arXiv:2305.03578v1 [math.RA] 5 May 2023

泊松代数讲义

V. Roubtsov*, R. Such´anek•
*volodya@univ-angers.fr • r.suchanek.r@gmail.com

2023年5月8日

目录

1 引言 3 1.0.1 致谢.4

2 动机 5
2.1 拉格朗日力学与哈密顿力学.5 2.2 哈密顿力学与泊松括号.5

3 泊松代数 7
3.1 子代数和理想.7 3.2 态射和导子.9

4 哈密顿量导子与卡西米尔元 10
4.1 交换代数的外代数.13

5 同调与上同调 14
5.1 霍赫希尔德（上）同调.14 5.2 Lichnerowicz-Poisson 上同调.16 5.3 低维泊松上同调.18 5.3.1 相容泊松结构.19 5.3.2 $HP^2(A)$ 的解释.20 5.4 泊松同调.22 5.5 对偶性.23

6 多项式泊松代数 **25**
6.1 南布-雅可比-泊松代数.25 6.2 泊松–卡拉比–丘代数.27 6.2.1 PCY代数的低维上同调 27 6.3 对偶泊松复形.28

7 分次泊松代数 29
7.1 微分算子代数.30

8 插曲——张量、对称代数与外代数 **33**
8.1 向量空间的张量代数.33 8.2 向量空间的对称代数.34 8.3 向量空间的外代数.36 8.4 对称代数 $S(\mathfrak{g})$上的泊松结构.37

9 泛包络与 PBW 定理 39
9.1 泛包络代数.40 9.2 庞加莱-比尔霍夫-维特（PBW）定理.41 9.3 泛包络与微分算子.44

10泊松流形 47
10.1 余切丛上的泊松结构.47 10.2 泊松流形.48 10.3 哈密顿映射.48 10.4 辛流形上的泊松括号.49 10.5 泊松流形与辛流形的例子.50 10.6 泊松流形与李理论.51 10.7 $\mathfrak{g}^*$ 上的辛叶状结构.54 10.7.1 余伴随不变函数.55

11 泊松流形上的微分学 56 11.1 Schouten 括号的无坐标构造 58

12修正的双 Poisson 括号 60
12.1 一般结合代数的 Poisson 括号.60 12.1.1 Ginzburg-Voronov 引理.61 12.1.2 表示概形.62 12.1.3 表示模空间.63 12.2 双泊松括号.63 12.3 二次双泊松括号.64 12.4 低维二次双泊松括号的例子与分类.66

1 引言

泊松代数这一概念可能最早由 A.M. Vinogradov 和 J. S. Krasil'shchik 于 1975 年提出，当时称为"典范代数"；随后，J. Braconnier 于 1977 年在其简短论文《泊松代数》（《科学院报告》）中也提出了这一概念。

泊松结构与泊松括号的概念在十九世纪的经典力学框架中出现，是一种自然的"代数化诠释"。

如今，泊松代数已被证明具有非常丰富的数学结构（参见 Y. Kosmann-Schwarzbach 在《数学百科全书》中发表的精彩短文"泊松代数"，Encyclopedia of Mathematics, http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Poisson_algebra&oldid=51639）。

有许多优秀的书籍和讲义专门介绍泊松结构，而从代数角度探讨这一主题的资料则少得多。值得一提的是 C. Laurent-Gengoux、A. Pichereau 和 P. Vanhaecke 所著的鸿篇《泊松结构》，该书也涵盖了许多与泊松簇这一概念相关的代数方面内容和结构 [8]。

本讲义是同名迷你课程（共 5 讲）的略微扩充版。该课程由第一作者在虚拟（在线）"Wisla 20-21"冬季学校与研讨会上讲授，并由第二作者整理撰写。

讲座的虚拟性质带来了少量限制，也决定了材料的特定选择和主题的取舍。作者必须在两难之间作出选择：一边是听众水平未知的困境，另一边则是诱人的挑战——摆脱众多现有讲义中关于代数与几何中的泊松结构的标准内容。

这种矛盾或许可以解释我们讲义中不同章节之间难度级别的一些奇怪"跳跃"。我们希望日后能重新审视这些讲义，对其加以扩充和改进，甚至撰写一部涵盖这一主题的全新综合性著作。目前，我们面临着时间紧迫的压力（以及新冠疫情带来的限制），这也是讲义内容及细节的选择不够统一的原因之一。

这些讲座中（几乎）没有"新结果"。唯一的例外是最后一个简短章节的内容，我们在其中给出了（与 A. Odesskii 和 V. Sokolov 合作完成的）关于"低秩"双二次 Poisson 括号的分类结果。我们基本保留了这一章原有的计算机演示形式。

这些讲座主要依据许多广为人知和鲜为人知的资料编写，我们已尽力在正文中仔细注明这些资料。但我们仍需特别指出其中最具影响力的几项：A.M. Vinogradov 和 J.S. Krasil'shchik 的精彩论文《什么是哈密顿形式主义？》[28]，P. Cartier 的讲座《可积系统理论中的一些基本技术》[9]，，以及 K. H. Bhaskara 和 K. Viswanath 的一部简明著作《泊松代数与泊松流形》[5]。

1.0.1 致谢

´V. Rubtsov 感谢高等科学研究所 Universit´e Paris-Saclay 在本项工作最后阶段给予的热情接待。R. Such´anek 感谢昂热大学和马萨里克大学的热情接待。R. Such´anek 的工作得到了项目 GACR EXPRO GX19-28628X 以及由法国驻布拉格学院（IFP）和捷克教育、青年和体育部（MYES）组织的巴朗德奖学金计划的资助。作者还感谢 Wisla 20-21 冬季学校与研讨会的组织者，在新冠疫情这一艰难时期组织了一场精彩的线上活动。

2 动机

2.1 拉格朗日力学与哈密顿力学

拉格朗日的一项重要发现：拉格朗日函数 L: $TM \to \mathbb{R}$

$$L = T - V \ ,$$

描述了粒子的运动。运动方程由欧拉-拉格朗日方程描述

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \ .$$

这里，$(\bar{q}) = (q^1, \ldots, q^n)$ 是 M 上的坐标，$(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = (q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ 是切丛 TM 上的诱导坐标。上述欧拉-拉格朗日方程由变分原理导出

$$\delta \int L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) dt = 0 \ ,$$

其中，δ（在此语境下）指变分导数。利用勒让德变换，可以从切丛转到余切丛T^*M，其坐标为 $(\bar{q}, \bar{p})$，并用哈密顿方程等价地改写欧拉-拉格朗日方程

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}, \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}} \tag{1}$$

拉格朗日量与哈密顿量之间的联系由以下公式给出。

$$H(\bar{q}, \bar{p}) = < \bar{p}, \dot{\bar{q}} > - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \ .$$

2.2 哈密顿力学与泊松括号

不从拉格朗日 L 函数开始，也可以从哈密顿函数 H 开始: $T^*M \to \mathbb{R}$ 并独立于拉格朗日构建力学。现在我们转向更简单的平直空间情形，即考虑 $M \cong \mathbb{R}^N$。稍后我们会回到光滑流形的情形。

设 F 和 G 是定义在具有坐标（$\bar{q}$, $\bar{p}$）的 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的两个可微函数，其中 $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_n)$。将对 F 和 G 进行以下反对称运算所得的结果引入为一个新函数。

$$\{F, G\} := \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial G}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}}\frac{\partial G}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial G}{\partial \bar{q}}\frac{\partial F}{\partial \bar{p}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \ . \tag{2}$$

这一运算允许以如下方式写出与哈密顿函数 $H = H(\bar{q}, \bar{p})$ 相关的哈密顿方程 (1)（将 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$ 置于平等地位）：

$$\dot{\bar{q}} = \{\bar{q}, H\} \ , \quad \dot{\bar{p}} = \{\bar{p}, H\} \ . \tag{3}$$

事实上，我们有

$$\{q_i, H\} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k}) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ ,$$

$$\{p_i, H\} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ ,$$

因为 $\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_k^i$ 和 $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$。

请注意，对于哈密顿系统 (3) 的每个解 $\{(q(t)\ p(t)\}$ 以及任意 $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) &:= \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}) \\ &= \{F, H\}(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) \ .\end{aligned}$$

特别是，对于哈密顿函数 H,

$$\frac{d}{dt}H(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) = \{H, H\}(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) = 0 \ ,$$

这是 H 的守恒定律（即 $H(\bar{q}(t)\ \bar{p}(t))$ 沿轨道保持不变）。D. Poisson 曾观察到，如果 $\{F, H\}$ 和 $\{G, H\}$ 为零，那么 $\{\{F, G\}, H\}$ 也为零（两个运动常数的泊松括号仍是一个运动常数）。借助雅可比恒等式，可以抽象地解释这一结论。

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0 \ , \tag{4}$$

由于如果 $\{F, H\} = \{G, H\} = 0$，那么上述等式给出 $\{\{F, G\}, H\} = 0$。现在令 π_{ij} 为 $\mathbb{R}^d$ 上的任意光滑函数， x_1、.....、 x_d 为 $\mathbb{R}^d$ 上的坐标。定义

$$\{F, G\} := \sum_{k=1}^{d} \pi_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} \ . \tag{5}$$

那么，(5) 满足雅可比恒等式 (4) 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{d} (\pi_{lk}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} + \pi_{li}\frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{lj}\frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l}) = 0 \ . \tag{6}$$

反对称性和雅可比恒等式意味着，运算 $\{\cdot, \cdot\}$ 在 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上定义了李代数结构。此外，这种结构与 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ $U \subset \mathbb{R}^d$ 上的乘积运算 $\cdot$ 相容，也就是说，它满足莱布尼茨法则

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G \ .$$

3 泊松代数

理解流形 M （代数、光滑、解析等）上的泊松结构（由泊松括号给出）有两种方式。

几何观点。对于 M 上的每个函数 H （光滑、全纯等），都可以关联一个向量场 X_H，其中 H 在力学解释中是哈密顿量。该向量场由下式给出

$$X_H := \{-, H\} \,. \tag{7}$$

代数观点。考虑一个向量空间 $\mathcal{A}$（通常是无限维的），它具有两种代数结构：

1. 具有单位元的结合且交换的代数结构。
2. 李代数结构。

泊松结构：交换结构 $+$ 李代数结构 $+$ 兼容性条件。

提取上述思想的代数方面，可以得到以下定义。

定义 3.1（泊松代数）。设 $(\mathcal{A}, \cdot)$ 是一个结合律的、带单位元且交换的 $\mathbb{K}$-代数（$\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$），其中单位元记为 1。设

$$\{-,-\}\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$$

是一个李括号，它在 $\mathcal{A}$ 上定义了 $\mathbb{K}$-李代数结构。如果运算 $\cdot$ 和 $\{-,-\}$ 按如下意义相容，则称 $\mathcal{A}$ 为泊松代数

$$\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b \,. \tag{8}$$

此时李括号称为泊松括号。

在上下文明确时，我们通常省略 $\mathcal{A}$ 中结合律运算的 $\cdot$ 符号。

注记 3.1。注意，上述定义中的李括号 $\{-,-\}$ 不一定由交换子给出。事实上，如果它由交换子给出，即 $\{a,b\} = a\cdot b - b\cdot a$，那么对于所有 a、$b\in\mathcal{A}$ 都有 $\{a,b\} = 0$，因为假设 $\cdot$ 是 $\mathcal{A}$ 上的交换运算。

3.1 子代数与理想

定义 3.2（子代数）。向量子空间 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是泊松代数 $(\mathcal{A}, \{-,-\}, \cdot)$ 中的泊松子代数，当且仅当 $\mathcal{B}\cdot\mathcal{B}\, subset\, \mathcal{B}$ 且 $\{\mathcal{B},\mathcal{B}\}\subset\mathcal{B}$。

定义 3.3（理想）。若向量子空间 $\mathcal{J}\subset\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{J}\cdot\mathcal{A}\subset\mathcal{J}$和 $\{\mathcal{J},\mathcal{A}\}\subset\mathcal{J}$，则它是泊松代数 $(\mathcal{A}, \{-,-\}, \cdot)$ 的泊松理想。

观察 3.1。在第一种定义中， $\mathcal{B}$ 本身是一个泊松代数，其运算由 $\mathcal{A}$中的运算限制而来。包含映射 ι: $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$是一个泊松代数态射。在第二种定义中，商代数$\mathcal{A}/\mathcal{J}$从 $\mathcal{A}$ 继承泊松括号，要求商上的典范投影 p: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$是一个泊松态射。

注记 3.2。对于一个固定的域 $\mathbb{K}$ (char $\mathbb{K} = 0$)，$\mathbf{Poiss}_{\mathbb{K}}$ 表示一个范畴，其对象是泊松 $\mathbb{K}$-代数，其态射是泊松代数的 $\mathbb{K}$-态射。$\mathbf{Poiss}_{\mathbb{K}}$ 中的群对象是泊松李群 $(G, \cdot, \{-,-\})$，使得 G 上的括号具有乘法性，即乘法 $\cdot G \times G \to G$ 是一个泊松态射，其中 $G \times G$ 被赋予如下泊松括号： $\{-,-\}_{G\times G}$:
$= \{-,-\}_G \oplus \{-,-\}_G$。

定义 3.4（素）。如果对于所有泊松理想 $\mathcal{I}$、$\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$，泊松理想 $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ 都满足，则称 $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ 为泊松素理想。

$$\mathcal{I}\mathcal{J} \subset \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{I} \subset \mathcal{P} \text{ or } \mathcal{J} \subset \mathcal{P}$$

备注 3.3. 如果 $\mathcal{A}$ 是诺特的[1]，，那么上述定义等价于 $\mathcal{P}$既是素理想又是泊松理想。

定义 3.5（谱）。 $\mathcal{A}$ 的泊松谱记为 PSpec($\mathcal{A}$)，是 $\mathcal{A}$ 的泊松素理想的集合。

定义 3.6（极大理想）。极大理想 $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ 若为泊松理想，则称为泊松极大理想。

注 3.4。泊松极大理想与极大泊松理想并非同一概念。

定义 3.7（核）。理想 $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ 的泊松核记为 PC($\mathcal{I}$)，是 $\mathcal{A}$ 中包含于 $\mathcal{I}$ 的最大泊松理想。

注 3.5。若 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的素理想，则 PC($\mathcal{I}$) 是泊松素理想。

定义 3.8（本原理想）。若 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{A}$ 的泊松理想，且 $\mathcal{P}$ 是某个极大理想 $\mathcal{M}$ 的泊松核，即 PC($\mathcal{M}$) $= \mathcal{P}$，则称 $\mathcal{P}$ 为泊松本原理想。

注 3.6. 每个泊松本原理想都是泊松素理想。

定义 3.9（局部化）。设 R 为一个交换环， $S \subset R$ 为一个乘法子集[2]。 R 在 S 处的局部化，记作 $S^{-1}R$，是 $R \times S$ 中由以下方式定义的等价类所构成的交换环。

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) \in [r, s] \iff \exists k \in S : (\tilde{r}s - r\tilde{s})k = 0 \ .$$

[1]给定 $\mathcal{A}$中的一个递增理想序列 $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \ldots$，总存在 $k \in \mathbb{N}$使得 $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{k+n}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$都成立。[2]s_1， $s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$。

通常将等价类 $[r,s]$ 记作 $\frac{r}{s}$ 或 rs^{-1}（这反映了它与分式域的构造相似）。环运算定义如下：

$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}+\frac{r}{s}:=\frac{\tilde{r}s+r\tilde{s}}{\tilde{s}s}$$
$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\cdot\frac{r}{s}:=\frac{\tilde{r}r}{\tilde{s}s}$$

练习 3.1。证明上述构造确实在集合 $S^{-1}R$上给出了一个环结构。描述关于这两个环运算的单位元。

如果 $S\subset\mathcal{A}$ 是泊松代数 $\mathcal{A}$的乘法封闭子集，那么局部化 $S^{-1}\mathcal{A}$ 也是一个泊松代数，其括号为

$$\{as^{-1},bt^{-1}\}:=(st\{a,b\}-sb\{a,t\}-at\{s,b\}+ab\{s,t\})(s^2t^2)^{-1},$$

对任意 a、$b\in\mathcal{A}$ 以及任意 s、t、$\in S$均成立。对于任意泊松理想 $\mathcal{P}\subset\mathcal{A}$，局部化 $S^{-1}\mathcal{P}$是 $S^{-1}\mathcal{A}$中的泊松理想。对于两个乘法子集 S、$T\subset\mathcal{A}$，若 $S\subset T$，则存在一个泊松态射：$S^{-1}\mathcal{A}\to T^{-1}\mathcal{A}$。

练习 3.2。设 s、$t\in\mathcal{A}$，并考虑 $\mathcal{A}$的乘法子集

$$S:=\{s^n|\ n\in\mathbb{N}\}\qquad\qquad T:=\{t^n|\ n\in\mathbb{N}\},$$

其中 s、$t\in\mathcal{A}$ 满足：对于适当的 $u\in\mathcal{A}$，有 $t=su$。证明映射$\varphi_{s,t}$：$S^{-1}\mathcal{A}\to T^{-1}\mathcal{A}$由 $\varphi_{s,t}(\frac{a}{s^m}):=\frac{au^n}{t^n}$定义，与 u无关，并且是一个泊松态射。

例 3.1。任何泊松极大理想都是极大的泊松理想，但反之不成立。一个反例是 Weyl-泊松代数 $\mathbb{C}[x,y]$，其中 $\{x,y\}=1$。这是一个单泊松代数，但不是单结合代数（考虑平凡理想 $\{0\}$）。

3.2 态射与导子

定义 3.10（态射与同构）。设 $(\mathcal{A}_i,\{-,-\}_i,\cdot_i)_{i=1,2}$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的两个泊松代数，并设 φ：$\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$ 是一个 $\mathbb{K}$-线性映射，满足对任意 $a,b\in\mathcal{A}_1$

1. $\varphi(a\cdot_1 b)=\varphi(a)\cdot_2\varphi(b)$,
2. $\varphi(\{a,b\}_1)=\{\varphi(a),\varphi(b)\}_2$

那么，φ 称为泊松代数态射。如果 φ 是一个双射泊松代数态射，并且其逆映射 φ^{-1}：$\mathcal{A}_2\to\mathcal{A}_1$ 也是泊松代数态射，那么 φ 称为泊松代数同构。

定义 3.11（导子）。称 $\mathbb{K}$-线性映射 φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的 $\mathbb{K}$-导子，若

$$\varphi(a \cdot b) = a\varphi(b) + \varphi(a) \cdot b \ . \tag{9}$$

$\mathcal{A}$ 的全体导子的集合记作 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$、 $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$或 $\mathcal{D}(\mathcal{A},\mathcal{A})$。如果双线性映射 φ: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$满足以下条件，则称其为双导子。

$$\begin{aligned} \varphi(ab,c) &= a\varphi(b,c) + b\varphi(a,c), \\ \varphi(a,bc) &= \varphi(a,b)c + b\varphi(a,c) \end{aligned} \tag{10}$$

观察 3.2. 根据定义直接可得， $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$。对于每个 $b \in \mathcal{A}$, $a \mapsto \{a,b\}$ 给出的 $\mathbb{K}$-线性映射是 $\mathcal{A}$ 上的导子。

观察 3.3. 由泊松括号在 $\mathcal{A}$ 上给出的导子所关联的双导子总是反对称的。

从现在起，若上下文清楚，我们常会简化记法，将泊松代数（$\mathcal{A}$、$\{-,-\}$、$\cdot$）简称为 $\mathcal{A}$。此外，除非另有说明，所有向量空间、代数（泊松代数、李代数）以及相应的线性映射（态射、导子），都将在一般域 $\mathbb{K}$ 上考虑，且其特征为 $\mathbb{K} = 0$。

4 哈密顿导子与卡西米尔元

定义 4.1（哈密顿导子和卡西米尔元）。设 $\mathcal{A}$ 是一个泊松代数，且 $a \in \mathcal{A}$。导子 $X_a := \{-,a\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 称为与 X_a 相关联、以 a 为哈密顿量（或哈密顿函数）的哈密顿导子。我们记为

$$\mathrm{Ham}(\mathcal{A}) := \{X_a \mid a \in \mathcal{A}\} \tag{11}$$

所有哈密顿导子的集合。我们有一个线性映射 $\mathcal{A} \to \mathrm{Ham}(\mathcal{A})$,$a \mapsto X_a$。设 $a \in \mathcal{A}$ 满足 $X_a = 0$，则 a 称为卡西米尔元。我们记为

$$\mathrm{Cas}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \,|\, X_a = 0\} \tag{12}$$

所有卡西米尔元素的集合。

定义 4.2。 $\mathcal{A}$ 的（泊松）中心是 $\mathrm{Z}_P(\mathcal{A})$: 对于所有 $b \in \mathcal{A}\}$,
$= \{a \in \mathcal{A} \mid \{a,b\} = 0$。我们有 $\mathrm{Cas}(\mathcal{A}) = \mathrm{Z}_P(\mathcal{A})$。

定义 4.3. （结合律的） $\mathbb{K}$-代数 $\mathcal{A}$ 的增广是一个 $\mathbb{K}$-代数同态 α: $\mathcal{A} \to \mathbb{K}$。有序对 $(\mathcal{A},\alpha)$ 称为增广代数。核 $\ker\alpha$ 称为 $\mathcal{A}$ 的增广理想。

引理 4.1. 对于任意首一多项式 $p(x) \in \mathrm{Cas}[x]$ 以及任意 $b \in \mathcal{A}$

$$\{p(x),b\} = p'(x)\{x,b\} \ , \tag{13}$$

其中 $p'(x) = \frac{\partial p}{\partial x}(x)$。

证明。由归纳法，设 $\tau := \deg p = 0$。则 $p(x) = c_0$，其中 $c_0 \in \mathrm{Cas}(\mathcal{A})$，因此对所有 $b \in \mathcal{A}$

$$\{p(x), b\} = \{c_0, b\} = 0 = p'(x)\{x, b\} \ .$$

设归纳假设对次数为 $\leq \tau - 1$ 的首一多项式成立，并假设 $\tau > 0$。那么 $p(x) = x^\tau + c_{\tau-1}x\tau - 1 + \ldots + c_1 x + c_0$，其中所有 $c_i \in \mathrm{Cas}(\mathcal{A})$。我们可以将 $p(x)$ 重写为 $= x^\tau + c_{\tau-1}q(x)$，其中 $q(x)$ 是首一多项式，且次数为 $q = \tau - 1$。于是

$$\begin{aligned}\{p(x), b\} &= \{xx^{\tau-1}, b\} + c_{\tau-1}\{q(x), b\} \\ &= x^{\tau-1}\{x, b\} + x\{x^{\tau-1}, b\} + c_{\tau-1}q'(x)\{x, b\} \\ &= (x^{\tau-1} + x(\tau-1)x^{\tau-2} + c_{\tau-1}q'(x))\{x, b\} \\ &= p'(x)\{x, b\} \ .\end{aligned}$$

□

命题 4.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个泊松代数。

1. $\mathrm{Cas}(\mathcal{A})$ 是 $(\mathcal{A})$ 的一个子代数。此外，$\mathbb{K}$ 可以自然地视为 $\mathrm{Cas}(\mathcal{A})$ 的一个子集。2. 若 $\mathcal{A}$ 是整环（即没有零因子），则 $\mathrm{Cas}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中是整闭的。3 并非 $\mathcal{A}$ 在 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 上的每个表示都定义了 $\mathrm{Ham}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{A})$ 上的 $\mathcal{A}$-模结构。3. $\mathrm{Ham}(\mathcal{A})$ 是一个 $\mathrm{Cas}(\mathcal{A})$-模。4. 映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$，定义为 $H \mapsto -X_H$，是李代数同态。5. 存在一个李代数短正合列

$$0 \to \mathrm{Cas}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \to \mathrm{Ham}(\mathcal{A}) \to 0 \ .$$

