校准方法，并将其应用于随机旋转浅水方程进行测试。校准过程按照四个

详细介绍的主要步骤：细网格数据的光滑化、数据生成、求解校准方程、提取随机噪声的基。

- 在第4节中，我们进行了一系列不确定性量化测试，以验证校准过程和随机参数化。这些测试针对水位、纬向速度和经向速度开展，结果表明，这种校准方法可以有效地利用合成数据估计空间相关性。随机轨迹集合能够捕捉底层*truth*的大尺度行为。

- 最后，我们以第5节作为论文的结尾，该节总结了我们的研究结果，并介绍了可能的后续研究方向；此外，附录中还包含与数值离散和随机模型实现相关的技术细节。

## 2 旋转浅水模型

旋转浅水模型描述了自由表面以下可压缩旋转流体的演变。假设典型的垂直长度尺度远小于水平长度尺度，由此得到 *shallow*纵横比，如图1所示。该模型的无黏版本由水平动量方程和质量连续方程构成；在存在旋转的情况下，可描述如下（参见 [Val17]）：

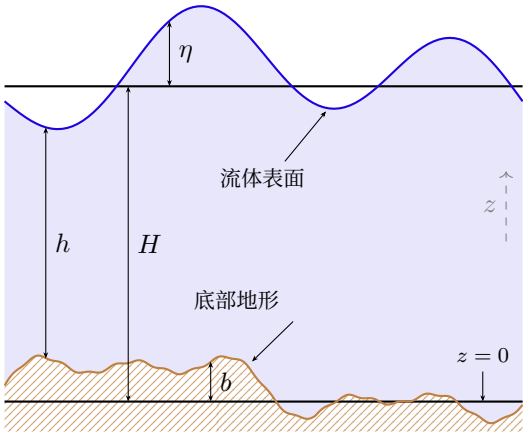



图1：浅水模型中各变量的示意图。标量函数 $h$ 表示流体柱的高度，标量值 $H$ 表示区域内流体柱的平均高度。我们用 $\eta$ 表示给出流体表面相对于 $H$ 的水位的标量函数，而标量函数 $b$ 表示底部地形。因此，流体表面的 $z$坐标为 $H+\eta=h+b$。

$$\frac{D}{Dt}u_t + f\hat{z}\times u_t + g\nabla h_t = 0 \tag{15a}$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} + \nabla\cdot(h_t u_t) = 0, \tag{15b}$$

其中

- $\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u\cdot\nabla$ 是物质导数。
- $u=(u^1,u^2)^T$ 是水平流体速度向量场
- $h$ 是流体柱厚度（总水深）
- $f$ 是科里奥利参数， $f=2\Theta\sin\varphi$ 其中 $\Theta$ 是地球自转速率， $\varphi$ 是纬度；$f\hat{z}\times u=(-fu^2,\ fu^1)^T$，其中 $\hat{z}$ 是一个指向远离地球中心方向的单位向量
- $g$ 是重力加速度。

我们可以形式化地重新写出黏性版本的旋转浅水系统：记为 $X := (u, h)^T$，然后 [1]

$$dX_t + F(X_t)\,dt = 0, \tag{16}$$

其中 $F(X_t)$ 表示

$$F\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot \nabla u + f\hat{z} \times u + g\nabla h - \nu\Delta u \\ \nabla \cdot (hu) - \eta\Delta h \end{pmatrix}. \tag{17}$$

文献中分析了将随机性引入模型不确定性的不同方法，例如，参见 [Pal19], [MTVE01] 或 [BMP99]。通常，噪声被引入信号过程的强迫部分。本文使用的随机模型在 [Hol15], 中提出，采用了一种新的子网格输运建模方法，称为李输运随机平流（SALT）。在 SALT 中，随机性被引入模型方程的平流部分，因此得到的随机系统模拟了不确定的 *transport* 行为：

$$du_t + \left[u_t \cdot \nabla u_t + f\hat{z} \times u_t + g\nabla h_t\right]dt + \sum_{i=1}^{\infty}\left[(\mathcal{L}_i + \mathcal{A}_i)u_t\right] \circ dW_t^i = \nu\Delta u_t dt \tag{18a}$$

$$dh_t + \nabla \cdot (h_t u_t)dt + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\nabla \cdot (\xi_i h_t)\right] \circ dW_t^i = \eta\Delta h_t dt \tag{18b}$$

[2]其中 $\xi_i$ 是无散且与时间无关的向量场，$\mathcal{L}_i u := \xi_i \cdot \nabla u$，$\mathcal{A}_i u := u_j \nabla \xi_i^j = \sum_{j=1} u_j \nabla \xi_i^j$.

与确定性情形类似，我们可以将随机模型重新表述为：

$$dX_t + F(X_t)\,dt + \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{G}_i(X_t) \circ dW_t^i = \gamma\Delta X_t dt \tag{19}$$

其中，$\gamma = (\nu,\ \eta)$ 为正值，对应于涡流黏度。对于 $X$ 的不同分量采用不同的黏度水平，也可以用相同的方式处理。$W^i$ 为相互独立的布朗运动，$F$ 是式（17）中定义的非线性平流项，而 $\mathcal{G}_i$ 为微分算子：

$$\mathcal{G}_i(X) = \mathcal{G}_i\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_i u + \mathcal{A}_i u \\ \mathcal{L}_i h \end{pmatrix}.$$

(19) 中的积分属于斯特拉托诺维奇型。在 SALT 方法中，随机参数通常乘以解的梯度，但对于 SRSW 模型，它还包含一个此处记作 $\mathcal{A}_i$的零阶算子。因此，噪声的振幅受到 $\mathcal{G}_i = \mathcal{L}_i + \mathcal{A}_i$ 算子的调制。这样设计的目的，是描述流体小尺度分量对大尺度分量的影响（否则这部分影响将无法建模），参见 [Hol15]。针对这一（尚未校准的）模型的数据同化应用，最早由 [LvLCP23]实现。其他 SALT 模型（二维欧拉方程、表面准地转方程）的数值实现和粒子滤波算法已在 [CCH+19] 以及 [CCH+20c]中开发。

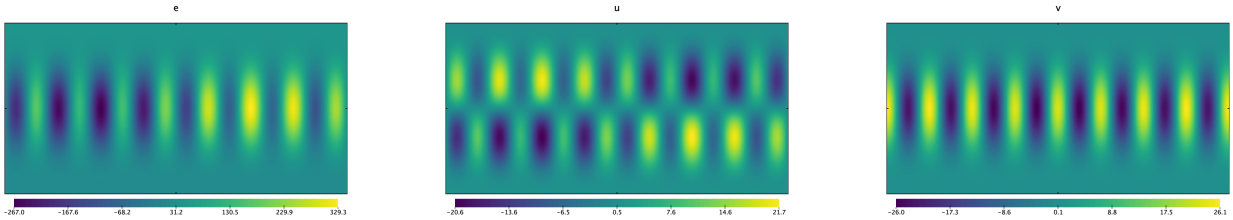
# 3 噪声相关性的校准

## 3.1 案例研究：旋转浅水方程

我们正在对区域 $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ 上的旋转浅水系统进行校准，其中包含 $L_x = 27\,787.5\,\text{km}$ 和 $L_y = 3975$ km。我们选择函数作为初始条件。

$$\eta_0(x, y) = -a \arctan\left(0.05\left(\frac{y}{L_y} - 0.5\right)\pi\right) + \left[a \sin\left(16\pi\frac{x}{L_x}\right) + 0.5a \sin\left(2\pi\frac{x}{L_x}\right)\right]\sin\left(\pi\frac{y}{L_y}\right)^4, \tag{20}$$

