arXiv:2305.03579v1 [math.DG] 5 May 2023

与 Monge-Ampère 结构相关的伪黎曼几何与 Hessian 几何

S. Hronek*
R. Such´anek†‡

2023年5月8日

Abstract. 我们研究了与四维 T^*M 上的 Monge-Amp`ère 结构相对应的伪黎曼度量的性质。我们描述了一族 Ricci平坦解，其由满足 Pl¨ücker 嵌入方程的六个系数参数化。我们还重点研究了二维 M 上伪度量的拉回，并描述了相应的 Hessian结构。

1 引言

设 $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ 为实光滑二维流形 M 上的余切丛。令 $\Omega \in \Omega^2(T^*M)$ 为典范辛形式，在达布（或典范）坐标中写作

$$\Omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}q \ . \tag{1}$$

*马萨里克大学理学院理论物理与天体物理系，捷克共和国布尔诺 611 37

†马萨里克大学理学院数学与统计系，捷克共和国布尔诺 611 37

‡昂热大学安茹数学研究实验室－法国国家科学研究中心联合研究组6093，法国昂热拉瓦锡大道2号，邮编49045，昂热 CEDEX 0。2022年数学主题分类：主要分类 53B20；次要分类 83C15。
关键词和短语：爱因斯坦方程，广义相对论，Hessian结构，Lychagin-Rubtsov 度量，Monge-Amp`ère 结构，Monge-Amp`ère 方程，Pl¨ucker 嵌入。

进一步考虑如下给定的 2-形式 $\alpha \in \Omega^2(T^*M)$

$$\alpha = A\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}y + B(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}q) + C\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}q + D\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q + E\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\ , \tag{2}$$

其中 A、B、C、D、$E \in C^\infty(T^*M)$ 是光滑函数。若 $\Omega \wedge \alpha = 0$，则对 $(\Omega\ \alpha)$ 称为 T^*M [8, 9] 上的 Monge-Amp`ere（M-A）结构。这一术语反映了这样一个事实：对 $(\Omega\ \alpha)$ 与一类称为 Monge-Amp`ere 方程的所有非线性二阶偏微分方程子类相对应，具体如下。选取一个函数 $f \in C^\infty(M)$。f 的 de Rham 微分给出一个截面，$\mathrm{d}f\colon M \to T^*M$，并且可以考虑拉回 $(\mathrm{d}f)^*\alpha \in \Omega^2(M)$。然后方程

$$(\mathrm{d}f)^*\alpha = 0 \tag{3}$$

定义了关于 f 的非线性二阶偏微分方程，其中非线性由 f 的 Hessian矩阵的行列式给出。在上述选定的坐标中，方程 (3) 写为

$$Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} + D\left(f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2\right) + E = 0\ , \tag{4}$$

其中 $A, \ldots, E$ 是 (2) 中给出的系数，但现在依赖于 x, y, f_x, f_y，而不是 x, y, p, q。方程 (4) 称为二维（辛）Monge-Amp`ere 方程（简称 M-A 方程）。M-A方程的出现及其应用十分广泛，例如在曲面的微分几何、几何结构的可积性、流体力学、声学、变分法、黎曼几何、CR 几何或复几何中 [5, 8, 9, 11, 15]。关于其中一些应用以及 M-A方程的几何处理，尤其是在二维和三维情形下的详细介绍，参见 [7, 8]。

从不同的角度来看，M-A 结构（$\Omega\ \alpha$）在 T^*M 上诱导出其他几何结构，例如复结构、乘积结构、Kähler 结构或近 Calabi-Yau 结构（取决于对系数 A、$\ldots, E$ 的各种假设）[4, 5, 7, 8, 9, 14, 15]。如果一个 M-A 结构的 Pfaffian （由方程给出）满足.....，则称该 M-A 结构为非退化的。

$$\alpha \wedge \alpha = \mathrm{Pf}(\alpha)\Omega \wedge \Omega\ , \tag{5}$$

满足 $\mathrm{Pf}(\alpha) \neq 0$。Pfaffian 的符号决定了 M-A 结构是产生复结构还是乘积结构，以及与该 M-A 结构相对应的 M-A 方程是椭圆型还是双曲型 [4, 8, 9]。我们有