证明。1. 显然，$\mathrm{Cas}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子代数。现在我们证明标量对应于卡西米尔元素。注意，由于 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元 1 的代数，并且 $\mathbb{K}$ 对 $\mathcal{A}$ 有一个作用（也记作并置乘法），因此存在一个自然的单射态射 $\iota\colon \mathbb{K} \to \mathcal{A}$，由 $k \mapsto k1$ 给出。这意味着我们可以将 $\mathbb{K}$ 与 $\iota(\mathbb{K}) = \mathbb{K}1 \subset \mathcal{A}$ 等同起来。我们将简单地记作 $\iota(k) = k$。[3] 现在考虑任意的 $a \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{K}$。那么我们有

$$\{a, k1\} = \{a, k\}1 + k\{a, 1\},$$

这意味着 $k\{a, 1\} = 0$（否则 $\{a, k1\} \neq \{a, k\}$），因此$\{a, 1\} = 0$。[4] 但如果 $\{a, 1\} = 0$，那么 $\mathbb{K}$ 双线性性意味着$k\{a, 1\} = \{a, k\} = 0$。因此，任意 $k \in \mathbb{K}\cdot 1$ 都满足：对于所有 $a \in \mathcal{A}$，$\{a, k\} = 0$，故 $\mathbb{K}1 \subset \mathrm{Cas}(\mathcal{A})$。

[3]在这种记号下，ka 可以等价地解释为 $\mathbb{K}$ 对 $\mathcal{A}$的作用，也可以解释为在将 $\mathbb{K}$ 与 $\iota(\mathbb{K})$等同后，$\mathcal{A}$ 中的乘法。当然，我们有 $k1 = 1k = k$。[4]因为对于 $a \neq 0$： $ka = 0 \Rightarrow k = 0$

2. 假设 a 是 Cas($\mathcal{A}$) 上的整元，即 $a \in \mathcal{A}$，且存在一个首一多项式 $p(x) \in \text{Cas}(\mathcal{A})[x]$，使得 $p(a) = 0$。我们需要证明 $a \in \text{Cas}(\mathcal{A})$。不失一般性，假设 p 是满足 $p(a) = 0$的次数最小的多项式。若 $\deg p = 1$，则 $p(x) = x - a$。因此$a \in \mathbb{K} \subset \text{Cas}(\mathcal{A})$，由前面的结论可知。假设 $\tau := \deg p > 1$。利用 (13)，对于任意 $b \in \mathcal{A}$，我们有

$$0 = \{p(a), b\} = p'(a)\{a, b\} \ .$$

现在 $p'(a) \neq 0$，否则存在 $k \in \mathbb{K}$ 使得 $\frac{p'}{k}$ 是一个首一多项式，满足 $\frac{p'}{k}(a) = 0$ 且 $\deg(\frac{p'}{k}) = \deg p' = \tau - 1$。但这与假设矛盾：$p$ 是满足性质 $p(a) = 0$的次数最小的首一多项式。由于 $\mathcal{A}$ 没有零因子，$\{a, b\} = 0$。因为 $b \in \mathcal{A}$ 是任意的，这表明 $a \in \text{Cas}(\mathcal{A})$。

3 考虑左作用 l: $\mathcal{A} \to \text{End}(\text{End}(\mathcal{A}))$ $x \mapsto l_x$，其中 $l_x(a)$。假设 l 在 Ham($\mathcal{A}$) 上定义了一个 A-模结构。那么对任意 $x \in \mathcal{A}$以及任意的 $X_a \in \text{Ham}(\mathcal{A})$，我们有 $l_x X_a \in \text{Ham}(\mathcal{A})$。这意味着存在 $d \in \mathcal{A}$，使得对每个 $b \in \mathcal{A}$： $l_x X_a(b) = X_d(b)$。但一般而言这并不成立，因为

$$l_x X_a(b) = x\{b, a\} = \{b, xa\} - \{b, x\}a \ ,$$

而

$$X_d(b) = \{b, d\} \ .$$

换句话说，

$$(l_x X_a - X_d)(b) = 0 \iff d = xa \text{ and } \{b, x\}a = 0 \ , \tag{14}$$

对任意的 a、b、$x \in \mathcal{A}$，显然这并非总是成立。不过请注意，如果我们假设 $x \in \text{Cas}(\mathcal{A})$，那么对任意 $b \in \mathcal{A}$，$\{b, x\} = 0$，因此 (14) 总能满足。这表明，$\mathcal{A}$ 在 End($\mathcal{A}$) 上的作用若限制在 Cas($\mathcal{A}$) 上，便定义了在 Ham($\mathcal{A}$) 上的作用，也就是说，结论 4 得证。

5. 参见结论 3 的证明。

5. 根据定义，$\varphi(a)(c) = -X_a(c) = -\{c, a\}$。我们要证明 $\varphi(\{a, b\}) = [\varphi(a)\ \varphi(b)],$，其中

$$[\varphi(a), \varphi(b)] = [X_a, X_b] := X_a \circ X_b - X_b \circ X_a \ .$$

根据雅可比恒等式 (4)，对任意的 a、b、$c \in \mathcal{A}$，我们有

$$-\{c, \{a, b\}\} = \{\{c, b\}, a\} - \{\{c, a\}, b\} = X_a(X_b(c)) - X_b(X_a(c)) \ .$$

由于 $\varphi(\{a, b\}) = -X_{\{a,b\}} = -\{c, \{a, b\}\}$，这表明 φ 是一个李代数同态。

6. 第一个映射是一个包含映射，ι: Cas($\mathcal{A}$) $\to \mathcal{A}$，显然是一个李代数态射。第二个映射是 φ: $\mathcal{A} \to$ Ham($\mathcal{A}$)，由 $a \mapsto -X_a$ 给出。前面的结论表明它是一个李代数态射。现在考虑 $a \in \mathcal{A}$。那么 $X_a = 0$ 当且仅当 $\forall b \in \mathcal{A}:\ X_a(b) = \{b, a\} = 0$。因此 $\ker\varphi = \mathrm{im}\ \iota$，这意味着短正合列。

$$0 \xrightarrow{0} \mathrm{Cas}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ham}(\mathcal{A}) \xrightarrow{0} 0$$

是精确的。 □

注 4.1。上述命题第五个陈述的推论是，Ham($\mathcal{A}$) $\subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是一个李子代数。

4.1 交换代数的外代数

在以下构造中，$\mathcal{A}$ 始终是带单位元 1 的交换的、结合律的、含单位元的 $\mathbb{K}$-代数。

$\mathcal{A}$ 的 Kähler 微分模。令 $\Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ 为由形如 $b\,\underline{\mathrm{d}}(a)$ 的元素生成的 $\mathbb{K}$-向量空间，其中 a、$b \in \mathcal{A}$ 任意，并满足以下关系

$$\underline{\mathrm{d}}(ab) = \underline{\mathrm{d}}(a)b + a\,\underline{\mathrm{d}}(b)\ .$$

其中 $\underline{\mathrm{d}}$: $\mathcal{A} \to \Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ 是一个称为万有导子的 $\mathcal{A}$-线性映射。更确切地说，对于任意导子 $\partial \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，存在唯一的 $\mathcal{A}$-线性映射 $\tilde{\partial}$: $\Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\underline{\mathrm{d}}} & \Omega_{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A}) \\ & \searrow^{\partial} & \downarrow{\scriptstyle \exists!\tilde{\partial}} \\ & & \mathcal{A} \end{array} \tag{15}$$

$\mathcal{A}$-模 $\Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ 的结构由左乘法给出。利用 $(\Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A}), \mathrm{d})$ 的泛性质，我们得到一个规范的 $\mathcal{A}$-模同构

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A}), \mathcal{A})\ . \tag{16}$$

这个 $\mathcal{A}$-同构可以理解为 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 与 $\Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ 之间的对偶性。此外，它还可以扩展到代数 $\mathcal{A}$ 上的多重导子和外微分形式。

$\mathcal{A}$ 的外代数。设 $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Kähler 微分所成向量空间的（分次）外代数

$$\Omega^\bullet(\mathcal{A}) := \oplus_{k\geq 0}\Omega^k(\mathcal{A}) := \oplus_{k\geq 0}\Lambda^k(\Omega_{\mathcal{A}/\mathbb{K}}(\mathcal{A})),$$

连同泛导数 $\mathrm{d}: \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$，它可以扩展为

$$\underline{\mathrm{d}}\colon \Omega^k(\mathcal{A}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{A})$$

对所有 k。泛导数满足微分形式上外微分的所有性质。特别地，$\underline{\mathrm{d}}$ 是一个边界算子

$$\underline{\mathrm{d}}^2 = 0 \ ,$$

并且相对于楔积的作用方式为

$$\underline{\mathrm{d}}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \underline{\mathrm{d}}\,\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \underline{\mathrm{d}}\,\omega_2 \ ,$$

其中 $\omega_1 \in \Omega^k(\mathcal{A})$ 和 $\omega_2 \in \Omega^\bullet(\mathcal{A})$ 是任意的。 $\mathcal{A}$-对偶性 (16) 在 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 与 $\Omega^{\mathcal{A}\,/\,\mathbb{K}}$ 之间可写为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \Omega_{\mathcal{A}\,/\,\mathbb{K}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \ ,$$
$$< x, \underline{\mathrm{d}}\, a >:= (\underline{\mathrm{d}}\, a)(X) := X(a) \in \mathcal{A} \ ,$$

并且可以扩展到对偶性

$$\Lambda^k(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^k(\mathcal{A}), \mathcal{A}) \ .$$

此外，可以将导子的对称代数定义为

$$S(\mathcal{D}(\mathcal{A})) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S(\Omega_{\mathcal{A}\,/\,\mathbb{K}}(\mathcal{A}), \mathcal{A}) \ ,$$

如前所示，它是一个 1 次分次泊松代数。

取 $k = 2$，则有

$$\Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^2(\mathcal{A}), \mathcal{A}) \ . \tag{17}$$

现在设 $\mathcal{A}$ 是一个赋有泊松括号的泊松代数

$$\{-,-\}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \ .$$

那么，上述对偶性（17）通过以下公式给出了一个元素 $\pi \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$

$$< \pi, \underline{\mathrm{d}}\, a \wedge \underline{\mathrm{d}}\, b >= \{a, b\} \ , \tag{18}$$

对所有 a、$b \in \mathcal{A}$ 均成立。于是， π 被称为泊松双导子。泊松括号 $\{-,-\}$ 的雅可比恒等式对双导子 π 施加了一个重要约束，我们将在下文讨论这一点（见（22））。

5 同调与上同调

我们将讨论可以为代数 $\mathcal{A}$ 定义的两类（上）同调。首先，我们定义交换、结合、有单位代数的（上）同调（霍赫希尔德上同调），然后定义泊松代数的（上）同调（利希内罗维茨–泊松上同调）。

5.1 霍赫希尔德（上）同调

$\mathcal{A}^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}}_{k \text{ 次}}$

我们使用以下记号 $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$ 和 。我们定义

$\mathcal{A}^{\otimes 0} := \mathbb{K}$.

霍赫希尔德链复形。设 $\mathcal{A}$ 是一个交换的、具有结合律的、带单位元的 $\mathbb{K}$ 代数，并设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$-双模 [5]。则有如下链

[5]也就是说， $\mathcal{A}$ 从左侧和右侧作用于 $\mathcal{M}$ 。

复形： $\mathcal{A}$-双模 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}^{\otimes k}$， $k \in \mathbb{N}$

$$0 \xleftarrow{0} \mathcal{M} \xleftarrow{d_1} \mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \xleftarrow{d_2} \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}^2 \xleftarrow{d_3} \dots \tag{19}$$

边界算子 $d_k, k \in \mathbb{N}, k > 0$ 通过"面映射" ∂_i 定义如下

$$d_k := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial_i \ ,$$

其中映射 ∂_i 为

$$\partial_i(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_k) := \begin{cases} ma_1 \otimes \ldots \otimes a_k, & \text{if } i = 0 \\ m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_k, & \text{if } 0 < i < k \\ a_k m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1}, & \text{if } i = k \end{cases}$$

对所有 $m \in$M 和 $a_i \in \mathcal{A}$ 均成立。这就是霍赫希尔德链复形。

练习 5.1. 验证上述定义的边界映射 d_k 满足

1. $\mathbb{K}$-多重线性,
2. 定义良好，3.

满足 ${d_k}^2 = 0$

对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 均成立。

定义 5.1（霍赫希尔德同调）。链复形 (19) 的同调记为 $HH_*(\mathcal{A}, \mathcal{M})$，称为 $\mathcal{A}$ 的系数在 $\mathcal{M}$ 中的霍赫希尔德同调。第 k 个霍赫希尔德同调 $\mathbb{K}$-模为

$$HH_k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \ker d_k / im_{d_{k+1}} \ .$$

霍赫希尔德余链复形。利用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$-函子，我们可以构造霍赫希尔德余链复形

$$0 \xrightarrow{0} \mathcal{M} \xrightarrow{d^1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \xrightarrow{d^2} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^{\otimes 2}, \mathcal{M}) \xrightarrow{d^3} \dots \tag{20}$$

余边界算子 d^k 定义为

$$d^k := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial^i \ ,$$

其中，映射 ∂^i 定义在 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{M})$ 上

$$(\partial^i f)(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_k) := \begin{cases} a_0 f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_k), & \text{if } i = 0 \\ f(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_k), & \text{if } 0 < i < k \\ f(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1}) a_k, & \text{if } i = k \end{cases}$$

其中 $a_i \in \mathcal{A}$ 对所有 i成立。这就是霍赫希尔德余链复形。

定义 5.2（霍赫希尔德上同调）。上链复形 (20) 的上同调，记作 $HH^*(\mathcal{A},\mathcal{M})$，称为 $\mathcal{A}$ 在系数取自 $\mathcal{M}$时的霍赫希尔德上同调。 k 阶霍赫希尔德上同调 $\mathbb{K}$-模为

$$HH^k(\mathcal{A},\mathcal{M}) := \ker d^k / \operatorname{im} d^{k-1} \ .$$

命题 5.1. $\mathcal{A}$ 的第 0 阶霍赫希尔德同调取系数于 $\mathcal{M}$ 满足

$$HH_0(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \mathcal{M}/[\mathcal{M},\mathcal{A}] \ ,$$

其中 $[\mathcal{A},\mathcal{M}] = \{am - ma |\ a \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}\}$。特别地

$$HH_0(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathcal{A}/[\mathcal{A},\mathcal{A}] \ .$$

$\mathcal{A}$ 的第 0 阶霍赫希尔德上同调（系数取 $\mathcal{M}$ ）满足

$$HH^0(\mathcal{M},\mathcal{A}) = \{m \in M |\ am = ma,\ \forall a \in \mathcal{A}\} \ .$$

特别是,

$$HH^0(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathrm{Z}(A) \ ,$$

其中 $\mathrm{Z}(A)$ 是 $\mathcal{A}$ 的中心。

命题 5.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个交换的 $\mathbb{K}$-代数，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$-双模。那么，第一霍赫希尔德同调满足

$$HH_1(\mathcal{A},\mathcal{M}) \cong M \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{A}\,/\,\mathbb{K}}(\mathcal{A}) \ .$$

记 $\mathcal{D}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 为由满足下列条件的 $\mathbb{K}$-线性函数 $f\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 构成的空间:

$$f(ab) = af(b) + f(a)b \ .$$

记 $\mathcal{PD}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 为由如下给出的 $\mathbb{K}$-线性函数 $f_m\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 构成的空间:

$$f_m(a) = ma - am \ .$$

练习 5.2. 验证上面定义的 f_m 满足 $f_m \in \mathcal{D}(\mathcal{A},\mathcal{M})$。

命题 5.3. $HH^1(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \mathcal{D}(\mathcal{A},\mathcal{M})/\mathcal{PD}(\mathcal{A},\mathcal{M})$。

5.2 利希内罗维茨–泊松上同调

令 $\mathcal{A}$ 为一个带有泊松括号 $\{-,-\}$ 的交换泊松代数，并考虑按如下方式定义的 $\Lambda(\mathcal{D}(\mathcal{A})) = \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$。对于 $k = 0$，我们定义$\Lambda^0(\mathcal{D}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。元素 $X \in \Lambda^k(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ $k > 0$ 是一个多线性、反对称映射

$$X\colon\ \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}$$

以及映射 $\partial_X\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 给出

$$\partial_X(a) := X(a, a_1, \ldots, a_{k-1})$$

是一个导子。

施outen-尼延豪斯括号。设 $X, Y \in \Lambda(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 是可分解的,

$$X = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \qquad\qquad Y = y_1 \wedge \ldots \wedge y_l \ ,$$

其中所有 $x_i, y_j \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$。施outen-尼延豪斯括号 $[\![-,-]\!]$ 定义为

$$[\![X, Y]\!] := \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [x_i, y_j] x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x_i} \wedge \ldots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge \hat{y_j} \wedge \ldots \wedge y_l \ ,$$

其中 $[-,-]$ 是微分算子的交换子，并且上述定义在线性意义下扩展到整个 $\Lambda(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$。

练习 5.3. 证明施outen-尼延豪斯括号 $[\![-,-]\!]$ 对所有$P, Q \in \Lambda(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 都满足

$$[\![P, Q]\!] = (-1)^{\deg P \deg Q} [\![Q, P]\!] \tag{21}$$

泊松算子。设 $\pi \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 为由（18）定义的泊松双导子。于是施outen-尼延豪斯括号给出一个元素 $[\![\pi, \pi]\!] \in \Lambda^3(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$。

命题 5.4. 泊松括号 (46) 的雅可比恒等式意味着 3-导子的平凡性:

$$[\![\pi, \pi]\!] = 0 \ . \tag{22}$$

习题 5.4. 证明上述命题。

方程 (22) 有时称为泊松主方程。它可以解释为算子 δ_π 的幂零条件（${\delta_\pi}^2 = 0$）： $\Lambda(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \to \Lambda(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$，其定义如下:

$$\delta_\pi X = [\![\pi, X]\!] \ .$$

算子 δ_π 称为 Lichnerowicz-泊松算子，并由此引出以下上同调概念。

定义 5.3（Lichnerowicz-Poisson 上同调）。链复形

$$\ldots \xrightarrow{\delta_\pi} \Lambda^{k-1}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\delta_\pi} \Lambda^k(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\delta_\pi} \Lambda^{k+1}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\delta_\pi} \ldots \ ,$$

称为 Lichnerowicz-Poisson 上同调，记作 $HP^*(\mathcal{A})$。

用泊松括号表示时，利希内罗维茨–泊松算子可以改写为

$$(\delta_\pi X)(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_i (-1)^i \{a_i, X(a_0, a_1, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_k)\} \tag{23}$$

$$+ \sum_{0 \le i < j} X(\{a_i, a_j\}, a_1, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, \hat{a_j}, \ldots, a_k) \ . \tag{24}$$

5.3 低维泊松上同调

$k=0$: 算子 $\delta_\pi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{D}(\mathcal{A}))\cong\Lambda^1(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 的作用为 $a\mapsto\partial_a=\{-,a\}$，其中 $a\in\mathcal{A}$ 可以视为哈密顿导子 $\{-,a\}$ 的哈密顿量。我们有

$$HP^0\cong \mathrm{Cas}(\mathcal{A})$$

因为仅当 $a\in$ Cas($\mathcal{A}$) 时，对于所有 $b\in\mathcal{A}$，$\delta_\pi(a)(b)=0$。$HP^0\cong$Cas($\mathcal{A}$) 的元素称为具有零动力学的哈密顿量。

$k=1$: 1-余边界是一个导子 $X\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$，它是某个元素 $a\in\mathcal{A}$ 的哈密顿导子 ∂_a。1-余循环是一个元素 $X\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$，使得。

$$\delta_\pi(X)=0\Rightarrow[\![\pi,X]\!]=0\ .$$

满足 $\delta_\pi(X)=0$ 的导子 $X\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 被称为泊松导子或正则导子。所有此类元素的集合记为 Can($\mathcal{A}$)。方程 $[\![\pi,X]\!]=0$ 表示泊松结构沿 X 保持不变。若记 $L_X\pi=[\![\pi,X]\!]$，则容易证明，

$$<L_X\pi,\underline{\mathrm{d}}\,a\wedge\underline{\mathrm{d}}\,b>=L_X<\pi,\underline{\mathrm{d}}\,a\wedge\underline{\mathrm{d}}\,b>\ .$$

定理 5.1（经典力学基本定理）。

$$HP^1(\mathcal{A})\cong \mathrm{Can}(\mathcal{A})/\,\mathrm{Ham}(\mathcal{A})\ ,$$

其中 Ham($\mathcal{A}$) 由（11）给出。

例 5.1（多项式代数 [28] 上的哈密顿导子）。考虑带有泊松括号 $\{x_1,x_2\}=x_2$ 的 $\mathcal{A}=\mathbb{K}[x_1,x_2]$。那么，如果 $\partial\in$ Ham($\mathcal{A}$) $\subset\mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\partial=\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\tag{25}$$

并且存在 $h\in\mathcal{A}$ 使得

$$\partial=\partial_h=\{-,h\}\ .$$

我们将计算系数 α_i，使上述等式成立。我们有

$$\{x_1,h\}=\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2}-\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1}=\frac{\partial h}{\partial x_2}\ .$$

类似地，我们得到

$$\{x_2,h\}=-\frac{\partial h}{\partial x_1}\ .$$

对于 $f\in\mathcal{A}$，与 h 的括号为

$$\{f,h\}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\{x_1,h\}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\{x_2,h\}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1}\ .$$

由（25）可得

$$\partial(f) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \ ,$$

因此，要有 $\partial = \partial_h$，必须有

$$\alpha_1 = \frac{\partial h}{\partial x_2} \ , \qquad\qquad \alpha_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} \ .$$

这意味着， $\mathcal{A}$ 上的哈密顿导子集合由以下内容给出。

$$\mathrm{Ham}(\mathcal{A}) = \{ \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} | \ h \in \mathcal{A} \} \ .$$

练习 5.5。考虑前一个例子中的 $\mathcal{A}$ 。证明：

$$\mathrm{Can}(\mathcal{A}) / \mathrm{Ham}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{K}$$

提示：检查如果 $\partial = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathsf{Can}(\mathcal{A})$，那么

$$\alpha_1 = c + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}$$
$$\alpha_2 = -x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1}$$

其中 $c \in \mathbb{K}$。

例 5.2. 考虑集合

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{D}^p(\mathcal{A}), \mathcal{A})) = \{ \varphi \colon \ \mathcal{D}^p(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \ | \ \varphi \ \text{multilinear} \} \ .$$

上述集合中的元素不仅对所有 p 变量都是 $\mathbb{K}$-线性的，而且在每个变量上都是一个 $\mathbb{K}$-导子。回顾一下， $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的 $\mathbb{K}$-导子组成的 $\mathcal{A}$-模。

5.3.1 相容泊松结构

作为 Lichnerowicz-Poisson 上同调的一个有用应用，我们来考察以下关于相容泊松结构的描述。

定义 5.4. 由双导子 π 和 θ 给出的两个泊松结构相容，当且仅当对于所有 $\lambda \in \mathbb{K}$、 $\pi + \lambda\theta$ ， $\lambda \in \mathbb{K}$ 和 $\pi + \lambda\theta$ 仍然是泊松结构。

作为上述定义的直接推论，我们得到以下命题。

命题 5.5. 如果两个泊松结构 $\pi, \theta \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 相容，那么

$$[\![\pi, \theta]\!] = 0$$

等价地，如果 π 和 θ 相容，那么它们在以下意义下对余导子封闭

$$\delta_\pi \theta = \delta_\theta \pi = 0 \ .$$

练习 5.6。证明命题 5.5。

注意，如果 $[\![\pi,\theta]\!]=0$，那么对所有 $\lambda\in\mathbb{K}$

$$[\![\pi+\lambda\theta,\pi+\lambda\theta]\!]=0\ .$$

固定一个双导子 π。考虑 π 沿着 $X\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的李导数

$$L_X\pi:=[\![\pi,X]\!]\in\Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)\ .$$