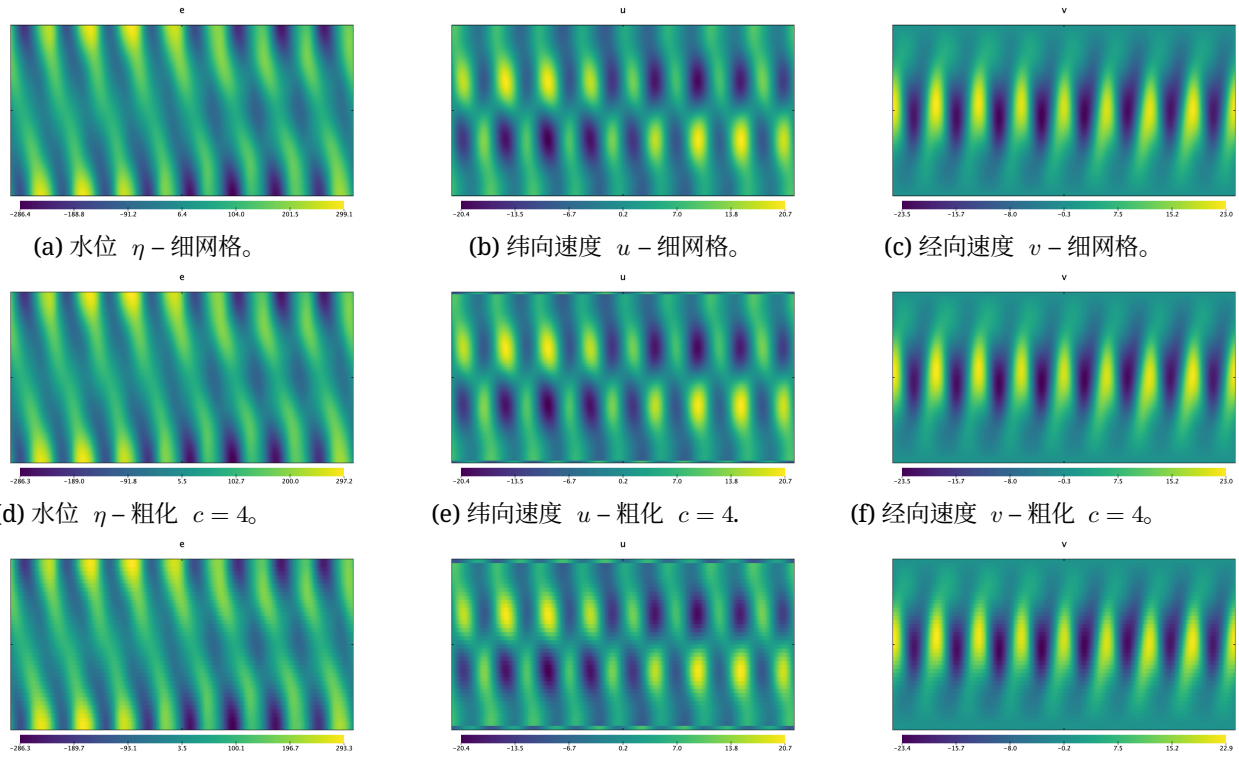
[1]此处我们采用 $\circ$ 微分记号，以与随机版本相一致 (19)。




(a) 海面高度 $\eta$. (b) 纬向速度 $u$。 (c) 经向速度 $v$。

图2：旋转浅水模型的初始条件 (20)，我们从该条件开始启动系统。各场定义在计算域 $\Omega$ 上，该计算域使用大小为 $N_x = 2224$ 和 $N_y = 320$ 的细网格进行离散化。

其中，参数 $a$ 被设为100。根据水位的初始状态，利用地转平衡计算初始速度。地转平衡是系统中的一种近似平衡，即科里奥利力与压力梯度相等。初始条件如图2所示。我们使用1000个时间步进行预热，每个时间步的长度为 $\delta t = 22.5$s，以构建模型状态的初始条件。这将确保浅水模型具有更真实的初始状态。预热期结束后得到的初始条件如图3所示。




(a) 水位 $\eta$ – 细网格。 (b) 纬向速度 $u$ – 细网格。 (c) 经向速度 $v$ – 细网格。

(d) 水位 $\eta$ – 粗化 $c = 4$。 (e) 纬向速度 $u$ – 粗化 $c = 4$. (f) 经向速度 $v$ – 粗化 $c = 4$。

(g) 水位 $\eta$ – 粗化 $c = 8$。 (h) 纬向速度 $u$ – 粗化 $c = 8$。 (i) 经向速度 $v$ – 粗化 $c = 8$。

图3：预热期后由初始条件得到的初始场。顶行显示旋转浅水偏微分方程在原始细网格上的解。中间行和底行显示同一解投影到粗化程度分别为 $c = 4$ 和 $c = 8$ 的粗化网格上的结果。

**细网格数据的光滑化**。 我们使用在细网格上运行的偏微分方程来获得 $h$，并通过对 $h^f$进行光滑化来构造 $h^f$ 和$C(h^f)$。对于光滑化，我们选择应用低通滤波器。考虑如上所获得的场 $h^f = h^f_0$。用 $h^f_{ij} = h^f(x_i, y_j)$表示网格点上的值。然后考虑归一化卷积核 $K \in \mathbb{R}^{k_x \times k_y}$，它可以根据所需的粗化程度进行调整。对于内部点 $i = 1 + \lfloor k_x/2 \rfloor, \ldots, N_x - \lfloor k_x/2 \rfloor$，我们通过离散卷积从 $h^f$ 得到 *coarsened* 场 $C(h^f)$,

$j = 1 + \lfloor k_y/2 \rfloor, \ldots, N_y - \lfloor k_y/2 \rfloor$ 作为

$$C(h^f)_{ij} = (h^f \star_{\mathrm{d}} K)_{ij} = \sum_{\iota=0}^{k_x-1} \sum_{\jmath=0}^{k_y-1} K_{\iota+1,\jmath+1} h^f_{i-\lfloor k_x/2 \rfloor+\iota, j-\lfloor k_y/2 \rfloor+\jmath} \tag{21}$$

并且在东边界和西边界上， $i \in \{1, \ldots, \lfloor k_x/2 \rfloor\} \cup \{N_x - \lfloor k_x/2 \rfloor + 1, \ldots, N_x\}$ 我们设置周期边界条件

$$C(h^f)_{ij} = (h^f \star_{\mathrm{d}} K)_{ij} = \sum_{\iota=0}^{k_x-1} \sum_{\jmath=0}^{k_y-1} K_{\iota+1,\jmath+1} h^f_{i-\lfloor k_x/2 \rfloor+\iota, j-\lfloor k_y/2 \rfloor+\jmath};\ j \in \{\lfloor k_y/2 \rfloor, \ldots, N_y - \lfloor k_y/2 \rfloor\} \tag{22}$$

$i \in \{1, \ldots, \lfloor k_x/2 \rfloor\} \cup \{N_x - \lfloor k_x/2 \rfloor + 1, \ldots, N_x\}$, $j \in \{1, \ldots, \lfloor k_y/2 \rfloor\} \cup \{N_y - \lfloor k_y/2 \rfloor + 1, \ldots, N_y\}$ 而在北边界和南边界，我们只需设置

$$C(h^f)_{ij} = h^f_{ij} \tag{23}$$

以便我们既保持偏微分方程边界条件，也保持积分量

$$\sum_{ij} C(h^f)_{ij} = \sum_{ij} h^f_{ij}. \tag{24}$$

如上所述，这一过程在信号处理领域被称为低通滤波器。在我们的研究背景下，低通滤波器是一种有理论依据的选择，因为它能够平滑场中存在的高频效应，这与我们的预期相符：较粗化的模拟同样会对较高频率的效应产生错误表征。其他粗化方法也可以通过高斯光滑核或子采样来实现。

**数据生成**。 在此，我们按照第 1.1 节所述执行步骤 1 和 2。具体而言，我们准备估计噪声参数化所需的数据。我们使用高分辨率场与粗化场之间差异的时间增量，并采用校准时间步长 $\delta t_{\mathrm{calib}} \ll \delta t^f$ 偏微分方程，该步长对应于随机积分的一个欧拉–丸山步。因此，我们考虑校准时间网格 $t^n_{\mathrm{calib}}$上的数据；该网格按照下文所述，从偏微分方程时间网格中抽取子网格得到。

$$\Delta_{t^n_{\mathrm{calib}}} = C(h^f_{t^n_{\mathrm{calib}}+\delta t_{\mathrm{calib}}}) - h^f_{t^n_{\mathrm{calib}}+\delta t_{\mathrm{calib}}} - (C(h^f_{t^n_{\mathrm{calib}}}) - h^f_{t^n_{\mathrm{calib}}}) \tag{25}$$

我们用 $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ 表示校准划分。该划分必须足够稀疏，以确保数据去相关。我们通过估计全偏微分方程时间网格 $\Delta_{t^f_i}$ 上数据的 *decorrelation time* ，来选择校准时间网格 $t^n_{\mathrm{calib}}$ 。具体做法如下。我们针对不同的滞后 $\ell$ ，逐点计算数据时间序列 $\Delta_{t^f_i}$ 在空间上的自相关，计算式为

$$\mathcal{C}(\ell) = \frac{\frac{1}{N_{steps}-\ell} \sum_{i=0}^{N_{steps}-\ell} \left[ \Delta_{t^f_i} \odot \Delta_{t^f_i + \ell \delta t^f_{\mathrm{PDE}}} - \Delta^{\odot 2}_{t^f_i} \right]}{\frac{1}{N_{steps}-\ell-1} \sum_{i=0}^{N_{steps}-\ell} \left[ \Delta_{t^f_i} - \frac{1}{N_{steps}-\ell} \sum_{i=0}^{N_{steps}-\ell} \Delta_{t^f_i} \right]^{\odot 2}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}, \tag{26}$$

其中， $\odot$ 表示矩阵的逐元素乘积，除法也按逐元素方式进行。我们将滞后 $\ell_{\mathrm{decorr}}$ 选作去相关时间，其中 $\ell_{\mathrm{decorr}}$ 是使空间平均绝对相关性达到 $\ell$ 最小值的滞后。

$$\bar{\mathcal{C}}(\ell) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{ij} |\mathcal{C}_{ij}(\ell)| \tag{27}$$

稳定到一个值 $\bar{\mathcal{C}}(\ell_{\mathrm{decorr}}) \sim \alpha_{\mathrm{decorr}}$ ，其中我们可以选择去相关阈值 $\alpha_{\mathrm{decorr}}$。随后，校准时间网格便是

$$t^n_{\mathrm{calib}} = t^f_0 + n \ell_{\mathrm{decorr}} \delta t^f_{\mathrm{PDE}}, \qquad n = 1, \ldots, \lfloor N/\ell_{\mathrm{decorr}} \rfloor. \tag{28}$$

接下来，我们准备输入数据。令 $\hat{} \ h_i := C(h^f_{t_i}) - h^f_{t_i}$。选择 $\delta < \min_i(t_i - t_{i-1})$，并计算 $\delta \hat{} h_i :=$

