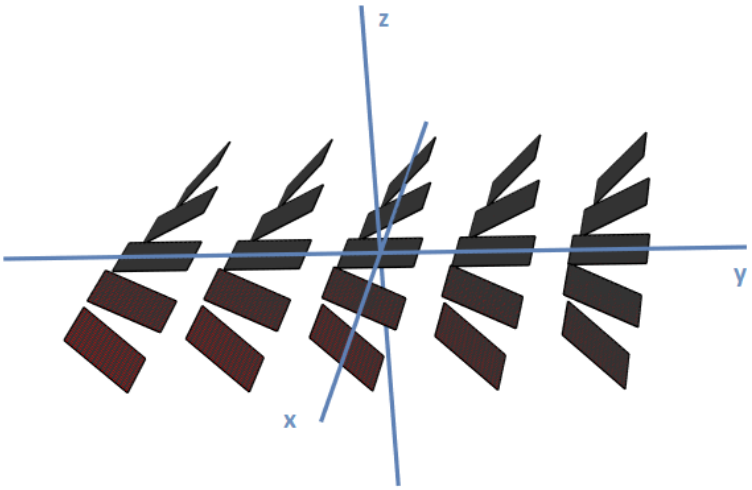
arXiv:2305.03553v1 [math.DS] 5 May 2023

接触完全可积性简介

硕士课程“可积哈密顿系统”的补充讲义



Senne Ignoul 安
特卫普大学

Academic year 2023-2024

作者是弗兰德斯研究基金会（FWO）资助的基础研究博士前研究员，项目编号为 1179322N。

目录

1 引言 v

2 接触几何 1
2.1 基本概念.12.2 接触化与辛化.82.3 习题.11

3 接触哈密顿量 15
3.1 接触哈密顿量.153.2 习题.24

4 完全可积接触系统 27
4.1 Legendrian 与余 Legendrian 叶状结构.274.2 接触完全可积系统.
334.3 习题.43

5 （半）局部方面 47

6 整体性质 53
6.1 接触动量映射.536.2 接触环面流形.566.3 Lerman构造.616.4 习题.
70

作者注

目前，我是安特卫普大学的一名博士生。作为博士学习的一部分，我在基础数学硕士课程中讲授《可积哈密顿系统》课程的习题课。在这门课中，我们从辛几何的角度研究哈密顿系统。由于我自己的研究涉及接触几何，我决定也介绍接触可积系统，由此编写了这份讲义。

为了让学生尽可能早地读懂相关文献，我打算尽快介绍接触完全可积系统的定义。这意味着我没有介绍一些概念（例如接触商和等能可积性）。这些概念对于研究接触可积系统很有意义，但理解基本概念并非必需。在下一版中，我希望通过详细阐述这些主题来扩充本讲义。

最终，Sonja Hohloch 教授（她讲授上述课程）和我希望将她关于辛情形下的可积哈密顿系统的讲义，与我关于接触完全可积性的讲义合并出版成一本书（主要面向研究生）。因此，在这份讲义中，我常会将她的讲义称为辛几何讲义。这些讲义可在她的网站上获取：

https://www.uantwerpen.be/nl/personeel/sonja-hohloch/private-webpage/teaching/antwerpen-this-ye/。

最后，欢迎大家对这些笔记提出任何反馈。如果您有任何意见，或想讨论这些笔记的内容，请通过电子邮件联系我senne.ignoul@uantwerpen.be。最后，我想感谢弗兰德斯研究基金会（FWO），我目前是该基金会基础研究博士前研究员（1179322N）。

Senne Ignoul
2023年5月2日

第1章

导论

在本课程《可积哈密顿系统》中，我们讨论了一类特殊的动力系统。具体而言，我们在辛几何的背景下研究了完全可积哈密顿系统：系统的对称性为我们提供了一套工具，用于描述其局部和整体行为。然而，辛几何的一个内在属性是，它只能存在于偶数维流形上。这对将这一形式体系应用于具体问题施加了相当大的限制。事实上，在物理学的许多分支领域（例如热力学）中，我们关注的是求解奇数维空间上的微分方程。

辛几何存在一种奇数维的姊妹理论，称为接触几何。过去，这一主题主要是在纯微分几何和拓扑学的背景下进行研究的。然而，在过去几年中，人们越来越关注运用接触几何处理奇数维空间上的微分方程。本讲义旨在介绍这些最新进展。

本讲义的结构如下：在第2章中，我们将介绍接触几何的基本原理（不考虑任何动力学）。本章的第一部分对于理解讲义其余内容至关重要。在本章的第二部分，我们将看到接触几何与辛几何密切相关。事实上，我们将讨论接触化和辛化的过程。

在第3章中，我们将构造接触流形上的光滑函数与所谓的接触向量场（一类特殊的向量场，将在第2章中介绍）之间的一一对应关系。这就是所谓的接触哈密顿量。此外，我们还将介绍雅可比括号。它不同于辛几何中的泊松括号，但（在一类特殊的函数子类上）具有本质上相同的动力学性质。我们将详细证明这个括号的代数性质，

因为它展示了如何在更深入的证明中运用这一构造。第4章可以视为这些讲义的核心。在本章中，我们 e
将定义接触完全可积系统的概念，这是我们... r
主要研究对象。不过，我们需要了解什么是（余）Legendria n
在理解这个定义之前，需要先了解叶状结构。因此，在此】【。 e
在第4章的第一部分，我们将介绍这些叶状结构。
由于接触动力学是一个相对较新的现象，文献中尚无接触完全可积系统的标准定义。因此，我们将给出两种不同的定义，随后深入研究它们之间的关系。

虽然第1章至第4章可视为辛几何讲义第1章的接触对应部分，但第5章对应这些讲义的第2章。这里，我们将简要讨论接触完全可积系统在正则点（阿诺德-刘维尔定理）附近和奇异点（局部标准形定理）附近的半局部行为。

在最后一章（即辛几何讲义第3章的接触版本）中，我们将探讨接触系统的整体性质。具体而言，我们将讨论一般李群的（接触）动量映射的性质，并介绍接触环面 G流形。最后，我们将以紧致连通接触环面G流形的德尔赞特型分类作结，该分类由 Lerman 证明。

由于时间有限（且作者对物理学所知甚少），我们将只关注这一主题的数学方面，而不讨论其在热力学中的应用。我们建议对物理学更感兴趣的读者参考相关文献，尤其是 Alessandro Bravetti 的研究（例如[**Bravetti**]）。不过，正如弗拉基米尔·阿诺德（即阿诺尔德-刘维尔定理中的那位阿诺德）以下所言，接触几何在热力学中的重要性不容低估：

> 每一位数学家都知道，要理解一门基础热力学课程是不可能的。原因在于，正如吉布斯明确宣称的那样，热力学是建立在一种相当复杂的数学理论——接触几何之上的。

第2章

接触几何

在辛几何中，最重要的研究对象是一个流形W 以及一个辛形式 ω。我们已经看到， W 必然是偶数维的。在奇数维流形上，我们可以研究一种与辛几何密切相关的几何，即接触几何。本章将介绍这一几何的基本概念，包括一些我们在后续章节中需要用到的附加结构。最后，我们将介绍一种在辛流形与接触流形之间相互转换的方法。关于接触几何的一般性入门参考文献（不涉及动力学）是 [Geiges], ，尤其是前两章。

2.1 基本概念

在本节余下部分中，设 M 是一个 $(2n+1)$ 维流形。接触几何研究的不是2-形式，而是定义在 M 上的一种特殊的余维一分布（请记住，余维一意味着该分布的维数比 M 的总维数低 1，因此它是 $2n$ 维的）。

2.1.1 命题。 余维一分布 ξ 在 M 上局部可以写成 M 上某个 1-形式的核；也就是说，对于 M 中的每个点 p ，都存在 M 的一个开邻域 U ，以及定义在 M 上的一个 1-形式 α ，使得$\xi|_U = \ker(\alpha|_U)$。

证明。 该证明运用了一些黎曼几何技巧，可见于 [Geiges] （引理 1.1.1）。 □

上文定义的 1-形式仅在局部有定义。如果它也能在整个流形上定义，那就再好不过了，这将是下一条命题的主题。不过，我们首先必须考虑以下新概念。

2.1.2 定义。 如果商空间 TM/ξ（它是 M 上的一个一维分布）是可定向的，则称 M 上的余维 1 分布 ξ 是可共定向的。

2.1.3 命题。 设 M 上有一个余维一分布 ξ 。存在一个定义在 M 上的 1-形式 α ，使得 $\xi = \ker(\alpha)$，当且仅当 ξ 可共定向。

证明。 参见 [Geiges]。 □

回顾 ξ的湮灭子的定义：

$$\xi^\circ = \{\beta \in T^*M | \forall u \in \xi : \beta(u) = 0\}.$$

可以证明， ξ° 与 TM/ξ同构。假设 ξ 是可余定向的，因此存在一个全局 1-形式 α ，它定义了 ξ。 ξ 的余定向（对应于 ξ°的一个定向）将记为 ξ°_+。这对应于 $\xi^\circ \setminus \{0\}$ 的一个分支，使得 $\alpha(M) \subset \xi^\circ_+$ （从直观上说， ξ°在每一点都是一条直线，而 α 则确定了这条直线的正向一侧）。

一类研究充分的余维一分布 ξ 是（Frobenius）可积分布，即若 $X, Y \in \xi$，则 $[X, Y] \in \xi$。若 $\xi = \ker(\alpha)$，则当且仅当 ξ 可积时，蕴含

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

从本质上说，接触结构将与这类分布截然相反：它们将是极大非可积的。

2.1.4 定义。 设 M 是一个 $(2n+1)$ 维流形。若微分1-形式 α 满足以下条件，则称其为 接触形式

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

若余维一分布 ξ 在 M 上（局部）由接触形式 α定义，即对于每个 $p \in M$，都存在 p的一个开邻域 U，使得 $\xi|_U = \ker\ \alpha|_U$，则称 ξ 为一种接触结构 。有序对(M, ξ)称为接触流形。若 α是 M上的接触形式，则称有序对(M, α)为严格接触流形。

为尽量简化记号，除非另有说明，在本讲义的后续内容中，我们假设 ξ 总是由 M 上的全局接触形式 α 定义。现在先来看一个例子。

2.1.5 例。 考虑光滑流形 $\mathbb{R}^{2n+1}$，赋予其笛卡尔坐标$(z, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$。考虑 $\mathbb{R}^{2n+1}$上的微分1-形式 α_{st}，定义如下：

$$\alpha_{st} = dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j.$$

通过直接计算可以证明（这主要是标记各个指标的工作）：

$$\alpha_{st} \wedge (d\alpha_{st})^n = n! dz \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} (dx_j \wedge dy_j) \neq 0.$$

因此， α_{st} 是 $\mathbb{R}^{2n+1}$上的接触形式，称为 $\mathbb{R}^{2n+1}$上的标准接触形式 。相应的接触结构 ξ =Ker(α_{st})称为 $\mathbb{R}^{2n+1}$上的标准接触结构 。图 1 展示了 $\mathbb{R}^3$上的标准接触结构，说明了为什么这种分布被称为极大非可积。

描述严格接触流形的另一种方式是利用辛向量空间。

2.1.6 命题。 设 ξ 是 M 上的一个余维一分布（不一定是接触分布），它定义为微分1-形式 α的核。当且仅当 $(d\alpha)^n|_\xi \neq 0$时， $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ 成立。

证明。 这可通过直接计算得出。 □

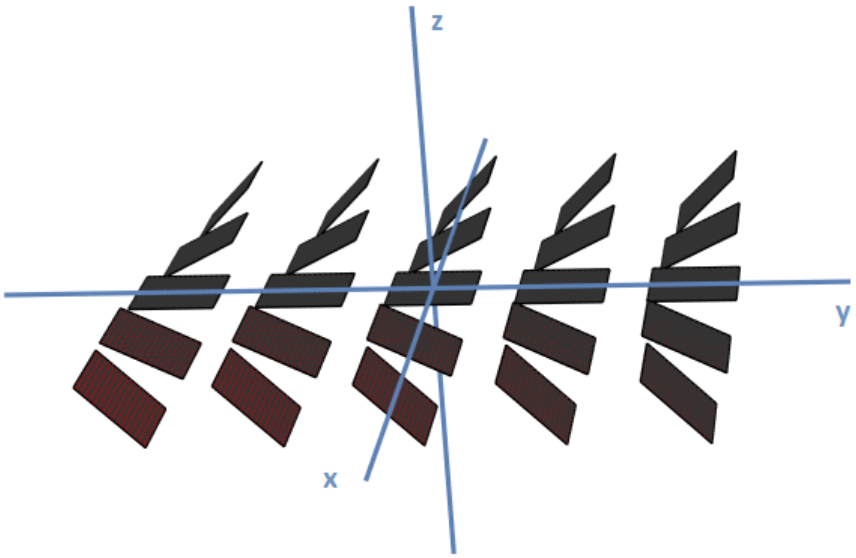


图 2.1：接触结构 ker($dz + xdy$)（来源： [Geiges]）

2.1.7 推论。 (M, α) 是严格接触流形，当且仅当对于每个 $m \in M$，$(\xi_m, (d\alpha)_m)$ 是辛向量空间。

证明。 这直接由前一个命题得出，其中我们用到了：向量空间 ξ_m 上的斜对称双线性形式 $(d\alpha)_m$ 是非退化的，当且仅当 $(d\alpha)^n_m|_{\xi_m} \neq 0$。 □

对于每个接触形式，都可以在接触流形上定义一个特殊的向量场，称为Reeb向量场。在接触动力系统的研究中，该向量场将发挥至关重要的作用。

2.1.8 定义。 设 (M, α) 为一个严格接触流形。与 α 相关联的、位于 M 上的***Reeb***向量场 R_α 由下式唯一确定：

i) $\iota_{R_\alpha} d\alpha = d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0,$

ii) $\alpha(R_\alpha) = \mathbb{1}$

Reeb向量场的流称为 ***Reeb*** 流。

2.1.9 例。 考虑光滑流形 $\mathbb{R}^{2n+1}$，赋予其笛卡尔坐标 $(z, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ 及其标准接触形式 α_{st}。该

Reeb向量场 $R_{\alpha_{st}}$ 的 α_{st} 是

$$R_{\alpha_{st}} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

确实，让我们来检验这两个条件：

i) $d\alpha_{st}(\frac{\partial}{\partial z}, \cdot) = d(dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j)(\frac{\partial}{\partial z}, \cdot) = \left(\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j\right)(\frac{\partial}{\partial z}, \cdot) = 0$

ii) $\alpha_{st}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot 0 = \mathbb{1}.$

2.1.10 注记。 重要的是要注意，Reeb向量场是一个极大程度上取决于接触形式、而不仅仅取决于接触结构的对象。事实上，若 α_1 和 α_2 是定义同一接触结构的两个接触形式 ξ（即 $\xi = \ker(\alpha_1) = \ker(\alpha_2)$），那么必然存在一个函数 $\lambda\colon M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$，使得 $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$（当且仅当 λ 为正时，它们诱导相同的余定向）。不过，很容易验证，$R_{\alpha_1} \neq R_{\lambda\alpha_1}$（前提是 λ 不是恒等于 1 的函数，否则 $\alpha_1 = \alpha_2$）。

与我们在辛几何中看到的情况类似，所有接触流形在局部看来都相同，这由 Darboux 定理给出。在考察该定理之前，我们需要引入一个概念，它将在辛几何中扮演辛同胚的角色。

2.1.11 定义。 设 (M_1, ξ_1) 和 (M_2, ξ_2) 为接触流形。微分同胚 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ 称为接触同胚，若 $T\varphi(\xi_1) = \xi_2$。对 (M_1, ξ_1) 和 (M_2, ξ_2) 称为接触同胚。设 α_1 和 α_2 为分别诱导接触结构 ξ_1 和 ξ_2 的接触形式。微分同胚 φ: $M_1 \to M_2$ 称为严格接触同胚，若 $\varphi^*\alpha_2 = \alpha_1$。

现在我们可以陈述严格接触流形的达布定理。

2.1.12 定理。 ***(Darboux)*** 设 M 为一个$(2n+1)$维流形，且 α 是 M 上的接触形式。对于每个 $p \in M$，存在 p 的一个开邻域 $U \subset M$ 以及一个图表 $\varphi:\ U \to \mathbb{R}^{2n+1}$，其在 U 上具有局部坐标$(z, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$，使得 $\varphi(p) = (0,\ \cdots,\ 0)$ 且

$$(\varphi^{-1})^*\alpha = dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j.$$

因此，$(U, \alpha|_U)$ 和$(\mathbb{R}^{2n+1}, dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j)$ 严格接触同胚。

证明。 参见 [Geiges]中的定理 2.5.1。 □

流形上的动力学由向量场描述（因为微分方程可以用向量场来描述）。如果我们希望利用接触几何使动力学的描述更加简便，那么首先可以对向量场提出的要求是：它保持接触结构和/或接触形式。这些向量场将发挥非常重要的作用，因此我们将为它们赋予一个专门的名称。

2.1.13 定义。 设 $(M, \xi = \ker \alpha)$ 是一个接触流形，令 X 为 M 上的一个向量场，其（局部）流为 ψ_t （对于所有使得M 上的流有定义的 $t \in \mathbb{R}$ ）。

如果 X 满足流有定义的所有 t，且 $T\psi_t(\xi) = \xi$，则称其为一个接触向量场 （或称为 ξ 的无穷小自同构 ）（因此，该向量场保持接触结构）。

如果对所有使流有定义的 t 都有 $\psi_t^*\alpha = \alpha$ （因此该向量场保持接触形式），我们称 X 为严格接触向量场（或 α 的无穷小自同构）。