设 π 是一个泊松双导子（即它对应于一个泊松结构）。那么 $L_X\pi$ 称为泊松结构的无穷小变形。现在考虑如下形式的 π 的变形

$$\pi\mapsto\pi+L_X\pi\ .$$

根据假设，我们有 $[\![\pi,\pi]\!]=0$，因为 π 给出了一个泊松结构。如果假设该变形也给出一个泊松结构，那么括号的分次反对称性（见 (21)）给出

$$0=[\![\pi+L_X\pi,\pi+L_X\pi]\!]=2[\![\pi,L_X\pi]\!]+[\![L_X\pi,L_X\pi]\!]\ .$$

记 $\gamma:=L_X\pi$，并回忆 $[\![\theta,X]\!]=\delta_\theta(X)$。那么上式可以写成

$$\delta_\pi\gamma+\frac{1}{2}[\![\gamma,\gamma]\!]=0\ .$$

这个方程称为 Maurer-Cartan 方程（对于微分分次代数$\Lambda\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)$）。

5.3.2 $HP^2(\mathcal{A})$ 的解释

设 $\pi\in\Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)$，并考虑 δ_π 的像：$\Lambda^1\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)\to\Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)$，其定义为

$$B_\pi{}^2=\{\theta\in\Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)\mid\theta=[\![\pi,X]\!]\text{ for some }X\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\}\ ,$$

δ_π：$\Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)\to\Lambda^3\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)$ 的核为

$$Z_\pi{}^2=\{\theta\in\Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)\mid[\![\pi,\theta]\!]=0\}\ .$$

根据定义

$$HP^2(\mathcal{A})=Z_\pi{}^2/B_\pi{}^2\ .$$

我们有如下命题，它给出了对第二个 Lichnerowicz-Poisson 上同调的解释。

命题 5.6（[18]）。如果 $\pi \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 是泊松双导子（$[\![\pi,\pi]\!]=0$），且 $HP^2(\mathcal{A})=0$，那么所有与 π 相容的结构的集合

$$\mathrm{Comm}(\pi) := \{\theta \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \mid [\![\theta,\theta]\!] = [\![\pi,\theta]\!] = 0\} \tag{26}$$

是沿着 $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的 π 无穷小变形集合。也就是说，满足以下条件的 $\theta = L_X\pi$

$$L_X{}^2(\theta) = L_Y\pi$$

对于某个 $Y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，其中 $L_X{}^2 = L_X \circ L_X$。

证明。令 $\theta \in \mathrm{Comm}(\pi)$，则 $\delta_\pi\theta = 0$，因此

$$\mathrm{Comm}(\pi) \subset \ker \delta_\pi \ .$$

若 $\theta = \delta_\pi X$，则 $0 = [\theta] \in HP^2(\mathcal{A})$。假设 $\theta \in \mathrm{Comm}(\pi)$ 且 $HP^2(\mathcal{A}) = 0$。则 $\theta = \delta_\pi X = [\![\pi, X]\!] = L_X\pi$。但与此同时 $[\![\theta,\theta]\!] = [\![L_X\pi, L_X\pi]\!] = 0$。这等价于 $(L_X \circ L_X)(\theta) \in \ker \delta_\pi$，因为

$$L_X\left(L_X\pi\right) = L_X\left([\![\pi, X]\!]\right) = [\![[\![\pi, X]\!], X]\!] = [\![\theta, X]\!] \ ,$$

and

$$\delta_\pi\left([\![\theta, X]\!]\right) = \delta_\pi\left(\delta_\theta X\right) = -\delta_\theta\left(\delta_\pi X\right) = [\![\delta_\pi X, \delta_\pi X]\!] = 0 \ .$$

因此，若 $HP^2(\mathcal{A}) = 0$，则存在 $Y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，使得 $L_X{}^2\theta = L_Y(\pi) = \delta_\pi(Y)$。 □

由此可得一个映射

$$\tau\colon \mathrm{Comm}(\pi) \to HP^2(\mathcal{A})$$

and

$$\tau(\theta) = 0 \iff \theta = \delta_\pi(X)$$

对于某个 $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$。$\tau$ 的像由以下命题描述。

命题 5.7。设 $\partial \in HP^2(\mathcal{A})$。则

$$\partial \in \mathrm{im}\,\tau \iff \partial = \Delta + \delta_\pi\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \ ,$$

其中，类 ∂ 的代表元 $\Delta \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 满足

1. $[\![\partial,\partial]\!] = [\![\Delta,\Delta]\!] = \partial_\pi(\alpha)$，其中 $\alpha \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$；2. 存在 $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，使得 $\alpha + 2L_X(\Delta) - L_X{}^2(\pi) = \ker \delta_\pi$。

证明。令 $\Delta \in \Lambda^2(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 满足

$$\partial = \Delta + \delta_\pi\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \in HP^2(\mathcal{A}) \ .$$

如果 $\partial \in \mathrm{im}\ \tau$，那么存在一个 $\theta \in \mathrm{Comm}(\pi)$（见 (26)），使得

$$\tau(\theta) = \Delta + \delta_\pi\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \ .$$

因为

$$0 = [\![\partial, \partial]\!] \Rightarrow [\![\Delta, \Delta]\!] = \partial_\pi(\alpha) \in HP^3(\mathcal{A})$$

以及 $\tau[\![\theta, \theta]\!] = 0$，我们有

$$\begin{aligned}
[\![\tau(\theta), \tau(\theta)]\!] &= [\![\Delta + \delta_\pi(X), \Delta + \delta_\pi(X)]\!] \\
&= [\![\Delta, \Delta]\!] + [\![\Delta, \delta_\pi(X)]\!] + [\![\delta_\pi(X), \Delta]\!] + [\![\delta_\pi(X), \delta_\pi(X)]\!] \\
&= \delta_\pi(\alpha) - [\![\Delta, L_X\pi]\!] - [\![L_X\pi, \Delta]\!] - \delta_\pi {L_X}^2(\pi) \\
&= \delta_\pi\left(\alpha - {L_X}^2(\pi)\right) - 2[\![L_X\pi, \Delta]\!] \\
&= \delta_\pi\left(\alpha - {L_X}^2(\pi)\right) - 2[\![[\![\pi, X]\!], \Delta]\!] \\
&= \delta_\pi\left(\alpha + 2L_X(\Delta) - {L_X}^2(\pi)\right) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

因为 $[\![\tau(\theta)\ \tau(\theta)]\!] = 0$。 □

5.4 泊松同调

下面的构造归功于 Brylinski [7] and [17]。设 $\mathcal{A}$ be 一个交换的 $\mathbb{K}$-代数，$\Omega(\mathcal{A}) = \Lambda(\Omega^{\mathcal{A}/\mathbb{K}})$ 是 $\mathcal{A}$ 的外代数。边界态射 d_π: $\Omega^k(\mathcal{A}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{A})$ 由以下“类似同伦”的公式定义。

$$d_\pi\omega = (i_\pi \circ \underline{\mathrm{d}})(\omega) - (\underline{\mathrm{d}} \circ i_\pi)(\omega) \ , \tag{27}$$

其中 i_π 是关于 π的缩并算子，即 $.i_\pi := <\pi, ->$。很容易验证，该算子满足 $d_\pi \circ d_\pi = 0$。在坐标中，我们可以通过一般公式描述可分解的 $\omega = a_0$上的 d_π，$\underline{\mathrm{d}}\, a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$

$$\begin{aligned}
d_\pi\omega = &\sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l+1}\{a_0, a_i\} \wedge \underline{\mathrm{d}}\, a_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\underline{\mathrm{d}}} a_l \wedge \ldots \wedge \underline{\mathrm{d}}\, a_{k+1} \\
&- \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\, \underline{\mathrm{d}}\left(\{a_i, a_j\}\right) \wedge \underline{\mathrm{d}}\, a_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\underline{\mathrm{d}}} a_i \wedge \ldots \wedge \hat{\underline{\mathrm{d}}} a_j \wedge \ldots \wedge \underline{\mathrm{d}}\, a_{k+1} \ .
\end{aligned}$$

根据定义，

$$d_\pi(a_0 da_1) = i_\pi(da_0 \wedge da_1) = \{a_0, a_1\} \ .$$

注意，三元组 a_0, a_1, a_2满足雅可比恒等式

$$\{a_0, \{a_1, a_2\}\} + \{a_1, \{a_2, a_O\}\} + \{a_2, \{a_0, a_1\}\} = 0$$

意味着 $(d_\pi)^2 = 0$。

5.5 对偶性

设 π 是 $\mathcal{A}$ 上的辛（或非退化）泊松结构，也就是说，哈密顿映射

$$\Gamma_\pi \colon \Omega^1_{\mathcal{A}\,/\,\mathbb{K}} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

定义为

$$\Gamma_\pi(\alpha) =< \pi, \alpha >\in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

是一个同构，并且存在逆映射 ${\Gamma_\pi}^{-1}\colon\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A})$。其逆映射为

$${\Gamma_\pi}^{-1}(\partial) = \alpha_\partial \text{ such that } < \pi, \alpha_\partial >= \partial \ .$$

在这种情况下，可以验证

$$\delta_\pi = \Gamma_\pi \circ \underline{\mathrm{d}} \circ {\Gamma_\pi}^{-1} \ ,$$

其中 δ_π 是利希内罗维茨–泊松算子。上面的方程是符号性的。可以通过以下交换图更精确地描述它。

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Gamma_\pi} & \Lambda^1\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \\ \underline{\mathrm{d}}\downarrow & & \downarrow\delta_\pi \\ \Omega^2(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Lambda^2\Gamma_\pi} & \Lambda^2\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \end{array}$$

这对于任意泊松双导子 π 都成立。

命题 5.8. 对于一般的 k，下图交换

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Lambda^k\Gamma_\pi} & \Lambda^k\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \\ \underline{\mathrm{d}}\downarrow & & \downarrow\delta_\pi \\ \Omega^{k+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Lambda^{k+1}\Gamma_\pi} & \Lambda^{k+1}\left(\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \end{array}$$

证明. 为了检验该图的交换性，考虑可分解的 $\omega = a_0\,\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ a_k \in \Omega^k(\mathcal{A})$。于是

$$\Lambda^{k+1}\Gamma_\pi(\underline{\mathrm{d}}\,\omega) = \Lambda^{k+1}\Gamma_\pi(\underline{\mathrm{d}}\,a_0 \wedge \underline{\mathrm{d}}\,a_1 \wedge \ldots \wedge \underline{\mathrm{d}}\,a_k) = \partial_{a_0} \wedge \partial_{a_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{a_k} \ ,$$

and

$$\begin{aligned} \delta_\pi(\Lambda^k\Gamma_\pi(\omega)) &= \delta_\pi(a_0\,\partial_{a_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{a_k}) \\ &= -[\![a_0\,\partial_{a_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{a_k}, \pi]\!] \\ &= -[\![a_0, \pi]\!] \wedge \partial_{a_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{a_k} \\ &= \partial_{a_0} \wedge \partial_{a_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{a_k} \ . \end{aligned}$$

由于上述结论可以线性延拓，因此该图交换。 □

注记 5.1. 如果 $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ 是光滑流形 M 上光滑函数的代数，那么已在 [7] 中证明:

$$HP_k(\mathcal{A}) \cong HP^{2n-k}(\mathcal{A}) \ .$$

此外，根据命题 5.8，后一个群与德拉姆上同调同构。

$$HP^{2n-k}(\mathcal{A}) = H^{2n-k}_{DR}(M) \ .$$

在下面的引理中，我们使用分次代数中的分次交换子这一概念。

$$[\partial_1, \partial_2] := \partial_1 \circ \partial_2 - (-1)^{\deg \partial_1 \deg \partial_2} \partial_2 \circ \partial_1 \ .$$

我们有 $\deg d_\pi = -1$、$\deg \underline{\mathrm{d}} = 1$、$\deg i_\pi = -2, L_\pi = 1$

引理 5.1. 算子 d_π: $\Omega^k(\mathcal{A}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{A})$ 与 d 和 i_π 在分次意义下可交换，即。

$$[d_\pi, \underline{\mathrm{d}}] = d_\pi \circ \underline{\mathrm{d}} + \underline{\mathrm{d}} \circ d_\pi = 0 \ ,$$
$$[d_\pi, i_\pi] = d_\pi \circ i_\pi - i_\pi \circ d_\pi = 0 \ .$$

证明。为证明第一个等式，我们使用 d_π 的定义（见 (27)）以及 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$。然后

$$(i_\pi \circ \underline{\mathrm{d}} - \underline{\mathrm{d}} \circ i_\pi) \circ \underline{\mathrm{d}} + \underline{\mathrm{d}} \circ (i_\pi \circ \underline{\mathrm{d}} - \underline{\mathrm{d}} \circ i_\pi) = -\underline{\mathrm{d}} \circ i_\pi \circ \underline{\mathrm{d}} + \underline{\mathrm{d}} \circ i_\pi \circ \underline{\mathrm{d}} = 0$$

因此 $[d_\pi, \underline{\mathrm{d}}] = 0$。第二个方程同理。

$$[d_\pi, i_\pi] = [L_\pi, i_\pi] = i_{[\pi,\pi]} = 0 \ .$$

□

注记 5.2。当 $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ 中 M 是一个光滑的泊松流形时，我们将在后面的章节中看到上述所有恒等式以及更一般的恒等式。

例 5.3（零阶泊松同调）。对于 d^0_π 的核：$\Omega^0(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \to 0$，显然有 $\ker d^0_\pi \cong \mathcal{A}$。对于 d^1_π 的像：$\Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^0(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A}$，我们有 $\operatorname{im} d^1_\pi = \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}$。这是因为 $\Omega^1(\mathcal{A})$ 由元素 $a_0 da_1$ 构成，其中a_0、$a_1 \in \mathcal{A}$ 任意，并且

$$d^1_\pi(a_0 da_1) = \{a_0, a_1\} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\} \ .$$

因此

$$HP_0(\mathcal{A}) \cong A/\{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}$$

高阶同调群没有简单的解释，$k > 0$。

6 多项式泊松代数

设 $\mathcal{A}=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 为复数上的多项式代数。如果 x_i 是 $\mathcal{A}$的一个生成元，那么 $\partial_i:=\frac{\partial}{\partial x_i}\in\mathcal{D}(\mathcal{B})$。向量算子 $\nabla:=(\partial_1、\ldots\ldots、\partial_n)$称为梯度。可以将 n 个元素 $f_1、\ldots\ldots、f_n\in\mathcal{A}$ 的雅可比矩阵定义为

$$\mathrm{Jac}(f_1,\ldots,f_n):=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right).$$

行列式 det(Jac($f_1,\ldots,f_n$)) 称为雅可比行列式。显然，Jac($f_1,\ldots,f_n$) 的第 i 行是 $\nabla(f_i)$。

6.1 南布-雅可比-泊松代数

.

现在固定 $f_1,\ldots,f_{n-2}\in\mathcal{A}$，并定义如下双线性运算$\{-,-\}$: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, 它在多项式代数 $\mathcal{A}$上诱导出一种泊松代数结构，称为南布-泊松-雅可比结构。

定义 6.1. $F,G\in\mathcal{A}$ 的 Nambu-Jacobi-Poisson 括号为

$$\{F,G\}:=\det\mathrm{Jac}(F,G,f_1,\ldots,f_{n-2})\in\mathcal{A}\ . \tag{28}$$

当 $\mathcal{A}=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$时，只有一个 f 决定 Nambu-Jacobi-Poisson 括号，我们将该括号记为 $\{-,-\}_f$。下面给出一个初等引理。

引理 6.1. 对于 $1\le i\le n$和 $f_1,\ldots,f_{i-1},f_{i+1},\ldots,f_n\in\mathcal{B}$，运算$D$: $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 由 $D(g):=$Jac($f_1,\ldots,f_{i-1},g,f_{i+1},\ldots,f_n$) 给出，是$\mathcal{B}$的一个导子。

定理 6.1. 括号 (28) 是 $\mathcal{A}$ 上的泊松括号。

证明. 对任意 n 证明此定理时，我们注意到，反对称性由 det 的反对称性显然可得，莱布尼茨法则则由引理 6.1 得出，因此唯一非平凡的论断如常所示是雅可比恒等式。但这可由南布括号 $\{f_1,\ldots,f_n\}$:=Jac($f_1,\ldots,f_n$) 的基本恒等式推出（见下文 (29)）。 □

多项式代数上的代数括号结构有一个有趣的性质，由以下定理给出。

命题 6.1。如果 $f_1,\ldots,f_{n-2}$ 在 $\mathbb{C}$ 上代数相关，那么 $\{-,-\}=0$。

证明。证明留作读者的一道简单练习。 □

注 6.1. 若将 F, G 视为有理函数，则括号 (28) 的结果仍是多项式。考虑对（方便的）理想 $\mathcal{B} := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/ < p_1, \ldots, p_k >$ 取商，其中 $p_i \in \mathcal{A}$。那么定理 6.1 仍然成立，即括号 (28) 在 $\mathcal{B}$ 上给出了泊松代数结构。这在幂级数环 [3] 这一更一般的情形下同样成立。

Nambu-Jacobi-Poisson 括号是一个特殊的（$n-m$）元运算

$$\{F_1, \ldots, F_{n-m}\} := \lambda \det \mathrm{Jac}(F_1, \ldots, F_{n-m}, f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{A} \ ,$$

其中 $\lambda, F_i \in \mathcal{A}$ 对所有 i 均成立。上述多重括号 $\{-, \ldots, -\}$: $\mathcal{A}^{\otimes(n-m)} \to \mathcal{A}$ 对每个置换 σ 都满足反对称条件

$$\{F_1, \ldots, F_{n-m}\} = (-1)^\sigma \{F_{\sigma(1)}, \ldots, F_{\sigma(n-m)} \ .$$

它在每个自变量上也满足莱布尼茨法则

$$\{hF_1, \ldots, F_{n-m}\} = F_1\{h, \ldots, F_{n-m}\} + h\{F_1, \ldots, F_{n-m}\} \ ,$$

以及基本恒等式

$$\{F_1, \ldots, F_{n-m-1}, \{G_1, \ldots, G_{n-m}\}\} = \tag{29}$$

$$= \sum_k \{G_1, \ldots, G_{k-1}, \{F_1, \ldots, F_{n-m-1}, G_k\}, G_{k+1}, \ldots, G_{n-m}\} \ , \tag{30}$$

这是雅可比恒等式的推广（当 $n - m = 2$ 时，雅可比恒等式和 Nambu-Jacobi-Poisson 括号得以恢复）。有关南部结构及其推广的更多细节，请参见 [3]。

现在考虑一个定义在 $\mathcal{A}$ 上的（$n-2$）$\times 2$ 矩阵

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-2,1} & \ldots & 0a_{n-2,n} \end{pmatrix} .$$

ˆ 假设 $i \neq j$，并用 M_{ij} 表示删除第 i 列和第 j 列后得到的矩阵（因此结果是一个 $(n-2) \times (n-2)$ 矩阵）。若我们选择

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_n} \end{pmatrix} ,$$

那么，对于 $\mathcal{A}$ 的生成元，我们有

$$\{x_i, x_j\} = (-1)^{i+j-1} \det \hat{M}_{ij}$$

并且我们定义 $\{x_i, x_i\} = 0$。

例 6.1。令 $n=3, f=\frac{1}{3}({x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3)+\tau x_1x_2x_3$，其中 $\tau\in\mathbb{C}$。则 $\{x_i,x_j\}=\mathrm{Jac}(x_i,x_j,f)=z{x_i}{x_j}+{x_k}^2$，其中 (i,j,k) 是$\{1,2,3\}$的一个排列。

例 6.2（Sklyanin 椭圆泊松括号）。令 $n=4$，并考虑 $f_1=q_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$ $f_2=q_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$，其中 q_1,q_2 是二次多项式。选择 $q_1={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2$ 和 $q_2=\alpha{x_2}^2+\beta{x_3}^2+\gamma{x_4}^2$ 使得 $\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma\neq 0$，我们得到原始的 Sklyanin-泊松结构 [3,24,25]。

6.2 泊松–卡拉比–丘代数

这是一个雅可比代数 $\mathcal{A}=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$，带有 $f=-{x_1}^2x_3$ [4]。Nambu- Jacobi-泊松括号 (28) 是

$$\{x_1,x_2\}_f=-{x_1}^2,\qquad \{x_2,x_3\}_f=-2x_1x_3,\qquad \{x_1,x_3\}_f=0\ .$$

有趣的是，代数 $\Omega^1(\mathcal{A})=\mathcal{A}<dx_1,dx_2,dx_3>$（可以将其视为 A 上的自由代数）也是一个泊松代数，其具有

$$\begin{aligned}\{dx_1,dx_2\}_\Omega&=d\{x_1,x_2\}_f=-2x_1dx_1\ ,\\ \{dx_2,dx_3\}_\Omega&=d\{x_2,x_3\}_f=-2x_3dx_1-2x_1dx_3\ ,\\ \{dx_1,dx_3\}_\Omega&=d\{x_1,x_3\}_f=0\ .\end{aligned}$$

存在一个相应的序列 [19]

$$\begin{array}{ccccccccccc}0&\longrightarrow&\Omega^0(\mathcal{A})&\xrightarrow{\mathrm{d}}&\Omega^1(\mathcal{A})&\xrightarrow{\mathrm{d}}&\Omega^2(\mathcal{A})&\xrightarrow{\mathrm{d}}&\Omega^3(\mathcal{A})&\longrightarrow&0\\ &&\downarrow\cong&&\downarrow\cong&&\downarrow\cong&&\downarrow\cong&&\\ 0&\longleftarrow&\Lambda^0((\mathcal{D}(\mathcal{A}))&\xleftarrow{d_\pi}&\Lambda^1((\mathcal{D}(\mathcal{A}))&\xleftarrow{d_\pi}&\Lambda^2((\mathcal{D}(\mathcal{A}))&\xleftarrow{d_\pi}&\Lambda^3((\mathcal{D}(\mathcal{A}))&\longleftarrow&0\end{array}$$

其中 d 是泛导数（见（15）），d_π 由（27）给出。这些同构来自对偶性（16）。

6.2.1 PCY代数的低维上同调

.