$\hat{h}_{t_i+\delta} - \hat{h}_{t_i}$。用于校准的输入数据随后为 $\{\Delta_{t^n_{\text{calib}}};\ n = 1, \ldots\}$ 由上述方法获得。

**求解校准方程**。这里我们执行第 3 步，如第 1.1 节所述。给定上述生成的数据，我们求解以下一系列双曲方程

$$\delta\hat{h}_i = C(h^f_x)\frac{\partial\psi_i}{\partial y} - C(h^f_y)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}. \tag{29}$$

在每个校准时刻，东西方向采用周期性边界条件；南北方向则施加自由滑移约束

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = 0$$

为了求解该方程，我们采用一阶间断 Galerkin 有限元方法，该方法可通过 Firedrake[2] 软件包使用。

为此，我们将方程改写如下

$$f = \vec{q}\cdot\nabla\psi \tag{30}$$

其中 $f := \partial\hat{h}_i$ 且 $\vec{q} := -\nabla^{\perp}C(h^f)$。东西方向的边界为周期性边界，南北方向则设定$\psi = 0$。

每个网格单元上的弱形式为

$$\int_e f\phi_e\,dx = \int_e \phi_e\vec{q}\cdot\nabla\psi\,dx \tag{31}$$

以便经过分部积分后

$$\int_e f\phi_e\,dx = -\int_e \psi\nabla\cdot(\phi_e\vec{q})\,dx + \int_{\partial e}\phi_e\psi\vec{q}\cdot\vec{n}_e\,dS \tag{32}$$

边界面有三种不同类型：内部边界面、外部流入边界面和外部流出边界面，后两者由速度向量场 $\vec{q}$ 决定。偏微分方程的边界条件适用于外部流入边界面。对区域内各单元的弱形式求和，并根据边界面的类型对边界进行分解，可得

$$\int_\Omega f\phi\,dx = -\int_\Omega \psi\nabla\cdot(\phi_e\vec{q})\,dx + \int_{\Gamma_{\text{int}}}\tilde{\psi}(\phi_+\vec{q}\cdot\vec{n}_+ + \phi_-\vec{q}\cdot\vec{n}_-)\,dS \tag{33}$$

$$+\int_{\Gamma_{\text{ext, in}}}\phi\psi_0\vec{q}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{\Gamma_{\text{ext, out}}}\phi\psi\vec{q}\cdot\vec{n}\,dS \tag{34}$$

**为随机噪声提取一个基**。这是第 4 步，如第 1.1 节所述。

校准方程序列的解可以视为扰动场 *stream functions* $\tilde{u}$、$\tilde{v}$ 的 $\tilde{u},\tilde{v}$，因此 $(\tilde{u},\tilde{v})^\top = \boldsymbol{\nabla}^{\perp}\psi$。这个基于网格的数据 $(\tilde{u}_{ij},\tilde{v}_{ij})$ 被向量化为 $\Psi = ((\tilde{u}_{ij}),(\tilde{v}_{ij}))^\top$，并表示为以下形式

$$\frac{\Psi_i - \bar{\Psi}}{\sqrt{\delta}} = \sum_{j=1}^{N}\zeta^j\Delta W_i^j$$

其中，$\Delta W_i^j$ 是独立同分布的标准正态随机变量，$\Delta W_i^j \sim N(0,1)$。我们通过最小化 $\zeta^j$ 来进行估计。

$$\mathbb{E}\left[\left\|\sum_i\left(\frac{\Psi_i - \bar{\Psi}}{\sqrt{\delta}} - \sum_{j=1}^{N}\zeta^j\left(\Delta W_i^j\right)\right)\right\|^2\right],$$

其中，$N$ 的选择可通过使用经验正交函数（经验正交函数）来确定。经验正交函数可视为与某个场的空间相关性相对应的主成分。为计算经验正交函数，我们使用基于奇异值分解（SVD）的主成分分析算法。

[2] https://firedrakeproject.org/

| | $N_\xi = 0.90$ | | $N_\xi = 0.99$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_p = 50$ | $N_p = 100$ | $N_p = 50$ | $N_p = 100$ |
| $c = 4$ | **a** | **b** | **c** | **d** |
| $c = 8$ | **e** | **f** | **g** | **h** |

表1：数值实验的情景。

一旦计算出经验正交函数（EOFs）及其对应的数值，整个过程便告完成。现在，我们可以评估校准方法的可靠性。相关评估将在下一节中进行。

# 4 数值结果

为了评估校准方法的可靠性，我们进行了若干数值研究。下面给出表1中汇总的八种不同情景的结果。具体而言，我们分析了两种不同的网格粗化方式， $c = 4$ 和 $c = 8$，不同的粒子数量 $N_p = 50$ 和 $N_p = 100$ ，以及两个方差阈值 $N_\xi = 0.9$ 和 $N_\xi = 0.99$。

网格粗化方式 $c = 4$ 在随机模拟中使用粗网格，该网格相对于精细偏微分方程网格每隔四个网格点取一个点。同样， $c = 8$ 粗化方式相对于偏微分方程网格每隔八个网格点取一个点。请注意，用于获取校准数据的低通滤波器在两种方式下有所不同。 $c = 4$粗化方式使用卷积核 $K = \frac{1}{9}\mathbf{1}_{3\times3}$，而 $c = 8$ 粗化方式使用 $9 \times 9$ 核

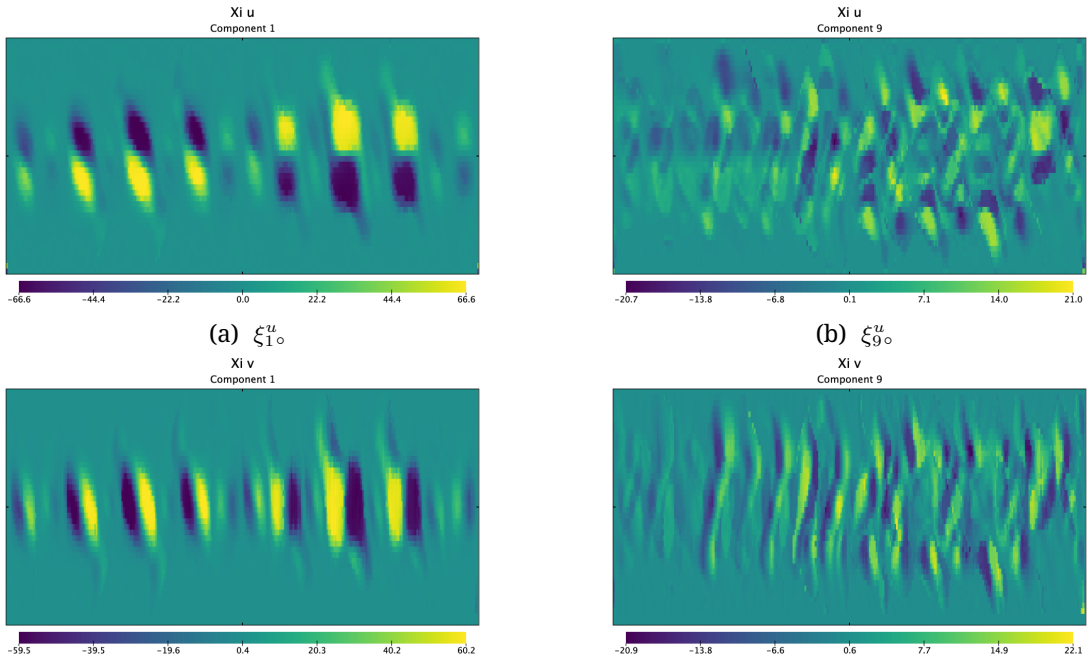
$$K = \frac{1}{165}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

其中，记号 $\mathbf{1}_{m\times n}$ 表示一个元素均为 1 的 $m \times n$ 矩阵。

粗化 $c = 8$ 得到的经验正交函数（$\xi$'s）样本如图4所示。需要9个经验正交函数才能解释数据中99%的方差，图中展示了其中幅度最大的（左列）和最小的（右列）经验正交函数。我们观察到，高阶经验正交函数的幅度显著小于第一经验正交函数。此外，正如预期的那样，第一个分量呈现出更大尺度的结构，而最后一个分量的结构更为精细。

在每种情况下，我们都绘制均方根误差（RMSE）和集合离散度（ES）。这两个量具有可比性，这一特性深受数据同化从业者赞赏，因为它表明，以集合宽度衡量的不确定性估计，能够很好地估计集合均值的实际误差。

**集合轨迹与离散度**。 在第一项实验中，我们评估了由粗网格上运行经校准的随机方程所得到的独立模拟生成的集合中的粒子轨迹。我们将该集合与真实演化进行比较，后者是在细网格上运行的，并在每个时间步进行子采样，将结果映射到相应的粗网格上以便比较。图 5 展示了不同网格位置处所获得集合的一个样本。我们观察到，真实值的轨迹被粒子集合很好地包络。信号轨迹在大多数时间内都保持在粒子云范围之内，这与我们的目标一致，即真实的细网格分辨率.....