下面的命题为我们提供了一种简便的方法，可以“计算”给定的接触流形上的向量场是否为（严格）接触向量场。

[1]前提是你熟悉整体分析中的方法。

2.1.14 命题。 设 $(M, \xi = \ker \alpha)$ 是一个接触流形，并设 X 是 M 上的一个向量场。

i) X 是接触向量场，当且仅当存在一个光滑函数$\mu: M \to \mathbb{R}$，使得 $\mathcal{L}_X \alpha = \mu\alpha$，其中 $\mathcal{L}_X$ 是作用于 X的李导数。该条件不依赖于 α的选择。

ii) X 是严格接触向量场，当且仅当 $\mathcal{L}_X \alpha = 0$。

证明。 这一证明的思路归功于 [Geiges]。

i) 首先，让我们证明条件 $\mathcal{L}_X \alpha = \mu\alpha$ 与接触形式的选择无关。对于定义 ξ 的任意其他接触形式，都存在处处不为零的函数 λ，使得该接触形式等于 $\lambda\alpha$ （参见上面的注记）。我们有

$$\mathcal{L}_X(\lambda\alpha) = \mathcal{L}_X(\lambda)\alpha + \lambda\mathcal{L}_X(\alpha) = X(\lambda)\alpha + \lambda\mu\alpha = (X(\lambda) + \lambda\mu)\alpha.$$

由于 $\widetilde{\mu} = X(\lambda) + \lambda\mu$ 也是一个函数，我们已经证明了这种独立性（函数本身取决于接触形式，但存在某个函数这一事实并不取决于它）。

现在，假设 $T\psi_t(\xi) = \xi$，其中 ψ_t 是 X的（局部）流。这意味着，对于 t 的每个取值，都存在一个处处不为零的函数 λ_t，使得 $\psi_t^*\alpha = \lambda_t\alpha$。因此，

$$\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi_t^*\alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\lambda_t\alpha) = \mu\alpha,$$

其中 $\mu = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\lambda_t$。
另一方面，假设存在一个函数 μ，使得$\mathcal{L}_X\alpha = \mu\alpha$。这意味着[2]

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^*\alpha) = \psi_t^*(\mu\alpha) = \psi_t^*(\mu)\psi_t^*\alpha = (\mu \circ \psi_t)\psi_t^*\alpha, \tag{2.1}$$

其中我们利用了 $\psi_{t+t_0} = \psi_{t_0} \circ \psi_t$，因此可通过对 t 进行线性变换得出。

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(\psi_t^*\alpha) = \psi_{t_0}^*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi_t^*\alpha)\right) = \psi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X\alpha).$$

[2]我们在任意点处取导数，该点不一定是 $t = 0$。

将方程（2.1）视为一个微分方程，我们可以求解它，得到

$$\psi_t^*\alpha = \lambda_t\alpha$$

其中 λ_t 定义为

$$\lambda_t = \exp\left(\int_0^t (\mu\circ\psi_s)ds\right).$$

因此， X 是接触向量场。

ii) X 是严格接触向量场，当且仅当（ X 的流）保持接触形式 α。利用李导数的主要性质，这当且仅当 $\mathcal{L}_X\alpha = 0$。

□

2.1.15 例。设 (M,α) 为一个严格接触流形。根据 Car- tan 的魔法公式，有

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = d(\iota_{R_\alpha}\alpha) + \iota_{R_\alpha}d\alpha = d(\mathbb{1}) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

因此，与 α 相关的 Reeb向量场是一个严格接触向量场。

2.2 接触化与辛化

在本章的第二部分，我们将考虑一种方法，从一个 $2n$ 维辛流形构造一个维数为 $2n-1$ 的接触流形，这称为接触化。反过来，我们将讨论辛化的方法，它可以从一个 $(2n-1)$ 维接触流形构造一个维数为 $2n$ 的辛流形。最后，我们将看到一个命题，它联系了辛情形中的哈密顿流与接触情形中的 Reeb 流。

要从一个 $2n$ 维辛流形构造一个维数为 $2n-1$ 的接触流形，该辛流形上必须存在一种特殊类型的向量场。

2.2.1 定义。 设 (W,ω) 为辛流形。若向量场 Y on$W$ 满足 $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$，则称其为*Liouville* 向量场 。

注意，由于 ω 是闭的，根据嘉当魔公式，条件 $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$ 等价于 $d(\iota_Y\omega) = \omega$。

我们可以通过考虑一个特殊的超曲面，由带有 Liouville 向量场的辛流形构造出接触流形（超曲面是余维为 1 的子流形，也就是说，其维数比原辛流形低 1）。

2.2.2 命题。（接触化）设 (W, ω) 是一个带有 Liouville 向量场 Y 的辛流形。设 $S \subset W$ 是 W 的一个超曲面，且与 Y 横截（即 Y 处处不与 S 相切）。那么 $\alpha = \iota_Y \omega$ 是 S 上的接触形式，因此 (S, α) 是一个严格接触流形。与 Liouville 向量场横截的超曲面 S 称为接触型超曲面。

证明。 令 $\dim(W) = 2n$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 为某个量。我们可以计算得出。

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} &= (\iota_Y \omega) \wedge (d(\iota_Y \omega))^{n-1} \\ &= (\iota_Y \omega) \wedge \omega^{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \iota_Y(\omega^n) \end{aligned}$$

由于 (W, ω) 是辛流形，因此有 $\omega^n \neq 0$。由此可知，若将其限制到与 Y 横截的超曲面的切丛上，则有 $\iota_Y(\omega^n) \neq 0$。因此，$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ 在超曲面 S 上成立，所以 (S, α) 是严格接触流形。 □

下面的命题介绍了一种称为辛化的方法，可以用来从一个 $(2n-1)$ 维接触流形构造一个 a $2n$ 维辛流形。

2.2.3 命题。（辛化）设 $(M, \xi = \ker \alpha)$ 为一个 $(2n-1)$ 维接触流形。考虑带有 $\mathbb{R}$ 坐标 t 的流形 $\mathbb{R} \times M$，并令 $p\colon \mathbb{R} \times M \to M$ 为典范投影。则 $(\mathbb{R} \times M, d(e^t p^* \alpha))$ 是一个 $2n$ 维辛流形。

证明。 参见本章练习 11a。 □

在某些条件下，（来自辛几何的）哈密顿流与（来自接触几何的）Reeb 流经过重新参数化后相同。

2.2.4 命题。 设 (W, ω) 是一个辛流形，并考虑一个非常值光滑函数 $H : W \to \mathbb{R}$。设 $S \subset W$ 是 W 的一个余维 1 子流形，使得

i) S 是关于 W 上的 Liouville 向量场 Y 的接触型超曲面（其接触形式为 $\alpha = \iota_Y \omega$）。

ii) S 是函数 H 的水平集。

Reeb向量场 R_α 的流是 S上哈密顿向量场 X^H 的流的重新参数化。

证明。 见 [Geiges]。 □

2.3 习题

1. 设 M是光滑流形上的一个 1-形式。证明：当且仅当，ker α 是 M 上的 Frobenius 完全可积分布

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

2. 设 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。

(a) 证明

$$\alpha_n = \cos(nt)d\theta_1 + \sin(nt)d\theta_2$$

是 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$ 上的接触形式，其中 $(t,\ \theta_1,\ \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$。

(b) 描述接触形式 α_n 关于基 $\left\{ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial \theta_1},\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right\}$ 的 Reeb向量场 R_{α_n}。

3. 在 $\mathbb{R}^3$ 上赋予柱坐标 (r, θ, z)，并考虑集合

$$U = \{(r, \theta, z) | r > 0, 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) 证明

$$\alpha = \cos(r)dz + r\sin(r)d\theta$$

在 U 上定义了一个接触形式。

(b) 相对于基 $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$，描述接触形式 α 的 Reeb向量场 R_α。

(c) 设 X 是 (U, α) 上的一个接触向量场，其形式为

$$X = A\frac{\partial}{\partial r} + B\frac{\partial}{\partial \theta} + C\frac{\partial}{\partial z},$$

其中 $A, B, C \in \mathbb{R}$。那么 X 是一个严格接触向量场。

4. 每个严格接触流形都是可定向的吗？请给出证明或反例。

5. 设 (M, α) 是一个严格接触流形。证明 (M, α) 的 Reeb向量场 R_α 没有不动点。

6. 考虑赋有笛卡尔坐标 (x, y, z) 的 $\mathbb{R}^3$。此外，考虑 1-形式

$$\alpha = -ydx - ydy + 2dz$$

在 $\mathbb{R}^3$ 上。证明映射

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (-y, x + y, 2z)$$

是从 $(\mathbb{R}^3, \alpha_{st})$ 到 $(\mathbb{R}^3, \alpha)$ 的严格接触同胚，其中 α_{st} 是 $\mathbb{R}^3$ 上的标准接触形式。

7. 设 $\mathbb{R}^3$ 配备笛卡尔坐标 (x, y, z)。此外，考虑 $\alpha_{st} = dz + xdy$，即 $\mathbb{R}^3$ 上的标准接触形式。判断 $\mathbb{R}^3$ 上的下列向量场是否为接触向量场：

(a) $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$.
(b) $X_2 = -xe^y\frac{\partial}{\partial x} + e^y\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}$.
(c) $X_3 = \left(-xy\sin(z) - \cos(z) + \frac{2xy}{y^2+1}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \ln(y^2+1)\frac{\partial}{\partial y} + y\cos(z)\frac{\partial}{\partial z}$.

如果该向量场是接触向量场：判断它是否为严格接触向量场。

8. 设 (M, ω) 是一个辛流形。设 Y 是 M 上的向量场，其流 φ_t（不失一般性地假设对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义）满足

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_t^*\omega = e^t\omega.$$

证明 Y 是 (M, ω) 上的 Liouville 向量场。

9. 设 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$。考虑带有局部坐标 $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ 和标准辛形式 $\omega_{st} = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$ 的 $\mathbb{R}^{2n}$。

(a) 证明：

$$Y = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)$$

是（$\mathbb{R}^{2n}$，ω_{st}）上的 Liouville 向量场。

(b) 证明 $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是接触型超曲面，满足 wit h 相对于 Liouville 向量场 Y。（c）利用前面的习题在 $\mathbb{S}^{2n-1}$ 上构造一个接触形式。

10. 令 M 为任意光滑流形。考虑 M 上的黎曼度量 g。回顾一下，g 诱导出一个逐纤维同构

$$g^\flat : TM \to T^*M, v \mapsto g^\flat(v)$$

其定义为 $g^\flat(v)(w) = g_m(v, w)$，其中 $v, w \in T_mM$；其逆映射记为 $g^\#$：$T^*M \mapsto TM$。TM 上的度量 g 在 T^*M 上诱导出度量 g^*，定义如下

$$\forall m \in M, \forall \eta_1, \eta_2 \in T_m^*M : g_m^*(\eta_1, \eta_2) = g_m\left(g^\#(\eta_1)g^\#(\eta_2)\right).$$

我们将关于 的单位余切丛定义为

$$ST^*M = \bigcup_{m\in M} ST_m^*M$$

其中，对每个 $m \in M$，都有：

$$ST_m^*M = \{\eta \in T_m^*M | g_m^*(\eta, \eta) = 1\}.$$

设 λ 是 T^*M 上的刘维尔形式。回忆一下，$(T^*M, d\lambda)$ 是一个辛流形。

运用接触化技巧证明 (ST^*M, λ) 是一个接触流形。

11. 设 $(M, \xi = \ker \alpha)$ 是一个 $(2n-1)$ 维接触流形。考虑流形 $\mathbb{R}\times M$，其带有一个 $\mathbb{R}$ 坐标 t，并设 p：$\mathbb{R}\times M \to M$ 是典范投影。

(a) 证明

$$(\mathbb{R} \times M, d(e^t p^*\alpha))$$

是一个 $2n$ 维辛流形。

(b) 求一个

$$(\mathbb{R} \times M, d(e^t p^*\alpha))$$

使得其接触化（带有诱导接触形式）恰好为 (M, α)。

12. 接触化和辛化是否互为逆构造？也就是说，如果将这两种操作结合起来，最终得到的流形是否会与原来的流形相同（相差一个微分同胚）？请解释你的答案。

第3章

接触哈密顿量

在本课程中，我们一直研究辛流形（W， ω）上的特殊微分方程，即哈密顿方程。这类方程的形式为 $z' = X^f(z)$，其中 f 是 W 上的光滑函数，而 X^f 是 M 上的特殊向量场，称为哈密顿向量场（由公式 $\iota_{X^f}\omega = -df$ 定义）。本章将介绍接触流形上的一种特殊向量场，它将发挥哈密顿向量场的作用。此外，我们还将介绍接触流形上函数的一个括号，它将具有辛情形下泊松括号的有用动力学性质。不过，在此之前，我们需要先介绍一些术语。我们将综合 [Geiges], [Jovanovi´c]和 [Jovanovi´c & Jovanovi´c]中的结果。

3.1 接触哈密顿量

本章考虑一个（$2n+1$）维严格接触流形（M， α），其关联的接触结构为 $\xi = \ker \alpha$。由于 ξ 是 M 的余维一分布，且 R_α 不与 ξ相切，我们得到切丛的如下分解

$$TM = \xi \oplus \mathbb{R}R_\alpha.$$

ξ 中的元素称为水平向量场。因此，若 X 是 M上的向量场，我们可以写作

$$X = (\iota_X \alpha)R_\alpha + \widetilde{X},$$

$\widetilde{\ }$对应唯一的水平向量场 X （要验证这一点，可将 α 作用于等式两边）。在本文其余部分中，向量场的水平部分

$\sim X$ 将记作 X。类似地，我们可以通过取两个分量的湮灭子，将余切丛 T^*M 分解

$$T^*M = \xi^\circ \oplus (\mathbb{R}R_\alpha)^\circ.$$

注意，由于 ξ 的余维为 1，其湮灭子的维数为 1。特别地，我们有 $\xi^\circ = \mathbb{R}\alpha$。$(\mathbb{R}R_\alpha)^\circ$ 的元素（因此，满足 $\beta(R_\alpha) = 0$ 的 1-形式β ）称为 半基本形式。因此， M 上的每个微分1-形式 β 都可以写成

$$\beta = (\iota_{R_\alpha}\beta)\,\alpha + \widehat{\beta},$$

$\widehat{\ }$其中 β 是定义在 M 上的唯一半基本形式（要验证这一点，在 R_α中计算两边）。在这些笔记的其余部分，1-形式 β 的半基本部分将被$\widehat{\ }$记为 β.

现在我们可以考虑映射 $\alpha^\flat\colon\ X \mapsto -\iota_X d\alpha$ ，它将向量场映射为半基本形式。请注意，若将 $\alpha^\flat$ 限制在水平向量场上（即 ξ 中的向量场），则根据 $d\alpha|_\xi$ 的非退化性， $\alpha^\flat$ 是可逆的。其逆映射记为 $\alpha^\sharp$。

现在，我们能够定义接触哈密顿量。

3.1.1 定理。 设 (M, α) 为一个严格接触流形，满足 $\xi = \ker\alpha$。接触向量场（下文记为 X）与其上的光滑函数（下文记为 H）之间存在一一对应关系。这种对应关系由下式给出:

- $X \longrightarrow H_X = \alpha(X)$
- $H \longrightarrow X_H$，由 $\alpha(X_H) = H$和 $\iota_{X_H} d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH$ 定义。

证明。在证明一一对应关系之前，我们将证明第二个要点中的规则定义了唯一的接触向量场。首先，如果H 是 M上的光滑函数，我们有。

$$dH(R_\alpha)\alpha(R_\alpha) - dH(R_\alpha) = dH(R_\alpha) - dH(R_\alpha) = 0,$$

因此， $dH(R_\alpha)\alpha - dH$ 是一个半基本形式。因此，存在唯一的水平$\widetilde{\ }$向量场 $X_H = \alpha^\sharp(dH - dH(R_\alpha)\alpha)$，使得 $d\alpha(X_H, \cdot)$ $= dH(R_\alpha)\alpha - dH$。由于 $d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$，对于 M 上的任意光滑函数 f，我们还有

$$d\alpha(fR_\alpha + \widetilde{X_H}, \cdot) = dH(R_\alpha)\alpha - dH.$$

此外，由于 X_H 是水平的，我们还可得

$$\alpha(fR_\alpha + \widetilde{X_H}) = f\alpha(R_\alpha) + \alpha(\widetilde{X_H}) = f.$$

如果我们取 $f = H$，就构造出了同时满足这两个条件的向量场 $HR_\alpha + X_H$。根据上述讨论，这个向量场必定是唯一的。

利用嘉当魔公式，我们可以轻松证明 X_H 是接触向量场。

$$\mathcal{L}_{X_H}\alpha = d(\iota_{X_H}\alpha) + \iota_{X_H}d\alpha = dH + (dH(R_\alpha)\alpha - dH) = dH(R_\alpha)\alpha.$$

因此，根据命题 2.1.14，我们有 X_H 是一个接触向量场。

最后，我们必须证明给定的对应关系确实是一一对应关系。设 X 是 M 上的接触向量场。考虑相应的光滑函数 $H_X = \alpha(X)$。根据嘉当魔公式，我们有

$$dH_X + \iota_X d\alpha = d(\iota_X\alpha) + \iota_X d\alpha = \mathcal{L}_X\alpha = \mu\alpha,$$

对于某个光滑函数 $\mu : M \to \mathbb{R}$，因为 X 是一个接触向量场。如果我们将其应用于 R_α，则得到：

$$dH_X(R_\alpha) = (dH_X + \iota_X d\alpha)(R_\alpha) = \mu\alpha(R_\alpha) = \mu.$$