考虑上述序列，我们首先注意到 $\Lambda^0((\mathcal{D}(\mathcal{A}))\cong\mathcal{A}$ 和$\Lambda^1((\mathcal{D}(\mathcal{A}))\cong\mathcal{D}(\mathcal{A})$，因此第一个映射等价于映射 $\mathcal{A}\to\mathcal{D}(\mathcal{A})$，而$\delta_\pi(a)=[\![\pi,a]\!]=\partial_a\in\mathrm{Ham}(\mathcal{A})$ 是一个哈密顿导子。因此 $\delta_\pi(a)=0$ 当且仅当a 是 $\mathcal{A}$ 的卡西米尔元（见定义 (12)），并且我们有

$$HP^0(\mathcal{A})\cong\mathrm{Cas}(\mathcal{A})=<{x_1}^2x_3>_{\mathcal{A}}\ ,$$

其中，$\mathrm{Cas}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的卡西米尔元素。对于第一上同调，考虑$\partial\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$，我们有 $\delta_\pi(\partial)=[\![\pi,\partial]\!]=-[\![\partial,\pi]\!]=\mathcal{L}_\partial\pi$。因此我们看到，$\partial\in\ker\ \delta_\pi$当且仅当 $\mathcal{L}_\partial\pi=0$，这意味着 π 关于 ∂ 是不变的。我们在计算更一般代数的低维泊松上同调的章节中已经遇到过这些算子：这类算子的集合记为 $\mathrm{Can}(\mathcal{A})$，而 ∂ 被称为泊松规范的。第一上同调是

$$HP^1(\mathcal{A})=\mathrm{Can}(\mathcal{A})/\mathrm{Ham}(\mathcal{A})\ .$$

6.3 对偶泊松复形

考虑链复形

$$\Lambda^3((\mathcal{D}(\mathcal{A})) \xrightarrow{d_\pi} \Lambda^2((\mathcal{D}(\mathcal{A})) \xrightarrow{d_\pi} \Lambda^1((\mathcal{D}(\mathcal{A})) \xrightarrow{d_\pi} \Lambda^0((\mathcal{D}(\mathcal{A}))\ .$$

该复形由 Brylinski 在 [7] 中引入。它具有高度非平凡的（泊松）同调。例如，最低阶同调为

$$HP_0(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A}\ /\ <\{a,b\}_f|\ a,b\in\mathcal{A}>_{\mathcal{A}}\ ,$$

由于 $\Lambda^0((\mathcal{D}(\mathcal{A}))\ =\mathcal{A}$ 以及 δ_π 的像： $\Lambda^1((\mathcal{D}(\mathcal{A}))\ \to \Lambda^0((\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ 由 $\delta_\pi(adb)$ $=\{a,b\}_f$ 给出。根据 $\mathcal{A}$ 上 Nambu-Jacobi-Poisson 括号的定义，我们得到

$$\{a,b\}_f = \det\begin{pmatrix}\partial_1 a & \partial_2 a & \partial_3 a\\ \partial_1 b & \partial_2 b & \partial_3 b\\ \partial_1 f & \partial_2 f & \partial_3 f\end{pmatrix}$$

记 $\nabla a = (\partial_1 a, \partial_2 a, \partial_3 a)$，我们可以将 $\{a,b\}_f$ 表示为

$$\{a,b\}_f = \nabla f\cdot(\nabla a\times\nabla b)\ ,$$

其中，$\cdot$ 是点积，$\times$ 是向量积。关于对偶泊松复形的泊松（上）同调的更多细节，可参见 [8]。

练习 6.1。用向量分析运算描述上述复形中的所有微分： ∇、旋度 $\times$、$(-,-)$、散度。

广义 SPDUNR 泊松代数。以下是广义 Sklyanin-Painlev´e-Dubrovin-Ugaglia-Nelson-Regge 泊松代数： $\mathcal{A}_f$ $=(\mathbb{C}[x_1,x_1,x_3],\{-,-\}_f)$，其中 $\{-,-\}_f$ 是 $\mathbb{C}^3$ 上的雅可比行列式泊松-南布结构（见（28））， 且 $F,G\in\mathbb{C}[x_1,x_1,x_3]$。令 M_f 为

$$f = x_1x_1x_3 + \sum_{i=1}^{3} a_i {x_i}^3 - \sum_{i=1}^{3}\epsilon_i {x_i}^2 + \sum_{i=1}^{3} c_i x_i + \omega\ ,$$

其中 $\epsilon_i\in\{0,1\}$ 且 $a_i, c_i, \omega\in\mathbb{C}$。括号定义为

$$\{f,x_i\}_f := 0, \text{for } i=1,2,3\ ,$$

and

$$\{x_1,x_2\}_f := x_1x_2 + 3a_3{x_3}^2 - 2\epsilon_3 x_3 + b_3\ ,$$

对于其他 x_i、 x_j，结果在 (1, 2, 3) 中是循环的。对于一般约束集，括号在 M_f 上处处不为零。

7 分次泊松代数

设 $\mathcal{A}$ 是一个泊松代数。我们假设 $\mathcal{A}$ 是一个结合律的分次代数，也就是说， $\mathcal{A}$ 包含一组向量子空间 $(\mathcal{A}^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，使得 $A=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{A}^k$ 且对所有 k、$l\in\mathbb{N}_0$ 都有 $\mathcal{A}^k\cdot\mathcal{A}^l\subset\mathcal{A}^{k+l}$。此外，我们假设 $\mathcal{A}_0:=\mathbb{K}$。

定义 7.1. 设 $d\in\mathbb{N}_0$ 为任意对象。若 $\forall a\in\mathcal{A}^k, b\in\mathcal{A}^l$: $\{a,b\}\in\mathcal{A}^{k+l-d}$（对于 $n<0$，定义 $A^n=0$），则称 $\mathcal{A}$ 为次数为 d 的分次泊松代数。

分次泊松代数可以由非交换、结合、含幺代数 $\mathcal{U}$构造而成，这些代数带有过滤:

$$\mathcal{U}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{U}_k,\ \text{where } 1\in\mathbb{K}=\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}_1\subset\cdots\subset\mathcal{U}_k\subset\ldots.$$

对于每个这样的代数 $\mathcal{U}$，我们可以定义伴随分次代数 $\mathcal{S}=\mathrm{gr}(\mathcal{U})$, $\mathcal{S}=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{S}_k$，其中 $\mathcal{S}_k:=\mathcal{U}_k/U_{k-1}$, $k\geq 1$，且 $\mathcal{S}_0:=\mathcal{U}_0=\mathbb{K}$。我们用 gr_k: $\mathcal{U}_k\to\mathcal{S}_k$ 表示典范投影。若对所有 $u\in\mathcal{U}_k, v\in\mathcal{U}_l$，都有 $uv-vu\in\mathcal{U}_{k+l-d}$（定义 $\mathcal{U}_k=0$ for$k<0$），则 $\mathcal{U}$是次数为 $d\geq 1$ 的分次泊松代数。

命题 7.1. 由次数为 d 的分次代数$\mathcal{U}$ 给出的伴随分次代数 $\mathcal{S}$是次数为 d 的分次泊松代数。

证明. 由于典范投影 gr_k: $\mathcal{U}_k\to S_k$ 是满射，对每个$a\in\mathcal{S}$，都存在 $k\in\mathbb{N}_0$ 使得 $a\in\mathcal{S}_k$，因此存在 $u\in\mathcal{U}_k$，使得 $a=\mathrm{gr}_k(u)$。设 $b\in\mathcal{S}_l$ 且 $v\in\mathcal{U}_l$，使得 $b=gr_l(v)$。$\mathcal{S}$ 中的乘积定义为

$$ab=gr_{k+l}(uv)\in\mathcal{S}_{k+l}\ .$$

这个乘积定义良好，因为若选取不同的代表元，例如$\tilde{a}=a+x$、$x\in\mathcal{U}_{k-1}$和 $b=b+y$、$y\in\mathcal{U}_{l-1}$，则

$$\tilde{a}\tilde{b}=(a+x)(b+y)=ab+\underbrace{ay+xb+xy}_{\in\mathcal{U}_{k+l-1}}=ab\ .$$

$\mathcal{S}$ 中的单位元与 $\mathcal{U}$中的相同，并且 $\mathcal{S}$ 的结合性也继承自 $\mathcal{U}$的结合性。因此我们看到， $\mathcal{S}$ 是一个分次代数。李括号为

$$\{a,b\}=\{\mathrm{gr}_k(u),\mathrm{gr}_l(v)\}:=gr_{k+l-d}(uv-vu)$$

其次数为 d。按照与乘积类似的论证， $\{-,-\}$ 在 $\mathcal{S}$上定义良好。由于 $ab\in\mathcal{S}_{k+l}$ 和 $ba\in\mathcal{S}_{l+k}=\mathcal{S}_{k+l}$，存在 u、$u'\in\mathcal{U}_{k+l}$，使得 $ab=\mathrm{gr}_{k+l}(u)$ $ba=\mathrm{gr}_{k+l}(u')$，因此 $ab-ba=\mathrm{gr}_{k+l}(u-u')=0$。这表明 $\mathcal{S}$中的乘积是交换的，因此 $\mathcal{S}$是次数为d的泊松分次代数。 □

$\mathcal{A}$上的模结构。设 $\mathcal{A}$ 是一个带单位元 1 的交换结合律 $\mathbb{K}$-代数。$\mathrm{End}(\mathcal{A})=\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 有两种 $\mathcal{A}$-模结构：左模结构和右模结构： $\forall a,x\in\mathcal{A}$

$$l_a\varphi(x):=a\varphi(x),\qquad\qquad r_a\varphi(x):=\varphi(ax)\ . \tag{31}$$

引理 7.1。对于任意的 $a \in A$，记

$$\delta_a := r_a - l_a. \tag{32}$$

那么 δ_a 满足莱布尼茨法则

$$\delta_a(\varphi \circ \psi) = \delta_a\varphi \circ \psi + \varphi \circ \delta_a\psi \ ,$$

也就是说，$\delta_a \in \mathcal{D}(\mathsf{End}(\mathcal{A})) \subset \mathsf{Hom}(\mathsf{End}(\mathcal{A}), \mathsf{End}(\mathcal{A}))$.

证明. 对任意的 $\varphi, \psi \in \mathsf{End}(\mathcal{A})$ 和 $a, u \in \mathcal{A}$，根据定义 (32)，我们有

$$\delta_a(\varphi \circ \psi)(u) = \delta_a(\varphi(\psi(u))) = \varphi(\psi(au)) - a\varphi(\psi(u)) \ .$$

另一方面

$$\begin{aligned}(\delta_a\varphi \circ \psi + \varphi \circ \delta_a\psi)(u) &= \delta_a\varphi(\psi(u)) + \varphi(\delta_a\psi(u)) \\ &= \varphi(a\psi(u)) - a\varphi(\psi(u)) + \varphi(\psi(au) - a\psi(u)) \\ &= \varphi(\psi(au)) - a\varphi(\psi(u)) \ .\end{aligned}$$

□

引理 7.2. 对所有 $a, b \in \mathcal{A}$，$[\delta_a, \delta_b] = 0$ 成立，其中 δ_a 由 (32) 给出。

证明. 证明只需直接计算，我们将其留作习题交给读者。

□

7.1 微分算子代数

定义 7.2. 对所有 $k \in \mathbb{N}_0$，定义

$$\mathrm{Diff}_k(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{a_i \in \mathcal{A} \\ 0 \le i \le k}} \ker(\delta_{a_0} \circ \dots \delta_{a_i})$$

and

$$\mathrm{Diff}_*(\mathcal{A}) := \bigcup_{k \ge 0} \mathrm{Diff}_k(\mathcal{A}) \ ,$$

它在加法 $+$ 下构成一个阿贝尔群。于是，$\mathsf{Diff}_*(\mathcal{A})$ 继承了 $\mathsf{End}(\mathcal{A})$ 的两个$\mathcal{A}$-模结构（31）。我们将写作 $\mathsf{Diff}_*^{(+)}(\mathcal{A})$，以强调其双模结构。$\mathsf{Diff}_k(\mathcal{A})$ 的元素称为交换代数 $\mathcal{A}$ 上阶数为 $\le k$ 的微分算子。

观察 7.1. 由上述定义可直接得到，对于所有 $k \in \mathbb{N}_0$：$\mathsf{Diff}_{k-1}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Diff}_k(\mathcal{A})$。

注 7.1. 可以将上述定义推广到情形 $\varphi\colon\ P \to Q$，其中 P 和 Q 是投射的有限生成 $\mathcal{A}$-模（$0 \le k$），而 φ 是一个 $\mathcal{A}$-模同态。于是

$$\mathrm{Diff}_k(P, Q) := \{\varphi\colon P \to Q \mid \delta_{a_0} \circ \cdots \circ \delta_{a_k}(\varphi) = 0 \text{ for all } a_0, \dots, a_k \in \mathcal{A}\} \ .$$

用此记号，$\mathsf{Diff}_k(\mathcal{A}) = \mathsf{Diff}_k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$。

例 7.1（$\mathrm{Diff}_*^{(+)}(\mathcal{A})$ 上的李代数结构）。考虑 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$，其李代数结构由交换子给出

$$[\varphi,\psi]=\varphi\circ\psi-\psi\circ\varphi\ .$$

利用引理 7.1 中的导子性质，我们有

$$\delta_a[\varphi,\psi]=[\delta_a\varphi,\psi]+[\varphi,\delta_a\psi] \tag{33}$$

对所有 $a\in\mathcal{A}$ 和 $\varphi\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$均成立。因此，$\delta_a$ 在交换子上表现为一个导子。设 $\varphi,\psi\in\mathrm{Diff}_1^{(+)}(\mathcal{A})$，则由 (33) 可得

$$\delta_b\circ\delta_a[\varphi,\psi]=[\delta_a\varphi,\delta_b\psi]+[\delta_b\varphi,\delta_a\psi]\ ,$$

这不一定为零。因此 $[\varphi,\psi]\notin\mathrm{Diff}_1^{(+)}(\mathcal{A})$，这意味着 $\mathrm{Diff}_1^{(+)}(\mathcal{A})$ 不是李代数。再次应用 δ 可得

$$\delta_c\circ\delta_b\circ\delta_a[\varphi,\psi]=0\ .$$

因此 $[\varphi,\psi]\in\mathrm{Diff}_2^{(+)}(\mathcal{A})$。以类似的方式继续推导，可以证明 $\varphi\in\mathrm{Diff}_k^{(+)}(\mathcal{A})$ 与 $\psi\in\mathrm{Diff}_l^{(+)}(\mathcal{A})$ 的复合的阶为 $\leq k+l$，也就是说 $\varphi\circ\psi\in\mathrm{Diff}_{k+l}^{(+)}(\mathcal{A})$，且滤过双模 $\mathrm{Diff}_*^{(+)}(\mathcal{A})$ 是一个李代数。

注 7.2. $\mathcal{A}$-双模 $\mathcal{A}$ 模 ${}_*^{(+)}(P,P)$ 也是过滤的，因为

$$\delta(\varphi\circ\psi)=\delta(\varphi)\circ\psi+\varphi\circ\delta\psi$$

因此，次数为 $\leq k$ 的微分算子与次数为 $\leq l$ 的微分算子复合后，得到一个次数为 $\leq k+l$ 的微分算子。

$$\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,P)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Diff}_l^{(+)}(P,P)\to\mathrm{Diff}_{k+l}^{(+)}(P,P)\ .$$

例 7.2。设 $\varphi\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$，并回忆一下，$\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}$上的结合律的、交换的含幺代数。

- $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A})\overset{=}{{}_{a\in\mathcal{A}}}\bigcap$ 核 δ_a。根据定义 (32)，我们有

$$\delta_a\varphi(u)=\varphi(au)-a\varphi(u)\ .$$

因此，当且仅当对所有 a、$u\in\mathcal{A}$，有 $\varphi(au)=a\varphi(u)$ 时，$\varphi\in\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A})$。取 $u=1$ 并写成 $a=a1$，得到 $\varphi(a1)=a\varphi(1)$，这意味着 φ 完全由其在 $\mathcal{A}$ 的单位元上的值决定，从而给出

$$\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A})=\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{A}\ .$$

请注意，上述情形相当特殊。如果我们考虑 $\mathcal{A}$-模 P、Q 的情形，那么得到

$$\mathrm{Diff}_0(P,Q)=\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P,Q)\ .$$

- $\mathrm{Diff}_1(\mathcal{A}) = \bigcap\limits_{a,b\in\mathcal{A}} \ker \delta_b \circ \delta_a$, where

$$\delta_b \circ \delta_a \varphi(u) = \varphi(bau) - b\varphi(au) - a\varphi(bu) + ba\varphi(u) \ . \tag{34}$$

- $\mathrm{Diff}_2(\mathcal{A}) = \bigcap\limits_{a\ b\ 、、c\in\mathcal{A}} \ker \delta_c \circ \delta_b \circ \delta_a$，其中

$$\delta_c \circ \delta_b \circ \delta_a \varphi(u) = \varphi(bau) - b\varphi(au) - a\varphi(bu) + ba\varphi(u) \ .$$

下面这个例子的目的是说明，前面给出的交换代数 $\mathcal{A}$ 上微分算子的代数定义，与函数微分算子的标准图景相符。

例 7.3. 设 $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R})$ 是单个实变量的光滑函数代数，其代数二元运算为函数乘法。取 $\varphi = \partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$。于是

$$\delta_a \, \partial_x(u) = 0 \iff \partial_x(au) = a \, \partial_x \, u \ . \tag{35}$$

这并非对所有 $a, u \in C^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。正如预期的那样（因为 $\partial_x \notin \mathcal{A}$），上述结论意味着 $\partial_x \notin \mathrm{Diff}_0(\mathcal{A})$。另一方面，利用 (34),

$$\delta_b \circ \delta_a \varphi(u) = \partial_x(bau) - b \, \partial_x(au) - a \, \partial_x(bu) + ba \, \partial_x \, u = 0$$

对所有 $a, b, u \in C^\infty(\mathbb{R})$ 都成立，因此 $\partial_x \in \mathrm{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}))$。类似地，若取 $f \, \partial_x$，其中 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$，则

$$\delta_b \circ \delta_a f \, \partial_x(u) = f \, \partial_x(bau) - bf \, \partial_x(au) - af \, \partial_x(bu) + baf \, \partial_x \, u = 0 \ ,$$

因此 $f \, \partial_x \in \mathrm{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}))$。最后，考虑 $\partial_x^2 := \partial_x \circ \partial_x$。于是

$$\delta_b \circ \delta_a \, \partial_x^2 = \delta_b(\delta_a \, \partial_x \circ \partial_x + \partial_x \circ \delta_a \, \partial_x) = \delta_a \, \partial_x \circ \delta_b \, \partial_x + \delta_b \, \partial_x \circ \delta_a \, \partial_x \ ,$$

它并非对所有 $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$ 都为零。因此 $\partial_x^2 \notin \mathrm{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}))$。我们很容易验证

$$\delta_c \delta_b \circ \delta_a f \, \partial_x^2 = 0 \ ,$$

因此 $f \, \partial_x^2 \in \mathrm{Diff}_2(C^\infty(\mathbb{R}))$。可以证明，对于所有 $i \in \mathbb{N}_0$ 和 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$，都有 $f \, \partial_x^i \in \mathrm{Diff}_i(C^\infty(\mathbb{R}))$，其中 $\partial_x^i : \underbrace{\partial_x \circ \ldots \circ \partial_x}_{i}$ -次。由于我们有如下包含序列的包含关系

$$\mathrm{Diff}_0 \, \mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{Diff}_1 \, \mathcal{A} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathrm{Diff}_k \, \mathcal{A} \hookrightarrow \ldots \ .$$

综上可得

$$D_k := \sum_{i=0}^{k} f_i \, \partial_x^i \in \mathrm{Diff}_k(C^\infty(\mathbb{R})) \ .$$

定义 7.3。考虑商空间

$$\mathrm{Smbl}_k(\mathcal{A}) := \mathrm{Diff}_k^{(+)}(\mathcal{A}) / \mathrm{Diff}_{k-1}^{(+)}(\mathcal{A}) \ .$$

$\mathcal{A}$的符号代数是

$$\mathrm{Smbl}_*(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Smbl}_k(\mathcal{A}) \ ,$$

具有分次代数结构的

$$\mathrm{Smbl}_k \cdot \mathrm{Smbl}_l \subset \mathrm{Smbl}_{k+l}\{\mathrm{Smbl}_k, \mathrm{Smbl}_l\} \subset \mathrm{Smbl}_{k+l-1} \ .$$

注 7.3. 回想一下，对于任意滤过代数，我们都可以关联一个分次交换代数。对于滤过代数 $\mathrm{Diff}_*^{(+)}(\mathcal{A})$ 而言，符号代数 $\mathrm{Smbl}_*(\mathcal{A})$ 正是这种情形。

命题 7.2。符号代数 $\mathrm{Smbl}_*(\mathcal{A})$ 是一个次数为 1 的泊松分次代数。

练习 7.1. 1. $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(\mathcal{A})$ 是 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 中的一个 $\mathcal{A}$-子模。

2. $\mathrm{Diff}_*(\mathcal{A})$ 是 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 中的一个滤过子代数。
3. $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ 和 $\mathrm{Diff}_1(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{A}$。
4. $\mathrm{Smbl}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ 和 $\mathrm{Smbl}_1(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$。

8 插曲——张量代数、对称代数与外代数

8.1 向量空间的张量代数

向量空间 $\mathbb{K}$ 的张量代数，记作 $T(V)$，是

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V) \ ,$$

其中

$$T^k(V) := \otimes^k V = V \otimes \ldots \otimes V \ .$$

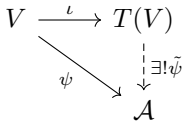
空间 $T^k(V)$ 由 $\mathbb{K}$–多重线性映射组成

$$\tau \colon V^* \times \ldots \times V^* \to \mathbb{K} \ ,$$

其中 V^* 是与 V对偶的向量空间。根据定义， $T^0(V) = \mathbb{K}$。此外，$T^1(V) = V$。 $T(V)$中的代数乘积由张量积定义的典范同构给出

$$T^k(V) \otimes T^l(V) \to T^{k+l}(V) \ .$$

张量代数满足以下泛性质：对于每个 $\mathbb{K}$-代数$\mathcal{A}$ 以及任意线性映射 ψ: $V \to \mathcal{A}$, 都存在唯一的线性映射$\tilde{\psi}$: $T(V) \to \mathcal{A}$，使得以下图表交换



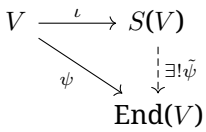
~即 $\psi \circ \iota = \psi$，其中 ι 是从 V到 $T(V)$的典范嵌入。

8.2 向量空间的对称代数

设 V是一个 $\mathbb{K}$-向量空间， $T(V)$是它的张量代数。考虑

$$\mathcal{J} :=< u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V > , \tag{36}$$

它是 $T(V)$中的一个双边理想。于是，商代数 $S(V) := T(V)/\mathcal{J}$称为 V的对称代数，它是一个结合的交换代数，并满足以下泛性质。对于任意结合的、交换的含幺代数 $\mathcal{A}$ 以及任意线性映射 ψ: $V \to \mathcal{A}$，恰好存在一个含幺代数同态 ψ，使下图交换



其中 ϵ 是从 V 到 $S(V)$ 的典范嵌入，它由典范嵌入 $V \to T(V)$ 与典范商投影 $T(V) \to S(V)$ 的复合给出。

注 8.1. 我们来介绍上述定义的代数的一些有用性质。

- $S(V)$ 是由 $n = \dim V$ 个生成元生成的自由、结合律的、交换的含幺代数。其乘积定义如下。为避免混淆，我们用括号记号表示 $S(V)$ 中的等价类。设 $[s] \in S^k(V)$ $[t] \in S^l(V)$。则乘积为

  $$[s][t] := [s \otimes t] \in S^{k+l}(V) \ .$$

  该乘积定义良好。为验证这一点，考虑等价类 $[\tilde{s}] = [s]$、 $[\tilde{t}] = [t]$ 的不同代表元。这意味着存在 ~j_s、 $j_t \in \mathcal{J}$，使得 $s = \tilde{s} + j_s$ 且 $t = t + j_t$。于是

  $$[s \otimes t] = [(\tilde{s} + j_s) \otimes \tilde{t} + j_t)] = [\tilde{s} \otimes \tilde{t} + \tilde{s} \otimes j_t + j_s \otimes \tilde{t} + j_s \otimes j_t] = [\tilde{s} \otimes \tilde{t}] \ ,$$

  ~其中，最后一个等式由以下事实得出： $\tilde{s} \otimes j_t + j_s \otimes t + j_s \otimes j_t \in \mathcal{J}$，因为 $\mathcal{J}$是 $T(V)$中的双边理想。

- 理想 $\mathcal{J}$ 是齐次的，这意味着商代数 $S(V)$ 继承了 $T(V)$ 的分次。因此，我们有 $S(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} S^k(V)$，其中 $S^k(V) := T^k(V)/\mathcal{J}^k$，其中 $\mathcal{J}^k = \mathcal{J} \cap T^k(V)$。

- 考虑典范投影 $\mathrm{pr}_k \colon T^k(V) \to S^k(V)$。我们可以将 pr_k 限制到由对称 k-张量构成的线性子空间上

$$\mathrm{pr}_k|_{\mathrm{Sym}_k(V)} \colon \mathrm{Sym}_k(V) \to S^k(V) \ .$$

  由于我们总是假设 $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = O$，上述映射可以求逆，从而得到一个分次向量空间同构

$$\mathrm{Sym}(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}_k(V) \cong \oplus_{k=0}^{\infty} S^k(V) = S(V)$$