发现， T^*M 上 M-A结构的非退化性等价于 M 上某些双线性形式的非退化性。

受理论气象学 [2, 11, 13], 中的应用启发，我们关注一族由 2-形式α 参数化的特定对称双线性形式，如公式 (2) 所示（或者等价地，由相应的系数 A、...、E 参数化）。更具体地说，存在一个映射

$$\Omega^2(T^*M) \to S^2(T^*M) \ ,$$
$$\alpha \mapsto g_\alpha \ ,$$

局部地由以下形式给出

$$g_\alpha(X,Y) := \frac{2(\iota_X\alpha \wedge \iota_Y\Omega + \iota_Y\alpha \wedge \iota_X\Omega) \wedge \pi^* \operatorname{vol}}{\Omega \wedge \Omega} \ , \tag{6}$$

其中 X、$Y \in \Gamma(TT^*M)$、 ι是内积，而 π^*vol $\in\Omega^2(T^*M)$是沿余切丛投影拉回的局部选取的顶形式 vol $\in \Omega^2(M)$。在对 α 的一个较弱假设下，对称形式 g_α 是 T^*M 上的伪度量，称为 Lychagin-Rubtsov 度量 [3, 5, 6]。

L-R度量是我们主要关注的对象。例如，它们在理论气象学 [2, 12, 14, 15] 中有着广泛的应用。特别值得一提的是 I. Roulstone、V. Rubtsov 和 M. Wolf 正在撰写的一篇论文，其中采用了一种受拓扑流体动力学一般原理启发的方法。具体而言，该研究利用 L-R 度量 (6) 的曲率，探讨二维和三维半地转不可压缩流的几何学方面，这些方面与流动涡量的累积有关。I. Roulstone 在 2022 年 2 月初举行的 Wisla 22冬季学校与研讨会上所作的一系列题为《Monge–Amp`ere 几何与 Navier–Stokes方程》的讲座中讨论了这些研究成果。

1.1 论文的结构

引言之后，我们重点研究 T^*M 上的 L-R 度量的性质，并探讨 Ricci平坦的情形。利用 Pl¨ucker 嵌入，我们证明，Ricci平坦 g_α 给出的集合与射影空间中的点之间存在对应关系。随后，我们考虑沿 $T^*M \to M$ 的截面对 g_α的拉回，并描述其基本特征以及一些特殊情形，其中包括 Hessian结构。Hessian结构与以下领域相关并在其中有所应用，例如仿射微分几何、齐性空间、上同调理论、统计流形、弦理论，

等等， [1, 16, 17]。我们还发现了一类特殊的 Hessian 结构，它们由某些 Monge-Amp`ere 方程的解给出。在这种情况下，我们计算了 Koszul 形式，并讨论了相关的 K¨ahler 结构及其 Ricci 张量。我们注意到，更一般的 M-A 结构（即 A、B、C 不一定为零）自然会导致 M 上 Hessian 结构的变形。我们表明，拉回度量的表现与原度量相当独立，而且一类特殊拉回度量的非退化性等价于相应 M-A 结构的非退化性。

2 T^*M 上的伪黎曼 Lychagin-Rubtsov 度量

我们先介绍一些关于 L-R 度量的基本信息。在典范坐标中，由 (6) 定义的 g_α 矩阵是

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} 2C & -2B & D & 0 \\ -2B & 2A & 0 & D \\ D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

我们注意到 G_α 与 E 的独立性。由 $\det G_\alpha = D^4$ 进一步可知，非退化条件为

$$\det G_\alpha \neq 0 \iff D \neq 0 .$$

引理 2.1. 设 g_α 是由 (6) 给出的 L-R 度量。假设由 (2) 给出的 α 满足 $D \neq 0$。那么 g_α 是 T^*M 上号差为 (2, 2) 的伪黎曼度量场。