由于 $\mu = dH_X(R_\alpha)$，因此有 $\iota_X d\alpha = dH_X(R_\alpha)\alpha - dH_X$。又因为我们还知道 $\alpha(X) = H_X$，所以我们已经证明了 $X_{H_X} = X$。
设 $H : M \to \mathbb{R}$ a 光滑函数。根据定义，有 $\alpha(X_H) = H$，因此我们得到 $H_{X_H} = H$，证毕。 □

3.1.2 定义。 向量场 X_H 其中 H 是接触流形上的光滑函数，称为接触哈密顿向量场 或接触哈密顿量。相应的微分方程

$$z' = X_H(z)$$

称为接触哈密顿方程。

3.1.3 例。 设 (M, α) 为一个严格接触流形，并考虑常函数

$$\mathbb{1} : M \to \mathbb{R} : m \mapsto 1.$$

可以验证（因为 $d\mathbb{1} = 0$），$X_{\mathbb{1}} = R_\alpha$，其中 R_α 是与接触形式 α相关联的 Reeb向量场。

目前的接触哈密顿量定义是隐式的。然而，若使用同构 $\alpha^\sharp$，我们便可以将其明确写出。

3.1.4 推论。 设 (M, α) 为一个严格接触流形，且 H 是定义在 M 上的光滑函数。H 的接触哈密顿量等于

$$X_H = HR_\alpha + \alpha^\sharp(\widehat{dH}).$$

证明。 我们从定理 3.1.1 的证明中知道

$$X_H = HR_\alpha + \alpha^\sharp(dH - dH(R_\alpha)\alpha).$$

我们还知道，

$$dH = (\iota_{R_\alpha} dH)\alpha + \widehat{dH} = dH(R_\alpha)\alpha + \widehat{dH},$$

因此，我们得出：

$$X_H = HR_\alpha + \alpha^\sharp(\widehat{dH}).$$

□

3.1.5 注记。 如果我们将接触哈密顿量代入 $d\alpha$，然后再限制到接触结构 ξ 上，就会得到一个让我们联想到辛哈密顿向量场的结果（这并不令人意外，因为对于每个 $m \in M$，$(\xi_m, (d\alpha)_m)$ 都是一个辛向量空间）。事实上，我们得到的是

$$d\alpha(X_H, \cdot)|_\xi = dH(R_\alpha)\alpha|_\xi - dH|_\xi = -dH|_\xi.$$

3.1.6 注记。 一个关于记号的注记：根据上下文，应该可以清楚地判断我们讨论的是辛哈密顿量还是接触哈密顿量。不过，为了严谨起见，我们将使用记号 X^f 表示 f的辛哈密顿向量场。另一方面，我们将记作X_f 表示 f的接触哈密顿向量场。

现在我们来考虑泊松括号的接触版本，即雅可比括号。

3.1.7 定义。 设 $(M,\ \alpha)$ 为一个严格接触流形。我们将雅可比括号 $[\cdot,\cdot]$ 定义为

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : (f,g) \mapsto [f,g] = \alpha([X_f, X_g]),$$

其中 $[X_f, X_g]$ 是向量场 X_f和 X_g的标准李括号。

注意，由于 $\mathcal{L}_{[X_f,X_g]} = \mathcal{L}_{X_f} \circ \mathcal{L}_{X_g} - \mathcal{L}_{X_g} \circ \mathcal{L}_{X_f}$，根据命题 2.1.14 可知 $[X_f, X_g]$ 仍然是 M 上的接触向量场。因此，使用接触哈密顿对应以这种方式定义一个光滑函数是很自然的。

雅可比括号满足一些具有重要实际用途的代数性质。如前所述，它是泊松括号的接触版本，但二者也存在一些重要差异。下文中的证明在一定程度上具有代数性质，但为了完整起见，仍将给出这些证明。

3.1.8 命题。 设 (M, α) 是一个严格接触流形。设 $[\cdot,\cdot]$ 为 $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 上的雅可比括号。则 $(\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\ [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。

证明。 设 $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 并设 $\lambda \in \mathbb{R}$。首先，有$[\lambda f + g, h] = \alpha([X_{\lambda f+g}, X_h])$。从命题 3.1.1 中所述的对应关系很容易看出，$X_{\lambda f+g} = \lambda X_f + X_g$。因此我们有

$$[\lambda f+g, h] = \alpha([\lambda X_f+X_g, X_h]) = \lambda\alpha([X_f, X_h])+\alpha([X_g, X_h]) = \lambda[f, h]+[g, h].$$

现在，令 $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。成立的是

$$[f, g] = \alpha([X_f, X_g]) = -\alpha([X_g, X_f]) = -[g, f].$$

最后，为了证明雅可比恒等式，令 $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。我们首先注意到 $\alpha(X_{[g,h]}) = [g, h] = \alpha([X_g, X_h])$，并且由于 $X_{[g,h]}$ and$[X_g, X_h]$ 都是接触向量场，因此可得 $X_{[g,h]} = [X_g, X_h]$。于是

$$[f, [g, h]] = \alpha([X_f, X_{[g,h]}]) = \alpha([X_f, [X_g, X_h]]).$$

对 f, g 和 h 作循环置换，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha([X_f, [X_g, X_h]] + [X_g, [X_h, X_f]] + [X_h, [X_f, X_g]]) \\ &= \alpha([X_f, [X_g, X_h]]) + \alpha([X_g, [X_h, X_f]]) + \alpha([X_h, [X_f, X_g]]) \\ &= [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]], \end{aligned}$$

其中，我们在第一个等式中使用了向量场李括号的雅可比恒等式。这证明了雅可比括号满足雅可比恒等式，因此，$(\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})\ [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。 □

我们已经看到，接触流形上的接触向量场集合在向量场的李括号运算下是封闭的。记作

$$\mathcal{X}_{con}(M,\xi) = \{X | X \text{ is a contact vector field on } (M,\xi)\}$$

对于接触流形（M，ξ）。我们有（$\mathcal{X}_{con}(M,\ \xi)\ [\cdot,\cdot]$），其中 $[\cdot,\cdot]$ 向量场的李括号构成一个李代数。

3.1.9 命题。 设 (M,α) 为严格接触流形。映射

$$\Phi : (\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),[\cdot,\cdot]) \to (\mathcal{X}_{con}(M,\ker\alpha),[\cdot,\cdot]) : f \mapsto X_f$$

是一个李代数同构。

证明。我们已经知道，Φ 是 $\mathbb{R}$-向量空间之间的一个同构（显然，Φ 是 $\mathbb{R}$-线性的，并且它是双射，因为命题 3.1.1 给出的对应关系是一一对应的）。因此，剩下唯一需要证明的是，对于任意 f，$\Phi([f,g]) = [\Phi(f)\ \Phi(g)]$（$g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$），或者等价地，证明 $X_{[f,g]} = [X_f, X_g]$。回想一下，$X_{[f,g]}$ 和 $[X_f, X_g]$ 都是接触向量场，且满足 $\alpha(X_{[f,g]}) = [f,g] = \alpha([X_f, X_g])$。由于命题 3.1.1 中的对应关系是一一对应的，因此我们有 $X_{[f,g]} = [X_f, X_g]$，这正是我们需要证明的。

□

尽管雅可比括号是接触流形上光滑函数的李括号，但它不是泊松括号，因为它不满足莱布尼茨法则。在证明这一点之前，我们将给出雅可比括号的两种刻画，它们在应用中会经常用到。

3.1.10 命题。 设 (M,α) 为严格接触流形，并考虑$f,g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。则有

$$[f,g] = d\alpha(X_f, X_g) + fR_\alpha(g) - gR_\alpha(f).$$

证明。 根据微分几何／整体分析，我们知道

$$d\alpha(X_f, X_g) = (\mathcal{L}_{X_f}\alpha)(X_g) - (\mathcal{L}_{X_g}\alpha)(X_f) + \alpha([X_f, X_g]).$$

由于 $[f,g] = \alpha([X_f, X_g])$，且对于每个光滑

函数 h （我们在定理 3.1.1的证明中已经见过这一点），因此有

$$\begin{aligned}[f,g] &= d\alpha(X_f,X_g)+(\mathcal{L}_{X_g}\alpha)(X_f)-(\mathcal{L}_{X_f}\alpha)(X_g)\\ &= d\alpha(X_f,X_g)+(dg(R_\alpha)\alpha)(X_f)-(df(R_\alpha)\alpha)(X_g)\\ &= d\alpha(X_f,X_g)+R_\alpha(g)\alpha(X_f)-R_\alpha(f)\alpha(X_g)\\ &= d\alpha(X_f,X_g)+fR_\alpha(g)-gR_\alpha(f),\end{aligned}$$

这是我们想要证明的结论。 □

另一种实现方式由以下命题给出。

3.1.11 命题。 设 (M,α) 是一个严格接触流形，并考虑$f,g\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$。则有

$$[f,g]=X_f(g)-gR_\alpha(f)$$

证明。 回顾微分几何/整体分析中的结论

$$\iota_{[X_f,X_g]}=\mathcal{L}_{X_f}\iota_{X_g}-\iota_{X_g}\mathcal{L}_{X_f}.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}[f,g] &= \iota_{[X_f,X_g]}\alpha\\ &= \mathcal{L}_{X_f}\iota_{X_g}\alpha-\iota_{X_g}\mathcal{L}_{X_f}\alpha\\ &= \mathcal{L}_{X_f}g-\iota_{X_g}(df(R_\alpha)\alpha)\\ &= X_f(g)-df(R_\alpha)\alpha(X_g)\\ &= X_f(g)-gR_\alpha(f),\end{aligned}$$

至此，我们的证明完成。 □

现在我们终于可以证明，雅可比括号不满足莱布尼茨法则。

3.1.12 命题。 设 $(M,\ \alpha)$ 为严格接触流形，且 $f,\ f'$和 g 是 M 上的光滑函数。则有

$$[ff',g]=f[f',g]+f'[f,g]-ff'[\mathbb{1},g].$$

证明。 首先，我们将证明

$$X_{ff'} = fX_{f'} + f'X_f - ff'R_\alpha. \tag{3.1}$$

验证接触哈密顿量的第一个条件，我们发现：

$$\begin{aligned}\alpha(fX_{f'} + f'X_f - ff'R_\alpha) &= f\alpha(X_{f'}) + f'\alpha(X_f) - ff'\alpha(R_\alpha)\\ &= ff' + f'f - ff'\\ &= ff'.\end{aligned}$$

另一方面，我们将发现，对于第二个条件，

$$\begin{aligned}d\alpha(fX_{f'} + f'X_f - ff'R_\alpha, \cdot) &= d\alpha(fX_{f'} + f'X_f, \cdot)\\ &= fd\alpha(X_{f'}, \cdot) + f'd\alpha(X_f, \cdot)\\ &= f\left(df'(R_\alpha)\alpha - df'\right) + f'\left(df(R_\alpha)\alpha - df\right)\\ &= fR_\alpha(f')\alpha - fdf' + f'R_\alpha(f)\alpha - f'df\\ &= R_\alpha(ff')\alpha - d(ff'),\end{aligned}$$

其中我们使用了向量场的莱布尼茨法则，以及作用于 0-形式（即函数）的外微分的莱布尼茨法则。因此，我们证明了方程（3.1）。

现在，利用命题 3.1.11，我们得到

$$\begin{aligned}[ff', g] &= X_{ff'}(g) - gR_\alpha(ff')\\ &= fX_{f'}(g) + f'X_f(g) - ff'R_\alpha(g) - gR_\alpha(ff')\\ &= fX_{f'}(g) + f'X_f(g) - ff'R_\alpha(g) - g\left(fR_\alpha(f') + f'R_\alpha(f)\right)\\ &= f\left(X_{f'}(g) - gR_\alpha(f')\right) + f'\left(X_f(g) - gR_\alpha(f)\right) - ff'\left(X_{\mathbb{1}}(g) - gR_\alpha(\mathbb{1})\right)\\ &= f[f', g] + f'[f, g] - ff'[\mathbb{1}, g],\end{aligned}$$

其中我们用到了 $X_{\mathbb{1}} = R_\alpha$，以及 $R_\alpha(\mathbb{1}) = 0$。 □

因此，一般来说，雅可比括号并不是泊松括号。不过，本课程中我们关注泊松括号，主要是因为它所关联的动力学性质（特别是与第一积分有关的性质）。事实证明，如果我们只考虑 Reeb向量场的第一积分，雅可比括号就会满足这些有用的动力学性质！

设 $(M,\ \alpha)$ 为严格接触流形。我们将 Reeb向量场 R_α 的第一积分空间记为

$$\mathcal{C}^\infty_\alpha(M, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) |\ [\mathbb{1}, f] = R_\alpha(f) = 0\}.$$

3.1.13 命题。 设 $(M,\ \alpha)$ 为严格接触流形，并考虑 $f \in \mathcal{C}^\infty_\alpha(M,\ \mathbb{R})$。a) 若 $g \in \mathcal{C}^\infty_\alpha(M,\ \mathbb{R})$，则以下各项等价：i) g 是 f 的第一积分。ii) f 是 g 的第一积分。iii) $[f, g] = 0$。b) 对任意 $g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}^\infty_\alpha(M,\ \mathbb{R})$，如果 g_1 和 g_2 是 f 的第一积分，则 $[g_1, g_2]$ 也是。

证明。 参见本章习题 4。 □

3.2 习题

1. 给定以下严格接触流形之一（M， α）及向量场 X 在 M上，确定通过分解 $TM = \ker\ \alpha \oplus \mathbb{R}R_\alpha$ 与 X 相关联的唯一水平向量场 X：

(a)（$\mathbb{R}^3$， $dz + xdy$），其向量场为

$$X_1 = \sinh(x^2 + y)\frac{\partial}{\partial x} + 42\frac{\partial}{\partial y} - (z + xy^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

（b）（$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$， α_n）（见第 2 章习题 2），其向量场为

$$X_2 = e^{\cos\theta_1}\frac{\partial}{\partial t} - \ln\left(\sin^2(nt) + 1\right)\frac{\partial}{\partial \theta_2}.$$

（c）（U， α）（见第 3 章习题 2），其向量场为

$$X_3 = z\frac{\partial}{\partial r} + e^z\cos^2(r)\frac{\partial}{\partial \theta} + e^z r^2\frac{\partial}{\partial z}.$$

2. 给定以下严格接触流形之一（M， α）及 1-形式 β 在 M上，确定通过分解 $T^*M = (\ker\ \alpha)^\circ \oplus (\mathbb{R}R_\alpha)^\circ$ 与 β 相关联的唯一半基本形式 β：

(a)（$\mathbb{R}^3, dz + xdy$）与 1-形式

$$\beta_1 = (x^2 + y)dx + \frac{1}{z^2 + 1}dy + xyzdz.$$

(b) ($\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$， α_n)（参见第2 章的练习2），其 1-形式为

$$\beta_2 = \cos^3(\theta_2)dt + e^{\cos(nt)}\cos(nt)d\theta_1 + e^{\cos(nt)}\sin(nt)d\theta_2.$$

（c）（U， α）（见练习3 ，第2章），其 1-形式为

$$\beta_3 = zdr + (r + \cos(r)\sin(r))\,(r\sin(r)d\theta + \cos(r)dz)\,.$$

3. 设 H 是严格接触流形 (M, α) 上的光滑函数。接触哈密顿向量场 X_H 是严格接触向量场吗？如果是，请给出证明。如果不是，你能否找出关于 H 的一个条件，使得 X_H 是严格接触向量场?

4. 在本练习中，我们将证明雅可比括号的特殊动力学性质。考虑一个带有 Reeb向量场 R_α 的严格接触流形 (M, α)。

回顾一下，我们称 h on M 上的一个光滑函数是（不一定为接触）向量场 X 的第一积分，如果 $X(h) = 0$。此外，若 h 和 k 是 M 上的光滑函数，那么如果 h 是接触哈密顿量 X_k 的第一积分，则 h 是 k 的第一积分。

(a) 证明，对于 M 上的光滑函数 f，f 是 R_α 的第一积分，当且仅当 $[1, f] = 0$。(b) 设 f，$g \in \mathcal{C}^\infty_\alpha(M, \mathbb{R})$。证明以下命题等价：i) f 是 g 的第一积分。ii) g 是 f 的第一积分。iii) $[f, g] = 0$。(c) 设 f，g_1，$g_2 \in \mathcal{C}^\infty_\alpha(M, \mathbb{R})$。证明，若 g_1 和 g_2 是 f 的第一积分，则 $[g_1, g_2]$ 也是。

5. 设 (M, α) 是一个严格接触流形，并考虑与之关联的雅可比括号 $[\cdot, \cdot]$。是否存在一类非平凡函数，使得雅可比括号是泊松括号?