  尽管对称张量空间与对称代数作为分次 $\mathbb{K}$-向量空间是同构的，但谈论代数同构并没有意义，因为 $\mathrm{Sym}(V)$ 不具有代数结构：两个对称张量的张量积不一定是对称张量。在 $\mathrm{char}\,\mathbb{K} > 0$ 下，我们甚至会失去分次向量空间同构。

- $\mathrm{Sym}(V)$ 是 $T(V)$ 的一个线性子空间。
- $S(V)$ 不是 $T(V)$ 的子代数。

对称化。令 $\mathrm{s}_k \colon T^k(V) \to \mathrm{Sym}^k(V)$ 为对称化映射，对任意 $t \in T^k(V)$，其定义如下

$$\mathrm{s}_k(t) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma \cdot t \ , \tag{37}$$

其中 $\mathfrak{S}_k$ 是作用在 k 个元素上的置换群，而 $\sigma \cdot t$ 是置换群在 k 阶张量上的作用，在 $t = t_1 \otimes \ldots \otimes t_k$ 上由 $\sigma \cdot t := t_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes t_{\sigma(k)}$ 给出（并通过 $\mathbb{K}$-线性将 $\cdot$ 扩展到一般的 $t \in S_k$ 上）。

命题 8.1. 理想 (36) 是一个分次理想 $\mathcal{J} = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}_k$，其中 $\mathcal{J}_k := J \cap T^k(V)$。此外，$\ker \mathrm{s}_k = \mathcal{J}_k$ 和 $T^k(V) = \mathcal{J}_k \oplus \mathrm{Sym}^k(V) \cong \mathcal{J}_k \oplus S^k(V)$

设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 V 的一个基。映射 (37) 给出一个同构

$$S(V) \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

使得

$$\mathrm{s}_k(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}) = x_{i_1} \ldots x_{i_k} \ .$$

PBW 定理的特殊情形指出，单项式 $\{e_1^{i_1}, \ldots, e_n^{i_1}\}$ 构成了 $S(V)$ 的一组基，使其成为 $\mathbb{K}$-向量空间，并且 $S(V) \cong \mathbb{K}[e_1, \ldots, e_n]$。

例 8.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个定义在 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$上的有限维李代数。对称代数 $S(\mathfrak{g}^*)$ 同构于 $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$，即具有 $\dim \mathfrak{g}^*$ 个变量的多项式代数。 $\mathfrak{g}^*$ 上的括号使 $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ 成为一个（交换的）泊松代数。

这个构造的一个更简单版本是 $\mathcal{A}=S(V^*)=\mathbb{K}[V^*]$，其中 V是一个配备了斜对称双线性形式B的有限维向量空间： $V\times V\to\mathbb{K}$，它在 $\mathbb{K}[V^*]$上提供了泊松括号。例如，令 $\dim V=2$。考虑 X、 $Y\in V$线性无关，使得 $V=<X$、$Y>$。那么 $\mathbb{K}[V^*]\cong\mathbb{K}[X,Y]$和 $\{X,Y\}=B(X$、$Y)$：$=1$。在这种情况下，$(V$、$B)$ 是一个辛平面。

8.3 向量空间的外代数

设 V 为一个 n 维的 $\mathbb{K}$ 向量空间。 V 的外代数，记为 $\Lambda(V)$，定义为张量代数 $T(V)$ 中由完全反对称张量构成的分次子空间。回顾一下，如果 $t\in T^k(V)$ 是完全反对称的（或交错的，或完全斜对称的），则

$$\sigma\cdot t:=t_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes t_{\sigma(k)}=\operatorname{sgn}(\sigma)t_1\otimes\ldots\otimes t_k$$

对于所有 k-置换 σ （并且我们通过 $\mathbb{K}$-线性将 $\cdot$ 推广到一般的 $t\in S_k$ 上）。于是， $\Lambda^k(V)\subset T^k(V)$ 由所有此类 k-张量构成。注意， $\Lambda^1(V)=V$，并且对于 $k=0$，我们定义 $\Lambda^0(V)=\mathbb{K}$。整个代数由以下 $\mathbb{K}$-向量空间给出。

$$\Lambda(V):=\oplus_{k\geq 0}\Lambda^k(V)\ ,$$

配备乘积 $\wedge$，称为楔积，

$$\Lambda^k(V)\otimes\Lambda^l(V)\to\Lambda^{k+l}(V)$$

给定于

$$\omega_1\wedge\omega_2:=\frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}(\omega_1\otimes\omega_2)\ , \tag{38}$$

其中

$$\operatorname{Alt}\colon T^k(V)\to\Lambda^k(V)\ ,$$

是交错张量子空间上的一个投影，称为交错映射，对任意 $t\in T^k(V)$ 定义如下：

$$\operatorname{Alt}(t):=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\cdot t\ .$$

例 8.2. 考虑 $t\in T^2(V)$，由 $t=v\otimes w-w\otimes v$ 给出。那么 $\operatorname{Alt}(t)=_{1\ 2}(\overline{v}\otimes w-w\otimes v-w\otimes v+v\otimes w=t$，即 t 已经是 $\Lambda^2(V)$ 的一个元素。

楔积满足

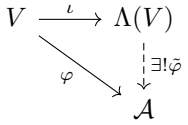
$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1,$$
$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$$

这意味着 $\Lambda(V)$ 是一个带单位元 1 的分次结合律的 $\mathbb{K}$-代数。

与对称代数的情形类似，我们可以将 $\Lambda(V)$ 定义为张量代数的一个商。考虑由下式给出的双边理想 $\mathcal{J} \subset T(V)$:

$$\mathcal{J} :=< t_1 \otimes t_2 + t_2 \otimes t_1 \mid t_1, t_2 \in T(V) >$$

于是我们定义 $\Lambda(V) := T(V)/\mathcal{J}$。此外， $\Lambda(V)$ 满足如下泛性质。对于每个结合含幺代数 $\mathcal{A}$ 以及任意 $\mathbb{K}$-线性映射 φ: $V \to \mathcal{A}$，若对所有 $v \in V$ 都有 $j(v)^2 = 0$，则存在唯一的代数同态 $\tilde{\varphi}$: $\Lambda(V) \to \mathcal{A}$，使得下图交换:



利用泛性质可以证明，上述构造 $\Lambda(V)$ 的两种方式——将其构造为交错张量的子空间，或构造为商代数——以唯一的方式同构。

8.4 对称代数 $S(\mathfrak{g})$ 上的泊松结构

定理 8.1. $S(\mathfrak{g})$ 是一个次数为 1 或次数为 2 的分次泊松代数。

证明。（次数 1。）设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathbb{K}$-李代数。我们将证明，李括号可以唯一地延拓为 $S(\mathfrak{g})$ 上次数为 1 的泊松括号。任取 $g \in \mathfrak{g}$。考虑端同态[6] $\mathrm{ad}_g \equiv \delta_g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$，其定义为

$$\mathrm{ad}_g(h) = [g, h] \ , h \in \mathfrak{g} \ .$$

然后，ad_g 可以唯一地扩展到整个 $S(\mathfrak{g})$，成为 $S(\mathfrak{g})$ 上的导子，具体如下。考虑一个可分解的 $t \in S(\mathfrak{g})$，即 t 可以写成 $t = t_1 \cdot \ldots \cdot t_k$，其中 $\cdot$ 表示 $S(\mathfrak{g})$ 中的（对称）乘积，而 $t_1, \ldots, t_k \in \mathfrak{g}$。然后

$$\mathrm{ad}_g(t) := \sum_{i=1}^{k} t_1 \cdot \ldots \cdot t_{i-1} \cdot ad_x(t_i) \cdot t_{i+1} \cdot \ldots \cdot t_k \ .$$

[6]注意，利用 $\mathfrak{g}$ 通过从左乘法作用于自身这一作用，我们可以将 $\mathfrak{g}$ 中的元素视为 $\mathfrak{g}$, $h \mapsto l_h$的端同态。于是有 $\delta_g(l_h)(u) = h(gu)$ $gh\ u\ =\ ad_g h\ u$ $\delta_g|_{\mathfrak{g}} \equiv \ _g$ $-$ ( ) ( ) , 因而 ad。

$S(\mathfrak{g})$ 中的一个一般元素是若干可分解元的 $\mathbb{K}$-线性组合，因此，上述括号的定义可以通过线性方式扩展到整个 $S(\mathfrak{g})$。这一扩展也记作 ad_g。对于任意的 $t, u \in S(\mathfrak{g})$，我们有

$$\mathrm{ad}_g(t \cdot u) = \mathrm{ad}_g(t) \cdot u + t \cdot \mathrm{ad}_g(u) \ .$$

（次数 2。）只需定义一个斜对称双线性形式

$$\Omega \colon \ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K} \ .$$

于是，$\Omega(g, -) \colon \ \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ 有唯一的延拓，使其成为一个导子

$$\partial \colon S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(S(\mathfrak{g})) \ ,$$

它可以进一步延拓为 $S(\mathfrak{g})$ 上的一个 2 次导子。 □

例 8.3。设 Ω 是 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{2m}$ 上非退化的反对称 2-形式，即我们将 $\mathfrak{g}$ 视为阿贝尔的（李括号为零）。那么存在一组基，称为辛基，$e_1, \ldots, e_n (n = 2m)$，使得 Ω 在这组基下的矩阵可写为

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

其中 I_n 是单位 $m \times m$ 矩阵。于是，对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，基元素的括号满足 $\{e_i, e_{i+m}\} = -\{e_{i+m}, e_i\} = 1$，而基元素的其他所有组合的括号均为零。利用这组基，我们可以将 $S(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{2m}]$。注意，这是 $\mathfrak{g}$上的一个 2 次括号，与李括号 $[-,-]_{\mathfrak{g}}$不同，后者我们假设为平凡的。令 $m = 1$，于是 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$，并设坐标为 x, y。考虑由 $P, Q \in \mathbb{K}[x, y]$给出的

$$P(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \ , \qquad\qquad Q(x,y) = \sum_{p,q} b_{pq} x^p y^q \ .$$

括号为

$$\{P, Q\} = \sum_{i,j,p,q} a_{ij} b_{pq} \{x^i y^j, x^p y^q\} = \sum_{i,j,p,q} a_{ij} b_{pq} (jp - iq) x^{i+p-1} y^{q+j-1}.$$

如果我们选取 $P = xy$、$Q = 4x^2$，并将括号选为

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} = -8x^2 \ ,$$

一般公式为

$$\{P, Q\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_{i+m}} - \frac{\partial Q}{\partial x_{i+m}} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

那么，这就在 $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{2m}]$ 上给出了一个 2 阶括号。相应的 2 阶过滤泊松代数是 $\mathcal{A}_{2m}(\mathfrak{g})$。代数 $\mathcal{A}_{2m}(\mathfrak{g})$ 具有 $2m$ 个生成元（ x_i、 y_i）、 $1 \le i \le m$ 和关系

$$x_iy_i - y_ix_i = 1, 1 \le i \le m \quad x_iy_j - y_jx_i = y_iy_j - y_jy_i = x_ix_j - x_jx_i = 0, i \neq j \ .$$

$\mathcal{A}_{2m}(\mathfrak{g})$ 称为第 $2m$ 个魏尔代数。

让我们以如下评注结束本节，它将上述代数构造置于光滑流形的背景下。

评注 8.2。通过考虑给定点处的切空间（或余切空间），张量代数、对称代数和外代数的构造可以推广到光滑流形的情形。这引出了如下概念：作为丛 $\otimes TM \to M$ 的截面的张量场、作为丛 $S(TM) \to M$ 的截面的对称张量场，以及作为丛 $\Lambda(TM) \to M$ 的截面的微分形式。我们将在有关泊松流形上的微分学的章节中进一步讨论这些对象。

9 泛包络与 PBW 定理

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维李代数。我们假设存在一个结合代数 $\mathcal{A}$，使得 $\mathfrak{g}$ 可以嵌入 $\mathcal{A}$ （从而可以对 $\mathfrak{g}$ 中的元素进行乘法），并且 $\mathfrak{g}$ 的李括号由 $\mathcal{A}$ 中的交换子给出，即对所有 x、 $y \in \mathfrak{g}$

$$[x,y] = xy - yx \ ,$$

其中右侧的乘积是 $\mathcal{A}$ 中的乘积。设 $\mathfrak{g}$ 的一组向量空间基为 $\{e_i\}_{1\le i\le n}$。李代数结构由结构常数 c_{ij}^k 定义

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

我们考虑 $S \subset \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$，这是一个由有序对构成的集合，定义如下

$$S = \{(e_ie_j, e_je_i + \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \mid i > j\} \ .$$

容易验证，三重乘积 $e_ie_je_k$ （其中 $i > j > k$）的表示不存在歧义，因为

$$(e_ie_j)e_k = (\sum_{l=1}^{n} c_{ij}^l e_l + e_je_i)e_k = \sum_{l=1}^{n} c_{ij}^l e_le_k + e_je_ie_k \ ,$$
$$e_i(e_je_k) = e_i(\sum_{m=1}^{n} c_{jk}^m e_m + e_ke_j) = \sum_{m=1}^{n} c_{jk}^m e_ie_m + e_ie_ke_j \ .$$

因此，由于雅可比恒等式 (4)，差为零

$$(e_ie_j)e_k - e_i(e_je_k) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(c_{ij}^m c_{km}^l + c_{jk}^m c_{im}^l + c_{ki}^m c_{jm}^l)e_l = 0 \ .$$

9.1 泛包络代数

设 $\mathfrak{g}$ 是一个 n 维的（$n < \infty$）李代数，$\{e_i\}_{1\le i\le n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基。设 $T(\mathfrak{g}) = \oplus_i T^i(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的底层向量空间的张量代数。

命题 9.1. $T(\mathfrak{g})$ 关于张量积 $\otimes$: $T^p(\mathfrak{g}) \times T^q(\mathfrak{g}) \to T^{p+q}(\mathfrak{g})$ 构成一个结合代数

$$(x_1 \otimes \dots x_p, y_1 \otimes \dots y_q) \mapsto x_1 \otimes \dots x_p \otimes y_1 \otimes \dots y_q \ .$$

注 9.1. $T(\mathfrak{g})$ 作为 $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{K} < e_1, \dots, e_n >$ 生成（按代数的意义）。换句话说，张量代数作为一个 $\mathbb{K}$-代数，同构于由 n 个生成元生成的自由结合非交换 $\mathbb{K}$-代数。

考虑由以下元素生成的子空间 $\mathcal{I} \subset T(\mathfrak{g})$

$$\mathcal{I} :=< t_1 \otimes ([x,y] - x \otimes y + y \otimes x) \otimes t_2 \mid t_1, t_2 \in T(\mathfrak{g}), x, y \in \mathfrak{g} > \ . \tag{39}$$

注意，$[x,y] - x \otimes y + y \otimes x \in \mathfrak{g} \oplus T^2(\mathfrak{g})$。

命题 9.2. $\mathcal{I}$ 是 $T(\mathfrak{g})$ 中的一个（双边）理想，即 $\forall j \in \mathcal{I}, t \in T(\mathfrak{g}) : j \otimes t, t \otimes j \in \mathcal{I}$。

证明。根据 $\mathcal{I}$ 的生成元形式，证明显而易见。 □

注 9.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个结合代数。我们将相应的李代数 $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ 记为 $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$，其李括号由交换子 $[x,y] := xy - yx$ 给出，其中 x、$y \in \mathcal{A}$ 任意。

定义 9.1（包络代数）。设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数。商空间

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\mathcal{I} \ ,$$

其中 $\mathcal{I}$ 由 (39) 给出，称为 $\mathfrak{g}$ 的包络代数。

命题 9.3. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是一个结合代数。此外，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 可赋予一种李代数结构，它与 $\mathfrak{g}$ 上的李代数结构相容。

证明。设 $u_i = [t_i] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ $i = 1, 2$，并定义 $u_1 \cdot u_2 . := [t_1 \otimes t_2]$。域 $\mathbb{K}$ 和李代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 中有典范嵌入。考虑 $\mathfrak{g}$ 到 $T(\mathfrak{g})$ 中的典范嵌入 ι，以及典范投影 $\text{pr} : T(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$。那么 $\mathfrak{g}$ 的嵌入由复合映射 $\epsilon := \text{pr} \circ \iota$ 给出，

$$\epsilon := \text{pr} \circ \iota : \ \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \ , \tag{40}$$

$x \mapsto u_x := x + J, J \in \mathcal{I}$（同样地，我们可以嵌入 $\mathbb{K} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$）。我们将 x 和 u_x 视为相同。令 $x, y \in \mathfrak{g}$。那么 $[x,y] - x \otimes y + y \otimes x \in \mathcal{I}$，于是我们有

$$\epsilon([x,y] - x \otimes y + y \otimes x) = u_{[x,y]} - u_x u_y + u_y u_x \overset{\text{notation}}{=} [x,y] - xy + yx = 0 \ .$$

因此 $[x,y]=xy-yx$ in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$。这意味着，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 上由交换子给出的李代数结构可以限制到 $\mathfrak{g}$，且典范嵌入 $\epsilon\colon \mathfrak{g}\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\mathrm{Lie}}$ 是李代数同态，即

$$\epsilon([x,y])=[\epsilon(x),\epsilon(y)]=\epsilon(x)\epsilon(y)-\epsilon(y)\epsilon(x)$$

对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$。 □

练习 9.1. 证明 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 中的乘积是良定义的。

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的泛性质。令 $\epsilon\colon \mathfrak{g}\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为典范李代数同态 (40)。泛包络代数满足以下泛性质。对于任意结合含幺代数 $\mathcal{A}$（与 $\mathfrak{g}$ 定义在同一域上）以及任意李代数同态 $\psi\colon \mathfrak{g}\to\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$，存在唯一的 $\tilde{}$ $\tilde{}$结合含幺 $\mathbb{K}$-代数同态 $\psi\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\mathrm{Lie}}\to\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$，使得 $\psi=\psi\circ\epsilon$，即下图交换

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{g} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\mathrm{Lie}} \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow{\scriptstyle \exists!\tilde{\psi}} \\ & & \mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}\end{array} \tag{41}$$

注 9.3. 对于 $\mathfrak{g}=0$，有 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})=\mathbb{K}$。对于 $\mathfrak{g}$ 阿贝尔的（即 $\mathfrak{g}$ 的括号平凡），有 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})=\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$，其中 $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的多项式环。[7]

9.2 庞加莱-比尔霍夫-维特（PBW）定理

定理 9.1（PBW 定理）。设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathbb{K}$-李代数，且 $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 作为 $\mathbb{K}$- 向量空间的一组基。设 $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\ \epsilon)$ 为泛包络代数。那么，$\{1,\epsilon(e_i)\}_{1\le i\le n}$ 是 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 作为 $\mathbb{K}$-代数的一组基，并且典范嵌入 $\epsilon\colon \mathfrak{g}\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是单射。

注 9.4。我们可以将上述定理重新表述如下。令 $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个基。对于 $k\in\mathbb{N}_0$，考虑一个指标集 $I_k=\{i_1,\dots i_k\}$、$I_0=\emptyset$。我们称 I_k 是增加的，当且仅当 $i_1\le\cdots\le i_k$。用 $E_{I_k}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 表示元素 $E_{I_k}=e_{i_1}\dots e_{i_k}$ 和 $E_{I_0}=1$。那么，以下集合作为一个 $\mathbb{K}$-向量空间，是 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的一个基

$$\{E_{I_k}\mid I_k \text{ increasing}, k\in\mathbb{N}_0\}\ .$$

换句话说，形如 $e_1^{\alpha_1}\dots e_k^{\alpha_k}$ 的元素（其中 $\alpha_1\le\ldots\le\alpha_n$）是线性无关的，并生成 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$。

命题 9.4。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是一个滤过代数。其滤过由元素 $x\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的次数给出，该次数定义为

[7] $\mathfrak{g}$ 的每个元素都充当一个变量。可以将 $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ 视为所有 $g_i\in\mathfrak{g}$ 的 $\mathbb{K}[g_1,g_2,\dots]$。

- 要么定义为描述 x 的多项式的次数（在通过 PBW 选择基之后），

- 或由集合 $\mathcal{U}_p(\mathfrak{g})$ 给出；该集合是 $\oplus_{i=1}^{p} T^i(\mathfrak{g})$ 在典范投影 $\mathrm{pr}: T(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 下的像，即 $\mathcal{U}_p(\mathfrak{g})$ 是次数为 $\leq p$ 的元素集合。

PBW 定理的证明略述。我们将考虑 $\mathfrak{g}$ 带有忠实表示的情形。[8]

考虑如下代数同态

$$\tilde{\Delta}: T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}) \ ,$$

˜使得对于所有 $t \in \mathfrak{g}$, Δ 满足

$$\tilde{\Delta}(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t \ , t \in \mathfrak{g} \ .$$

注意到 $1 \otimes T(\mathfrak{g})$ 和 $T(\mathfrak{g}) \otimes 1$，它们相对于 $T(\mathfrak{g})$ 的代数结构是交换的。

˜引理 9.1。代数同态 Δ 下降为映射 Δ: $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$（$\Delta$ 是关于 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 上的 Hopf 代数结构的余乘法）。

引理的证明。映射 Δ 由以下交换图给出。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ & \searrow^{\iota} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\iota}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr} \otimes \mathrm{pr}} \\ & & T(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}) \end{array}$$

其中，ι 和 ϵ 分别是将 $\mathfrak{g}$ 嵌入到相应的张量代数 $T(\mathfrak{g})$和泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$中的典范嵌入。映射$\tilde{\iota}$由 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$的泛性质给出（将 $T(\mathfrak{g})$视为具有平凡括号的代数），而 pr 是典范商投影。所有张量积均取在 $\mathbb{K}$ 上（即我们研究 $\mathfrak{g}$时所采用的域）。

□

由于 $\mathfrak{g}$ 的基生成了 $S(\mathfrak{g})$ 的基，因此 PBW 定理的另一种表述是：$S(\mathfrak{g}) = \oplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k \mathfrak{g}$ 的基生成了 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的基。

令 Sym( ) : Sym ( ) 为对称张量空间，其中 Sym ( ) 若

$$t(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)} = t(u_1, \ldots, u_k)$$

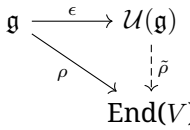
[8]该表示作为从 $\mathfrak{g}$ 出发的同态，其核是平凡的。例：$\mathfrak{g}$ 忠实地作用于 $C^\infty(\mathfrak{g})$。另一个例子：$\mathfrak{g}$ 是一个矩阵代数（$n \times n$ 矩阵），那么 $\mathfrak{g}$ 忠实地作用于 $\mathbb{R}^n$。

对所有 k-置换 σ 均成立。显然，我们有一个单射 Sym(𝔤) $\overset{j}{\hookrightarrow} T(\mathfrak{g})$。为了证明 PBW 定理，我们证明复合映射

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{j} T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

是单射。
关于 k的归纳法。

1. 假设 $k = 1$。那么，我们可以使用𝔤 在某个向量空间 V上的忠实表示的存在性。这等价于存在一个单射𝕂-代数同态 ρ: 𝔤 $\to$ End(V)。注意，Sym$^{\leq 1}$(𝔤) = 𝔤。利用 $\mathcal{U}$(𝔤)的泛性质，我们得到如下交换图



由于 $\rho = \tilde{\rho} \circ \epsilon$和 ρ是单射， ϵ是单射。因此，pr $\circ\epsilon = \mathrm{pr} \circ j|_{\mathfrak{g}}$是单射。

2. 取 Sym$^{\leq k}$(𝔤) := $\oplus_{i=1}^{k}$ Sym^{i}(𝔤)，并假设映射 pr $\circ j$ 在 Sym$^{\leq k}$(𝔤) 上是单射的。考虑 $f \in$Sym$^{\leq k+1}$(𝔤)。我们想要证明，如果

$$(\mathrm{pr} \circ j)(f) = 0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