(a) $\xi^u_{1\circ}$ (b) $\xi^u_{9\circ}$

(c) $\xi^v_1$. (d) $\xi^v_{9\circ}$

图4： $c = 8$ 网格上的 $\xi$ 估计值。左列表示从校准方程的解中获得的数据里，解释 99% 方差的集合的第一个分量，右列表示最后一个分量。

分辨率运行与随机粗分辨率运行取自同一概率密度函数。在这种情况下，细分辨率运行应以 1/(ensemble size $+1$) 的比例落在随机集合范围之外，而我们的集合大致达到了这一点。该实验初步表明，我们的校准随机模型是有效的。图6绘出了所有考察情景下，系统三个分量在中心网格位置处的集合离散度。所有情景中的离散度均呈现出预期的变化：稳步增加，其大小强烈取决于粗化 $c$ 和解释方差的比例 $N_\xi$，但与粒子数量无关。情景 **a** 的离散度最小，这是因为该情景下模型降阶幅度很小，系统方差未得到充分解释。情景**g** 和**h** 的离散度最大，因为这两种情景下模型降阶幅度大得多，系统方差也得到了充分解释。

**集合误差**。 我们使用三种不同且广泛应用的误差度量指标来评估相对于偏微分方程（真实值）的集合误差。第一种是偏差。

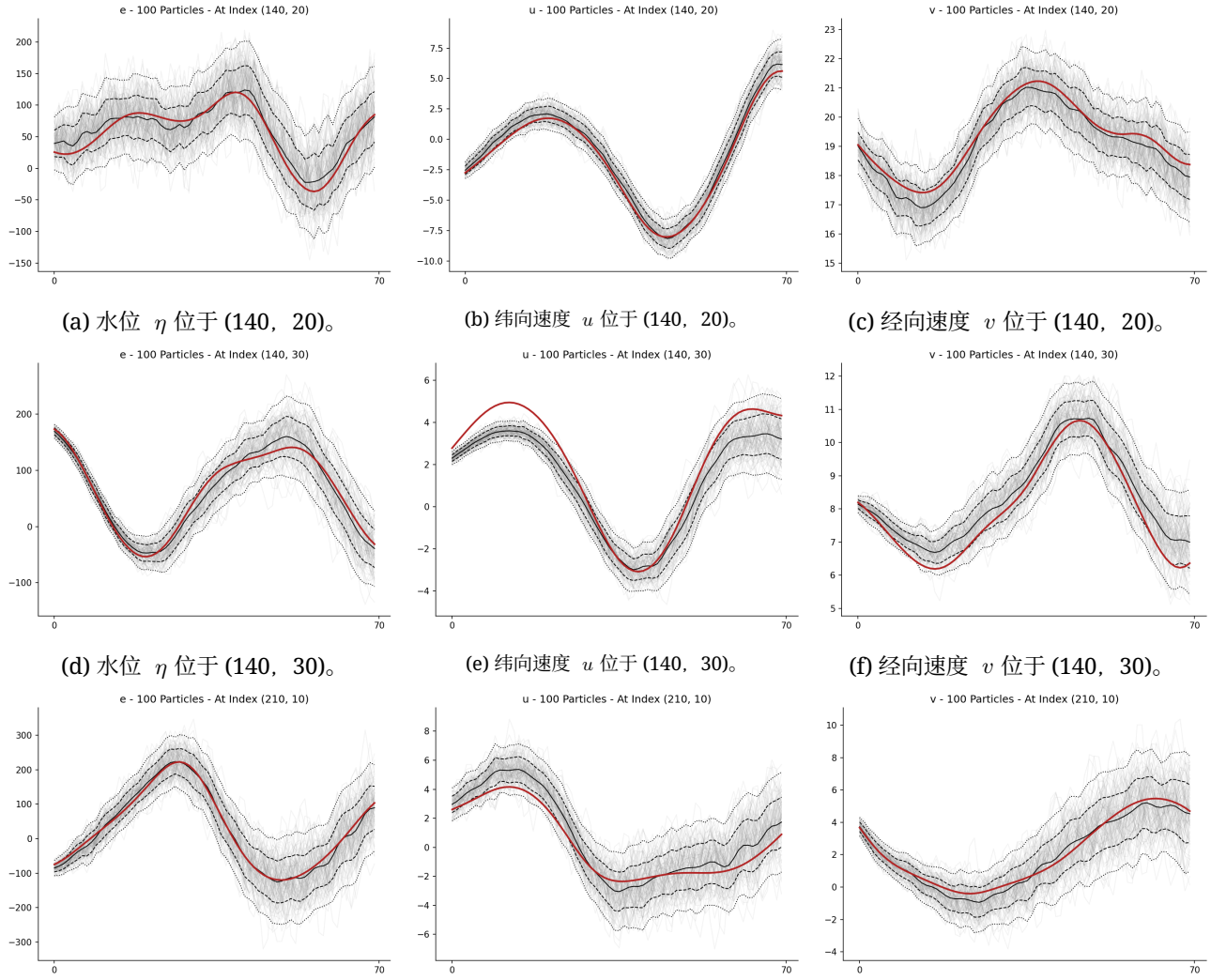
$$\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} x^i - x^{\text{true}}, \tag{35}$$

第二个是均方根误差（RMSE），

$$\sqrt{\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}(x^i - x^{\text{true}})^2} \tag{36}$$

最后一个是平均相对 $L^2$ 误差

$$\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\sqrt{\left(\frac{\sum_{\iota,\jmath}^{N_x,N_y}(x^i_{\iota,\jmath} - x^{\text{true}}_{\iota,\jmath})^2}{\sum_{\iota,\jmath}^{N_x,N_y}(x^{\text{true}}_{\iota,\jmath})^2}\right)}. \tag{37}$$




(a) 水位 $\eta$ 位于 (140，20)。 (b) 纬向速度 $u$ 位于 (140，20)。 (c) 经向速度 $v$ 位于 (140，20)。

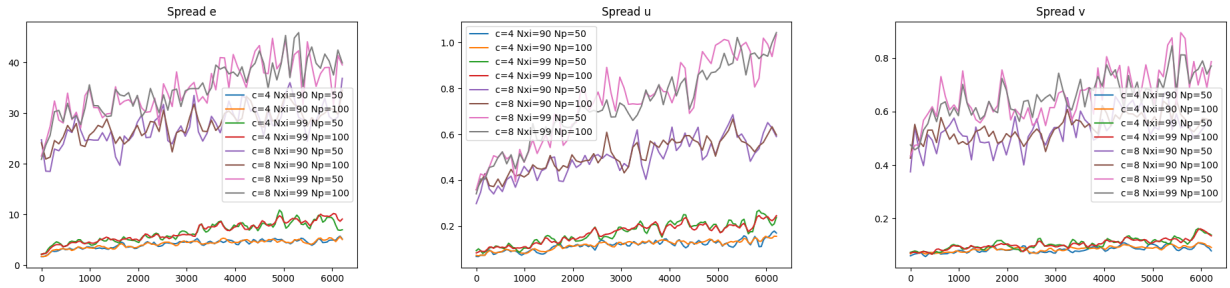
(d) 水位 $\eta$ 位于 (140，30)。 (e) 纬向速度 $u$ 位于 (140，30)。 (f) 经向速度 $v$ 位于 (140，30)。

(g) 水位 $\eta$ 位于 (210,10)。 (h) 纬向速度 $u$ 位于 (210,10)。 (i) 经向速度 $v$ 位于 (210,10)。

图 5：带有 $c = 8$ 的粗网格上，SPDE 粒子随时间（横轴）变化的轨迹（灰色）。红线表示真实值的轨迹，即投影到 SPDE 网格上的细网格 PDE。集合均值（黑线）以及一个集合标准差（虚线）和两个集合标准差（点线）的范围均有标示。时间范围为 560 个细网格 PDE 时间步，相当于粗网格 SPDE 上的 70 个时间步。各行对应在计算域内选取的三个不同点。顶行是粗网格上索引为 (140,20) 的网格点，该点位于区域中心。中间行和底行分别对应索引为 (140, 30) 和 (210,10) 的点。

需要注意的是，偏差和均方根误差都是空间上的局部误差，而相对 $L^2$ 误差则考虑了整个空间区域。所有情景下中心网格位置处的偏差如图7所示。对于系统的三个分量，偏差均保持稳定，并呈现出振荡行为。不同参数之间最显著的差异体现在粗化程度上。$c = 8$ 情形下更强的模型降阶会导致偏差水平更高。方差水平 $N_\xi$ 和粒子数量均没有产生显著影响。

此外，图8展示了在所有情景下，三个变量在同一中心网格位置处计算得到的均方根误差。系统的三个分量的均方根误差均随时间稳步增大。除了粗化对均方根误差水平有显著影响外，方差参数$N_\xi$也明显影响均方根误差。方差参数越大，随机偏微分方程中的噪声分量就越多。值得注意的是，均方根误差估计与图6中的集合离散度估计一致，表明我们的】【。