证明。由 (7) 可知，向量场 $\frac{\partial}{\partial p}$、$\frac{\partial}{\partial q}$ 张成一个二维全各向同性子空间。由于 $\dim T_pT^*M = 4$， g_α 的号差必为 (2, 2)。 □

2.1 L-R 度量与 Ricci 平坦条件

我们寻找关于 α 的条件，使得 L-R 度量 (6) 满足里奇平坦条件

$$R_{ij} = 0 . \tag{8}$$

g_α 的里奇曲率 R_{ij} 和里奇标量 R 通常是包含系数 $A, B, \ldots$ 二阶导数的复杂表达式。我们重点研究了特殊情形 $A = B = C = 0$。这意味着 α 化简为

$$\alpha = D\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q + E\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ , \tag{9}$$

相应的 Monge-Amp`ere 方程为

$$D \det \mathrm{Hess}(f) = -E \ .$$

尽管通过选择A、 B、 C，我们大幅限制了考察范围，但上述 M-A 方程仍具有有趣的性质。例如，它自然地出现在不可压缩流体动力学的背景下，并且与丰富的几何结构 [8, 7, 2, 15]相关。此外，L-R 度量的拉回在 M上给出了Hessian结构，我们将在下一节进一步讨论。接下来给出以下引理，供后续结果使用。

引理 2.2. 设 g_α 是具有 $A = B = C = 0$ 的 L-R 度量。则里奇标量为

$$R = \frac{3}{D^3}\left(-D_q D_y + 2DD_{yq} - D_p D_x + 2DD_{xp}\right) \ . \tag{10}$$

证明。证明通过直接计算得出。注意，因子 $\frac{3}{D^3}$是良定义的，因为根据引理 (2.1)，只有当 $D \neq 0$时， G_α 才对应于一个度量。

□

命题 2.3. 设 $\alpha \in \Omega^2(T^*M)$ 由 (9) 给出，其中 $E \in C^\infty(T^*M)$ 是任意的。那么 g_α 是 Ricci平坦伪黎曼度量，当且仅当，

$$D(x, y, p, q) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 p + c_5 q + c_6 (xp + yq)\right)^{-2} \ , \tag{11}$$

其中常数 $c_i \in \mathbb{R}$、 $i = 1$、2、.....、6 满足

$$c_2 c_4 + c_3 c_5 - c_1 c_6 = 0 \ . \tag{12}$$

证明。里奇曲率是一个对称张量，因此一般有 10 个独立分量。我们将对应于 $R_{ij} = 0, 1 \leq i, j \leq 4$的方程组分成三个子集。第一个子集包含四个方程

$$3D_i^2 - 2DD_{ii} = 0, \quad i \in \{x, y, p, q\} \ , \tag{13}$$

以及第二个子集

$$\begin{aligned} 3D_xD_y - 2DD_{xy} &= 0 \ , \\ 3D_xD_q - 2DD_{xq} &= 0 \ , \\ 3D_pD_y - 2DD_{py} &= 0 \ , \\ 3D_pD_q - 2DD_{pq} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{14}$$

最后两个方程为

$$\begin{aligned} -2DD_{yq} + 3D_xD_p - 4DD_{xp} &= 0 \ , \\ -2DD_{xp} + 3D_yD_q - 4DD_{yq} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{15}$$

现在，我们采用以下方案来寻找上述偏微分方程组的解。首先考虑第一个方程 $3D_x^2 - 2DD_{xx} = 0$，将方程两边乘以因子 $\frac{1}{DD_x}$，即可轻松地将其化为

$$\frac{3}{2}\frac{D_x}{D} = \frac{D_{xx}}{D_x} \ ,$$

从而得到一个方程，该方程可以积分为一个可分离变量的方程

$$\frac{3}{2}\ln D = \ln D_x + c \ .$$

最后一个方程的解为

$$D = \frac{1}{(c_1(y,p,q) + xc_2(y,p,q))^2} \ ,$$

其中， $c_1(y,p,q)$ $c_2(y,p,q)$是未知函数。我们利用式 (13) 和 (14) 中其余的方程来确定 $c_1(y,p,q)$ 和 $c_2(y,p,q)$ 对变量 y,p,q 的依赖关系。由此得到

$$D(x,y,p,q) = \left(c_1 + c_2x + c_3y + c_4p + c_5q + c_6(xp+yq)\right)^{-2} \ .$$