于是 $f = 0$。定义

$$g := \tilde{\Delta}(f) - f \otimes 1 - 1 \otimes f \ .$$

这意味着 $g \in$ Sym$^{\leq k}$(𝔤) $\otimes$ Sym$^{\leq k}$(𝔤)。因此

$$(\mathrm{pr} \otimes \mathrm{pr}) \circ (j \otimes j)(g) = 0 \ ,$$

由归纳假设可得 $g = 0$ 。但是 $g = 0$ 等价于

$$\tilde{\Delta}(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f \ .$$

˜现在假设 (pr $\otimes$ pr)Δ(f) $= 0$，这等价于 (pr $\otimes$ pr)($f \otimes 1 + 1 \otimes f$) $= 0 \in \mathcal{U}$(𝔤)。当且仅当 $f = 0$时，这种情况才会发生。因此，Sym(𝔤) 可以单射嵌入 $\mathcal{U}$(𝔤)。

观察 9.1。请注意，上述证明中的假设 char $\mathbb{K} = 0$ 是必要的。为此，设 char $\mathbb{K} = p$ 且 dim 𝔤 > 1。那么，利用二项式˜定理， $\Delta(v^p) - v^p \otimes 1 - 1 \otimes v^p = (v \otimes 1 - 1 \otimes v)^p - v^p \otimes 1 - 1 \otimes v^p = 0$ 对所有 $v \in \mathfrak{g}$ 都成立。

例9.1。设 $\dim \mathfrak{g} = 2$，且 $\{e_1, e_2\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，使得 $[e_1, e_2] = e_2$。那么我们有关系 $e_1 e_2 - e_2 e_1 = e_2$ in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$，这意味着 $E = e_1^{i_1} e_2^{j_1} e_1^{i_2} e_2^{j_2} \cdots e_1^{i_k} e_2^{j_k}$ 是 $e_1^{\alpha_i} e_2^{\alpha_j}$ 的线性组合。例如

$$\begin{aligned} E &= e_1 e_2^2 e_1 = e_1 e_2 e_2 e_1 = e_1 e_2 (e_1 e_2 - e_2) = e_1 e_2 e_1 e_2 - e_1 e_2^2 \\ &= e_1 (e_1 e_2 - e_2) e_2 - e_1 e_2^2 = e_1^2 e_2^2 - 2 e_1 e_2^2 \end{aligned}$$

例9.2。考虑代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$，其中 tr 表示矩阵的迹，李括号由交换子给出。$\mathfrak{g}$ 的 Chevalley-Eilenberg基由以下矩阵给出

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

括号为

$$[e, f] = h, \qquad [h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f\ .$$

那么 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 是由生成元 e、f、h 和以下关系构成的结合律的 $\mathbb{C}$-代数

$$ef - fe = h, \qquad he - eh = 2e, \qquad hf - fh = -2f\ .$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 的基由单项式 $e^\alpha h^\beta f^\gamma$ 给出，其中 α、β、$\gamma \in \mathbb{N}_0$。

9.3 泛包络与微分算子

考虑实有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 及其对应的包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 上有一个自然滤过，由一列子空间 $\{\mathcal{U}_k\}_{k\geq 0}$ 给出，使得 $\mathcal{U}_k(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_{k+1}(\mathfrak{g})$ 且 $\mathcal{U}_k(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{U}_l(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_{k+l}(\mathfrak{g})$。此外，如果 $\alpha \in \mathcal{U}_k(\mathfrak{g})$ $\beta \in \mathcal{U}_l(\mathfrak{g})$，那么交换子给出

$$[\alpha, \beta] := \alpha\beta - \beta\alpha \in \mathcal{U}_{k+l-1}(\mathfrak{g})\ . \tag{42}$$

我们定义

$$\mathcal{A}_k := \mathcal{U}_k(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}_{k-1}(\mathfrak{g})\ ,$$

and

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{A}_k\ .$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的结合代数结构在 $\mathcal{A}$ 中诱导出一种乘法，该乘法与序 $\mathcal{A}_k \cdot \mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{k+l}$ 相容。括号（42）意味着乘法的交换性

$$\mathcal{A}_k \cdot \mathcal{A}_l = \mathcal{A}_l \cdot \mathcal{A}_k\ ,$$

并定义一个括号运算

$$\{-,-\}\colon\ \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l \to \mathcal{A}_{k+l-1}$$

在 $\mathcal{A}$ 上，使其成为一个结合分次代数。

练习 9.2. 验证上述运算在 $\mathcal{A}$ 上定义了一个泊松代数结构。

$\mathcal{A}_k$ 的每个分量 $\mathcal{A}$ 都同构于 $\mathfrak{g}^*$ （ $\mathfrak{g}$的对偶 v. 空间）上的次数为 k的齐次多项式空间 $\mathrm{Pol}_k(\mathfrak{g}^*)$。代数 $\mathcal{A}$ 同构于

$$\mathcal{A} \cong \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*) := \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Pol}_k(\mathfrak{g}^*) \ .$$

并且这些括号与来自 $\mathfrak{g}^*$ 的括号相容。

现在考虑一个光滑流形 M。那么 M 上光滑函数构成的空间 $C^\infty(M)$ 关于函数的加法和乘法是一个含幺交换结合代数。因此，我们可以使用定义 7.2 来定义微分算子的过滤结合代数。

$$\mathrm{Diff}_*(M) := \bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Diff}_k(M) \ ,$$

其中，$\mathrm{Diff}_k(M)$ 是 M 上阶数为 $\leq k$ 的微分算子集合。

$$\mathrm{Diff}_k(M) := \{\Delta \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M) |\ \delta_{f_0} \circ \ldots \circ \delta_{f_k}(\Delta) = 0 \ , \forall f_i \in C^\infty(M)\} \ ,$$

对于 $k = 0$，我们定义 $\mathrm{Diff}_0(M) = C^\infty(M)$。注意， $\delta_f(\Delta) = [\Delta, f]$（有关 δ_f 的定义，请参见引理 7.1）。回顾一下，$\mathrm{Diff}_*(M)$ 的代数结构由算子复合给出。在例 7.1 中，我们已经看到，算子的交换子在 $\mathrm{Diff}_*(M)$ 上定义了一个李代数结构。交换子相对于过滤结构的作用如下。对于 $\delta \in \mathrm{Diff}_k$、$\nabla \in \mathrm{Diff}_l$，我们有

$$[\delta, \nabla] = \delta \circ \nabla - \nabla \circ \delta \in \mathrm{Diff}_{m+k-1}(M) \ .$$

注 9.5。由于 $\mathrm{Diff}_0(M) = C^\infty(M)$，我们有 $\mathrm{Diff}_1(M) \cong \mathrm{Diff}_0(M) \oplus \Gamma(M, TM)$，也就是说，$\mathrm{Diff}_1(M)$ 分解为函数和向量场（视为作用于 $C^\infty(M)$ 上的微分算子）。

现在我们可以像 7.3 节那样定义 1 次泊松代数

$$\mathrm{Smbl}(M) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Smbl}_k \ ,$$

称为 $C^\infty(M)$ 的符号代数，其中 $\mathrm{Smbl}_k = \mathrm{Diff}_k(M)/\mathrm{Diff}_{k-1}(M)$。

现在我们将给出泊松代数 $\mathrm{Smbl}(M)$ 的另一种描述。考虑函数空间 $\mathcal{P}_k(T^*M)$，其中的函数 $p\colon T^*M \to \mathbb{R}$ 满足：对于每个固定的 $q \in M$， $p \mapsto f(q,p)$ 都是定义在 T^*_qM 上的次数为 k 的齐次多项式。取

$$\mathcal{P}(T^*M) := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{P}_k(T^*M) \subset C^\infty(T^*M) \ ,$$

它是 T^*M 上所有逐纤维多项式函数构成的空间。此外，$\mathcal{P}(T^*M)$ 是 $C^\infty(T^*M)$ 的一个泊松子代数（视为带有标准泊松括号的泊松代数）。

定理 9.2. 泊松代数 Smbl(M) 和 $\mathcal{P}(T^*M)$ 同构。

证明。只需证明，在一侧，$\mathrm{Smbl}_0(M)$ 和 $\mathrm{Smbl}_1(M)$ 的生成元，以及在另一侧，$\mathcal{P}_0(T^*M)$ 和 $\mathcal{P}_1(T^*M)$ 上，该同构成立即可。显然，$\mathrm{Smbl}_0(M) \cong \mathcal{P}_0(T^*M)$，因为它们二者都等于 $C^\infty(T^*M)$。此外，在注 9.5 中，我们已经看到，

$$\mathrm{Diff}_1(M) \cong \mathrm{Diff}_0(M) \oplus \Gamma(M, TM) \ ,$$

这给出的是

$$\mathrm{Smbl}_1(M) = \mathrm{Diff}_1(M)/\,\mathrm{Diff}_0(M) \cong \Gamma(M, TM) \ ,$$

现在考虑一个向量场 $X \in \Gamma(M, TM)$，并通过以下方式定义 $f_X \in C^\infty(T^*M)$

$$f_X(q,p) := < p, X_q > \in \mathbb{R} \ .$$

这就给出了 $\Gamma(M, TM)$ 与 $\mathcal{P}_1(T^*M)$ 之间的一个双射，因为

$$< -, X_q > : T^*_q M \to \mathbb{R}$$

是一个（齐次）一阶多项式函数（对于每个固定的 $q \in M$）。此外，对于所有向量场 X、$Y \in \Gamma$（M、TM）

$$f_{[X,Y]} := \{f_X, f_Y\} \ ,$$

因此，该双射是一个代数同态。对于 $F \in C^\infty(M)$，函数$f_F \in C^\infty(T^*M)$ 定义为

$$f_F(q,p) := F(q) \ .$$

那么，对于所有的 $F, G \in C^\infty(M)$ 和 $X \in \Gamma(M, TM)$，以下恒等式成立。

$$\{f_X, f_F\} = f_{X(F)} \ ,$$
$$\{f_F, f_G\} = 0 \ .$$

这一同构可以扩展为对所有 k 都成立的同构 $\mathrm{Smbl}_k(M) \cong \mathcal{P}_k(T^*M)$，进而得到同构 $\mathrm{Smbl}(M) \cong \mathcal{P}(T^*M)$。换句话说，对于所有 $k \geq 1$，下面的序列都是正合的。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Diff}_{k-1}(M) \xrightarrow{\ \iota\ } \mathrm{Diff}_k(M) \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathcal{P}_k(T^*M) \longrightarrow 0 \ ,$$

其中 ι 是包含映射（由 $\mathrm{Diff}_*(M)$ 的过滤结构给出），σ 是符号映射。对于每个 $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(M)$，符号映射将其映为多项式函数 $\sigma(\Delta) : T^*M \to \mathbb{R}$，该函数沿纤维是 m 次齐次的。我们将在 T^*M 的局部坐标 $(\bar{q}, \bar{p})$ 中描述它，这些坐标由 M 上的局部坐标 $(\bar{q})$ 诱导。微分算子 $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 具有如下形式

$$\Delta = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, \partial^\alpha \ ,$$

其中 $\partial^\alpha := \partial_{q_1}^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \partial_{q_k}^{\alpha_k}, \alpha_i \in \mathbb{N}$ 和 $a_\alpha \in C^\infty(M)$。于是，符号为

$$\sigma(\Delta(q,p)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(q) p^\alpha \ ,$$

其中 $p^\alpha := p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$。因此， $\sigma(\Delta(q,p))$ 对每个 q 而言，都是关于变量 p 的 m 次齐次多项式函数。 □

注 9.6. 简要描述一下符号 $\sigma(\Delta)$ 的一个不变形式。设 $F \in C^\infty(M)$。那么，如果 $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(M)$，则 $e^{tF}\Delta e^{-tF}$ 是一个 $\leq k$ 阶微分算子。考虑以下形式表达式

$$e^{tF}\Delta e^{-tF} = \Delta + t[F,\Delta] + \frac{t^2}{2}[F,[F,\Delta]] + \ldots + \frac{t^k}{k!}[F,[F,\ldots,[F,\Delta]]\ldots] \ .$$

上面的表达式是有限的，因为第 i 项的次数为 $\leq i-k$。于是，符号映射给出该表达式首项的系数，将其视为关于 t 的多项式。

$$\sigma(\Delta)(q, d_q\phi) = \frac{1}{k!}[F,[F,\ldots,[F,\Delta]]\ldots](q) \ .$$

例 9.3. 设 $M = G$ 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$。那么， $\mathcal{U}_k(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Diff}_k(G)$，它们是 G 上的 $\leq k$ 阶左不变微分算子。

10 泊松流形

10.1 余切丛上的泊松结构

设 F、$G \in C^\infty(T^*M)$ 是余切丛上的光滑函数，并设 $(q^i$、$p_i)$ 是 T^*M 上的局部坐标。定义泊松括号如下:

$$\{F,G\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) . \tag{43}$$

这是一个双线性映射（对两个自变量 F 和 G 都是线性的），并且是斜对称的

$$\{F,G\} = -\{G,F\} \tag{44}$$

满足莱布尼茨法则

$$\{F,GH\} = \{F,G\}H + G\{F,H\} \ , \tag{45}$$

以及雅可比恒等式

$$\{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} = 0 \ . \tag{46}$$

10.2 泊松流形

将上述余切丛上的泊松括号思想加以推广，我们可以给出以下定义。

定义 10.1. 流形 M 上的泊松括号是一个双线性映射

$$\{-,-\}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)\ ,$$

满足 (44)、(45) 和 (46)。配备泊松括号的流形 M 称为泊松流形。

注 10.1. 对每个 $F\in C^\infty(M)$，映射 $X_F\colon C^\infty(M)\to C^\infty(M)$，由泊松括号定义为

$$X_F:=\{F,-\}\ ,$$

是代数 $C^\infty(M)$上的一个导子。更确切地说， X_F 是一个一阶微分算子，因此可以视为 M上的向量场。这个向量场称为哈密顿量为 F的哈密顿向量场。

10.3 哈密顿映射

对于每个 $F,G\in C^\infty(M)$，莱布尼茨法则 (45) 给出

$$X_{FG}=FX_G+GX_F$$

并且可以定义一个映射

$$\mathcal{H}\colon T^*M\to TM$$

通过 $\mathcal{H}(dF):=X_F$，或者

$$<dG,\mathcal{H}(dF)>:=\{F,G\}\ ,$$

其中，左侧的括号表示 1-形式 dG在向量场 $\mathcal{H}(dF)$ 上的取值。映射 $\mathcal{H}$ 在 M 上的局部坐标 (x^i) 中由矩阵给出

$$H^{kl}:=\{x^k,x^l\}\ .$$

记 $\partial_k:=\frac{\partial}{\partial x^k}$，则泊松括号可以写为

$$\{F,G\}=\sum_{k,l}H^{kl}\,\partial_k F\,\partial_l G\ ,$$

向量场 X_F 的分量为

$$X_F^k=\sum_l H^{lk}\,\partial_k F\ .$$

设流形为余切丛 T^*M，局部坐标 (x^i) 为 (q^i, p_i)，$i = 1, \ldots, n$。那么，哈密顿映射由下列矩阵给出

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} ,$$

其中，I_n 是单位矩阵，$2n$ =维 T^*M。在坐标中，泊松括号的反对称性表示为

$$H^{kl} = -H^{lk} ,$$

以及雅可比恒等式是

$$\sum_i (H^{ki}\,\partial_i\,H^{lm} + H^{li}\,\partial_i\,H^{mk} + H^{mi}\,\partial_i\,H^{kl}) = 0 .$$

如果矩阵 $H = (H^{kl})$ 非退化，则映射 $\mathcal{H}$: $T^*M \to TM$ 可逆。如果将 H 的逆记为 (Ω_{kl})，那么便可以定义一个 2-形式

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\sum \Omega_{kl} dx^k \wedge dx^l ,$$

或者以更内在的方式。

$$\underline{\Omega}_x(X, Y) := < \mathcal{H}_x^{-1}(X), Y > ,$$

其中 $x \in M$ 和 X、$Y \in T_xM$。雅可比恒等式意味着，

$$\underline{\Omega} = -\frac{1}{6}\sum_{k,l,m} \Omega_{klm} dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m ,$$

其中

$$\Omega_{klm} := \partial_k\,\Omega_{lm} + \partial_l\,\Omega_{mk} + \partial_m\,\Omega_{kl} .$$

上述关于 $d\Omega$ 的公式可用下列关于 Ω_{klm} 的表达式证明

$$\Omega_{klm} := \sum_{p,q,r} \Omega_{kp}\Omega_{lq}\Omega_{mr}\left(\sum_i \mathcal{H}^{pi}\,\partial_i\,\mathcal{H}^{qr} + \mathcal{H}^{qi}\,\partial_i\,\mathcal{H}^{rp} + \mathcal{H}^{ri}\,\partial_i\,\mathcal{H}^{pq}\right) .$$

10.4 辛流形上的泊松括号

定义 10.2. 光滑流形 M 配备一个闭 2-形式 Ω（$d\Omega = 0$），且该形式非退化，即若 $X \in T_xU, x \in M$ 满足

$$\Omega(X, Y) = 0$$

称为辛流形。

对于每个辛流形，都可以在代数 $C^\infty(M)$ 上定义泊松括号，方法是

$$\{F,G\} =< dG, \mathcal{H}(dF) >= \Omega\left(\mathcal{H}(dF), \mathcal{H}(dG)\right) \ .$$

也就是说，每个辛流形都是泊松流形。我们要强调的是，逆命题并不成立，即存在不是辛流形的泊松流形。

10.5 泊松流形与辛流形的例子

示例 10.1（余切丛）。设 M 是一个光滑流形，维数为 $\dim M = n$。那么余切丛 T^*M 的维数（作为光滑流形）为 $\dim T^*M = 2n$。余切丛自带典范（或称恒等）Liouville 1-形式，其定义如下。设 $\pi\colon TM \to M$，并令 $\pi_*\colon T^*M \to M$ 分别表示切丛和余切丛的投影，且以 $d\pi_*$ 表示到 π_* 的切映射。考虑以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} T(T^*M) & \xrightarrow{d\pi_*} & TM \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T^*M & \xrightarrow[\pi_*]{} & M \end{array}$$

其中，$\tilde{\pi}$ 是向下投影到 T^*M（视为流形）的切丛投影。然后，对于任意 $X \in T(T^*M)$，Liouville 1-形式 $\rho \in \Omega^1(T^*M)$定义为

$$\rho(X) :=< \pi(X), d\pi_*(X) > \ .$$

那么 $\Omega := d\rho$ 是 T^*M上的辛形式。在典范坐标中，

$$\Omega = d\rho = d(\sum_{i=1}^{n} p_i dq^i) = \sum_i dp_i dq^i \ .$$

由此辛结构给出的泊松括号如式 (43) 所示。

例 10.2（球面与射影空间）。设 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 为单位 2-球面，即方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 的解。那么 2-形式

$$\Omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \ ,$$

其中假设 x、y、z 的取值满足关于 S^2 的方程，这定义了 S^2 上的一个辛形式。注意，2-球面可以与复射影直线 $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 等同起来。

现在考虑带有厄米形式的 $\mathbb{C}^n$

$$< z, w >= \sum_{k=1}^{n} \bar{z}^k w^k \ .$$

定义一个 1-形式

$$\rho := i < \bar{z}, dz >= i \sum_{k=1}^{n} \bar{z}^k dz^k \ ,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，以及这个 2-形式

$$\Omega = d\rho = id < \bar{z}, dz >= i \sum_{k=1}^{n} d\bar{z}^k \wedge dz^k \ .$$

2-形式 Ω 是实的，即它可以写成陪

$$\Omega = -2 \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge dy^k \ ,$$

对于 $x^k + iy^k = z^k$。因此，$(\mathbb{C}^n, \Omega)$ 是一个实辛流形。泊松括号是

$$\{z^j, z^k\} = \{\bar{z}^j, \bar{z}^k\} = 0 \qquad\qquad \{z^j, \bar{z}^k\} = i\delta^{jk} \ .$$

如果我们固定一个二次哈密顿量

$$H(z) :=< z, z >= \sum_{k=1}^{n} |z^k|^2$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上，则水平集 $H(z) = 1$ 是一个（$2n-1$）维球面 S^{2n-1}。限制在 S^{2n-1} 上的 $\mathbb{C}^n$ 上的哈密顿向量场 X_H 定义了一个向量场pX_H。回顾一下，$U(1) \cong \mathbb{R}^*$ 通过（φ, z）$\mapsto e^{-i\varphi}$ 作用于 S^{2n-1}，该作用的商是复射影空间 $S^{2n-1}/\mathbb{R}^* \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$。2-形式 Ω 在 S^{2n-1} 上诱导出一个 2-形式，它是 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ 上唯一一个 2-形式的提升，从而使其成为一个实辛流形。更准确地说。

$$\Omega_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)} = \phi^*(\Omega|_{S^{2n-1}}) \ ,$$

其中 ϕ: $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to S^{2n-1}$, $\phi(z) = |z|^{-1} z$。

关于泊松流形的更多详情，例如可参见 [8]。

10.6 泊松流形与李理论

李代数的对偶空间。设 $\mathfrak{g}$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的有限维李代数，维数为 $\mathfrak{g} = n$，且 $\mathfrak{g}^* = \hom(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ 是其对偶向量空间。考虑光滑函数空间 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$，并注意到可以将 $\mathfrak{g}^* \to C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 嵌入为线性函数的子空间

$$\mathfrak{g}^* = \{F_X \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) |\ F_X(\xi) = \xi(X), X \in \mathfrak{g}, \xi \in \mathfrak{g}^*\} \ .$$

在 $\mathfrak{g}^*$ 上存在唯一的泊松括号，使得

$$\{F_X, F_Y\} = F_{[X,Y]} \ , \tag{47}$$

这意味着赋值 $X \mapsto F_X$ 给出了一个李代数同态$\mathfrak{g} \to C^\infty(\mathfrak{g}^*)$。

坐标描述——括号。设 $[X^k, X^l] = c_m^{kl} X^m$，其中$X^k \in \mathfrak{g}$对所有 k均成立。那么函数 $\xi^1 = F_{X^1}$、$\ldots \xi^n = F_{X^n}$在 $\mathfrak{g}^*$上构成一组线性坐标，我们可以通过 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$上的泊松括号，在 $\mathfrak{g}^*$ 上定义泊松括号

$$\{F, G\} = \sum_{k,l,m} C_m^{kl} \frac{\partial F}{\partial \xi^k} \frac{\partial G}{\partial \xi^l} \xi^m$$

使得

$$\{\xi^k, \xi^l\} = C_m^{kl} \xi^m \ .$$

坐标描述——梯度。对于任意 $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$，其梯度

$$\nabla F \colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$$

是一个取值于 $\mathfrak{g}$的 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数，定义如下:

$$< \nabla F(\xi), \eta > := \frac{d}{dt}|_{t=0} F(\xi + t\eta) \ ,$$

其中 ξ、$\eta \in \mathfrak{g}^*$。在坐标中

$$\nabla F = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi^k} X^k \ ,$$

这意味着

$$\{F, G\}(\xi) = < \xi, [\nabla F(\xi), \nabla G(\xi)] > \ .$$

T^*G上的 G-不变映射。设 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 是李群 G 的有限维李代数。每个李群都是可平行化的，即存在一个向量丛同构，使 T^*G 和 $G \times \mathfrak{g}^*$ 作为 G 上的向量丛同构。下面的交换图对此作了表示

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \xrightarrow{\varphi} & G \times \mathfrak{g}^* \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ & & G \end{array}$$