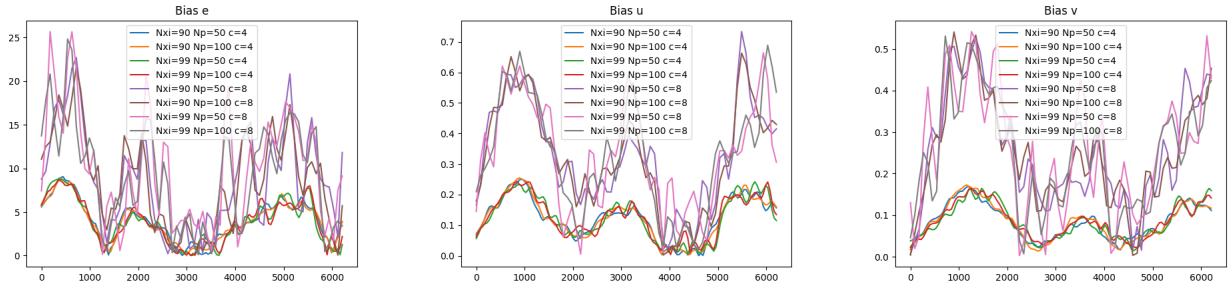

(a) 水位 $\eta$。 (b) 纬向速度 $u$。 (c) 经向速度 $v$。

图6：在 $c=8$ 情况下，中心网格点 (140,20) 处，以及在 $c=4$ 情况下，索引为 (280,40) 的中心网格点处，所有情景的集合离散度。

不确定性量化。

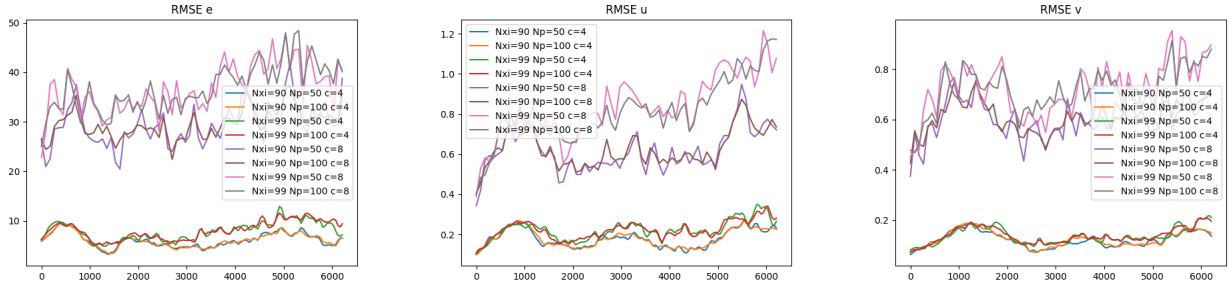
偏差和均方根误差的时间平均值见表2。除了粗化带来的明显影响外，我们再次看到，在不同情景中增大方差参数会使平均偏差和均方根误差增大。

最后，平均相对 $L^2$ 误差如图9所示。 $L^2$ 误差呈现上升趋势。同样，粗化的影响最为显著，而方差参数也发挥着次要但仍然重要的作用。




(a) 水位 $\eta$。 （b）纬向速度 $u$。 （c）经向速度 $v$。

图7：在所有情景下，索引为 (140，20) 的中心网格点处，集合相对于集合真实值的集合偏差（ $c=8$ 情景）；以及在 $c=4$ 情景下，索引为 (280，40) 的中心网格点处的集合偏差。

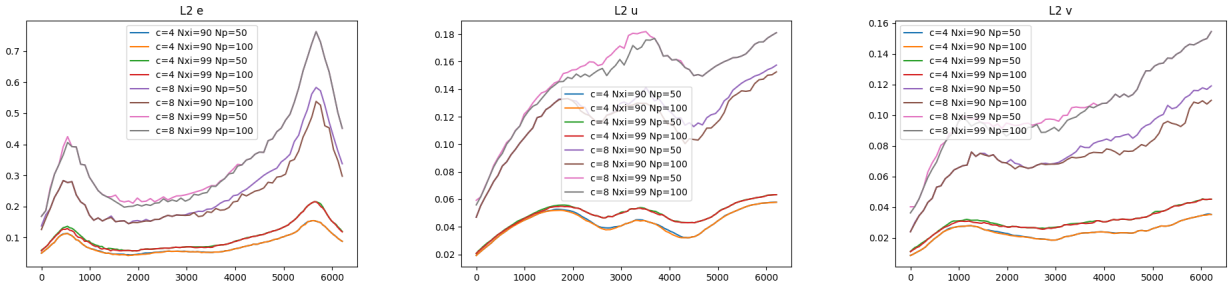



（a）水位 $\eta$。 （b）纬向速度 $u$。 （c）经向速度 $v$。

图8：在所有情景下，集合相对于真实值的集合均方根误差；对于 $c=8$ 情况，中心网格点的索引为 (140，20)，对于 $c=4$ 情况，索引为 (280，40)。

| | Bias | | | | RMSE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N_\xi = 0.90$ | | $N_\xi = 0.99$ | | $N_\xi = 0.90$ | | $N_\xi = 0.99$ | |
| | $N_p = 50$ | $N_p = 100$ | $N_p = 50$ | $N_p = 100$ | $N_p = 50$ | $N_p = 100$ | $N_p = 50$ | $N_p = 100$ |
| $c = 4$ | | | | | | | | |
| $e$ | 3.8093 | 3.6988 | 3.8272 | 3.7311 | 8.9550 | 8.9615 | 11.4424 | 11.5070 |
| $u$ | 0.2579 | 0.2576 | 0.2569 | 0.2571 | 0.3420 | 0.3428 | 0.3883 | 0.3887 |
| $v$ | 0.1198 | 0.1187 | 0.1242 | 0.1212 | 0.2321 | 0.2318 | 0.2851 | 0.2863 |
| $c = 8$ | | | | | | | | |
| $e$ | 9.1173 | 8.5740 | 9.9699 | 8.9823 | 34.7980 | 35.0126 | 43.7557 | 44.2226 |
| $u$ | 0.6194 | 0.6122 | 0.6268 | 0.6113 | 1.0713 | 1.0703 | 1.2443 | 1.2473 |
| $v$ | 0.3119 | 0.3057 | 0.3228 | 0.3044 | 0.8349 | 0.8353 | 1.0562 | 1.0591 |

表2：所有情景下中心网格位置处偏差和均方根误差的时间平均值 os.




(a) 水位 $\eta_\circ$ (b) 纬向速度 $u_\circ$ (c) 经向速度 $v_\circ$

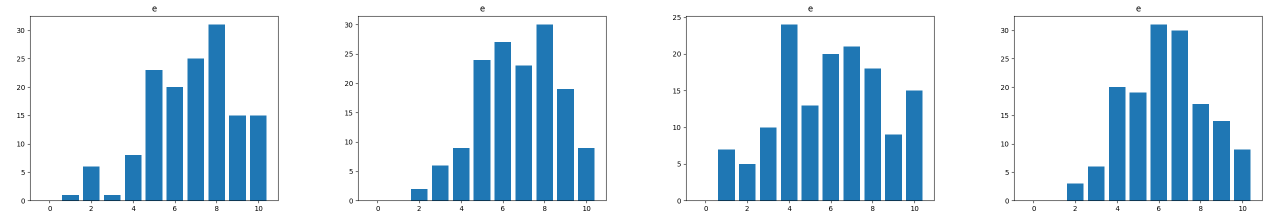
图9：相对 $L^2$ 相对于粗化真值的误差，并在所有情景下对集合取平均 s.

**秩直方图。** 为了评估集合在数据同化中的质量，我们使用 $N_\xi = 0.99$ 估计了 $c = 8$ 粗网格上由 10 个粒子组成的集合的秩直方图。秩直方图用于确定真实精细分辨率模拟在集合成员中的排名，并对随时间累积的统计数据进行汇总。图10展示了两个不同网格位置以及两个不同时间范围下的结果。图中显示，真实模拟的排名更接近集合均值，表明集合离散度略大。然而，这被认为是一个良好的信号，因为这意味着不确定性估计能够稳健地应对真实模拟中的极端行为。

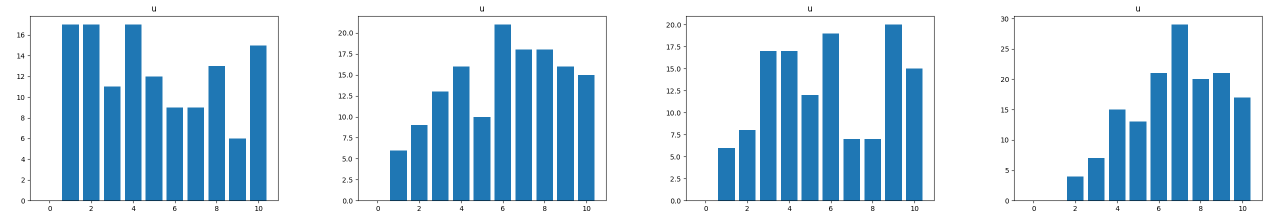
# 5 结论与未来工作

本文介绍了一种校准随机参数化的方法。该方法适用于一大类随机参数化，并且不受数据来源（真实数据或合成数据）的限制。该方法基于主成分分析技术，用于生成随机参数化协方差矩阵的特征向量和特征值。我们针对应用于旋转浅水模型的一种随机参数化对该方法进行了测试。本文测试的随机参数化用于模拟模型降阶所导致的未解析尺度。我们使用模型的高程变量来校准噪声，因为在实际应用中很容易获得这一可观测量，并使用合成数据作为校准输入。我们采用标准的不确定性量化测试（均方根误差、偏差、离散度、直方图）检验校准效果，并取得了良好的结果。

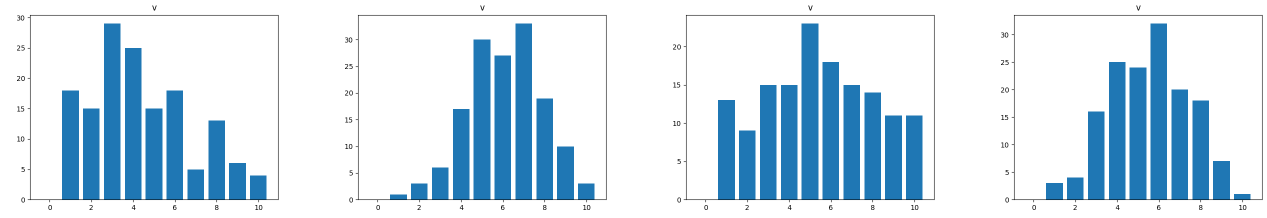
本文所呈现的工作范围有限。我们介绍了校准方法，并将一种特定的随机参数化应用于旋转浅水模型，作为测试案例来评估该方法。进一步的研究.....