第4章

接触完全可积系统

在文献中，存在许多关于接触完全可积系统的定义，这些定义并不完全等价。在本讲义中，我们将介绍两种不同的形式体系。

第一种由 [Khesin & Tabachnikov]提出，其本质上具有很强的几何性。在这两种形式体系中，这一定义为何有用，直观上应该最为清楚。不过，它有两个很大的缺点：首先，它用到了高等微分几何中的一个非常困难的概念（但我们能够找到绕开它的方法）。其次，要将这个定义用于具体例子并不容易。

第二种形式体系由 [Jovanovi´c & Jovanovi´c]和 [Jovanovi´c] (不过 [Khesin & Tabachnikov] 也对此有所暗示）所建立，它将更接近辛几何中完全可积系统的概念。这种形式体系在应用中会更加有用。然而，它的一个缺点是只能用于严格接触流形。
在介绍这两种形式体系之前，我们先来看看一些与接触几何相关的新几何概念。

4.1 Legendrian 与余Legendrian叶状结构

在辛几何中，我们考察了辛流形的若干特殊子流形（各向同性子流形和拉格朗日子流形）。在接触几何中，也有类似的特殊子流形。

4.1.1 定义。 设 $(M,\ \xi)$ 是一个接触流形。若对于每个 $p \in L$，都有 $T_pL \subseteq \xi_p$，即分布 TL 是分布 $\xi|_L$ 的一部分，则称子流形 L （属于 M）为各向同性 。

这个定义看起来与辛几何中的各向同性子流形概念截然不同。不过，两者的关系如下。

4.1.2 命题。 设 (M,ξ) 为一个接触流形，且 L 是 M 的一个各向同性子流形。那么，对于每个 $p \in L$， T_pL 都是辛向量空间 $(\xi_p, d\alpha|_{\xi_p})$ 的一个各向同性子空间（其中 α 是一个在 p 附近局部定义 ξ 的接触形式）。

证明。 考虑自然嵌入 $i:\ L \hookrightarrow M$。设 $p \in L$ ，并设 α 是一个在 p 附近局部定义 ξ 的接触形式。由于 L 是一个各向同性子流形，因此对每个 $u \in T_pL$，都有 $\alpha_p(u) = 0$ 。我们可以将这一条件写为 $(i^*\alpha)_p = 0$。因此我们有

$$i^*d\alpha_p = d(i^*\alpha)_p = d(0) = 0.$$

这恰好意味着 T_pL 是辛向量空间 $(\xi_p, d\alpha|_{\xi_p})$ 的一个各向同性子空间；也就是说，对于每个 $u, v \in T_pL$，都有 $d\alpha_p(u, v) = 0$。 □

这个命题有一个重要推论：接触流形的各向同性子流形的维数是有界的。

4.1.3 推论。 设 (M,ξ) 是一个 $(2n+1)$ 维接触流形，且 L 是 M 的各向同性子流形。那么 $\dim(L) \leq n$。

证明。 设 $p \in L$ ，并设 α 为一个在 p 附近局部定义 ξ 的接触形式。根据前一个命题，我们知道 T_pL 是 $2n$ 维辛向量空间 $(\xi_p,\ \omega_p = d\alpha|_{\xi_p})$ 的一个各向同性子空间。若 $(T_pL)^\omega$ 是 ξ_p 中 T_pL 的辛补空间，则我们有 $T_pL \subseteq (T_pL)^\omega$ （这是表达各向同性的另一种方式），并且

$$\dim(T_pL) + \dim((T_pL)^\omega) = \dim(\xi_p) = 2n.$$

我们得出 $\dim(T_pL) \leq n$，因此 $\dim(L) \leq n$。 □

4.1.4 定义。 设 (M,ξ) 是一个 $(2n+1)$ 维接触流形。若子流形 L 是 M 的 $Legendrian$，则称其为 $Legendrian$，如果 L 是维数最大的各向同性子流形，因此 $\dim(L) = n$。

下文中，我们关注的是叶状结构，而不太关注子流形。回顾一下，若 M 是一个流形，则其上的（正则） k维叶状结构 $\mathcal{F}$ 是指M 上的一族两两不相交、非空、连通且浸入的 k维子流形，这些子流形的并集为 M （可能的坐标图还须满足额外条件；关于叶状结构的深入讨论，请参阅 [Lee] ）。这些子流形称为叶状结构的叶。如果并非所有子流形都 k维，则称 $\mathcal{F}$ 为奇异 k维叶状结构。除非另有说明，我们始终假设所讨论的是正则叶状结构，即使不明确指出也是如此。

4.1.5 例。考虑光滑流形 $\mathbb{R}^2$。 $\mathbb{R}^2$ 上的一个 1 维叶状结构的例子是由以下形式的子流形构成的一族:

$$\forall c \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = c\},$$

它是水平直线的集合。另一方面， $\mathbb{R}^2$ 上的一个奇异一维叶状结构例子是形如的子流形集合（其中我们使用极坐标）

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : \{re^{i\theta} | r = a, \theta \in [0, 2\pi[\},$$

它是一个由半径为 a 的同心圆构成的集合。如果 $a = 0$，那么我们就只有原点，它是 $\mathbb{R}^2$ 的一个 0 维子流形。
为了定义接触完全可积系统，我们需要介绍以下特殊类型的叶状结构。

4.1.6 定义。 设 (M,ξ) 为一个 $(2n+1)$ 维接触流形。若其上的一个 $(n+1)$ 维叶状结构 $\mathcal{F}$ 满足，则称其为一个 $co\text{-}Legendrian$ 叶状结构。

i) $\mathcal{F}$ 与 ξ横截，即 ξ 不与 $\mathcal{F}$ 相切（更准确地说，不与 $\mathcal{F}$的任何叶相切）。

ii) $T\mathcal{F} \cap \xi$是一个可积分布（更准确地说，对于 $\mathcal{F}$ 的每个叶 F， $TF \cap \xi$ 都是一个可积分布），也就是说，对于每个 $x \in M$，都存在一条经过 x 的 $T\mathcal{F} \cap \xi$ 的唯一极大积分流形 N（因此，对于每个 $y \in N$，都有 $T_yN = (T\mathcal{F} \cap \xi)|_y$）。

4.1.7 定义。设 (M,ξ) 是一个 $(2n+1)$ 维接触流形。 M 上的一个 n 维叶状结构 $\mathcal{G}$ 称为 $Legendrian$ 叶状结构，若 $\mathcal{G}$ 的每个叶都是 (M,ξ) 的 Legendrian子流形。

在本节的其余部分中，我们将研究接触流形上余 Legendrian 叶状结构的一些重要性质。首先，我们将看到，可以将一个 Legendrian 叶状结构与一个余 Legendrian 叶状结构相关联。反过来，给定某个接触向量场的流，就可以从一个 Legendrian 叶状结构构造出一个余 Legendrian 叶状结构。

设 $\mathcal{F}$ 为（$2n+1$）维接触流形（M,ξ）上的一个余 Legendrian 叶状结构。由于 $T\mathcal{F}\cap\xi$ 是可积的，因此在 M 上存在一个由分布 $T\mathcal{F}\cap\xi$ 生成的叶状结构 $\mathcal{G}$。由于 $T\mathcal{G}=T\mathcal{F}\cap\xi\subset\xi$，我们有 $\mathcal{G}$ 是一个各向同性叶状结构（即其叶是各向同性子流形）。此外，由于 $\mathcal{F}$ 与 ξ 横截，我们知道 dim($T\mathcal{F}\cap\xi$) $=n$（换言之，比 $T\mathcal{F}$ 的维数少 1 维），因此我们还有 dim($\mathcal{G}$) $=n$。由此得出， $\mathcal{G}$ 是一个 Legendrian 叶状结构（即其叶是 Legendrian 子流形），我们称之为与余 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{F}$ 相关联的 ***Legendrian*** 叶状结构。注意， $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的每个叶上的一个余维一叶状结构。

反过来，设 (M,ξ) 是一个接触流形， $\mathcal{G}$ 是 (M,ξ) 上的一个 Legendrian 叶状结构， X 是 M 上的一个接触向量场，并且横截于 ξ （如果有 ξ =ker(α), 那么 α 的 Reeb向量场就是这样一个向量场的例子）。此外，假设 X 按叶保持 $\mathcal{G}$ （因此 X 的流会将 $\mathcal{G}$ 的同一叶上的两个点映射到 $\mathcal{G}$ 的同一叶上）。如果 $x\in M$ 位于 $\mathcal{G}$ 的叶 G_1 中，那么（由于 X 横截于 ξ）， X 的流将把 x 发送到 $\mathcal{G}$ 的另一片叶 G_2 （如果流的时间足够短）。 $\mathcal{G}$ 的叶在 X 所诱导的作用下的轨道将形成一个新的叶状结构 $\mathcal{F}$ ，其维数比 $\mathcal{G}$ 高 1。由于 X 横截于 ξ，并且由于 $T\mathcal{F}\cap\xi=T\mathcal{G}$，显然 $\mathcal{F}$ 是 (M,ξ) 上的一个余 Legendrian 叶状结构。事实上， [Khesin & Tabachnikov] 中的引理2.2 告诉我们，每个余 Legendrian 叶状结构在局部上都具有这种构造的形式。

4.1.8 命题。 如果 $\mathcal{F}$ 是接触流形 $(M,\ \xi)$ 上的余 Legendrian 叶状结构，那么 $\mathcal{F}$ 在局部接触同胚于上述构造的余 Legendrian 叶状结构。

证明。 我们将 [**Khesin & Tabachnikov**] 的证明作为主要参考。首先，我们定义[1] 一个与一般光滑流形 N相关的重要接触流形。

我们将 N 的接触元素（目前为止，这一概念与接触几何尚无任何关联）定义为 N 的切空间中的一个超平面。接触元素空间 $C(N)$ 由满足以下条件的有序对 $(n,\ V)$ 构成： $n \in N$，且 $V \subset T_nN$ 是 N 的一个接触元素。注意， $C(N)$ 可以被视为射影余切丛 $\mathbb{P}T^*N$，其定义如下：

$$\mathbb{P}T^*N = \{(n, \beta) | n \in N, \beta \in \mathbb{P}T_n^*N\},$$

其中，对于每个 $n \in N$， $\mathbb{P}T_n^*N$都是向量空间 T_n^*N 的射影化。事实上， T_nN 中的超平面定义为 T_n^*N 中某个元素的核，而该元素在相差一个非零标量的意义下唯一确定。因此，这种对应关系将切空间中的超平面与余切空间中的一个向量（相差一个缩放因子）联系起来，该向量在该超平面上取值为 0。

现在，考虑典范投影 $p\colon \mathbb{P}T^*N \to N$，它将每个接触元素映射到其基点。对于每个 $v \in \mathbb{P}T^*N$，我们将 $T_v(\mathbb{P}T^*N)$ 中的超平面 ξ_v 定义为

$$(Tp)_v(\xi_v) = V,$$

其中 V 是与 v 相关联的接触元素（作为超平面）。可以验证 $\xi\colon \mathbb{P}T^*N \to T(\mathbb{P}T^*N)\colon v \mapsto (v, \xi_v)$ 在 $\mathbb{P}T^*N$上定义了一个接触结构。注意， p的纤维（即基点固定的接触元素）构成 Legendrian 子流形(另见本章练习 3a ）。

现在，设 (M, ξ) 是一个接触流形， $\mathcal{F}$ 是 (M, ξ) 上的余 Legendrian 叶状结构，而 $\mathcal{G}$ 是与 $\mathcal{F}$ 相关联的 Legendrian叶状结构。根据 Darboux 定理， M 局部接触同胚于 $\mathbb{P}T^*N$，其中 N 是任意一个光滑流形（从现在起我们将固定它），因此不失一般性，假设 $M = \mathbb{P}T^*N$（注意 $\dim(M) = 2\dim(N) - 1$）。出于同样的原因，我们可以不失一般性地假设， $\mathcal{G}$ 的叶由 $p\colon \mathbb{P}T^*N \to N$ 的纤维给出。

$\mathcal{F}$ 在 p 下的投影将在 N中产生一个一维叶状结构，我们称之为 $\mathcal{L}$。因此， $\mathcal{F}$ 的一片叶不过是这样一组接触元：它们的基点都位于 $\mathcal{L}$的一片叶上。 $\mathcal{L}$ 的叶是微分同胚单参数群 Ψ^N 在N上的轨道，具体表示为

$$\Psi^N = \{\Psi_t^N | t \in \mathbb{R}\}.$$

[1]这个接触流形是最早被描述的接触流形之一，事实上，这也正是它被称为接触流形的原因。

注意，如果 ψ^N 是 N上的一个微分同胚，那么我们就能在 N的接触元素空间上得到一个自然的微分同胚 ψ^M，其定义为

$$\psi^M(n,V) = (\psi^N(n), (T\psi^N)_n(V)),$$

对于 $n \in N$ 和 V 中的一个接触元素 N 内的 T_nN。利用这个“提升”，微分同胚单参数群 Ψ^N 在 N 上诱导出一个接触变换单参数群 Ψ^M，它作用于 M，并保持叶状结构 $\mathcal{G}$ 不变（另见本章练习 3b ）。最后，如果我们将范围限制在 N 中那些不与 $\mathcal{L}$相切的接触元构成的开集上，这个单参数群Ψ^M 便可使我们从 $\mathcal{F}$ 构造出 $\mathcal{G}$，正如我们要证明的那样。 □

另一个更具技术性但同样至关重要的性质，在 [**Khesin & Tabachnikov**]第 2.3 节中有所描述。该性质指出，Legendrian叶状结构的叶可以赋予仿射结构（也就是说，这种叶状结构的叶在局部与仿射空间微分同胚）。

4.1.9 命题。 设 (M,ξ) 是一个 $(2n+1)$ 维接触流形，具有余 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{F}$ 及其关联的 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{G}$。 $\mathcal{G}$ 的叶可以赋予仿射结构。

证明。 证明思路如下：固定切空间中的所有接触元构成的空间与射影空间微分同胚 $\mathbb{RP}^n$。使用引理4.1.8中的术语，我们因此可以通过局部微分同胚，为 $p^{-1}(x)$ 的一个叶 $\mathcal{G}$ 赋予射影结构

$$\varphi : p^{-1}(x) \to \mathbb{RP}^n : y \mapsto (Tp)_y(\xi_v).$$

在 [**Khesin&Tabachnikov**], 的引理 2.4 中，已证明 φ 的像实际上包含于 $\mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1}$，后者是仿射空间 $\mathbb{A}^n$。因此φ 在 $\mathcal{G}$的各叶上定义了仿射结构。更多详情请参见[**Khesin& Tabachnikov**]。 □

Legendrian叶状结构的各叶上存在这种仿射结构，具有重要的拓扑和动力学后果。从拓扑角度看，Legendrian叶状结构的紧叶是 n维环面。

这种仿射结构存在所带来的动力学后果将在下一节讨论，实际上，它们将构成建立（第一种）接触完全可积性概念的基本基础。

4.2 接触完全可积系统

正如本章开篇所述，我们现在将考察接触完全可积性的两种可能概念：第一种在本质上更具几何性（由 [Khesin & Tabachnikov]提出），第二种则与我们在辛情形中见过的定义相近（主要由 [Jovanovi´c] 和 [Jovanovi´c & Jovanovi´c]提出）。两者在直观理解和应用方面各有优缺点。

设 $(W,\ \omega,\ h)$ 是辛情形下的一个完全可积系统。我们在关于辛几何的讲义第2章（尤其是第2.1节）中看到，该系统的李乌维尔叶层（其叶是 h 的纤维的连通分支）具有各向同性叶。特别是，正则叶（由正则点组成）是 $(W,\ \omega)$ 的拉格朗日子流形。另一种定义完全可积系统的方法，是在辛流形上考虑这样的奇异拉格朗日叶层（几乎所有叶都是正则叶），以及一个保持该叶层不变的向量场 X（因此常微分方程为 $z' = X(z)$）。此时，积分（局部）定义为这样一些函数：它们的等值集的交集构成该叶层的叶（可利用隐函数定理得到）。

在一个 $(2n+1)$ 维接触流形 (M, ξ) 上，我们也将以这种方式定义接触完全可积系统。也就是说，我们考虑一个接触向量场 X，它使一个（奇异[2]）余 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{F}$在叶方向上保持不变。由于 X 是接触向量场，关联的 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{F}$ 的一片叶 F 内的各叶，将在 X 的流作用下相互映射。此外，$\mathcal{G}$ 各叶上的仿射结构也会在流作用下保持不变。因此，关于动力学我们唯一还需要了解的，就是 $\mathcal{G}$ 的各叶如何相互映射。为此，我们需要考察一维商空间 $F/\mathcal{G}$ 上的动力学。

在一维流形 L 上，一个自然的可积性概念是存在一个不变1-形式 β，定义在 L 上。事实上，β 是 L 上的闭1-形式（它是最高次形式）。因此，根据庞加莱引理，β 在局部可由一个恰当1-形式 df 描述，该形式对应于 L 上一个称为第一积分的函数 f。

综合以上所有见解，我们将首先定义一种完全可积接触

[2]下文将重点讨论正则点，这些点应当在流形中构成一个开且稠密的子空间。

流形（一种包含叶状结构的纯几何构造），然后将接触完全可积系统定义为满足某些性质的接触向量场。

4.2.1 定义。 三元组 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 称为 $(2n+1)$ 维完全可积接触流形，如果：

- (M, ξ) 是一个 $(2n+1)$ 维接触流形，
- $\mathcal{F}$ 是 (M, ξ) 上的余 Legendrian 叶状结构，
- 对于 $\mathcal{F}$ 中的每个叶 F，相应的 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{G}|_F$ 都具有整体不变横截光滑 1-形式。

设 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 是一个完全可积接触流形。如果向量场 X 定义在 M 上，且满足以下条件，则称其为 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 上的接触完全可积系统：

- X 是 (M, ξ) 上的接触向量场。
- X 与余 Legendrian 叶状结构 $\mathcal{F}$ 相切（因此它保持 $\mathcal{F}$ 叶不变）。
- X 保持整体不变横截光滑 1-形式。

整体不变横截光滑 1-形式这一概念，属于高等微分几何中的技术性内容[3]。从本质上说，这些条件确保 1-形式能够下降为 1 维商空间 $F/\mathcal{G}$上的 1-形式。更多详情请参阅 [**Khesin & Tabachnikov**]及其中的参考文献。

幸运的是，如果读者愿意，可以完全忽略这些技术细节。事实上，[**Khesin& Tabachnikov**] 所述的一种刻画（稍作调整后）重新表述了上述定义，将技术细节隐藏在背景之中。