其中 φ 是丛同构， π_1 是到第一因子的投影。我们将 $\pi_2 \colon G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ 记为到第二因子的投影。设$p \in T^*G$。那么

$$\varphi(p) = (h, \xi) \tag{48}$$

对于某些 $h \in G$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$。现在考虑左平移自同构 $l_g\colon\ G \to G$，其定义为 $l_g(h) = gh$。l_g 的切映射记为 $(l_g)_*\colon\ TG \to TG$，余切映射记为 $(l_g)^*\colon\ T^*G \to T^*G$。注意，对于 $p \in T^*G$，我们有

$$(\pi_2 \circ \varphi \circ (l_g)^*)\,(p) = \pi_2(g^{-1}h, \xi) = \xi\ . \tag{49}$$

这是因为 $\mathfrak{g}^*$ 可以与 G 上左不变 1-形式的空间相识别，即满足 $(l_g)^*\eta = \eta$ 的 1-形式 η。因此，由 (48) 和 (49)，我们有

$$\pi_2 \circ \varphi \circ (l_g)^* = \pi_2 \circ \varphi\ . \tag{50}$$

对于以下讨论，我们回顾一下，任意两个流形之间的光滑映射，例如 $F\colon\ M \to N$，都会诱导出一个方向相反的相应代数同态，$F^\bullet\colon\ C^\infty(N) \to C^\infty(M)$，它由复合映射给出。由于 $\mathfrak{g}^*$ 是一个光滑流形（作为具有全局坐标的向量空间），我们有同态

$$(\pi_2 \circ \varphi)^\bullet\colon C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(T^*G)\ .$$

我们希望证明，代数 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 可以与代数 $C^\infty(T^*G)^G$ 的 G-不变子空间等同，即。

$$C^\infty(\mathfrak{g}^*) \cong C^\infty(T^*G)^G\ ,$$

其中

$$C^\infty(T^*G)^G = \{F \in C^\infty(T^*G)^G |\ \forall g \in G : F \circ (l_g)^* = F\}\ . \tag{51}$$

为了解释这一点，考虑 $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 并记作

$$\tilde{F} := (\pi_2 \circ \varphi)^\bullet F = F \circ \pi_2 \circ \varphi \in C^\infty(T^*G)\ .$$

那么，按照（51）的意义，F 是 G-不变的。事实上，利用（49），我们得到

$$\tilde{F} \circ (l_g)^* = F \circ \pi_2 \circ \varphi \circ (l_g)^* = F \circ \pi_2 \circ \varphi = \tilde{F}\ ,$$

因此，我们有一个单射 $C^\infty(\mathfrak{g}^*) \hookrightarrow C^\infty(T^*G)^G$。另一方面，考虑 $\tilde{H} \in C^\infty(T^*G)^G$。于是我们可以定义 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$

$$H(\xi) := \tilde{H}\left(\varphi^{-1}(e, \xi)\right), \xi \in \mathfrak{g}^*\ ,$$

其中 φ 是如上方交换的图所述的 T^*G 的平凡化。由于 H的 G-不变性，上述 H 的定义是明确无歧义的。这个映射 $H \mapsto H$ 显然是单射，因此 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 与 $C^\infty(T^*G)^G$之间存在双射。括号也得以保持

$$\{F, H\} \circ \pi_2 = \{F \circ \pi_2, H \circ \pi_2\}$$

对所有 $F, H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$。

注记 10.2. 对于李群 G，余切丛 T^*G 是一个具有非退化泊松结构的辛流形（因为 G 是一个光滑流形）。

注记 10.3. $\mathfrak{g}^*$ 不具有李代数结构，尽管它是李代数 $\mathfrak{g}$的对偶向量空间，但它不是余代数。另一方面， $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$是一个李代数。

另一个辛流形的例子。设 G 是一个李群， $\mathfrak{g}$是它的李代数， $\mathfrak{g}^*$ 是相应的对偶向量空间。群 G 通过伴随作用 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$作用于 $\mathfrak{g}$ 。在 $g \in G$处，映射

$$\mathrm{Ad}_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

是共轭映射 $G \to G$在单位元 $e \in G$ 处的导数，该映射由 $h \mapsto ghg^{-1}$给出。对 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用 Ad 在 e处求导，可得到其在 $\mathfrak{g}$上的伴随作用，即映射

$$\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \ .$$

事实上，可以证明 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathcal{D}(\mathfrak{g})$，其中 $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$上的导数代数，也就是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$的李代数。对于 X、 $Y \in \mathfrak{g}$， ad 映射的作用就是李括号

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y] \ .$$

利用 Ad，可以定义 G 在 $\mathfrak{g}^*$上的余伴随作用，记为 Ad^*: $G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$，其定义为

$$\mathrm{Ad}^*_g(\xi)(X) = \xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)),$$

其中 $\xi \in \mathfrak{g}^*$。最后，利用 Ad^*，我们可以定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^*$上的余伴随作用，记为 ad^*: $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$，定义为

$$(\mathrm{ad}^*_X(\xi)(Y)) := -\xi([X, Y]) \ ,$$

X、 $Y \in \mathfrak{g}$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$。

10.7 $\mathfrak{g}^*$上的辛叶状结构

$\mathfrak{g}^*$ 上的括号不是辛的。

余伴随轨道上的辛结构。现在假设 G是一个连通李群，并用 $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ 表示余伴随作用 Ad^*的 G-轨道。那么对于所有 $\xi \in \mathcal{O}$， $\mathcal{O}$ 在 ξ 处的切空间为

$$T_\xi \mathcal{O} = \{\mathrm{ad}^*_X(\xi) \in \mathfrak{g}^* \,|X \in \mathfrak{g}\} \ .$$

可以在 $\mathcal{O}$ 上定义一个辛结构:

$$\Omega_\xi \colon T_\xi \mathcal{O} \times T_\xi \mathcal{O} \to \mathbb{R} \ ,$$

如下。对于任意的 (X, ξ)、$(Y, \xi) \in T_\xi \mathcal{O}$，定义

$$\Omega_\xi((X, \xi), (Y, \xi)) := \xi(\mathrm{ad}_X(Y)) = \xi([X, Y]) \ . \tag{52}$$

这一结构通常归功于 Kostant [16], Kirillov [13,14], 和 Souriau[26]。为简便起见，我们将这种辛结构称为 KKS。

10.7.1 余伴随不变函数

一个满足以下条件的函数 $F \in C^\infty(g^*)$

$$\{F, H\} = 0 \ \forall H \in C^\infty(g^*)$$

称为卡西米尔函数。设 F 是一个卡西米尔函数。那么对于任意的 $X \in \mathfrak{g}$，相应的线性函数 [9] F_X 满足

$$\{F, F_X\} = -\{F_X, F\} = -\xi_{F_X}(F) = \mathrm{ad}_X^*(F) = 0 \ ,$$

其中 $\xi_{F_X} = \{F_X, -\}$ 是与 F_X 对应的哈密顿函数。这意味着卡西米尔函数是余伴随不变函数。

注 10.4. 如果 G 是一个半单李群，那么存在一个开稠密子集 $U \subset \mathfrak{g}^*$，在 G 作用下保持不变，并且其轨道由卡西米尔函数区分。这给出了 $\mathfrak{g}^*$ 的一个叶层。需要指出的是，这个叶层并不是光滑纤维化，其结构相当复杂。

$\mathfrak{g}^*$ 和 $\mathcal{O}$ 上的泊松括号。 $\mathfrak{g}^*$ （47）上的泊松括号与余伴随轨道 $\mathcal{O}$ 上的泊松括号之间存在联系。记 $\iota\colon \ \mathcal{O} \to \mathfrak{g}^*$ 为将该轨道嵌入 $\mathfrak{g}^*$ 的嵌入映射，并记 $\iota^*\colon \ C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(\mathcal{O})$ 为相应的代数映射。那么我们有

$$\iota^*\{f, g\}_{C^\infty(\mathfrak{g}^*)} = \{\iota^* f, \iota^* g\}_{C^\infty(\mathcal{O})} \ .$$

左边是 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上的泊松括号，限制到 $\mathcal{O}$ 上。右边是 $C^\infty(\mathcal{O})$ 上的辛泊松括号，由 $\mathcal{O}$ 上的辛结构 Ω 给出，该结构由 (52) 给出。现在我们将介绍这种构造的两个例子。

例 10.3. 令 $G = \mathrm{SO}(3)$。李代数为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$，并且通过 Killing 型与其对偶 $\mathfrak{so}(3)$ 同构。此外，$\mathfrak{so}^*(3) \cong \mathbb{R}^3$。余伴随作用的轨道由方程 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 描述。因此，对于 $R = 0$，我们有一个 0 维辛叶（一个点）。对于 $R > 0$，我们有 2 维辛叶（余伴随轨道）。在 $\mathbb{R}^3$ 上，我们有体积形式 $dx \wedge dy \wedge dz$，将其限制到轨道上可得

$$\Omega_R = \frac{1}{R^2}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

$\mathfrak{so}(R)$ 上的卡西米尔函数由 $F = x^2 + y^2 + z^2$ 给出。因此，卡西米尔元素由 $R > 0$ 参数化。

例 10.4。考虑由下式给出的 $G = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) | \ \det A = 1\} \ ,$$

[9] 这是求值映射 $F_X\colon \ \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ （如上所定义），$F_X(\xi) = \xi(X)$。

李代数为

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) | \operatorname{tr} A = 0\} \cong \mathbb{R}^3 \ .$$

$_2$(ℝ)在 $\mathbb{R}^3$ 中的轨道是圆锥和双曲面，其辛结构由KKS结构给出。

注 10.5. 对于有限维李代数 $\mathfrak{g}$ ，以及括号在线性扩张到对称代数 S(𝔤)后所得的结构，卡西米尔元素可与 S(𝔤)的 $\mathfrak{g}$-不变子空间相对应

$$\mathrm{Cas}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

其中，Z(𝒰(𝔤))表示 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数的中心（见 41）。对于约化 $\mathfrak{g}$

$$HP^k\left(S(\mathfrak{g})\right) \cong H^k_{CE}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Cas}(\mathfrak{g}) \ ,$$

其中 H_{CE} 是切瓦莱-埃伦伯格上同调。

11 泊松流形上的微分学

设 M 为光滑流形。那么存在一个自然同构 P_m ≅Γ(M, S^m(TM))，其中 S^m(TM)是切丛 TM的 m-对称幂。于是， C^∞(T^*M)上的泊松括号可以改写为对称张量场上的泊松括号。

我们还考虑 M [22] 上的 𝔪-向量场，即 m 阶外丛的截面

$$\Lambda^m(TM) \to M \ ,$$

所有 m-向量场的集合记为 $\mathfrak{X}^m$(M)：$= C^\infty$(M, Λ^m(TM))。当 m =1 时，我们得到向量场的标准概念，即 $\mathfrak{X}^1$(M) $= C^\infty$(M, TM)。取 TM 的所有外幂的惠特尼和，即得到外丛

$$\Lambda(TM) := \oplus_{m\geq 0} \to M \ .$$

该丛的截面是多向量场。所有多向量场的集合 $\mathfrak{X}$(M)：$= C^\infty$(M, Λ(TM)) 关于外积（38）构成一个代数。对偶地，可以在 M 上构造微分形式。如果从 T^*M 而不是 TM 开始，我们就得到 M 上的微分 m-形式（简称 m-形式），作为丛的截面

$$\Lambda^m(T^*M) \to M \ .$$

所有微分 m-形式的集合记作 Ω^m(M) := C^∞(M, Λ^m(T^*M))。注意， m-向量场是 1-形式上的斜对称多线性函数。取所有 m-形式丛的截面， $0 \leq m \leq$维 M，

$$\Lambda(T^*M) := \oplus_m \Lambda^m(T^*M) \to M \ ,$$

我们得到 M 上的微分形式代数（关于外积）

$$\Omega(M) = \oplus_{m\geq 0}\Omega^m(M)\ ,$$

注释 11.1. $\mathfrak{X}(M)$ 和 $\Omega(M)$ 都是 C^∞-模。

现在假设 $(M,\{\cdot,\cdot\})$ 是一个泊松流形，$\mathcal{H}$: $T^*M \to TM$ 相应的哈密顿映射。可以考虑一个双向量场 $\pi_* \in \mathfrak{X}^2(M)$，使得

$$\{F,G\} := \sum_{k,l} H^{kl}\,\partial_k F\,\partial_l G\ .$$

我们希望利用多向量场 $\mathfrak{X}(M)$ 空间上的某种结构，以一种更加不变且内在的方式来研究上述雅可比恒等式。这种结构称为李超 Schouten 括号（Lie super-Schouten bracket）、Schouten-尼延豪斯括号（Schouten-Nijenhuis bracket），或简称 Schouten 括号，

$$[\![-,-]\!]\colon \mathfrak{X}^p(M)\times\mathfrak{X}^q(M)\to\mathfrak{X}^{p+q-1}(M)\ .$$

我们利用多向量场的以下性质对其进行归纳定义。

1. $s\wedge t = (-1)^{|s||t|}t\wedge s$，其中 $|s|$ 是 s的次数[10]，2. $[\![s,t]\!] = (-1)^{|s|(|t|+1)+|t|}[\![t,s]\!]$（分次交换性），3. $[\![s,t\wedge r]\!] = [\![s,t]\!]\wedge r + (-1)^{|t|(|s|-1)}t\wedge[\![s,r]\!]$，4. $[\![s\wedge t,r]\!] = s\wedge[\![t,r]\!] + (-1)^{|t|(|r|-1)}[\![s,r]\!]\wedge t$。

对于次数 ≤ 1，我们进一步定义

1. $|s|=|t|=1 : [\![s,t]\!] := [s,t]$, where $[-,-]$ is the Lie bracket
2. $|s|=1, |t|=0 : [\![s,t]\!] := s(t) = \mathcal{L}_s(t)$, where $\mathcal{L}$ is the Lie derivative
3. $|s|=|t|=0 : [\![s,t]\!] := 0$.

多向量场 s 和 t 被称为可分解的，如果

$$s = s_1\wedge\ldots\wedge s_p \qquad\qquad t = t_1\wedge\ldots\wedge t_q\ ,$$

对于某些 p、q，并且其中所有 s_i、$t_j\in\mathfrak{X}^1(M)$。在这种情况下

$$[\![s,t]\!] = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}[s_k,t_l]\wedge s_1\wedge\ldots\wedge\hat{s_k}\wedge\ldots\wedge s_p\wedge t_1\wedge\ldots\wedge\hat{t_l}\wedge\ldots\wedge t_q\ .$$

至多存在一个满足上述性质的 Schouten 括号。

正确地定义了流形上的多向量空间以及 Schouten 括号的概念后，我们就可以引入泊松张量的概念。

[10]意为 $s\in\mathfrak{X}^{|s|}(M)$

定义 11.1（泊松张量）。设 M 是一个泊松流形，配有泊松括号 $\{-,-\}$ 和 Schouten 括号 $[\![-,-]\!]$。若一个二向量场 $\pi \in \mathfrak{X}$（M）满足对所有 f、$g \in C^\infty$（M），则称其为泊松张量。

$$\{f,g\} = [\![[\![\pi, f]\!], g]\!] \ .$$

定理 11.1。泊松括号 $\{-,-\}$ 满足雅可比恒等式，当且仅当$[\![\pi,\pi]\!] = 0$。

11.1 Schouten 括号的无坐标构造

考虑外代数 $\Omega(M)$。令 $\omega \in \Omega^p(M)$ 和 $X \in \mathfrak{X}^1(M)$。我们为 X 在 $\Omega(M)$ 上关联两个算子

$$\begin{aligned} \iota_X &: \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M) && \text{(interior product)} \ , \\ \mathcal{L}_X &: \Omega^p(M) \to \Omega^p(M) && \text{(Lie derivative)} \ . \end{aligned}$$

内积定义为

$$(\iota_X\omega)(X_2,\ldots,X_p) := \omega(X_1,X_2,\ldots,X_p) \ ,$$

其中所有 $X_i \in \mathfrak{X}^1(M)$。李导数定义为

$$\mathcal{L}_X\omega := \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t^*(\omega) \ ,$$

其中 ϕ_t^* 表示沿着 X 的流 ϕ_t 的拉回。这意味着

$$(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\ldots,X_p) = \mathcal{L}_X(\omega(X_1,\ldots,X_p)) - \sum_k \omega(X_1,\ldots,[X,X_k],\ldots,X_p) \ .$$

我们用 d 表示 de Rham 微分 d: $\Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$，其定义如下

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\ldots,X_{p+1}) = &\sum_k \mathcal{L}_{X_k}(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_{p+1})) \\ &+ \sum_{k<l}(-1)^{k+l}\omega([X_k,X_l],X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,\hat{X}_l,\ldots,X_{p+1}) \ . \end{aligned}$$

定理 11.2（Cartan 三元组（$\iota_X, \mathcal{L}_X, d$））。以下恒等式始终成立

1. $\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0$,
2. $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$,
3. $[\mathcal{L}_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$,
4. $[\mathcal{L}_X, d] = 0$, 5. $d^2 = d \circ d = 0$,

6. $\mathcal{L}_X = \iota_x \circ d + d \circ \iota_X$。

现在我们要为多向量定义与这种“微分学”相对应的概念。对于可分解的 $t \in \mathfrak{X}^p(M)$ $t = X_1 \wedge \ldots \wedge X_p$，我们定义

$$\iota_t = \iota_{X_1} \circ \ldots \circ \iota_{X_p} \ .$$

通过线性性，可以将上述定义扩展到任意的 $t \in \mathfrak{X}^p(M)$。根据上述定理的第一条性质，这一定义是正确的，并给出一个算子

$$\iota_t \colon \Omega^m(M) \to \Omega^{m-p}(M) \ ,$$

它还满足

$$\iota_{t \wedge s} = \iota_t \circ \iota_s \ .$$

要定义沿多向量场的李导数 $\mathcal{L}_t$，可以从分次算子的概念入手

$$\partial \colon \Omega^m(M) \to \Omega^{m+r}(M).$$

在这种情况下，∂称为次数为 $\deg \partial = |\partial| = r$ 的分次算子。若此外 ∂ 满足

$$\partial(\omega \wedge \theta) = \partial\,\omega \wedge \theta + (-1)^{mr} \omega \wedge \partial\,\theta,$$

其中 $\omega \in \Omega^m(M)$，则 ∂ 称为次数为 r 的分次导数。例如，ι_x、$\mathcal{L}_x$、d 是次数分别为 $|\iota_x| = -1$、$|\mathcal{L}_x| = 0$、$|d| = 1$ 的分次导数。

我们回顾一下，两个算子的分次括号定义为

$$[\Delta, \nabla] = \Delta \circ \nabla - (-1)^{|\Delta||\nabla|} \nabla \circ \Delta \ .$$

注 11.2. 若 ∂ 和 D 分别是次数为 $|\partial|$ 和 $|D|$的分次算子，则 $[\partial, D]$ 是次数为 $|\partial| + |D|$的分次导子。

现在，前一定理的性质 6. 表述为

$$[\iota_X, d] = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X = \mathcal{L}_X$$

对于向量场 X。利用分次括号，我们现在定义沿多向量场 t的李导数

$$\mathcal{L}_t := [\iota_t, d] \ .$$

若 $t \in \mathfrak{X}^p(M)$，则

$$\mathcal{L}_t \colon \Omega^m(M) \to \Omega^{p-m+1}(M) \ ,$$

这意味着 $\mathcal{L}_t$ 是一个次数为 $|\mathcal{L}_t| = m - 1$ 的分次导子。

我们可以继续定义多向量代数上的括号（用与 Schouten 括号相同的符号表示）

$$[\![-,-]\!]\colon \mathfrak{X}^p(M)\times\mathfrak{X}^q(M)\to\mathfrak{X}^{p+q-1}(M)\ .$$

若 $s\in\mathfrak{X}^p(M)$ $t\in\mathfrak{X}^q(M)$，则存在唯一的多向量场 $[\![t,s]\!]\in\mathfrak{X}^{p+q-1}(M)$ 满足

$$\iota_{[\![s,t]\!]}=[\mathcal{L}_s,\iota_t]\ ,$$

其中，右端由分次交换子给出，即

$$[\mathcal{L}_s,\iota_t]=\mathcal{L}_s\circ\iota_t-(-1)^{(p-1)q}\iota_t\circ\mathcal{L}_s\ .$$

当多向量可分解为 $s=s_1\wedge\ldots\wedge s_p$ 和 $t=t_1\wedge\ldots\wedge t_q$ 时，那么

$$[\![s,t]\!]=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}[s_k,t_l]\wedge s_1\wedge\ldots\wedge\hat{s_k}\wedge\ldots\wedge s_p\wedge t_1\wedge\ldots\wedge\hat{t_l}\wedge\ldots\wedge t_q\ .$$

通过双线性扩张，这便在整个 $\mathfrak{X}(M)$ 上定义了 $[\![-,-]\!]$。此外，它满足分次交换性

$$[\![s,t]\!]=-(-1)^{(|s|-1)(|t|-1)}[\![t,s]\!]\ ,$$

以及定理 11.2 的第二个性质的类比

$$[\mathcal{L}_s,\mathcal{L}_t]=\mathcal{L}_{[\![s,t]\!]}\ ,$$

并且还满足分次雅可比恒等式

$$(-1)^{(|s|-1)(|r|-1)}[\![s,[\![t,r]\!]]\!]+(-1)^{(|t|-1)(|s|-1)}[\![t,[\![r,s]\!]]\!]+(-1)^{(|r|-1)(|t|-1)}[\![r,[\![s,t]\!]]\!]=0\ .$$

有关 Nijenhuis-Schouten 括号的更多详情，请参阅例如 [12,18]

12 修正的双泊松括号

本节主要参考 S. Arthamonov 的研究（2017） [2]。

12.1 一般结合代数的泊松括号

.

设 $\mathcal{A}$ 是一个结合代数。当 $\mathcal{A}$ 本质上是非交换的时，泊松括号的传统定义就过于严格了。

标准的“集合”公理（参见定义 3.1）面临着一个问题：如何找到“非平凡”的例子。本章旨在介绍一些构造“非交换”泊松代数结构的方法。这一主题始于

Ping Xu 的论文 [30], ，作者在其中引入了非交换代数上泊松结构的概念，并研究了它的一些性质和应用。对于一个结合代数 $\mathcal{A}$ ，人们证明霍赫希尔德上同调 $HH^*(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 可借助所谓的 $G-$ 括号赋予分次李代数结构。这个括号最初由 M. Gerstenhaber 引入，是多向量场的 Schouten 括号的类似物。于是， $\mathcal{A}$ 上的泊松结构被定义为 $HH^2(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 中的一个元素，且它与自身的 G- 括号为零。研究表明，这样的泊松结构会在 $\mathcal{A}$ 的中心上诱导出一个通常的泊松括号。

我们将讨论在非交换代数上定义泊松结构的朴素方法的缺陷 $\mathcal{A}$。

首先，我们介绍以下重要引理。该引理发表于论文 [29] 中，因此（根据著名的 Arnold 的说法）被归于 Victor Ginzburg。

12.1.1 Ginzburg-Voronov 引理

.