(a) $\eta$: 在 (140,20) 处的 64 个时间步。 (b) $\eta$: 在 (140,20) 处进行 128 步迭代 (c) $\eta$: （140，30）处的64个步骤。 (d) $\eta$: 在 (140,30) 处进行 128 步。



(e) $u$: （140,20）处的 64 步。 (f) $u$: 在 (140,20) 处进行 128 步骤 (g) $u$: （140，30）处的 64 步。 (h) $u$: （140，30）处的 128 步。



(i) $v$: （140，20）处的 64 步。 (j) $v$: （140，20）处的 128 步 (k) $v$: （140，30）处的 64 步。 (l) $v$: （140，30）处的 128 步。

图10：三个浅水变量的秩直方图。分别使用64步和128步预报估算秩直方图。图中展示了区域内两个不同位置的直方图：一个是索引为 (140,20) 的中心点，另一个是向北偏移的点 $(140, 30)$。

作为该项目的延续，这项工作值得进一步开展。我们在下文列举了若干可能的研究方向和未解决的问题。

- 由于我们有一个通用的校准过程，因此可以比较不同的随机参数化。具体而言，我们能否为特定的状态空间模型确定最优的随机参数化？例如，我们能否找到一种参数化，只需最少的噪声源即可解释模型不确定性？

- 我们可以考虑旋转浅水模型的不同参数，例如罗斯贝数、雷诺数、旋转弗劳德数等。我们还可以探索不同的初始条件，以生成更符合实际的模型状态实现。例如，我们可以使用能够生成蜿蜒的东向急流的初始条件（急流的一种合成近似），也可以使用来自真实数据的初始条件。

- 我们可以探索旋转浅水模型的各种随机输运参数化，例如在针对 $(u, v)$ 的随机参数化中考虑旋转和非零散度的参数化。我们也可以探索使用速度场 $(u, v)$ 而非流体高度作为输入数据。

- 现在校准步骤已经完成，我们可以继续针对本文所介绍的测试案例，使用合成数据和真实数据实施数据同化方法。

**致谢**。 我们谨向 Colin Cotter、Wei Pan 和 James Woodfield 表示感谢，感谢他们在双曲方程数值格式的设计过程中给予的帮助。此外，我们还要感谢 Long Li、Darryl´Holm、Bertrand Chapron、Etienne M´emin 和 Baylor Fox-Kemper，感谢他们在本研究准备期间与我们进行的许多富有成效的讨论。

**资助**。 Alexander Lobbe、Oana Lang 和 Dan Crisan 获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的部分资助（ERC，第856408号拨款协议）。Peter Jan van Leeuwen 获得了欧洲研究理事会 CUNDA 项目第694509号拨款以及美国国家科学基金会第1924659号拨款的资助。Roland Potthast 获得了 CONTRAILS项目、德国联邦经济与气候保护部（BMWK）以及德国科学基金会 FOR 2589号拨款的资助。

**利益冲突声明**。 代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

# 参考文献

[AL77] Akio Arakawa 和 Vivian R Lamb. 加州大学洛杉矶分校全球环流模式基本动力过程的计算设计。 *General circulation models of the atmosphere*, 17(Supplement C):173–265, 1977.[BLBM21] R¨udiger Brecht, Long Li, Werner Bauer 和 Etienne M´emin. 位置不确定性下的旋转浅水流及其保结构离散化。 *Journal of Advances in ModelingEarth Systems*, 13(12):e2021MS002492, 2021.[BMP99] Roberto Buizza, M Milleer 和 Tim N Palmer. ECMWF集合预报系统中模式不确定性的随机表示。 *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 125(560):2887–2908, 1999.[CCH+19] Colin Cotter, Dan Crisan, Darryl D Holm, Wei Pan 和 Igor Shevchenko. 流体动力学中随机李输运的数值建模。 *Multiscale Modeling & Simulation*, 17(1):192–232, 2019.[CCH+20a] Colin Cotter, Dan Crisan, Darryl Holm, Wei Pan 和 Igor Shevchenko. 利用随机输运噪声对双层准地转模式中的不确定性进行建模。 *Foundations of Data Science*, 2(2):173, 2020.[CCH+20b] Colin Cotter, Dan Crisan, Darryl D Holm, Wei Pan 和 Igor Shevchenko. 李输运随机平流的粒子滤波器：阻尼受迫不可压二维欧拉方程的案例研究。 *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 8(4):1446–1492, 2020.[CCH+20c] Colin Cotter, Dan Crisan, Darryl D Holm, Wei Pan 和 Igor Shevchenko. 李输运随机平流的粒子滤波器：阻尼受迫不可压二维欧拉方程的案例研究。 *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 8(4):1446–1492, 2020.[Dur10] Dale R Durran. *Numerical methods for fluid dynamics: With applications to geophysics*, 第32卷。施普林格科学与商业媒体，2010年。[Her20] Hans 等。Hersbach. ERA5全球再分析资料。 *Q. J. R.Meteorol. Soc.*, 146, 2020.[Hol15] Darryl D Holm. 随机流体动力学的变分原理。 *Proceedings of the Royal SocietyA: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2176):20140963, 2015.[HW65] Francis H Harlow 和 J Eddie Welch. 具有自由表面的流体非定常黏性不可压缩流动的数值计算。 *The physics of fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.

[Kal03] Eugenia Kalnay. *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*。剑桥大学出版社，2003年。[KP92] Peter E. Kloeden 和 Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*。数学应用丛书第23卷。施普林格-施普林格出版社，柏林，1992年。[LvLCP23] Oana Lang, Peter Jan van Leeuwen, Dan Crisan 和 Roland Potthast. 流体动力学的贝叶斯推断：随机旋转浅水模型的案例研究。*Frontiers in AppliedMathematics and Statistics*，2023年。[M´em14] Etienne M´emin. 位置不确定性下的流体流动动力学。 *Geophysical & Astrophysical FluidDynamics*, 108(2):119–146, 2014.[MTVE01] Andrew J Majda, Ilya Timofeyev 和 Eric Vanden Eijnden. 随机气候模型的数学框架。*Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 54(8):891–974, 2001.[Pal19] Tim Palmer. ECMWF集合预报系统：回顾（超过）25年并展望未来25年。 *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 145:12–24, 2019.[PvL22] S. Pathiraja 和 P.J. van Leeuwen. 面向多尺度系统中部分观测的已解析变量的数据同化模型不确定性估计。 *JAMES*, 2022.[RLJ+21] Valentin Resseguier, Long Li, Gabriel Jouan, Pierre D´erian, Etienne M´emin 和 Bertrand Chapron. 集合预报策略的新趋势：粗网格计算流体动力学中的不确定性量化。*Archives of Computational Methods in Engineering*, 28(1):215–261, 2021.[Val17] Geoffrey K Vallis. *Atmospheric and oceanic fluid dynamics*。剑桥大学出版社，2017年。[Zei18] Vladimir Zeitlin. *Geophysical fluid dynamics: understanding (almost) everything with rotating shal-low water models*。牛津大学出版社，2018年。

# 附录 A 离散化

当所有系统变量都定义在相同的网格点或相同的时间层上时，所有可压缩流和不可压缩流模拟都可能产生较大的离散误差。更确切地说，使用同位网格时，由于差分格式的内在结构会导致压力与速度之间发生奇偶解耦，因此可能出现与压力场相关的伪模态。为解决这一问题，我们采用交错 Arakawa C 网格 [AL77] (见图11)，其中速度分量相对于压力项交错排列，即压力存储在网格单元中心，而速度分量存储在网格单元的各个面上。这样可以减少色散误差，并提高解中短波长分量的精度[3]。尽管这种交错排列不易实现，但对我们的情况尤其有用，因为它能够更准确地实现高频小尺度模态。