[3]整体在某种意义上是单值化的推广；我们将在辛几何讲义的末尾讨论半环面系统时遇到单值化。

4.2.2 定理。三元组 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 是一个$(2n+1)$维完全可积接触流形，当且仅当：

- (M, ξ) 是一个$(2n+1)$维接触流形，
- $\mathcal{F}$ 是(M, ξ)上的余 *Legendrian* 叶状结构，
- 存在一个接触形式 α 在 M 上，使得（局部地） $\xi = \ker(\alpha)$ ，且*Reeb*向量场 R_α 与 $\mathcal{F}$相切。

如上所述，接触形式 α 称为 M 上的接触形式，它定义了完全可积接触流形 $(M, \xi, \mathcal{F})$。

设$(M, \xi, \mathcal{F})$ 为一个完全可积接触流形，其定义接触形式为 α。流形 M 上的向量场 X 是$(M, \xi, \mathcal{F})$ 上的接触完全可积系统，当且仅当

- X 与余 *Legendrian* 叶状结构 $\mathcal{F}$相切。
- X 是相对于 α的严格接触向量场。

证明。 这一结果是 [Khesin&Tabachnikov]中的主要论题之一。 □

若 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 是一个定义接触形式为 α的完全可积接触流形，那么将 α 限制在 $\mathcal{F}$ 的一片叶上，就会定义出整体不变横截光滑测度。这种刻画应该更容易理解（你不需要掌握高等微分几何）。然而，与原始定义相比，这种表述的缺点是其背后的直观含义不那么明晰（这也是我们选择按此顺序介绍它的原因）。

接触情形下还有第二种完全可积性的概念（实际上还有更多概念，各有优缺点，但我们只讨论两种），由 [Jovanovi´c]和[Jovanovi´c & Jovanovi´c][4]提出。此定义仅适用于严格接触流形（M， α）。

[4]他们甚至引入了非交换接触完全可积性，而我们的定义是它的一个特例。

4.2.3 定义。设 $(M,\ \alpha)$ 是一个 $(2n+1)$ 维严格接触流形，并考虑微分方程

$$z' = X(z)$$

对于接触向量场 X。如果存在光滑函数 $f_1,\ \cdots,\ f_n$ 定义在 M 上，使得该方程称为接触完全可积。

- f_i是 X 对于 $i=1$的第一积分，$\cdots$，n（即 $X(f_i) = 0$).
- 这些函数两两之间关于雅可比括号对易。

$$[f_i, f_j] = 0 \qquad \text{for } i = 1, \cdots, n \text{ and } j = 1, \cdots, n.$$

- 这些 1-形式 $df_1, \cdots, df_n$几乎处处线性无关。
- $\alpha(X) = f_1$ （因此 X 是 f_1的接触哈密顿量）或 $\alpha(X) = 1$ （因此 $X = R_\alpha$)。
- 函数 $f_1, \cdots, f_n$将与常函数 $\mathbb{1}$对易
  关于雅可比括号

$$[\mathbb{1}, f_i] = 0 \qquad \text{for } i = 1, \cdots, n.$$

在本章余下部分，我们将说明接触完全可积性的两种概念（或多或少）是等价的。我们将在一个严格接触流形上进行讨论。

考虑定义完全可积接触流形 $(M, \xi = \ker\ \alpha, \mathcal{F})$ 的 $(2n+1)$ 维流形 M 上的（整体）接触形式 α。设 X 是 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 上的一个接触完全可积系统。利用隐函数定理，存在（局部定义，但最后可以将它们拼接起来的） n 个函数 $f_1, \cdots, f_n$，使得 $\mathcal{F}$ 的叶由 $f_1, \cdots, f_n$ 的等值集的交集给出。由于 X 与 $\mathcal{F}$ 相切，因此 $f_1, \cdots, f_n$ 是 X 的第一积分（你能看出原因吗？）。现在我们将证明一系列引理，以便说明该系统在定义 4.2.3 的意义下是接触完全可积的。

4.2.4 引理。设 f 是 $\mathcal{F}$ 的第一积分（因此 f 在 $\mathcal{F}$ 的叶上为常数）。则 X_f 与 $\mathcal{F}$ 相切。

证明。设 f 是 $\mathcal{F}$ 的第一积分， $\mathcal{G}$ 是与 $\mathcal{F}$ 相关联的 Legendrian 叶状结构。任取 $w \in T\mathcal{G}$。则

$$d\alpha(X_f, w) = df(R_\alpha)\alpha(w) - df(w).$$

由于 $T\mathcal{G} \subset \xi$，我们有 $\alpha(w) = 0$。由于 f 是 $\mathcal{F}$ 的第一积分，且由于 $w \in T\mathcal{F}$， $\widetilde{\ }$，因此有 $df(w) = 0$。因此， $d\alpha(X_f, w) = d\alpha(X_f, w) = 0$，所以 X_f 属于 ξ 中 $T\mathcal{G}$ 的辛补空间。然而，由于 $\mathcal{G}$ 是 Legendrian，这意味着（通过维数计数） $X_f \in T\mathcal{G}$。又由于 $R_\alpha \in T\mathcal{F}$ 也成立，我们得出结论：

$$X_f = fR_\alpha + \widetilde{X_f} \in T\mathcal{F}.$$

这恰好意味着 X_f 与 $\mathcal{F}$相切。 □

4.2.5 引理。考虑上述情形。函数$f_1, \cdots, f_n$关于雅可比括号将两两对易。

证明。令 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$。成立 $df_i(R_\alpha) = df_j(R_\alpha) = 0$，因为$R_\alpha \in T\mathcal{F}$。因此我们得到

$$\begin{aligned} [f_i, f_j] &= d\alpha(X_{f_i}, X_{f_j}) + f_i R_\alpha(f_j) - f_j R_\alpha(f_i) \\ &= d\alpha(X_{f_i}, X_{f_j}) \\ &= d\alpha(\widetilde{X_{f_i}}, \widetilde{X_{f_j}}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是因为 $X_{f_i}, X_{f_j} \in T\mathcal{G}$（此处我们使用前面的引理），且 $\mathcal{G}$ 相对于 $(\xi, d\alpha|_\xi)$ 是各向同性的。 □

4.2.6 引理。考虑上述情况。函数f_1、$\cdots$、f_n将与常函数 $\mathbb{1}$ 关于雅可比括号对易。

证明。令 $i \in \{1, \cdots, n\}$。我们再次有 $df_i(R_\alpha) = 0$。因此，有

$$\begin{aligned} [\mathbb{1}, f_i] &= d\alpha(R_\alpha, X_{f_i}) + \mathbb{1}R_\alpha(f_i) - f_j R_\alpha(\mathbb{1}) \\ &= d\alpha(R_\alpha, X_{f_i}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此，我们完成了。 □

4.2.7 引理。 考虑上述描述的情形。可以得出df_1，$\cdots$，df_n（几乎处处）线性无关。

证明。 $\mathcal{F}$ 实际上是一个奇异余勒让德叶状结构，其中几乎所有点都位于 $\mathcal{F}$的一张维数为 $n+1$ 的叶上（但在前面的讨论中，我们忽略了这些奇异点，并为方便记号而假定每个点都是正则的）。考虑一张维数为 $n+1$ 的叶 F，并令 $x \in F$。由于 $f_1, \cdots, f_n$ 确定了 F，我们有

$$(T_x F)^\circ = \operatorname{span}\{(df_1)_x, \cdots, (df_n)_x\}.$$

此外，由于 $\dim((T_x F)^\circ) = \dim(M) - \dim(F) = n$，可知 $(df_1)_x, \cdots, (df_n)_x$ 线性无关。因此，$df_1, \cdots, df_n$ 几乎处处线性无关。

□

4.2.8 引理。 考虑上述情形。可知$R_\alpha, X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}$（几乎处处）线性无关。

证明。 考虑 $\mathcal{F}$ 的一张维数为 $n+1$的叶。根据前一个引理，$df_1, \cdots, df_n$ 在这张叶上线性无关。现在，令 $c_0, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$，使得

$$c_0 R_\alpha + \sum_{i=1}^{n} c_i X_{f_i} = 0 \tag{4.1}$$

如果我们在 $d\alpha$ 中计算这个向量，就得到这个 1-形式

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha(c_0 R_\alpha + \sum_{i=1}^{n} c_i X_{f_i}, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i d\alpha(X_{f_i}, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i (df_i(R_\alpha)\alpha - df_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} c_i df_i, \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了 R_α 与 $\mathcal{F}$相切。利用 df_1、$\cdots$、df_n 在叶上的线性无关性，我们得到 $c_i = 0$ 对于 i =1，$\cdots$，n。因此，等式（4.1）变为 $c_0 R_\alpha = 0$，所以 $c_0 = 0$。由此可得，R_α、X_{f_1}、$\cdots$、X_{f_n} 几乎处处线性无关。

□

4.2.9 推论。 考虑上述情形。向量场 R_α、X_{f_1}、$\cdots$、X_{f_n} 将张成叶状结构 $\mathcal{F}$。

证明。若 F 是 $\mathcal{F}$ 的正则叶（因此 $\dim(F) = n+1$），则R_α，X_{f_1}，$\cdots$，X_{f_n} 在 TF中线性无关，而 F 的切空间维数为 $n+1$，故结论成立。对于奇异叶，同样的论证也成立，但描述该叶的积分较少，因此张成切丛的向量场也较少。 □

4.2.10 引理。 考虑上述情形。若 X 不是 R_α的（缩放形式），则不失一般性，我们可以认为 $f_1 = \alpha(X)$。

证明。当且仅当 $\alpha(X)$是常函数时，X 是 R_α 的缩放形式。因此，$\alpha(X)$ 不是常函数。假设我们有上述积分 f_1，$\cdots$，f_n。利用嘉当魔公式以及 X 是相对于 α （等价地，相对于$\mathcal{L}_X\alpha = 0$）的严格接触向量场这一事实，可得

$$\begin{aligned} R_\alpha(\alpha(X)) &= d(\iota_X\alpha)(R_\alpha) \\ &= -(\iota_X d\alpha)(R_\alpha) + (\mathcal{L}_X\alpha)(R_\alpha) \\ &= -d\alpha(X, R_\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

如果 $i \in \{1, \cdots, n\}$，出于同样的原因（并且由于 $df_i(R_\alpha)$ 和$df_i(X)$ 均为 0），我们将发现

$$\begin{aligned} X_{f_i}(\alpha(X)) &= d(\iota_X\alpha)(X_{f_i}) \\ &= -(\iota_X d\alpha)(X_{f_i}) + (\mathcal{L}_X\alpha)(X_{f_i}) \\ &= -d\alpha(X, X_{f_i}) \\ &= d\alpha(X_{f_i}, X) \\ &= df_i(R_\alpha)\alpha(X) - df_i(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

这意味着 $\alpha(X)$ 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 的第一积分。由于它不是常值函数，我们知道 $d(\alpha(X)) \neq 0$，因此 $d(\alpha(X))$ 是叶的湮灭子中的一个非零元素。这意味着我们可以构造一个包含 $\alpha(X)$ 的叶的湮灭子基。这个基给出了其他第一积分，因此不失一般性，$f_1 = \alpha(X)$。 □

将这些引理放在一起，我们恰好得到常微分方程 $z' = X(z)$ 是接触完全可积的（其第一积分为 f_1、$\cdots$、f_n），如定义 4.2.3所述。

反过来，现在考虑一个 $(2n+1)$ 维严格接触流形 (M, α)（并记 $\xi = \ker \alpha$）。设 X 为一个接触向量场，且其关联的常微分方程关于 M 上的函数 $f_1, \cdots, f_n$ 完全可积接触。将叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶定义为函数 $f_1, \cdots, f_n$ 的水平集的交集。

4.2.11 引理。 考虑上述情形。与 (M, α) 相关联的 Reeb向量场 R_α 与叶状结构 $\mathcal{F}$ 相切。

证明。 设 F 为 $\mathcal{F}$ 的一片叶。根据叶状结构 $\mathcal{F}$ 的构造，我们知道 F 是函数 $f_1, \cdots, f_n$ 的某些水平集的交集。令$j \in \{1, \cdots, n\}$。由于函数 f_j 满足定义 4.2.3 中所述的条件，我们知道 $[\mathbb{1}, f_j] = 0$，这意味着 $R_\alpha(f_j) = 0$。若φ_t 是向量场 R_α 的局部流映射，则对每个 $z \in F$，都有

$$0 = R_\alpha(f_j)(z) = df_j|_z(R_\alpha(z)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_j\left(\varphi_t(z)\right).$$

因此， R_α 的流保持在 f_j的一个水平集上。由于这对每个 j都成立， R_α 的流将保持在这些函数的水平集的交集中，因此它将保持在 F中。因此， R_α 与 F相切。 □

4.2.12 引理。 考虑上述描述的情形。叶状结构 $\mathcal{F}$ 是 (M, ξ) 上的一个（奇异）余 Legendrian 叶状结构。

证明。 由于 $df_1, \cdots, df_n$ 几乎处处线性无关，因此 $\mathcal{F}$的一般叶是 $(n+1)$ 维的。从现在起，我们将在这样的一般叶 F 上进行讨论。接触哈密顿量 X_{f_i} 将与 f_j的水平集相切。事实上，若 φ_i 是 X_{f_i}的流，则 X_{f_i} 与 f_j 的水平集相切，当且仅当 $(f_j \circ \varphi_i)' = 0$。然而

$$(f_j \circ \varphi_i)' = df_j(X_{f_i}) = X_{f_i}(f_j).$$

由于 $[1, f_i] = [1, f_j] = 0$，根据命题 3.1.13 可知 $X_{f_i}(f_j) = 0$ 当且仅当 $[f_i, f_j] = 0$。由此可得 X_{f_i}与 F相切。此外，由于 R_α 与 F相切，我们有

$$\operatorname{span}(R_\alpha, X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}) \subseteq TF.$$

仿照引理 4.2.8的证明可得 R_α， X_{f_1}， $\cdots$， X_{f_n} 线性无关，因此上述包含关系两侧都是（$n+1$）维向量空间（在一点处取值时），由此可得

$$\operatorname{span}(R_\alpha, X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}) = TF.$$

现在，考虑分布 $TF \cap \xi$。由于 R_α 和 X_{f_i} 都属于 TF，因此 $\widetilde{\ }$ 可知，水平部分 X_{f_i} 属于 TF，所以 $X_{f_i} \in TF \cap \xi$。因此

$$\operatorname{span}(\widetilde{X_{f_1}}, \cdots, \widetilde{X_{f_n}}) \subseteq TF \cap \xi.$$

$\widetilde{\ }$ 一方面， X_{f_1}， $\cdots$， X_{f_n} 线性无关（因为 R_α， X_{f_1}， $\cdots$， X_{f_n} 也线性无关）。另一方面， $\mathcal{F}$ 与 ξ 横截（因为 $R_\alpha \in T\mathcal{F}$），所以 $\dim(TF \cap \xi) = n$。由此我们得出

$$\operatorname{span}(\widetilde{X_{f_1}}, \cdots, \widetilde{X_{f_n}}) = TF \cap \xi.$$

由 $[f_i, f_j] = 0$ 和 $[1, f_i] = 0$ 可知 $[X_{f_i}, X_{f_j}] = 0$ 和 $[R_\alpha, X_{f_i}] = 0$。因此，通过对向量场的李括号进行标准计算，我们得到

$$[\widetilde{X_{f_i}}, \widetilde{X_{f_j}}] = [X_{f_i} - f_i R_\alpha, X_{f_j} - f_j R_\alpha] = 0.$$

这意味着 $TF \cap \xi$ 是一个对合分布。因此，根据弗罗贝尼乌斯定理，它是一个可积分布。综合以上结果可知， $\mathcal{F}$ 是一个余 Legendrian 叶状结构。□

4.2.13 推论。 考虑上述情形。几乎处处有以下结论：

$$\operatorname{span}(R_\alpha, X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}) = T\mathcal{F}.$$

证明。 这一结果已在前一个引理的证明中得到证明。 □

4.2.14 推论。 考虑上述情形。向量场X 与 $\mathcal{F}$相切。

证明。 如果我们考虑定义 4.2.3中的第四个条件，我们发现$X \in \{X_{f_1}, R_\alpha\}$。因此，我们有

$$X \in \operatorname{span}(R_\alpha, X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}),$$

因此， X 与 $\mathcal{F}$ 相切。 □

4.2.15 引理。 考虑上述描述的情形。向量场 X 是相对于 α 的严格接触向量场。

证明。 再次，我们有 $X \in \{X_{f_1}, R_\alpha\}$。若 $X = R_\alpha$，则由例 2.1.15 可知结论成立。考虑 $X = X_{f_1}$ 的情形。利用嘉当魔公式，我们得到

$$\mathcal{L}_{X_{f_1}}\alpha = d(\alpha(X_{f_1})) + \iota_{X_{f_1}}d\alpha = df_1 + df_1(R_\alpha)\alpha - df_1 = df_1(R_\alpha)\alpha.$$

由于我们知道 $[1, f_1] = 0$，因此有 $\mathcal{L}_{X_{f_1}}\alpha = df_1(R_\alpha)\alpha = 0$。我们得出结论，$X_{f_1}$ 也是关于 α 的严格接触向量场。 □

如果现在将所有内容汇总起来，我们已经证明 X 在完全可积接触流形 $(M, \xi, \mathcal{F})$ 上定义了一个接触完全可积系统。

我们可以将以上讨论总结如下。

4.2.16 定理。 根据定义 *4.2.1* 和定理 *4.2.2* 的接触完全可积性，等价于根据定义 *4.2.3* 和定义 ??的 ***Reeb*** 型接触完全可积性。