引理 12.1. 若 $\mathcal{A}$ 是任意一个泊松代数，则对所有 a、 b、 c、 $d \in \mathcal{A}$，以下恒等式成立

$$[a,c]\{b,c\} = \{a,c\}[b,d] \ .$$

证明。取泊松括号 $\{$ ab,cd$\}$。根据括号的导子性质，我们有

$$\{ab,cd\} = a\{b,cd\} + \{a,cd\}b = ac\{b,d\} + a\{b,c\}d + c\{a,d\}b + \{a,c\}db \ .$$

另一方面

$$\{ab,cd\} = c\{ab,d\} + \{ab,c\}d = ca\{b,d\} + c\{a,d\}b + a\{b,c\}d + \{a,c\}bd \ .$$

两式相减即可得出结果。 □

定义 12.1. 如果非零理想的乘积非零，则代数 $\mathcal{A}$ 是素的。

定义 12.2。若代数 $\mathcal{A}$ 没有非平凡的双边理想，且代数乘积非平凡，则称其为单代数。

例如，由.....给出的代数

$$\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

在这种情况下，它不是单的，因为矩阵乘积始终是平凡的。

以下定理归功于 D. R. Farkas 和 G. Letzter [11]。

定理 12.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个素简单非交换泊松代数。那么对于所有 $c, d \in \mathcal{A}$

$$\{c, d\} = \lambda[c, d]$$

对于某些 $\lambda \in \mathsf{Z}_P(\mathcal{A})$[11]

定义 12.3（ [10]）。一个映射

$$\{,\}\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

如果对于所有 a、 b、 $c \in \mathcal{A}$，它都是一个 H_0-泊松括号。

1. $\{a, bc\} = b\{a, c\} + \{a, b\}c$（右莱布尼茨恒等式）， 2. $\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$（左洛代-雅可比恒等式），
3. $\{a, b\} + \{b, a\} \equiv 0$ 模 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$， 4. $\{ab, c\} = \{ba, c\}$。

推论 12.1（ [10]）。一个 H_0-泊松括号诱导出李代数结构$\{_\}^{Lie}$: $\mathcal{A}_\natural \otimes \mathcal{A}_\natural \to \mathcal{A}_\natural$ 在 $\mathcal{A}$ 的阿贝尔化 $\mathcal{A}_\natural$ 上 $= \mathcal{A}/[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 】【。

12.1.2 表示概形。

遵循 M. Kontsevich 的理念， [15], 任何具有几何意义的代数性质，都通过表示函子映射到其对应的交换版本

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}_N: \quad & \text{fin. gen. Associative algebras} \to \text{Affine schemes}, \\ & \mathrm{Rep}_N(\mathcal{A}) = Hom(\mathcal{A}, Mat_N(\mathbb{C}))\ . \end{aligned}$$

它为有限生成结合代数 $\mathcal{A} = \langle x^{(1)}, \ldots\ldots, x^{(k)} \rangle / \mathcal{R}$赋予一个表示其 $N \times N$ 矩阵表示的概形。令

$$\varphi(x^{(i)}) = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & \ldots & x_{1N}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1}^{(i)} & \ldots & x_{NN}^{(i)} \end{pmatrix}\ . \tag{53}$$

$\mathcal{A}$ 的表示因此构成一个仿射概形 $\mathcal{V}$ ，其坐标环为$\mathbb{C}[\mathcal{V}] := \mathbb{C}\left[x_j^{(i)},\ {}_k\right] / \varphi(\mathcal{R})$。将相应的有理函数层记作 $\mathbb{C}_{\mathcal{V}}$-。

[11]关于泊松中心 $\mathsf{Z}_P(\mathcal{A})$ 的定义，参见定义 (4.2)

12.1.3 表示模空间

基变换对应于作用 $GL_N(\mathbb{C}) \circlearrowleft Mat_N(\mathbb{C})$,

$$M \to gMg^{-1} .$$

它诱导 $GL_N(\mathbb{C}) \circlearrowleft \mathbb{C}[\mathcal{V}]$。不变子代数 $\mathbb{C}[\mathcal{V}]^{GL_N(\mathbb{C})} \subset \mathbb{C}[\mathcal{V}]$ 随后是相应表示模空间的坐标环。

$$\varphi_0 : \mathcal{A}_\natural \to \mathbb{C}[\mathcal{V}]^{GL_N(\mathbb{C})}, \quad \varphi_0(x) = \operatorname{Tr}\varphi(x) .$$

引理 12.2（Procesi，1976年）。子集 $\varphi_0(\mathcal{A}_\natural)$ 生成 $\mathbb{C}[\mathcal{V}]^{GL_N(\mathbb{C})}$。

命题 12.1（Crawley-Boewey，2011年）。一个 H_0-泊松括号诱导出一个传统的泊松括号

$$\{,\}^{inv} : \mathbb{C}[\mathcal{V}]^{GL_N(\mathbb{C})} \otimes \mathbb{C}[\mathcal{V}]^{GL_N(\mathbb{C})} \to \mathbb{C}[\mathcal{V}]^{GL_N(\mathbb{C})} .$$

12.2 双泊松括号

定义 12.4。 [M. Van den Bergh， 2008] 映射 $\{\!\{,\}\!\}$: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ 若对所有 a、b、$c \in \mathcal{A}$ 都有：则称为双泊松括号：

1. $\{\!\{a,b\}\!\} = -\{\!\{b,a\}\!\}^{op}$, 2. $\{\!\{ab,c\}\!\} = (1 \otimes a)\{\!\{b,c\}\!\} + \{\!\{a,c\}\!\}(b \otimes 1)$, 3. $\{\!\{a,bc\}\!\} = (b \otimes 1)\{\!\{a,c\}\!\} + \{\!\{a,b\}\!\}(1 \otimes c)$, 4.

$R_{12}R_{23} + R_{31}R_{12} + R_{23}R_{31} = 0$ $R_{m\,n}\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_k\ = a_1 \otimes \cdots \otimes$,
$a_{m-1} \otimes \{\!\{a_m, a_n\}\!\}' \otimes \cdots \otimes \{\!\{a_m, a_n\}\!\}'' \otimes \cdots \otimes a_k$.

其中 ,( )

命题 12.2（ [27]）。双泊松括号诱导出一个常规的泊松括号

$$\{,\}^{\mathcal{V}} : \mathbb{C}_{\mathcal{V}} \otimes \mathbb{C}_{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}_{\mathcal{V}} \qquad \left\{x_{ij}^{(m)}, x_{kl}^{(n)}\right\}^{\mathcal{V}} = \varphi\left(\{\!\{x^{(m)} \otimes x^{(n)}\}\!\}\right)_{(kj),(il)} .$$

如果 $\mathcal{A} = \mathbb{C} < x_1 \ \ldots \ x_m >$ $\mathbb{C}[\ _n\mathcal{A}\ ] =$, , 是自由结合代数，那么 Rep ( )，其中
$\mathbb{C}[x_{i,\alpha}^j]$ $1 \le \alpha \le m$.

如果 $\{\!\{x_\alpha, x_\beta\}\!\}$ 是 $\mathcal{A} = \mathbb{C} < x_1, \ \ldots, \ x_m >$ 上的双泊松括号，那么，使用 Sweedler 约定并省略求和符号，我们便得到 $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}_n(\mathcal{A})]$ 上的常规泊松括号：

$$\{x_{i,\alpha}^j, x_{k,\beta}^l\} = \{\!\{x_\alpha, x_\beta\}\!\}_k^{'j} \{\!\{x_\alpha, x_\beta\}\!\}_i^{''l}$$

12.3 二次双泊松括号

设 $\mathcal{A}=\mathbb{C}<x_1,...,x_m>$ 为自由结合代数。如果所有生成元之间的双括号 $\{\!\{x_i,x_j\}\!\}$ 已固定，那么 $\mathcal{A}$ 中任意两个元素之间的括号都由恒等式 (12.4) 唯一定义。由 (12.4) 可知，常数、线性和二次双括号由以下方式定义：

$$\{\!\{x_i,x_j\}\!\}=c_{ij}1\otimes 1,\qquad c_{i,j}=-c_{j,i}, \tag{54}$$

$$\{\!\{x_i,x_j\}\!\}=b_{ij}^k x_k\otimes 1-b_{ji}^k 1\otimes x_k, \tag{55}$$

and

$$\{\!\{x_\alpha,x_\beta\}\!\}=r_{\alpha\beta}^{uv}\,x_u\otimes x_v+a_{\alpha\beta}^{vu}\,x_u x_v\otimes 1-a_{\beta\alpha}^{uv}\,1\otimes x_v x_u, \tag{56}$$

其中

$$r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon}=-r_{\beta\alpha}^{\epsilon\sigma}, \tag{57}$$

相应地。约定对重复指标求和。

容易验证，对于任意反对称张量 c_{ij}，括号 (54) 都满足 (12.4)。对于括号 (55)，条件 (12.4) 等价于恒等式

$$b_{\alpha\beta}^{\mu}b_{\mu\gamma}^{\sigma}=b_{\alpha\mu}^{\sigma}b_{\beta\gamma}^{\mu}, \tag{58}$$

这意味着 $b_{\alpha\beta}^{\sigma}$ 是结合代数 $\mathcal{A}$ 的结构常数。

命题 12.3。括号 (56) 满足 (12.4) 当且仅当满足以下关系：

$$r_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma}r_{\sigma\tau}^{\mu\nu}+r_{\beta\tau}^{\mu\sigma}r_{\sigma\alpha}^{\nu\lambda}+r_{\tau\alpha}^{\nu\sigma}r_{\sigma\beta}^{\lambda\mu}=0, \tag{59}$$

$$a_{\alpha\beta}^{\sigma\lambda}a_{\tau\sigma}^{\mu\nu}=a_{\tau\alpha}^{\mu\sigma}a_{\sigma\beta}^{\nu\lambda}, \tag{60}$$

$$a_{\alpha\beta}^{\sigma\lambda}a_{\sigma\tau}^{\mu\nu}=a_{\alpha\beta}^{\mu\sigma}r_{\tau\sigma}^{\lambda\nu}+a_{\alpha\sigma}^{\mu\nu}r_{\beta\tau}^{\sigma\lambda} \tag{61}$$

and

$$a_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma}a_{\tau\sigma}^{\mu\nu}=a_{\alpha\beta}^{\sigma\nu}r_{\sigma\tau}^{\lambda\mu}+a_{\sigma\beta}^{\mu\nu}r_{\tau\alpha}^{\sigma\lambda}. \tag{62}$$

与任意双泊松括号 (56) 对应的传统泊松括号可以按以下方式定义在 $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}_n(\mathcal{A})]$ 上 [21]:

$$\{x_{i,\alpha}^{j},x_{i',\beta}^{j'}\}=r_{\alpha\beta}^{\gamma\epsilon}x_{i,\gamma}^{j'}x_{i',\epsilon}^{j}+a_{\alpha\beta}^{\gamma\epsilon}x_{i,\gamma}^{k}x_{k,\epsilon}^{j'}\delta_{i'}^{j}-a_{\beta\alpha}^{\gamma\epsilon}x_{i',\gamma}^{k}x_{k,\epsilon}^{j}\delta_{i}^{j'} \tag{63}$$

其中 x_i^j , α 是矩阵 x_α 的元素，而 δ_i^j 是克罗内克δ符号。当且仅当 (63) 是泊松括号时，关系 (57)、(59)-(62) 成立。

我们可以将四指标张量 r 和 a 解释为：

1) 作用于 $V\otimes V$ 上的算子，其中 V是一个 m 维向量空间；2) $Mat_m(\mathbb{C})\otimes Mat_m(\mathbb{C})$ 的元素；3) 作用于 $Mat_m(\mathbb{C})$ 上的算子。

对于第一种解释，设 V 是一个带有基 e_α，α =1, ..., m 的线性空间。在空间 $V \otimes V$ 上定义线性算子 r, a :

$$r(e_\alpha \otimes e_\beta) = r^{\sigma\epsilon}_{\alpha\beta} e_\sigma \otimes e_\epsilon, \qquad a(e_\alpha \otimes e_\beta) = a^{\sigma\epsilon}_{\alpha\beta} e_\sigma \otimes e_\epsilon.$$

那么，恒等式（57）、（59）–（62）可以写成

$$\begin{gathered} r^{12} = -r^{21}, \quad r^{23}r^{12} + r^{31}r^{23} + r^{12}r^{31} = 0, \\ a^{12}a^{31} = a^{31}a^{12}, \\ \sigma^{23}a^{13}a^{12} = a^{12}r^{23} - r^{23}a^{12}, \\ a^{32}a^{12} = r^{13}a^{12} - a^{32}r^{13}. \end{gathered} \tag{64}$$

这里所有算子都作用于 $V \otimes V \otimes V$， σ^{ij} 表示张量积中第 i 个和第j 个分量的置换，而 a^{ij}、 r^{ij} 表示算子 a、 r ，它们作用于第 i 个和第 j 个分量的乘积中。

注意，前两个关系意味着张量 r 应当是经典结合杨-巴克斯特方程 [1] 的反对称解。

在第二种解释中，我们考虑来自 $Mat_m(\mathbb{C}) \otimes Mat_m(\mathbb{C})$ 的以下元素: $r = r^{km}_{ij} e^i_k \otimes e^j_m$， $a = a^{km}_{ij} e^i_k \otimes e^j_m$，其中 e^i_j 是矩阵单位元: $e^j_i e^m_k = \delta^j_k e^m_i$. 。那么，(57)、(59)-(62) 等价于 (64)，其中张量属于 $Mat_m(\mathbb{C}) \otimes Mat_m(\mathbb{C}) \otimes Mat_m(\mathbb{C})$。具体而言， $r^{12} = r^{mk}_{ij} e^i_k \otimes e^j_m \otimes 1$，依此类推。元素 σ 由 $\sigma = e^j_i \otimes e^i_j$ 给出。

对于第三种解释，我们将定义算子 r、 a、 $\bar{r}$、 a^*： $Mat_N \to Mat_N$ 通过 $r(x)^p_q = r^{mp}_{nq} x^n_m$、 $a(x)^p_q = a^{mp}_{nq} x^n_m$、 $\bar{r}(x)^p_q = r^{pm}_{nq} x^n_m$、 $a^*(x)^p_q = a^{pm}_{qn} x^n_m$.

于是，(57)、(59)-(62)给出以下算子恒等式:

$$\begin{gathered} r(x) = -r^*(x), \qquad r(x)r(y) = r(xr(y)) + r(x)y), \\ \bar{r}(x) = -\bar{r}^*(x), \qquad \bar{r}(x)\bar{r}(y) = \bar{r}(x\bar{r}(y)) + \bar{r}(x)y), \\ a(x)a^*(y) = a^*(y)a(x), \\ a^*(ya(x)) = r(xa^*(y)) - r(x)a^*(y), \\ a(x)a(y) = -a(r(y)x) - a(yr(x)), \\ a^*(a(x)y) = r(a^*(y)x) - a^*(y)r(x), \\ a(ya^*(x)) = -\bar{r}(xa(y)) + \bar{r}(x)a(y), \\ a^*(x)a^*(y) = a^*(\bar{r}(y)x) + a^*(y\bar{r}(x)), \\ a(a^*(x)y) = -\bar{r}(a(y)x) + a(y)\bar{r}(x) \end{gathered}$$

对于任意 x、 y。前两个恒等式表明，算子 r 和 $\bar{r}$ 满足 Rota-Baxter 方程 [23] ，这一事实还意味着新的矩阵

乘法 $\circ_r$ 和 $\circ_{\bar{r}}$ 定义如下:

$$x \circ_r y = r(x)y + xr(y), \quad x \circ_{\bar{r}} y = \bar{r}(x)y + x\bar{r}(y)$$

是结合律的。

12.4 低维二次双泊松括号的例子与分类

容易看出，对于 $m = 1$ ，不存在非零二次双泊松括号。在最简单的非平凡情形 $m = 2$ 下，可以直接求解代数方程组 (57)、(59)–(62)。

定理 12.2. 设 $m = 2.$ ，则在生成元的线性变换下，以下情形 1–7 构成二次双泊松括号的完整等价分类。我们仅列出张量 r 和 a 的非零分量。

情形 1. $r_{22}^{21} = -r_{22}^{12} = 1$。相应的（非零）双括号为:

$$\{\!\{v, v\}\!\} = v \otimes u - u \otimes v;$$

情况 2. $r_{22}^{21} = -r_{22}^{12} = 1$, $a_{21}^{11} = a_{22}^{12} = 1$。相应的（非零）双括号:

$$\{\!\{v, v\}\!\} = v \otimes u - u \otimes v + vu \otimes 1 - 1 \otimes vu,\ \{\!\{v, u\}\!\} = u^2 \otimes 1,\ \{\!\{u, v\}\!\} = -1 \otimes u^2;$$

情况 3。 $r_{22}^{21} = -r_{22}^{12} = 1$, $a_{12}^{11} = a_{22}^{21} = 1$。对应的（非零）双括号:

$$\{\!\{v, v\}\!\} = v \otimes u - u \otimes v + uv \otimes 1 - 1 \otimes uv,\ dbu, v = u^2 \otimes 1,\ \{\!\{v, u\}\!\} = -1 \otimes u^2;$$

情况 4。 $r_{21}^{22} = -r_{12}^{22} = 1$。对应的（非零）双括号:

$$\{\!\{v, u\}\!\} = v \otimes v,\ \{\!\{u, v\}\!\} = -v \otimes v;$$

情况 5。 $r_{21}^{22} = -r_{12}^{22} = 1$,; $a_{11}^{21} = a_{12}^{22} = 1$。对应的（非零）双括号:

$$\{\!\{v, u\}\!\} = v \otimes v - 1 \otimes v^2,\ \{\!\{u, v\}\!\} = -v \otimes v + v^2 \otimes 1,\ \{\!\{u, u\}\!\} = uv \otimes 1 - 1 \otimes uv;$$

情形 6. $r_{21}^{22} = -r_{12}^{22} = 1$,; $a_{11}^{12} = a_{21}^{22} = -1$. 对应的（非零）双括号:

$$\{\!\{v, u\}\!\} = v \otimes v - v^2 \otimes 1,\ \{\!\{u, v\}\!\} = -v \otimes v + 1 \otimes v^2,\ \{\!\{u, u\}\!\} = -vu \otimes 1 + 1 \otimes vu;$$

情形 7. $a_{22}^{11} = 1$. 对应的（非零）双括号:

$$\{\!\{v, v\}\!\} = u^2 \otimes 1 - 1 \otimes u^2.$$

关于（12.2）的证明，参见 [20]。

注 12.1. 情形 2 和情形 3，以及情形 5 和情形 6，均通过对合相互关联。

注 12.2. 情形 1 等价于例 1 中的双括号，其中$m = 2$.

注 12.3. 容易验证（见 [1]），在 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ 中仅存在两个不同构的反 Frobenius 子代数。它们分别是具有一列全零的矩阵和具有一行全零的矩阵。情形 1 和情形 4 分别对应这两种情况。

注 12.4. 注意，情形 2 和情形 4 的迹泊松括号是非退化的。相应的辛形式可见 [6]（例 5.7 和引理 7.1）。

注 12.5. 在所有情况下，迹空间$\mathcal{A}/[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ 上的相应李代数结构都是平凡的（阿贝尔的），但情形 2、3 和 4 除外：

$$[\bar{u},\bar{v}] = -\bar{u}^2 \quad (\mathrm{Case}\,2), \quad [\bar{u},\bar{v}] = \bar{u}^2 \quad (\mathrm{Case}\,3), \quad [\bar{u},\bar{v}] = -\bar{v}^2 \quad (\mathrm{Case}\,4).$$

这些情况给出了关于对合 $u \to v$、 $v \to u$ 和 $u \to u$ $v \to -v$. 的 $\mathcal{A}/[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ 上的同构李代数结构

例 12.1. 考虑与情形 6 对应的迹泊松括号 (63)。其卡西米尔函数为

$$\operatorname{tr} v^k, \qquad \operatorname{tr} uv^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

其中 $u = x_1$、 $v = x_2$. 函数 $\operatorname{tr}\ u^i$ 和 $\operatorname{tr} vu^i$，其中 $i = 2$、3，.....相对于此括号彼此对易。

参考文献

[1] Marcelo Aguiar. 关于李双代数的结合律类比。《代数杂志》，244(2):492–532，2001年。[2] S. Arthamonov. 修正的双 Poisson 括号。《代数杂志》，492:212–233，2017。[3] A.V. Odesskii, V.N. Rubtsov. 具有正则辛叶结构的多项式泊松代数。《理论与数学物理》，133:1321–1337，2002年。[4] Berger, Roland and Pichereau, Anne. 将 Calabi–Yau 代数视为泊松代数的变形。《代数与表示论》，17:735–773，2014年。[5] K. H. Bhaskara and K. Viswanath. 泊松代数与泊松流形。载于《皮特曼数学研究札记丛书》，174。英国埃塞克斯郡哈洛：朗文科学技术出版社；纽约：威利出版社，1988年。

[6] Roger Bielawski. 箭图与泊松结构。《数学手稿》，141，2013年。[7] Jean-Luc Brylinski. 泊松流形的一个微分复形。《微分几何杂志》，28(1):93 – 114，1988年。[8] Laurent-Gengoux Camille, Pichereau Anne, and Vanhaecke Pol. 泊松结构。《数学科学基础丛书》。施普林格出版社，柏林、海德堡，2013年。[9] P. Cartiere. 可积系统理论中的一些基本技巧。IHES-M-94-23，载于《普通理论物理》，第42页，1994年。[10] William Crawley-Boevey. 表示的模空间上的泊松结构。《代数杂志》，325(1):205–215，2011年。[11] D. Farkas and G. Letzter. 从辛几何看环论。《纯粹与应用代数杂志》，125:155–190，1998年。[12] Ra´ul Ib´a˜nez, Manuel de Le´on, and Juan C. Marrero. 广义泊松流形上的同调与上同调。《物理学杂志A:数学与一般》，31(4):1253–1266，1998年1月。[13] A. A. Kirillov. 李群酉表示理论中的轨道方法。《泛函分析及其应用》，2:90–93，1968年。[14] A. A. Kirillov. 轨道方法讲义。《数学研究生丛书》，64，2004年。[15] Maxim Kontsevich. 形式（非）交换辛几何。载于《盖尔范德数学研讨会》，1990–1992，第173–187页。施普林格出版社，1993年。[16] Bertram Kostant. 量子化与酉表示。载于 C. T. Taam（编），《现代分析与应用讲座III》，第87–208页，柏林、海德堡，1970年。施普林格出版社。[17] Jean-Louis Koszul. Schouten–Nijenhuis括号与上同调。《Ast´erisque》，137(257-271):4–3，1985年。[18] I. S. Krasil'shchik. Schouten 括号与典范代数，第79–110页。施普林格出版社，柏林、海德堡，1988年。[19] Andr´e Lichnerowicz. 泊松流形及其相关李代数。《微分几何杂志》，12(2):253 – 300，1977年。[20] Alexander Odesskii, Vladimir Rubtsov, and Vladimir Sokolov. 自由结合代数上的双泊松括号。《非交换双有理几何、表示与组合学》，592:225–239，2013年。

[21]Alexander Vladimirovich Odesskii、Vladimir Nikolaevich Rubtsov 和 Vladimir Vyacheslavovich Sokolov。含矩阵变量的双哈密顿常微分方程。《理论与数学物理》，171(1):442–447，2012。[22] Narciso Rom´an-Roy。多辛流形的一些性质。载于 G. Marmo、David Mart´ín de Diego 和 Miguel Mu˜noz Lecanda 编，《经典与量子物理》，第 325–336 页，沙姆，2019。施普林格国际出版公司。[23] Gian-Carlo Rota。Baxter 算子导论。《Gian-Carlo Rota 论组合学：导论论文与评论》，Joseph PS Kung 编，Birkh ¨auser，波士顿，1(6):90，1995。[24]Sklyanin, E. K. 与杨–巴克斯特方程相关的一些代数结构。《泛函分析及其应用》，16:263–270，1982。[25] Paul Smith。四维 Sklyanin 代数。载于《纪念 Michael Artin 的代数几何与环论会议论文集》（安特卫普，1992）。《K 理论》，第 65–80 页，1994。[26] Jean-Marie Souriau。几何量子化：应用。《I.H.P.理论物理年刊》，6(4):311–341，1967。[27] Michel Van Den Bergh。双泊松代数。《美国数学会汇刊》，360:5711–5769，2008。[28] A. Vinogradov 和 I. Krasil’ shchik。什么是哈密顿形式主义。《俄罗斯数学调查》，30:177–202，1975。[29] Theodor Th. Voronov。李代数的泊松包络。“非交换”矩空间。《泛函分析及其应用》，29:196–199，1995。[30] Ping Xu。非交换泊松代数。《美国数学杂志》，116(1):101–125，1994。