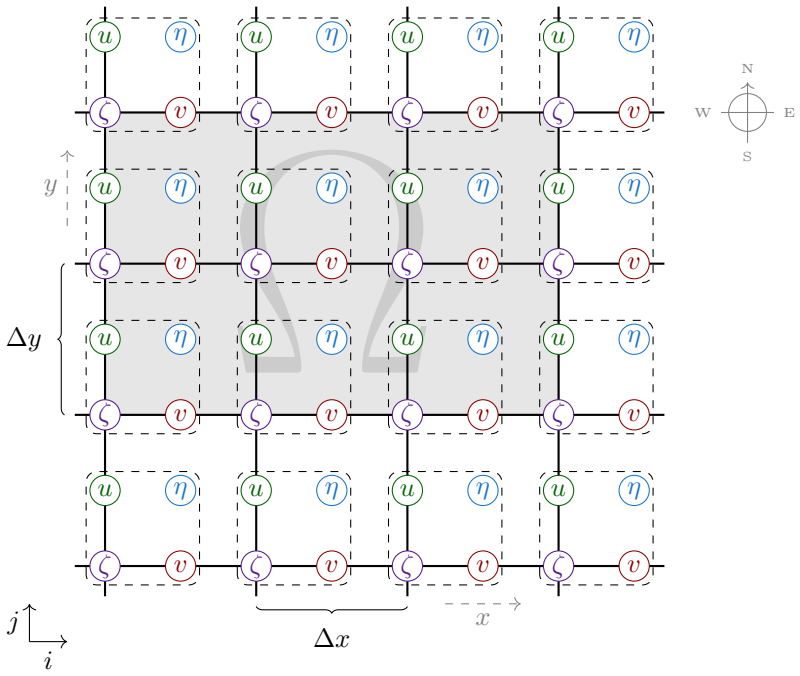



图11：这是我们为 SRSW 系统绘制的计算网格示意图。计算域为 Ω，坐标为 $x$ 和 $y$。相应坐标方向上的网格间距为 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ 。流体表面高度 $\eta$ 位于网格单元中心；纬向速度 $u$ 和经向速度 $v$ 的网格分别向西和向南偏移半个网格长度。位涡 $\zeta$ 的网格同时向西和向南偏移半个网格长度。变量 $h$ 与 $\eta$-网格共用网格，变量 $f$，$\xi$ 与$\zeta$-网格共用网格。网格索引在向东方向上为 $i$ ，在向北方向上为 $j$ 。索引为 $(i,\ j)$ 的网格盒以虚线方框表示。

空间离散化采用交错的 Arakawa C 网格（见图11），这种网格对于长度尺度与罗斯贝变形半径（$R_d = gh/f_0$）相当或更小的运动尤其准确。这意味着 $u$，$v$，$f$，$\zeta$ 和 $h$，$\eta$ 使用彼此错开的不同网格。具体而言，以（$h$，$\eta$）网格为参照，$u$ 网格向西错开半个网格间距，$\mathbf{v}$ 网格向南错开半个网格间距，而（$f$，$\xi$，$\zeta$）网格则同时向西和向南错开半个网格间距。为了严格说明数值实现，我们将[4] $\mathbf{u} = (u,\ v)$ 记为，并将确定性模型改写如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + f(\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{z}}) - g\boldsymbol{\nabla}h + D\nabla^2\mathbf{u} \\ h_t &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(h\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{38}$$

[3]关于这类数值问题的更多详情，参见例如 [Dur10] 或 [HW65]。 [4]请注意，这与前面各节中的 $u = (u^1,\ u^2)$ 完全对应。

因此，采用分量形式，并利用以下事实：由于 $b \equiv 0$， $h = H + \eta$ 和 $H$ 是常数。单层浅水模型方程如下：

$$\begin{aligned} u_t &= -uu_x - vu_y + fv - g\eta_x + D\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ v_t &= -uv_x - vv_y - fu - g\eta_y + D\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \\ \eta_t &= -(hu)_x - (hv)_y \end{aligned} \tag{39}$$

其中，层的总高度为 $h = H + \eta$， $H$ 在时空中为常数。我们对科里奥利参数采用 $\beta$ 平面近似，使得 $f = f_0 + \beta y$，其中 $f_0$ 在时空中为常数， $\beta$ 也如此。变量 $u$， $v$， $y$ 分别表示纬向速度、经向速度和经向坐标。

在不存在扩散和摩擦的情况下，我们希望数值格式能够守恒能量和位涡。为此，我们将平流项和科里奥利力改写为：

$$\begin{aligned} -uu_x - vu_y + fv &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)_x + vv_x - vu_y + fv \\ &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)_x + v(f + \zeta) \end{aligned} \tag{40}$$

其中， $\zeta = v_x - u_y$ 是相对涡度 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \zeta \hat{\mathbf{z}}$ 的垂直分量。这将得到以下方程组：

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)_x + v(f + \xi) - g\eta_x + D\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ v_t &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)_y - u(f + \xi) - g\eta_y + D\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \\ \eta_t &= -(hu)_x - (hv)_y \end{aligned} \tag{41}$$

接下来，我们将涡度项写成位涡平流的形式：

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)_x + hv\frac{f + \xi}{h} - g\eta_x + D\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ v_t &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)_y - hu\frac{f + \xi}{h} - g\eta_y + D\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \\ \eta_t &= -(hu)_x - (hv)_y \end{aligned}$$

我们可以进一步通过合并梯度项将其改写为：

$$\begin{aligned} u_t &= -\left(\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) + g\eta\right)_x + hv\zeta + D\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ v_t &= -\left(\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) + g\eta\right)_y - hu\zeta + D\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \\ \eta_t &= -(hu)_x - (hv)_y \end{aligned}$$

其中，位涡定义为

$$\zeta = \frac{f + \zeta}{h} = \frac{f + v_x - u_y}{h}$$

这样，梯度项包含动能和势能，而平流项包含位涡。在没有耗散的情况下，这两个量均守恒。这意味着，采用这种形式对方程进行离散化，能够更好地保持能量和位涡守恒。**内部网格点**

记 $i$ 为向东的网格坐标， $j$ 为向北的网格坐标。一个网格框 $i$， $j$ 有 4 个网格点：左上角是一个 $(h,\ \eta)$ 点，右上角是一个 $u$ 点，左下角是一个 $v$ 点，右下角是一个 $(f,\ \xi,\ \zeta)$ 点。每个点的索引为 $i$， $j$。这意味着压力梯度可以离散化为：

$$\begin{aligned} \left[-g\eta_x\right]_{i,j} &= -g\left(\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}\right)/\Delta x \\ \left[-g\eta_y\right]_{i,j} &= -g\left(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}\right)/\Delta y \end{aligned}$$

请注意，左侧的 $i$， $j$ 坐标分别对应 $u$ 网格和 $v$ 网格，右侧则对应 $h$， $\eta$网格。我们将取 $\Delta x = \Delta y$。首先将能量项插值到 ($h$， $\eta$) 网格点上：

$$\left[\left(u^2+v^2\right)\right]_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}u_{i+1,j} + u_{i,j}u_{i,j} + v_{i,j+1}v_{i,j+1} + v_{i,j}v_{i,j})$$

然后，纬向导数的计算方式与压力梯度项类似。

涡度项稍微复杂一些。我们首先计算涡度网格点处的总涡度除以层高，表示为：

$$\zeta_{i,j} = \left[\frac{f+\xi}{h}\right]_{ij} = \frac{\left(v_{i,j} - v_{i-1,j} - \left(u_{i,j} - u_{i,j-1}\right)\right)/dx + f_j}{H + \left(e_{i,j} + e_{i-1,j} + e_{i,j-1} + e_{i-1,j-1}\right)/4}$$

然后分别计算 u 和 v 网格点处沿纬向和经向的质量通量：$\mathrm{vflux}_{i,\ j} = v_{i,\ j}\left(H + \left(e_{i,\ j} + e_{i,\ j-1}\right)/2\right)$ 随后，纬向和经向速度的涡度项分别为（注意将 $v$ 通量插值到 $u$ 网格点，并将 $u$ 通量插值到$v$ 网格点）：

$$\left(vflux_{i,j} + vflux_{i-1,j} + vflux_{i,j+1} + vflux_{i-1,j+1}\right)\left(\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j+1}\right)/8$$
$$\left(uflux_{i,j} + uflux_{i,j-1} + uflux_{i+1,j} + uflux_{i+1,j-1}\right)\left(\zeta_{i,j} + \zeta_{i+1,j}\right)/8$$

耗散项并不复杂，采用标准的中心差分即可：

$$D * \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4 * u_{i,j}\right)/dx^2 - r * u_{i,j}$$
$$D * \left(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4 * v_{i,j}\right)/dx^2 - r * v_{i,j}$$

最后，连续性方程中的平流项已经采用通量形式，只需插值到（$h$， $\eta$）网格点：

$$\left(uflux_{i+1,j} - \mathrm{uflux}_{i,j}\right)/dx$$
$$\left(vflux_{i,j+1} - vflux_{i,j}\right)/dx$$

**边界点** 在北边界和南边界，我们假设不存在经向流，因此 $v = 0$。由于这是一个硬性条件，为满足质量守恒，北边界和南边界位于 v 网格上。这意味着需要对 $u$ 和 $\eta$ 进行插值。对于 $u$ ，我们采用自由滑移边界条件，因此在北部和南部边界有 $\partial hu/\partial y = 0$ ：

$$uflux_{i,1} = -uflux_{i,2}$$
$$uflux_{i,n} = -uflux_{i,n-1}$$

模型在纬向上具有周期性，这意味着边界处的纬向导数必须“绕回”。例如：

$$\left[-g\eta_x\right]_{1,j} = -g\left(\eta_{1,j} - \eta_{m,j}\right)/\Delta x$$