我们将通过本节的习题了解一个具体的（非平凡）接触完全可积系统示例。

4.3 习题

1. 考虑赋予笛卡尔坐标 (x, y, z) 的 $\mathbb{R}^3$。此外，考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的标准接触形式 $\alpha_{st} = dz + xdy$。

(a) 求最大的开子集 $U \subset \mathbb{R}^3$，使得分布

$$\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

定义了一个流形 $(U, \alpha_{st}|_U)$ 上的余 Legendrian 叶状结构。

(b) 描述与该余 Legendrian 叶状结构相关联的 Legendrian 叶状结构。(c) 判断 $(U, \ker \alpha_{st}|_U, \mathcal{F}_1)$ 是否为完全可积接触流形。

2. 考虑赋予笛卡尔坐标 (x, y, z) 的 $\mathbb{R}^3$。此外，考虑 $\alpha_{st} = dz + xdy$，即 $\mathbb{R}^3$ 上的标准接触形式。

(a) 证明由以下（可积）分布定义的叶状结构

$$\mathcal{F}_2 = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

是 $(\mathbb{R}^3, \alpha_{st})$ 上的余 Legendrian 叶状结构。

(b) 描述与此余 Legendrian 叶状结构相关联的 Legendrian 叶状结构。(c) 证明 $(\mathbb{R}^3, \ker \alpha_{st}, \mathcal{F}_2)$ 是一个完全可积接触流形。(d) 求一个定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数 f，使得叶状结构 $\mathcal{F}_2$ 可以描述为 f 的等值集的集合。(e) 证明接触哈密顿向量场 X_f 是 $(\mathbb{R}^3, \ker \alpha_{st}, \mathcal{F}_2)$ 上的接触完全可积系统。

3. 在本练习中，我们将仔细考察命题4.1.8的证明。本练习的记号和背景将参照该证明。

(a) 证明 p 的纤维是 $\mathbb{P}T^*N$ 的 Legendrian 子流形。(b) 证明 N 上的微分同胚单参数群 Ψ^N 的提升会诱导出 M 上的接触同胚单参数群 Ψ^M，且保持叶状结构 $\mathcal{G}$ 不变（这意味着 $\mathcal{G}$ 的叶会映射到 $\mathcal{G}$ 的叶）。

4. 考虑流形 $\mathbb{C}^{n+1}$，它可以通过识别 $z_j = x_j + iy_j$ 与 $j = 0, \cdots, n$ 而与 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 等同。此外，考虑光滑函数

$$F(z, \overline{z}) = \sum_{j=0}^{n} |z_j|^2$$

在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上。因此，单位球面 $\mathbb{S}^{2n+1} = F^{-1}(1)$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的子集。现在，设 a_j 为正实数，其中 $j = 0, \cdots, n$ 并考虑 1-形式

$$\alpha = \frac{i}{8} \sum_{j=0}^{n} a_j (z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j).$$

可以证明（不必实际证明），$(\mathbb{S}^{2n+1}, \alpha)$ 是一个严格接触流形，其 Reeb向量场为

$$R_\alpha = 4i \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{a_j} \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right).$$

最后，我们还需要这些函数

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\} : f_j(z) = |z_j|^2$$

以及 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上由下式给出的向量场

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\} : Y_j = \frac{4i}{a_j} \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right).$$

(a) 证明对于每个 $j \in \{0, \cdots, n\}$，f_j 都是 R_α 的第一积分。

(b) 证明对于每个 $j \in \{0, \cdots, n\}$，Y_j 都与 $\mathbb{S}^{2n+1}$ 相切。

(c) 证明对于每个 $j \in \{0, \cdots, n\}$，Y_j 都是 f_j 的接触哈密顿向量场。

(d) 证明对于每个 j，函数 f_j 和 f_k 关于$(\mathbb{S}^{2n+1}, \alpha)$上的雅可比括号是对易的，$k \in \{0, \cdots, n\}$。

(e) 证明存在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个开稠密子集 U，使得在 U 上有

$$dF \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_n|_U \neq 0|_U.$$

由此可以得出（不必证明这一点）

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n|_{\mathbb{S}^{2n+1} \cap U} \neq 0|_{\mathbb{S}^{2n+1} \cap U}.$$

提示：使用极坐标 $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$。

(f) 证明方程

$$z' = R_\alpha(z)$$

在（$\mathbb{S}^{2n+1}$, α）上定义了一个接触完全可积系统，其第一积分为 f_1, $\cdots$, f_n，其含义见定义 4.2.3。

5. 说明为什么 Legendrian叶状结构的叶上存在仿射结构意味着该叶状结构的紧叶是环面。

6. 比较接触完全可积性的这一定义与辛情形下完全可积性的定义。特别讨论二者的相似之处与差异。

第5章

（半）局部方面

在本章中（相对而言篇幅较短），我们将研究接触完全可积性的一些局部（事实上甚至是半局部）方面。具体而言，我们将给出阿诺德-刘维尔定理的一个接触变体（由 [Jovanovi´c]提出），并讨论某些临界点邻域中的局部标准形（由[Miranda]提出）。从实质上说，本章与关于辛几何的讲义第二章相对应。本章的主要目标是让读者初步了解这些结果，但技术细节和证明请参阅所给出的文献（其篇幅与关于辛几何的讲义第2章中的证明大致相当）。本章将使用定义 4.2.3所给出的接触完全可积性概念。

与辛情形一样，阿诺尔德-刘维尔定理的接触版本包含拓扑学部分（在这一部分中，我们将描述某些水平集的紧致连通分支的拓扑结构）和动力学部分（在这一部分中，我们将引入某种作用-角变量，并看到上述等值集上的流是拟周期的）。

5.0.1 定理。 **(阿诺尔德-刘维尔)** 设 (M, α) 是一个 $(2n+1)$ 维严格接触流形，并假设微分方程

$$z' = X_f(z)$$

是接触完全可积的（按定义 *4.2.3*的意义），其第一积分为f_1，$\cdots$，f_n（特别地，有 $f = 1$ 或 $f = f_1$）。设 F是水平集的一个紧致连通分支

$$\{x \in M | f_i(x) = c_i \quad for\ i = 1, \cdots, n\}$$

在该分支上，有

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \neq 0.$$

有

a) F与$(n+1)$维环面 $\mathbb{T}^{n+1}$微分同胚。

b) 存在 F 的一个开邻域 $U \subset M$ 以及 U上的一个接触形式α，二者均在第一积分 f_j的哈密顿流下保持不变；并且存在一个微分同胚 $\varphi : U \to \mathbb{T}^{n+1} \times D$，其定义为

$$\forall m \in U : \varphi(m) = (\theta, y) = (\theta_0, \cdots, \theta_n, y_1, \cdots, y_n),$$

对于某个开集 $D \subset \mathbb{R}^n$，使得

i) 接触形式 α 采用了 $\mathbb{T}^{n+1} \times D$ 上如下接触形式 α_0 的形式：

$$\alpha_0 = (\varphi^{-1})^* \alpha = y_0 d\theta_0 + y_1 d\theta_1 + \cdots + y_n d\theta_n,$$

其中，y_0 是 $\mathbb{T}^{n+1} \times D$ 上仅依赖于 $y_1, \cdots y_n$.

ii) 接触哈密顿量 X_f 在不变环面（例如 F）上的流将是拟周期的。这意味着它具有以下形式。

$$\forall t \in \mathbb{R} : (\theta_0, \cdots, \theta_n) \mapsto (\theta_0 + t\omega_0, \cdots, \theta_n + t\omega_n),$$

其中，项 ω_0、$\cdots$、ω_n 称为频率，它们仅依赖于 y_1、$\cdots$、y_n。

证明。 该定理是定理 5。1 和定理 5。2 的直接推论，见 [Jovanović]。事实上，这些定理给出了一个更强的结论，即微分方程只需满足非交换接触完全可积即可。证明基于一个特殊“局部双纤维化”的构造。

□

我们将上述定理中所述的坐标 $(\theta,\ y)$ 称为接触作用-角变量。

5.0.2 问题。 比较定理 5.0.1 与辛情形下的阿诺德-刘维尔定理：最明显的相似之处和差异是什么？特别是，比较（辛）作用-角变量与接触作用-角变量的作用。也请考虑这两个定理的假设。

另一方面，我们可以考察接触完全可积系统在奇异点附近的行为。以下描述见于 [Miranda] ，据作者所知，这是迄今为止关于接触情形下奇异点附近行为的“最佳”结果。尽管这是目前最强的结果，但我们仍需作出一些额外假设，希望不久的将来能够将其推广。

考虑一个（$2n+1$）维严格接触流形（$M,\ \alpha$）。第一个假设是，我们考虑与Reeb向量场相关联的微分方程（这正是 $\alpha(X)=1$ 的情形）

$$z' = R_\alpha(z).$$

设该方程关于某些积分 $f_1,\cdots,f_n$ 接触完全可积。此外，我们作出以下假设：

i) Reeb向量场 R_α 是某个 $\mathbb{S}^1$-作用的无穷小生成元，即 Reeb 流是周期性的。

ii) 考虑矩阵 $(df_1,\cdots,df_n)$。将该矩阵的最小秩[1] 记为 k。设 $p\in M$ 是秩为 k 的点，并将由 $X_{f_1},\cdots,X_{f_n}$ 诱导的作用经过 p 的轨道记为 $\mathcal{O}$。我们假设 $\mathcal{O}$ 与一个（$k+1$）维环面 $\mathbb{T}^{k+1}$微分同胚。若$k<n$，则称该点为奇点。

[1]点的秩仍与辛情形相同。

iii) 我们假设积分 $f_1, \cdots, f_k$ 沿 $\mathcal{O}$正则。此外， $f_{k+1}, \cdots, f_n$ 的奇点在 Morse-Bott 意义下是非退化的。[2]

5.0.3 定理。 （局部标准形）考虑接触完全可积系统 $z' = R_\alpha(z)$ ，并采用上述附加假设和记号。在轨道 $\mathcal{O}$ 的一个（管状）邻域的有限覆盖中，我们可以找到坐标 $(\theta_0, \cdots, \theta_k, p_1, \cdots, p_k, x_1, y_1, \cdots, x_{n-k}, y_{n-k})$ ，其取值于 $\mathbb{T}^{k+1} \times U^k \times V^{2\,(n-k)}$ （其中 U^k 分别为 $V^{2\,(n-k)}$ 维圆盘），使得：

i）*Reeb*向量场在这些坐标下为 $R_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta_0}$。 —

ii）积分在这些坐标下具有特殊形式。对于前k 个积分，有

$$f_i = p_i \quad for\ i = 1, \cdots, k.$$

对于其他积分（即对于 $j = k+1$、 $\cdots$、 n），我们得到以下列表中的某一项：

a) 椭圆分量： $f_j = x_j^2 + y_j^2$，*b)* 双曲分量： $f_j = x_j y_j$，*c)* 焦点-焦点分量：这些分量对于 $k < j < n$ 总是成对出现（f_j， f_{j+1}），即

$$\begin{cases} f_j & = x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j \quad and \\ f_{j+1} & = x_j y_j + x_{j+1} y_{j+1} \end{cases}$$

iii) 在这些坐标中，接触形式可以写成

$$\alpha_0 = d\theta_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i d\theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-k} x_i dy_i - y_i dx_i.$$

这对$(\mathbb{T}^{k+1} \times U^k \times V^{2(n-k)}\, \alpha_0)$ 称为接触模型流形。

[2]如果奇异性只是一个点 q，那么这意味着 $df_j(q) = 0$ ，并且 Hessian矩阵$d^2 f_j(q)$ 对所有 $j = k+1$， $\cdots$， n 都是非退化的双线性型。如果临界点并非孤立，而是呈现为非零维子流形，则可以将这种非退化性概念推广。本文不再详述，感兴趣的读者可参阅相关文献（搜索词：Morse-Bott函数）。

证明。 参见定理 7。3。1，见 [Miranda]。 □

5.0.4 注记。 考虑 $k = n$ 这一特殊情形。由于 k 的极小性，这意味着 M 中的所有点相对于该可积系统都是正则的。在这种情况下，我们看到定理 5.0.1 和定理 5.0.3 的结果非常相似（将（θ， p）视为接触作用-角变量，则第一积分仅依赖于作用变量，且接触形式具有类似的形式），这正如预期的那样。

第六章

整体性质

在这一最后的章节中，我们将考察接触完全可积系统的一些全局性质。特别是，我们将介绍接触环面 G-流形（其中 G 是某个环面），它是辛几何中环面系统的接触版本。我们将介绍必要的概念，并以紧致连通接触环面 G-流形的分类定理作为结尾。这些结果归功于 [Lerman]。从整体上看，本章内容将与辛几何讲义的第3章一致。

尽管我们主要考虑的是环面作用，但在可能的情况下，我们将考虑一般的李群作用。有关李群（作用）的更多信息，请参阅关于辛几何的讲义。此外，本章中我们只考虑余定向接触流形。

6.1 接触动量映射

设 G 是一个李群，它通过微分同胚 φ_g^G 作用于流形 M（该流形不一定是接触流形）：$M \to M$，其中 $g \in G$。我们总是可以利用公式将这一作用提升到余切丛 T^*M 上。

$$G \times T^*M \to T^*M : (g, (m, \beta_m)) \mapsto \left(\varphi_g^G(m), ((\varphi_g^G)^{-1})^*(\beta_m)\right).$$

以下引理在接触情形中特别有用，因为它讨论了 1-形式。

6.1.1 引理。考虑一个流形 M，以及其上的余定向余维一分布 ζ（余定向为 ζ°_+）。设李群 G 在 M 上适当地作用，并且保持 ζ 及其余定向（特别是，G 在 T^*M 上的提升作用保持 ζ°_+）。那么存在一个定义在 M 上的 G-不变1-形式 β，使得 $\ker\beta = \zeta$，且 $\beta(M) \subset \zeta^\circ_+$。

证明。 参见引理 2。6，见 [Lerman]。证明基于一个平均化论证；根据我们决定在正则课程中做哪些习题，这一论证可能超出本讲义的范围。 □

6.1.2 注记。 如果 G 在保持 ξ 及其余定向不变的情况下，在接触流形 $(M, \xi = \ker\alpha)$ 上适当地作用，那么上述引理表明，我们总可以假设 α 是 G-不变的。由于环面的作用总是适当的，因此这将成为我们研究环面作用的有力工具。

当李群作用于流形并保持一个 1-形式不变时，与之相关联地存在一种自然的动量映射概念。

6.1.3 定义。 设 G 是一个李群，作用于流形 M（不一定是接触流形）上，并保持一个 1-形式 β。我们定义 β-动量映射 $\Psi_\beta : M \to \mathfrak{g}^*$，其中 $\mathfrak{g}^*$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶，如下：

$$\forall x \in M, \forall X \in \mathfrak{g} : \langle \Psi_\beta(x), X\rangle = \beta_x(X^\sharp(x)),$$

其中，$X^\sharp$ 是由 X 在 M 上诱导的作用的无穷小生成元，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是对偶配对。

现在考虑一个李群 G 在接触流形 (M, ξ) 上适当地作用，同时保持 ξ 及其余定向不变。根据前面的引理，存在一个 G-不变的接触形式 α，它定义了 ξ 及其余定向。乍看之下，将“接触动量映射”定义为α-动量映射 Ψ_α 似乎是合理的。然而，如果这样做，会遇到一些严重的问题。

事实上，我们一开始考虑的就是一个保持接触结构和余定向的作用。因此，我们希望接触动量映射只依赖于ξ 和 ξ°_+，而不依赖于 α。如果 f 是 M上的一个 G-不变光滑函数，那么$e^f\alpha$ 就是 M 上的一个 G-不变接触形式，它定义了 ξ 和 ξ°_+。然而，$\Psi_{e^f\alpha} = e^f\Psi_\alpha$，因此这一概念在很大程度上取决于所选的 G-不变

接触形式，而这正是我们不希望出现的。

幸运的是，还有另一种构造方法，它给出的动量映射仅取决于接触结构及其余定向。

6.1.4 定义。设 G 是一个李群，它作用于接触流形 (M, ξ) 上，并保持 ξ 及其余定向 ξ°_+。考虑将该作用提升到余切丛 T^*M 上（如本节开头所述），余切丛自然带有辛结构（考虑 T^*M上的刘维尔形式）。这个提升后的作用是哈密顿作用，其动量映射 $\Phi : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ 定义如下：

$$\forall q \in M, \forall p_q \in T^*_q M, \forall X \in \mathfrak{g} : \langle \Phi(q, p_q), X\rangle = \langle p_q, X^\sharp(q)\rangle,$$

其中，$X^\sharp$ 是由 X在 M 上诱导的作用的无穷小生成元。由于该作用保持余定向，我们可以将 Φ 限制到 ξ°_+上。**接触动量映射** 定义为该限制 $\Psi = \Phi|_{\xi^\circ_+} : \xi^\circ_+ \to \mathfrak{g}^*$。

6.1.5 注记。根据正则课程中习题的选取，我们可能尚未见过 T^*M上的刘维尔形式。它不过是余切丛上的一个特定 1-形式 λ。对于这个形式，$d\lambda$ 将是一个辛形式。对于这些讲义而言，λ 的精确定义并不重要：我们只需要动量映射 Φ的显式公式。更多细节请参阅相关文献（或正则课程的习题）。

这两个概念由以下命题联系起来，可通过直接计算验证。

6.1.6 命题。设余定向接触流形 (M, ξ) 具有余定向 ξ°_+。设李群 G 作用于 M，并保持 ξ 和 ξ°_+。假设存在一个 G-不变的接触形式 α，定义在 M 上，且满足 $\alpha(M) \subset \xi^\circ_+$，以及 $\ker \alpha = \xi$。那么，该作用的 α-动量映射 Ψ_α 与接触动量映射Ψ之间的关系为

$$\Psi \circ \alpha = \Psi_\alpha.$$

上述命题是我们可以将 Ψ 视为一个“通用”动量映射的原因之一。我们通过陈述一个 α-动量映射的以下性质来结束本节。

6.1.7 命题。 设 G 为一个李群，它作用于余定向接触流形(M,ξ)上，并保持 ξ 及其余定向不变。用映射 φ_g^G（其中 $g \in G$）表示这一作用。假设 α 是 M上的一个 G-不变接触形式，它定义了 ξ 及其余定向。令 Ψ_α 为 α-动量映射。

a) Ψ_α 关于 φ^G 和余伴随作用是等变的，即

$$\forall g \in G : \mathrm{Ad}_g^* \circ \Psi_\alpha = \Psi_\alpha \circ \varphi_g^G.$$

b) 考虑 φ^G 经过 $m \in M$ 的轨道 $\mathcal{O}(m)$。对于每个 $m \in \Psi_\alpha^{-1}(0)$，都有 $T_m\mathcal{O}(m)$ 是 $(\mathrm{Ker}(\alpha_m),(d\alpha)_m)$ 的一个各向同性子空间。

6.2 接触环面流形

现在，让我们考虑环面的作用。由于环面是紧致的，每个环面作用都是适当的。

6.2.1 定义。 设 (M,ξ) 是一个余定向接触流形，且 G 是一个环面。若 G 在 (M,ξ) 上的作用满足以下条件，则称其为完全可积：

- 该作用是有效的。
- 该作用保持 ξ 及其余定向。
- 2维$G =$维 $M+1$。

赋有环面 G 的完全可积作用的余定向接触流形称为接触环面 G流形。

以下引理使得我们能够将接触环面 G流形表示为某个三元组。

6.2.2 引理。 设余定向接触流形（M， ξ）上有环面 G 的完全可积作用。那么，0不在接触动量映射 Ψ的像中。

证明。 参见 [Lerman], 中的引理 2.12，该引理运用了切片表示。

□

现在，考虑一个余定向接触流形 (M, ξ)，其上有一个环面 G的完全可积作用。我们可以在李代数 $\mathfrak{g}$上固定一个内积，由此在对偶李代数 $\mathfrak{g}^*$上诱导出一个范数。根据引理 6.1.1，存在一个 G-不变接触形式 α'，定义在 M 上，使得 $\ker \alpha' = \xi$ 且 $\alpha'(M) \subset \xi^\circ_+$。根据命题 6.1.6 和引理 6.2.2，0 不属于 $\Psi_{\alpha'}$的像。因此，我们可以定义一个新的 G-不变接触形式 α，定义在 M 上，如下：

$$\forall x \in M : \alpha_x = \frac{1}{||\Psi_{\alpha'}(x)||}\alpha'_x,$$

使得 $\ker \alpha = \xi$仍然成立，并且 $\alpha(M) \subset \xi^\circ_+$，但我们还对每个 $x \in M$都有$||\Psi_\alpha(x)|| = 1$。这个特殊的接触形式 α 将被称为该接触托里克 G-流形的归一化接触形式。

根据本章的习题3，接触托里克 G-流形完全由三元组（M，α，Ψ_α）（其中 α 为归一化接触形式）确定。因此，从现在起，我们将接触托里克 G-流形记作这样的一个三元组。

最后，我们想陈述接触托里克 G-流形的一个分类定理。在此之前，我们需要确定哪些接触托里克G-流形应被视为本质上相同。

6.2.3 定义。 两个接触托里克 G-流形之间的同构（M, α, Ψ_α）和（$M', \alpha', \Psi_{\alpha'}$）是一个映射 φ： $M \to M'$，满足

- φ 是接触同胚。
- φ 保持余定向。
- φ是 G-等变的。

若存在这样的映射，我们称 $(M$， α， $\Psi_\alpha)$ 和 $(M'$， α'， $\Psi_{\alpha'})$ 同构。

6.2.4 注记。 α 和 α' 的归一化条件迫使每个这样的接触同胚 φ 实际上都是严格接触同胚。

以下几何概念将在分类定理中出现：

6.2.5 定义。 考虑一个带有李群 G作用的余定向接触流形 $(M,\ \xi)$。假设该作用保持接触结构及其余定向。令 Ψ为与该作用相关联的接触动量映射。动量锥 定义为集合

$$C(\Psi) = \Psi(\xi_+^\circ) \cup \{0\}.$$

特别地，如果 α 是一个 G不变的接触形式，它定义了 ξ 及其余定向，那么我们发现

$$C(\Psi) = \{t\Psi_\alpha(x) | x \in M, t \geq 0\}.$$

6.2.6 定义。设 G 是一个环面， $\mathfrak{g}^*$ 是其李代数的对偶。若存在有限个向量 $\{v_i\}$ ，属于整格 $\mathbb{Z}_G$ ，使得.....，则称子集 $C \subset \mathfrak{g}^*$ 为一个有理多面锥

$$C = \bigcap_i \{\eta \in \mathfrak{g}^* | \langle \eta, v_i \rangle \geq 0\}.$$

不失一般性，我们可以假设这个集合是极小的（若去掉一个向量 v_i，交集就会严格大于 C），且这些向量都是本原的（$tv_i \notin \mathbb{Z}_G$ 若 $0 < t < 1$，则较短的向量不属于 $\mathbb{Z}_G$）。

设 C 是一个有理多面锥，由 $\mathbb{Z}_G$中的向量 $\{v_i\}$ 定义。我们称 C 为一个良好的 有理多面锥，如果

- C 的内部非空。
- 考虑 C 的一个余维为 k 的面（对于 $0 < k < \dim G$）的线性张成。该空间（位于 $\mathfrak{g}$ 中）的湮灭子是原环面 G 的一个子环面 H 的李代数。
- 上述面（即对于面中的每个 η，满足 $\langle \eta, v_{i_j} \rangle = 0$ 的、来自 $\{v_i\}$ 的 k 不同向量 v_{i_j}）的法向量构成 $\mathbb{Z}$ 的整格 $\mathbb{Z}_H$ 的一个基 H。

6.2.7 例。考虑 $G = \mathbb{T}^2$，因此 $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^2$ 且 $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}^2$。我们定义

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是我们有集合

$$C = \{\eta \in \mathbb{R}^2 | \langle \eta, v_1 \rangle \geq 0, \langle \eta, v_2 \rangle \geq 0\}$$

是一个有理多面锥。直接验证可知，C 实际上是一个良有理多面锥。

分类中将出现以下特殊的流形类。

6.2.8 定义。将 $\mathbb{S}^3$ 视为 $\mathbb{C}^2$的一个子流形。设 $p, q \in \mathbb{Z}$ 为互质整数。考虑群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$在 $\mathbb{S}^3$上的（自由）作用，其生成元为旋转

$$\rho : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : (z_1, z_2) \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2).$$

所得的轨道空间 $\mathbb{S}^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 称为**透镜空间**，记作$L(p, q)$（注意，透镜空间由整数 (p, q) 确定）。

6.2.9 例。透镜空间的一些例子是

- $L(0,1) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
- $L(1,0) = \mathbb{S}^3$
- $L(2, 1) = \mathbb{RP}^3$

作为一个例子，我们来证明 $L(2,1) = \mathbb{RP}^3$。$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-作用在 $\mathbb{S}^3$（视为 $\mathbb{C}^2$ 的子流形）上是

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : (m, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{\frac{2\pi m i}{2}} z_1, e^{\frac{2\pi m i \cdot 1}{2}} z_2) = (e^{\pi m i} z_1, e^{\pi m i} z_2).$$

由于 m 只能是 0 或 1，因此点 (z_1, z_2) 在此作用下的轨道为$\{(z_1, z_2), (-z_1, -z_2)\}$。因此，轨道空间 $\mathbb{S}^3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$（恰好是透镜空间 $L(2,1)$）是 3-球面 $\mathbb{S}^3$，其中每个点 (z_1, z_2) 都与其对跖点 $(-z_1, -z_2)$ 等同。这是射影空间 $\mathbb{RP}^3$ 的一个著名模型。由此我们得出 $L(2,1) = \mathbb{RP}^3$。

现在我们终于可以陈述分类结果了。

6.2.10 定理。 ***(Lerman* 分类)** 紧致连通的接触环面 G-流形（在本定理中简称为 *c.c.c.t.* G-流形）(M, α, Ψ_α) 在环面 G 的作用下可按以下方式分类：

i) 设维数 $M = 3$，并假设 G-作用（带有 $G = \mathbb{T}^2$）是自由的。则 M 微分同胚于 $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$。接触形式 α 具有如下形式

$$\alpha = \cos(nt)d\theta_1 + \sin(nt)d\theta_2,$$

其中 $(t, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$ 且 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。

ii) 设维数 $M = 3$，并假设 G-作用（带有 $G = \mathbb{T}^2$）不是自由的。则 M 微分同胚于一个透镜空间。此外，作为一个 *c.c.c.t.* G-流形，三元组 (M, α, Ψ_α) 由两个有理数分类 r, q 使得 $0 \leq r < 1$ 且 $r < q$。

iii) 设维数 $M > 3$，并假设 G-作用是自由的。令 $d =$ 维数 $G - 1$。这表明 M 是 $\mathbb{S}^d$ 上的一个主 G 丛。此外，每一个 G 上的主 $\mathbb{S}^d$ 丛具有唯一的 G 不变接触结构这使该丛成为一个 *c.c.c.t.*。G 流形。

iv) 设维数 $M > 3$，并假设 G-作用不是自由的。在这种情况下，(M, α, Ψ_α) 的动量锥是一个良锥。另一方面，如果 $C \subset \mathfrak{g}^*$ 是一个良锥，则存在唯一的 *c.c.c.t.* G-流形 (M, α, Ψ_α)，其动量锥为 C。

证明。 参见定理 2。18，见 [Lerman], ，这是那篇论文的主要结果。概括而言，他首先对所谓的预各向同性嵌入的邻域进行分类。然后，他通过考察轨道空间的 Čech 上同调（其系数取自某个阿贝尔层），将这一分类推广到整体。 □

这个定理有 4 种不同的子情况，但核心是可能出现的情况不多。在第一种情况下，流形必须是环面，并且有可数多个接触形式能使其成为一个 c.c.c.t. G-流形（由 n 参数化）。在第二种情况下，流形必须是透镜空间，而且这种空间成为 c.c.c.t. G-流形的可能性也只有可数种（由 r 和 q 参数化）。在第三种情况下，存在一个我们尚未讨论过的微分几何概念[1], ，但可以证明，对于 dim $M > 5$，只有 1 个 c.c.c.t. G-流形；而对于 dim $M = 5$，there

[1]更多详情请参见课程《微分几何专题》。

是可数多个（即 $\mathbb{Z}^3$）。最后，第四种情形归结为对给定的锥进行 Delzant 构造，并将其限制在一个接触型超曲面上。

上述讨论表明，接触环面系统的世界具有相当强的刚性。因此，一个自然而然的问题是：是否存在一类比接触环面系统刚性更弱、但仍然易于分类的（接触）系统？特别是，我们想知道是否存在类似于接触半环面系统的概念。目前，这一概念尚未得到定义（更不用说分类了）。然而，此类系统的引入与分类已成为安特卫普大学分析学组正在开展的一项活跃研究工作。

6.3 Lerman构造

现在我们将重点讨论 Lerman 分类中的最后一种情形。在本节中，我们将看到如何从一个良锥构造出一个紧致连通的接触型环面G流形（前提是底层流形的维数严格大于 3）。其基本思路是，首先进行 Delzant 构造（可与辛几何讲义中的相关内容进行比较），随后将其限制在一个接触型超曲面上（见命题2.2.2）。我们将重点关注 [**Lerman**]的研究结果。

设环面 G 的维数为 $n \geq 3$，其李代数为 $\mathfrak{g}$。令 $\{v_j\}_{1\leq j\leq d}$为整格 $\mathbb{Z}_G$ 中的有限个向量，使得

$$C = \bigcap_{j=1}^{d} \{\eta \in \mathfrak{g}^* | \langle \eta, v_j \rangle \geq 0\}$$

是一个良有理多面锥。我们可以假设集合 $\{v_j\}_{1\leq j\leq d}$ 是极小的，且其中的元素都是本原的。
我们的首要目标是构造一个辛流形（W， ω），并赋予其环面 G 的哈密顿作用（其意义见辛几何讲义中的定义），使得 C 是相应动量映射的像。为实现这一目标，我们将遵循 Delzant 的构造。

考虑 $\mathbb{R}^d$ 的标准基 $\{e_j\}_{1\leq j\leq d}$。我们定义一个线性映射 τ，将 e_k 映射到 v_k，即】【。

$$\tau : \mathbb{R}^d \to \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{d} a_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{d} a_j v_j.$$

如果我们改为在 $\mathbb{Z}$ 上进行线性延拓，就会得到一个定义良好的映射 $\tau_{\mathbb{Z}}$：$\mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}_G \simeq \mathbb{Z}^n$ （因为 $\tau(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{Z}_G$）。因此，映射 τ 下降到商空间：

$$\widetilde{\tau} : \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathfrak{g}/\mathbb{Z}_G \simeq G \simeq \mathbb{T}^n : \widetilde{a} \mapsto \widetilde{\tau(a)},$$

这里采用如下约定：若 $u \in \mathbb{R}^m$，则 $\widetilde{u} \in \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \simeq \mathbb{T}^m$ 是 u 在自然投影映射下的像。我们将 $\widetilde{\tau}$ 的核记作 N，于是

$$N = \left\{ \widetilde{a} \in \mathbb{T}^d | \sum_{j=1}^{d} a_j v_j \in \mathbb{Z}_G \right\}.$$

可以直接验证， N 是 $\mathbb{T}^d$的一个紧致阿贝尔子群，因此包含单位元的 N 的连通分支本身就是一个环面。将 N 的李代数记作 $\mathfrak{n}$，它等于 τ的核。此外，定义包含映射 $i : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}^d$，后面会用到它。与辛几何讲义中的做法相同，现在考虑 $\left(\mathbb{C}^d, \omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{d} dz_k \wedge dz_k\right)$上的标准 $\mathbb{T}^d$作用 φ，定义如下：

$$\varphi : \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d : \left((\widetilde{t_1}, \cdots, \widetilde{t_d}), (z_1 \cdots, z_d)\right) \to \left(e^{2\pi i t_1} z_1, \cdots, e^{2\pi i t_d} z_d\right).$$

可以通过练习证明，这个作用是哈密顿作用，其动量映射为

$$h : \mathbb{C}^d \to \mathrm{Lie}\left(\mathbb{T}^d\right)^* \simeq \mathbb{R}^d : (z_1, \cdots, z_d) \mapsto \pi \sum_{j=1}^{d} |z_j|^2 e_j^*,$$

其中 $\left\{e_j^*\right\}_{1 \le j \le d}$是与 $\{e_j\}_{1 \le j \le d}$对偶的李 $\left(\mathbb{T}^d\right)^*$的基。现在定义映射

$$\widetilde{h} = i^* \circ h : \mathbb{C}^d \to \mathfrak{n}^* \simeq \mathbb{R}^{d-n}.$$

为了取 Marsden-Weinstein商，我们需要检查以下技术性质。

6.3.1 引理。 由 φ 诱导的李群 N 在 $\mathbb{C}^d$ 上的作用使 $\widetilde{}$ 水平集 $h^{-1}(0)$ 保持不变。

$\widetilde{}$证明。 我们将证明， $\mathbb{T}^d$ 的作用将使 $h^{-1}(0)$保持不变，因此对 N必然成立。设 $\widetilde{t} = (\widetilde{t_1}, \cdots, \widetilde{t_d}) \in \mathbb{T}^d$和 $z = (z_1 \cdots, z_d) \in \widetilde{h}^{-1}(0)$。它

成立的是

$$\begin{aligned}\widetilde{h}\left(\varphi(\widetilde{t},z)\right) &= i^*\left(h\left(\varphi(\widetilde{t},z)\right)\right)\\ &= i^*\left(h\left(e^{2\pi i t_1}z_1,\cdots,e^{2\pi i t_d}z_d\right)\right)\\ &= i^*\left(\pi\sum_{j=1}^{d}|e^{2\pi i t_j}z_j|^2 e_j^*\right)\\ &= i^*\left(\pi\sum_{j=1}^{d}|z_j|^2 e_j^*\right)\\ &= i^*\left(h(z)\right)\\ &= \widetilde{h}(z)\\ &= 0\end{aligned}$$

因此，$\varphi(\widetilde{t},\ z) \in \widetilde{h}^{-1}(0)$。 □

~因此，我们有 N 在 $h^{-1}(0)$上的作用。

~**6.3.2 引理**。 N在 $h^{-1}(0)$上的作用是适当的。

证明。 这是显然的，因为 N 是紧李群，而紧李群在光滑流形上的每个作用都是适当的。 □

~**6.3.3 引理**。 $h^{-1}(0) = h^{-1}(\tau^*(C))$。

证明。 由于序列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{R}^d \xrightarrow{\ \tau\ } \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

是一个短正合序列（这里我们用到 C 是一个良有理多面锥），所以“对偶”序列也是如此

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\ \tau^*\ } (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{\ i^*\ } \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0.$$

因此 $(i^*)^{-1}(0) = \tau^*(\mathfrak{g}^*)$。因此，

$$\widetilde{h}^{-1}(0) = h^{-1}\left((i^*)^{-1}(0)\cap h(\mathbb{C}^d)\right) = h^{-1}\left(\tau^*(\mathfrak{g}^*)\cap h(\mathbb{C}^d)\right).$$