在时间离散化中，模型在第一个时间步（包括数据同化后的第一个时间步）使用欧拉步，其他所有时间步则使用蛙跳法。

# 附录 B 随机偏微分方程的数值实现

含有 SALT 噪声的随机浅水系统形式上写作：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t &= -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} - u\boldsymbol{\nabla}\tilde{u} - v\boldsymbol{\nabla}\tilde{v} + f(\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{z}}) - g\boldsymbol{\nabla}h + D\nabla^2\mathbf{u} \\ h_t &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(h\mathbf{v})\end{aligned} \tag{42}$$

其中，$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \tilde{}\mathbf{u}$ 表示随机扰动速度，其中 $\tilde{}\mathbf{u} = [\tilde{u}, \tilde{v}]$ 为随机扰动。随机扰动通过布朗噪声建模为 $\tilde{}\mathbf{u} = \sum_i \boldsymbol{\xi}_i \mathrm{d}W_t^i$，从而确保正确的时间尺度

is

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{u} &= (-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + f(\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{z}}) - g\boldsymbol{\nabla}h + D\nabla^2\mathbf{u})\,\mathrm{d}t - ((\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{u} + u\boldsymbol{\nabla}\tilde{u} + v\boldsymbol{\nabla}\tilde{v})\sqrt{\mathrm{d}t}\\ \mathrm{d}h &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(h\mathbf{u})\,\mathrm{d}t - \boldsymbol{\nabla}\cdot(h\tilde{\mathbf{u}})\sqrt{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{43}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{u} &= (-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + f(\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{z}}) - g\boldsymbol{\nabla}h + D\nabla^2\mathbf{u})\,\mathrm{d}t - \sum_i((\boldsymbol{\xi}_i\cdot\nabla)\mathbf{u} + u\boldsymbol{\nabla}\xi_i^u + v\boldsymbol{\nabla}\xi_i^v)\mathrm{d}W_t^i\\ \mathrm{d}h &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(h\mathbf{u})\,\mathrm{d}t - \sum_i \boldsymbol{\nabla}\cdot(h\boldsymbol{\xi}_i)\mathrm{d}W_t^i.\end{aligned} \tag{44}$$

我们将布朗运动离散化为 $w_i\sqrt{\mathrm{d}t}$，其中 $w_i \sim \mathcal{N}(0,1)$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{u} &= (-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + f(\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{z}}) - g\boldsymbol{\nabla}h + D\nabla^2\mathbf{u})\,\mathrm{d}t\\ &\quad - \left(\sum_i((\boldsymbol{\xi}_i w_i\cdot\nabla)\mathbf{u} + u\boldsymbol{\nabla}\xi_i^u w_i + v\boldsymbol{\nabla}\xi_i^v w_i)\right)\sqrt{\mathrm{d}t}\\ \mathrm{d}h &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(h\mathbf{u})\,\mathrm{d}t - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\sum_i h\boldsymbol{\xi}_i w_i\right)\sqrt{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{45}$$

我们采用与确定性情形类似的方式对随机项进行离散化。速度方程中，相对于确定性系统新增的项为

$$-(\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{u} - u\boldsymbol{\nabla}\tilde{u} - v\boldsymbol{\nabla}\tilde{v}, \tag{46}$$

或者用分量形式表示为,

$$-\tilde{u}u_x - \tilde{v}u_y - u\tilde{u}_x - v\tilde{v}_x \tag{47}$$

$$-\tilde{u}v_x - \tilde{v}v_y - u\tilde{u}_y - v\tilde{v}_y. \tag{48}$$

这可以改写为

$$-(u\tilde{u} + v\tilde{v})_x + h\tilde{v}\frac{v_x - u_y}{h} \tag{49}$$

$$-(u\tilde{u} + v\tilde{v})_y - h\tilde{u}\frac{v_x - u_y}{h}, \tag{50}$$

或者更简洁地写成,

$$-\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}}) + h\tilde{\zeta}(\tilde{\mathbf{u}}\times\hat{\mathbf{z}}), \tag{51}$$

其中

$$\tilde{\zeta} := \frac{v_x - u_y}{h}$$

表示由 SALT 噪声引起的随机涡量贡献，而项 $h\tilde{}\mathbf{u}$ 是随机通量。此后，随机方程的空间离散将按照与确定性方程相同的思路进行，参见附录 A

# 附录 C 龙格-库塔近似格式

对于一个动力系统

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t) \tag{52}$$

四阶龙格-库塔格式如下:

$$X^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) \tag{53}$$

其中 $c_i,\ i \in \{1,2,3,4\}$ 为中间步骤

$$c_1 = F(X^n, t) \tag{54a}$$

$$c_2 = F\left(X^n + \frac{\Delta t}{2} c_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{54b}$$

$$c_3 = F\left(X^n + \frac{\Delta t}{2} c_2, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{54c}$$

$$c_4 = F\left(X^n + \Delta t c_3, t + \Delta t\right) \tag{54d}$$

其中 $X^n = X(t_n) = X_{t_n}$ 和 $t_n = n\Delta t$ 对于 $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\},\ t_N = T,\ \Delta t = t_{n+1} - t_n$。这些中间步骤均采用标准欧拉近似格式求解（例如参见 [KP92]）。本文研究的随机偏微分方程具有如下形式

$$dF(X,t) = A(X,t)dt + \sum_i B^i(X,t) \circ dW_t^i. \tag{55}$$

下面我们说明，从数值角度来看，我们可以先对 Itˆo 形式的随机偏微分方程进行近似，即 .,

$$dF(X,t) = A(X,t)dt + \sum_i B^i(X,t) dW_t^i \tag{56}$$

由于四阶龙格–库塔格式的特殊结构，与公式（55）中的斯特拉托诺维奇积分相关的 Itˆo 修正会自动出现在第二次迭代中。公式（56）的离散化版本为

$$F(X^n,t) = A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i \tag{57}$$

其中 $\Delta W^i = W^i_{t_{n+1}} - W^i_{t_n}$ 和 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$。于是 [5]

$$c_1 = F(X^n) = A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i = F(\ell_1) \tag{58a}$$

$$c_2 = F\left(X^n + \frac{c_1}{2}\right) = F\left(X^n + \frac{1}{2}\left(A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i\right)\right) = F(\ell_2) \tag{58b}$$

$$c_3 = F\left(X^n + \frac{c_2}{2}\right) = F(\ell_3) \tag{58c}$$

其中

$$\ell_1 := X^n$$

$$\ell_2 := X^n + \frac{F(\ell_1)}{2} = X^n + \frac{1}{2}\left(A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i\right)$$

[5]我们暂时省略时间依赖。此外，为了了解如何得到 Itˆo 修正，只需计算前三个中间步骤，因此我们也略去 $c_4$ 的具体计算。

$$
\begin{aligned}
\ell_3 &:= X^n + \frac{F(\ell_2)}{2} = X^n + \frac{1}{2}F\left(X^n + \frac{1}{2}\left(A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i\right)\right) \\
&= X^n + \frac{1}{2}F(X^n) + \frac{1}{4}F\left(A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i\right) \\
&= X^n + \frac{1}{2}A(X^n)\Delta t + \frac{1}{2}\sum_i B^i(X^n)\Delta W^i \\
&+ \frac{1}{4}A^2(X^n)(\Delta t)^2 + \frac{1}{4}\sum_i AB^i(X^n)\Delta W^i\Delta t + \frac{1}{4}\sum_i B^i(A(X^n))\Delta t\Delta W^i \\
&+ \frac{1}{4}\sum_i (B^i)^2(X^n)(\Delta W^i)^2 \\
&= X^n + \frac{1}{2}\left(A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i + \frac{1}{2}\sum_i (B^i)^2(X^n)(\Delta W^i)^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(A^2(X^n)(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\sum_i A(B^i(X^n))\Delta W^i\Delta t + \frac{1}{2}\sum_i B^i(A(X^n))\Delta t\Delta W^i\right).
\end{aligned}
$$

Then

$$
\ell_3 = X^n + \frac{1}{2}\left(A(X^n)\Delta t + \sum_i B^i(X^n)\Delta W^i + \frac{1}{2}\sum_i (B^i)^2(X^n)(\Delta W^i)^2\right) + \text{higher order terms}
$$

因此，我们得到了 Itô 修正项 $\frac{1}{2}\sum_i (B^i)^2(X^n)(\Delta W^i)^2$。这被称为（参见 [KP92]） *Heun's method*，或称为 *improved Euler method*。从形式上看，它基于引入一个辅助变量（此处我们忽略对 $i$ 的依赖，因为这并非关键因素）

$$
X^\star := X^n + A(X^n)\Delta t + B(X^n)\Delta W.
$$

然后，在用于计算中间步骤的欧拉格式中 $c_i,\ i \in \{1,2,3,4\}$ 我们有

$$
\begin{aligned}
X^{n+1} &= X^n + \frac{\Delta t}{2}(A(X^n) + A(X^\star)) + \frac{\Delta W}{2}(B(X^n) + B(X^\star)) \\
&= X^n + A(X^n)\Delta t + B(X^n)\Delta W + +\frac{1}{2}B^2(X^n)(\Delta W)^2 \\
&+ \frac{1}{2}A^2(X^n)(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}A(B(X^n))\Delta t\Delta W + \frac{1}{2}(B(A)(X^n))\Delta t\Delta W
\end{aligned}
$$

这与我们之前得到的结果类似。