此外，由于

$$h\left(\mathbb{C}^d\right)=\left\{\eta\in(\mathbb{R}^d)^*|\langle\eta,e_j\rangle\geq 0 \text{ for } 1\leq j\leq d\right\},$$

我们可以发现

$$\begin{aligned}\tau^*(\mathfrak{g}^*)\cap h(\mathbb{C}^d) &= \{\tau^*(\eta)|\eta\in\mathfrak{g}^* \text{ and } \langle\tau^*(\eta),e_j\rangle\geq 0 \text{ for } 1\leq j\leq d\}\\ &= \{\tau^*(\eta)|\eta\in\mathfrak{g}^* \text{ and } \langle\eta,\tau(e_j)\rangle\geq 0 \text{ for } 1\leq j\leq d\}\\ &= \{\tau^*(\eta)|\eta\in\mathfrak{g}^* \text{ and } \langle\eta,v_j\rangle\geq 0 \text{ for } 1\leq j\leq d\}\\ &= \{\tau^*(\eta)|\eta\in C\}\\ &= \tau^*\left(C\right).\end{aligned}$$

~最终可以得出， $h^{-1}(0)=h^{-1}\left(\tau^*\left(C\right)\right)$。 □

~这一结果可用于证明 N 在 $h^{-1}(0)\setminus\{0\}$ 上的作用是自由的。

~**6.3.4 引理**。 设 $z\in h^{-1}(0)\setminus\{0\}$。则相对于 N 在 $h^{-1}(0)\setminus\{0\}$ 上的作用， N_z of$_{\sim z}$ 的各向同性群是平凡的，即 $N_z=\{0\}$。

证明。 考虑相对于 $\mathbb{T}^d$-作用~在 $h^{-1}(0)\setminus\{0\}$上的 z 的各向同性群 $(\mathbb{T}^d)_z$ 。我们有

$$\begin{aligned}N_z &= N\cap(\mathbb{T}^d)_z\\ &= \left\{\widetilde{a}\in\mathbb{T}^d|\sum_{j=1}^d a_jv_j\in\mathbb{Z}_G\right\}\cap\left\{\widetilde{a}\in\mathbb{T}^d|a_j\in\mathbb{Z} \text{ if } j\in\{1,\cdots,d\} \text{ such that } z_j\neq 0\right\}\\ &= \left\{\widetilde{a}\in\mathbb{T}^d|\sum_{j\in J_z}a_jv_j\in\mathbb{Z}_G \text{ and } a_k\in\mathbb{Z} \text{ if } k\notin J_z\right\},\end{aligned}$$

其中我们将 J_z 定义为

$$J_z=\{j\in\{1,\cdots,d\}\,|z_j=0\}\,.$$

然而，利用引理 6.3，存在一个 $\eta\in C$ 使得 $h(z)=\tau^*(\eta)$ 。这意味着 $z_j=0$ 当且仅当

$$0=\pi|z_j|^2=\langle h(z),e_j\rangle=\langle\tau^*(\eta),e_j\rangle=\langle\eta,\tau(e_j)\rangle=\langle\eta,v_j\rangle.$$

因此，我们可以将 J_z 重写为

$$J_z=\{j\in\{1,\cdots,d\}\,|\langle\eta,v_j\rangle=0\}\,.$$

利用 C 是一个良锥这一事实，我们得到 $\{v_j\}_{j\in J_z}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-基，属于

$$\left\{\sum_{j\in J_z} a_j v_j | a_j \in \mathbb{R}\right\} \cap \mathbb{Z}_G.$$

因此，如果 $\sum_{j\in J_z} a_j v_j \in \mathbb{Z}_G$（尤其是，如果 $\widetilde{a} \in N_z$），那么对于每个 $j \in J_z$，$a_j \in \mathbb{Z}$。综上所述，我们得到

$$N_Z = \left\{\widetilde{a} \in \mathbb{T}^d | a \in \mathbb{Z}^N\right\} = \{0\},$$

所以 N_z 是平凡的。 □

6.3.5 推论。 N 在 $h^{-1}(0) \setminus \{0\}$ 上的作用是自由的。

证明。 这直接由引理 6.3。 □

由于 N 在 $h^{-1}(0) \setminus \{0\}$ 上具有光滑、适当且自由的作用，我们可以取 Marsden-Weinstein商，得到一个辛流形 $(M_{red,\ 0},\ \omega)$，其中

$$M_{red,0} = \left(\widetilde{h}^{-1}(0) \setminus \{0\}\right)/N$$

并且 ω 由下式隐式定义

$$q^*\omega = j^*\omega_0,$$

其中，自然包含映射为 j：$h^{-1}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^d$，自然投影映射为 q：$\widetilde{h}^{-1}(0) \setminus \{0\} \to \left(\widetilde{h}^{-1}(0) \setminus \{0\}\right)/N$。

现在，我们将为（$M_{red,\ 0},\ \omega$）上的诱导 $\mathbb{T}^d/N \simeq G$ 作用构造一个动量映射，正如我们在辛情形中所做的那样。设 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^d$是 τ的一个右逆。于是我们可以定义映射

$$\widetilde{F} = \sigma^* \circ h \circ j : \widetilde{h}^{-1}(0) \setminus \{0\} \to \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^n.$$

正如我们在 Delzant 构造中所见，该映射在 N 作用下保持不变，因此它下降到商空间：

$$F : M_{red,0} = \left(\widetilde{h}^{-1}(0) \setminus \{0\}\right)/N \to \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^n.$$

该映射是（$M_{red,\ 0},\ \omega$）上诱导的 G 作用的动量映射。该映射的像将是去掉 0 的锥 C。

6.3.6 命题。 $F(M_{red,\ 0}) = C \setminus \{0\}$。

~证明。 我们首先计算 F 的像。利用引理 6.3，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}\left(\widetilde{h}^{-1}(0)\setminus\{0\}\right) &= (\sigma^*\circ h\circ j)\left(\widetilde{h}^{-1}(0)\setminus\{0\}\right)\\
&= \sigma^*\left(h\left(\widetilde{h}^{-1}(0)\setminus\{0\}\right)\right)\\
&= \sigma^*\left(h\left(h^{-1}\left(\tau^*(C\setminus\{0\})\right)\right)\right)\\
&= \sigma^*\left(\tau^*(C\setminus\{0\})\right)\\
&= (\tau\circ\sigma)^*\left(C\setminus\{0\}\right)\\
&= C\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

~这里我们用到了 σ是 τ的右逆。由于 F是一个 N-不变映射，因此有 $F(M_{red,\ 0}) = C\setminus\{0\}$。 □

在 Lerman 的构造的第二部分中，我们将限制在一个接触型超曲面上。我们在 $\mathbb{C}^d$上定义一个 $\mathbb{R}$-作用：

$$\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d : (t,z)\mapsto e^{\frac{t}{2}}z.$$

6.3.7 引理。 设 $\psi_t\colon \mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d\colon z\mapsto\psi(t,\ z)$。则有 $\psi_t^*\omega_0 = e^t\omega_0$。

证明。 通过直接计算即可证明：

$$\begin{aligned}
\psi_t^*\omega_0 &= \psi_t^*\left(\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{d} dz_k\wedge d\overline{z}_k\right)\\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{d} d\left(z_k\circ\psi_t\right)\wedge d\left(\overline{z}_k\circ\psi_t\right)\\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{d} d\left(e^{\frac{t}{2}}z_k\right)\wedge d\left(\overline{e^{\frac{t}{2}}z_k}\right)\\
&= e^t\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{d} dz_k\wedge d\overline{z}_k\\
&= e^t\omega_0
\end{aligned}$$

因此 $\psi_t^*\omega_0 = e^t\omega_0$。 □

根据练习 8（第 2章），我们知道向量场 A，定义为

$$\forall z\in\mathbb{C}^d : A(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\psi(t,z)$$

是（$\mathbb{C}^d$，ω_0）上的 Liouville 向量场。此外，显然 A 横截于超曲面

$$\mathbb{S}^{2d-1} = \left\{ z \in \mathbb{C}^d | \sum_{j=1}^{d} |z_j|^2 = 1 \right\},$$

因为它的流沿径向方向进行缩放。因此，$\mathbb{S}^{2d-1}$ 是辛流形（$\mathbb{C}^d$，ω_0）的接触型超曲面。
这个超曲面可用于找到（$M_{red,\ 0}$，ω）的接触型超曲面。首先，我们需要证明作用 ψ 可以下降到商空间上。

6.3.8 引理。 ψ 在 $h^{-1}(0) \setminus \{0\}$上诱导一个作用。

证明。设 $z \in h^{-1}(0) \setminus \{0\}$ 且设 $t \in \mathbb{R}$。我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}(\psi(t,z)) &= \widetilde{h}\left(e^{\frac{t}{2}} z\right) \\
&= i^*\left(h\left(e^{\frac{t}{2}} z\right)\right) \\
&= i^*\left(\pi \sum_{j=1}^{d} |e^{\frac{t}{2}} z_j|^2 e_j^*\right) \\
&= i^*\left(e^t \pi \sum_{j=1}^{d} |z_j|^2 e_j^*\right) \\
&= i^*\left(e^t h(z)\right).
\end{aligned}$$

设 $X \in \mathbb{R}^d$。我们可以证明，可以将 e^t 移到 i^*之外：

$$\langle i^*\left(e^t h(z)\right), X\rangle = \langle e^t h(z), i(X)\rangle = e^t \langle h(z), i(X)\rangle = \langle e^t i^*(h(z)), X\rangle,$$

因此，由于对偶配对的非退化性，$i^*(e^t h(z)) = e^t i^*(h(z))$。因此

$$\widetilde{h}(\psi(t,z)) = e^t i^*(h(z)) = e^t \widetilde{h}(z) = 0.$$

这表明 ψ 在 $h^{-1}(0) \setminus \{0\}$上诱导了一个作用。 □

6.3.9 推论。 作用 ψ 下降到商空间上，即我们有一个作用

$$\widetilde{\psi} : \mathbb{R} \times M_{red,0} \to M_{red,0}$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都满足 $q \circ \psi_t = \psi_t \circ q$。

证明。 这可由引理 6.3.8以及作用 φ 和 ψ 可交换这一事实立即推出。 □

这个作用现在将在（$M_{red,0}, \omega$）上生成一个 Liouville 向量场。

6.3.10 命题。考虑定义在 $M_{red,0}$ 上的向量场 Y，其定义为

$$\forall z \in M_{red,0} : Y(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \widetilde{\psi}(t, z).$$

然后， Y 是 M_{red} 上的 Liouville 向量场。

~证明。 我们将证明 $\psi_t^* \omega = e^t \omega$，之后结论便可由第 8 章中的习题 2 得出。我们进行如下计算：

$$\begin{aligned}
q^*\left(\frac{1}{e^t}\widetilde{\psi}_t^*\omega\right) &= q^*\left(\widetilde{\psi}_t^*\left(\frac{1}{e^t}\omega\right)\right) \\
&= \left(\widetilde{\psi}_t \circ q\right)^*\left(\frac{1}{e^t}\omega\right) \\
&= (q \circ \psi_t)^*\left(\frac{1}{e^t}\omega\right) \\
&= \psi_t^*\left(q^*\left(\frac{1}{e^t}\omega\right)\right) \\
&= \psi_t^*\left(\frac{1}{e^t}q^*\omega\right) \\
&= \psi_t^*\left(\frac{1}{e^t}j^*\omega_0\right) \\
&= \frac{1}{e^t}(j \circ \psi_t)^*\omega_0
\end{aligned}$$

回忆一下， j 是一个自然包含映射，因此（滥用记号）

$$j \circ \psi_t = \psi_t \circ j.$$

如果现在应用引理6.3.7，我们便得到

$$q^*\left(\frac{1}{e^t}\widetilde{\psi}_t^*\omega\right) = \frac{1}{e^t}(\psi_t \circ j)^*\omega_0 = \frac{1}{e^t}j^*\left(\psi_t^*\omega_0\right) = \frac{1}{e^t}j^*\left(e^t\omega_0\right) = j^*\omega_0.$$

~由于 ω 是隐式定义为 $q^*\omega = j^*\omega_0$的，因此我们有 $\frac{1}{e^t}\psi_t^*\omega = \omega$，或者~等价地，$\psi_t^*\omega = e^t\omega$。 □

由于 $\mathbb{S}^{2d-1}$ 是 $\mathbb{T}^d$的一个不变超曲面（相对于作用φ），我们有

$$M = \left(\widetilde{h}^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^{2d-1}\right)/N$$

是 G-不变超曲面，位于 $M_{red,\ 0}$ （因为 $G \simeq \mathbb{T}^d/N$）。此外，Liouville 向量场 Y 与超曲面 M 横截（因为 A与 $\mathbb{S}^{2d-1}$横截）。因此，M 是 $(M_{red,\ 0},\ \omega)$ 的 G-不变接触型超曲面，可赋予接触形式

$$\alpha = \iota_Y \omega.$$

利用本章的习题 6 以及 F 是 $(M_{red,\ 0},\ \omega)$ 上 G-作用的动量映射这一事实，我们有

$$H = F|_M : M \to \mathfrak{g}^*$$

是 $(M,\ \ker \alpha)$ 上接触环面 G-作用对应的 α-动量映射。此外，由于 $F(M_{red,\ 0}) = C \setminus \{0\}$，我们有 $(M,\ \alpha,\ H)$ 的动量锥恰好是 C:

$$C(\Psi) = \{tH(x) | x \in M, t \geq 0\} = C,$$

其中，Ψ 是接触环面 G-流形 (M, α, H) 的接触动量映射。这正是我们想要构造的对象。

6.4 习题

1. 设 G 为一个李群，其作用于流形 M 上并保持 1-形式 β不变。假设 $d\beta$ 是 M 上的一个辛形式。证明： Ψ_β 是 G 在$(M, d\beta)$上的哈密顿作用的动量映射。

2. 设（M， ξ）是一个余定向接触流形，其余定向为 ξ°_+。设李群 G 作用于 M，同时保持 ξ 和 ξ°_+不变。对于 $g \in G$，用映射 φ^G_g 表示该作用。假设在 M上存在一个 G-不变的接触形式 α，使得 $\alpha(M) \subset \xi^\circ_+$且 $\ker\ \alpha = \xi$。令 Ψ_α 为 α-动量映射。

（a）证明，对于该作用， Ψ_α 与接触动量映射 Ψ 满足

$$\Psi \circ \alpha = \Psi_\alpha.$$

（b）证明， Ψ_α 关于 φ^G 和余伴随作用是等变的，即

$$\forall g \in G : \mathrm{Ad}^*_g \circ \Psi_\alpha = \Psi_\alpha \circ \varphi^G_g.$$

提示： 可以使用指数映射的以下性质（无需证明），其中 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数：

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall g \in G, \forall t \in \mathbb{R} : g \exp(tX) g^{-1} = \exp(t\mathrm{Ad}(g)(X)).$$

（c）考虑 φ^G 穿过 $m \in M$的轨道 $\mathcal{O}(m)$。对于每个$m \in \Psi^{-1}_\alpha(0)$，都有 $T_m\mathcal{O}(m)$ 是（$\mathrm{Ker}(\alpha_m)$，$(d\alpha)_m$）的各向同性子空间。

3. 设余定向接触流形 (M, ξ) 上有环面 G 的完全可积作用。设 α 为该接触环面 G-流形的归一化接触形式。证明，可以根据三元组 (M, α, Ψ_α) 重构整个作用，其中 Ψ_α 是 α- 动量映射。

4. 证明注记 6.2.4 中的论断。特别地，设 $\varphi : M \to M'$ 是接触环面 G-流形 (M, α, Ψ_α) 与 $(M', \alpha', \Psi_{\alpha'})$ 之间的同构。证明 φ 是严格接触同胚。

5. 考虑 $G = \mathbb{T}^2$，从而得到 $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}^2$。我们定义

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

证明集合

$$C = \{\eta \in \mathbb{R}^2 | \langle \eta, v_1 \rangle \geq 0, \langle \eta, v_2 \rangle \geq 0\}$$

是一个良有理多面锥。

6. 设辛流形 (M,ω) 上具有一个哈密顿环面作用。设 Φ是相应的（辛）动量映射。设 S 是 (M,ω) 的一个接触型超曲面（相对于 Liouville 向量场 Y），且在环面作用下保持不变。考虑 S 上的接触形式 $\alpha = \iota_Y\omega|_S$。证明 $\Phi|_S$ 对应于在 (S,α) 上诱导的环面作用的 α-动量映射。

参考文献

[Bravetti] Bravetti, A.; Lopez-Monsalvo, C.S.; Nettel, F.：《接触对称性与哈密顿热力学》。Annals of Physics. 361 (2015), 377-400.[Geiges] Geiges, Hansj¨org：《接触拓扑学导论》。Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 109. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xvi+440 页。[Jovanovi´c] Jovanovi´c, Bozidar：《接触几何中的非交换可积性与作用—角变量》。J. Symplectic Geom. 10 (2012), no. 4, 535-561.[Jovanovi´c & Jovanovi´c] Jovanovi´c, Bozidar; Jovanovi´c, Vladimir：《接触流与可积系统》。J. Geom. Phys. 87 (2015), 217-232[Khesin & Tabachnikov] Khesin, Boris; Tabachnikov, Serge：《接触完全可积性》。Regul. Chaotic Dyn. 15 (2010), no. 4-5, 504-520.[Lee]Lee, John M.：《光滑流形导论》。第二版。Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. xv +708页。[Lerman] Lerman, Eugene：《接触环面流形》。J. Symplectic Geom. 1 (2003), no. 4, 785-828.[Miranda]Miranda, Eva：《奇异拉格朗日叶状结构的辛线性化》。博士学位论文，巴塞罗那大学，2003。