将其代入剩下的两个方程 (15)，得到条件 (12)，证明完毕。

□

2.1.1 普吕克嵌入

依照 [10],，设 V为一个实向量空间，维数为 $\dim V = 4$。以 $\mathrm{Gr}(2,V)$ 表示 V 中 $2D$ 子空间的格拉斯曼流形，并以 $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ 表示

V 上外二形式空间的射影化。设 p_{12}、p_{13}、p_{14}、p_{23}、p_{24}、p_{34} 为 $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ 上的坐标。普吕克嵌入是一个映射

$$\mathrm{Gr}(2, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \tag{16}$$

其像由以下方程给出

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0 \ . \tag{17}$$

现在我们可以给出命题 2.3 的一个推论，它描述了解 g_α 与 5 维实射影空间中二次曲面上的点之间的联系。

推论 2.3.1. 满足 (11)、(12) 的度量集合 $g_\alpha \in S^2(T^*M)$ 与 $\mathbb{R}P^5$ 中由 Pl¨ucker 嵌入 (16) 的像给出的二次曲面之间存在对应关系。条件 (12) 等价于 g_α 的标量曲率为零。

证明。定义

$$c_1 = -p_{14} \ , \quad c_2 = p_{12} \ , \quad c_3 = -p_{13} \ , \quad c_4 = p_{34} \ , \quad c_5 = p_{24} \ , \quad c_6 = p_{23} \ .$$

只有在 (12) 成立时，(17) 才成立。若 g_α 由 (11) 给出，则其标量曲率为

$$R = -24(c_2c_4 + c_3c_5 - c_1c_6) \ .$$

因此，只有在 $R = 0$ 时，(12) 才成立。 □

3 拉回度量

给定余切丛 $\mathrm{d}f\colon M \to T^*M$ 的一个截面，我们可以将度量从 T^*M 拉回到 M，并在 M 上诱导出一个（伪）黎曼结构 $(\mathrm{d}f)^* g_\alpha$。本节我们将探讨该度量的性质。

3.1 一般情形

我们从规范坐标中的拉回度量矩阵 \((\mathrm{d}f)^* g_\alpha\) 开始，并将其记为 G^*_α。

$$G^*_\alpha = \begin{pmatrix} 2C & -2B \\ -2B & 2A \end{pmatrix} + 2D\,\mathrm{Hess}(f) \ . \tag{18}$$

提醒读者注意，对于函数 A、B、C、$D \in C^\infty(T^*M)$（即依赖于 x、y、p、q 的函数），我们采用的记号与对 $T^*M \to M$ 的截面进行预复合时所采用的记号相同（即依赖于 x、y、f_x、f_y）。行列式是

$$\det G^*_\alpha = 4(AC - B^2) + 4D\left(Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_{xx}f_{yy} - Df_{xy}^2\right) . \tag{19}$$

我们观察到，g_α 的非退化性由条件$D \neq 0$ 控制，与 $(\mathrm{d}\ f)^* g_\alpha$ 的非退化性并无直接关系，而后者要复杂得多。这使得 $(g_\alpha, (\mathrm{d}\ f)^* g_\alpha)$ 这一对的退化性/非退化性共有四种可能情形。

3.2 A、……、E 的特殊选择

现在我们将讨论系数 $A, \ldots, E$ 的某些选取，这些选取将使 $(\mathrm{d}\ f)^* g_\alpha$ 得到进一步简化，并呈现出有趣的性质。

3.2.1 Hessian 结构

假设 $A = B = C = 0$ 和 $D = \frac{1}{2}$。那么，拉回度量具有如下形式

$$G^*_\alpha = \mathrm{Hess}(f) , \tag{20}$$

这称为 M 上的 Hessian 结构。Hessian结构理论已有深入研究，例如参见 [16], ，其中探讨了 Hessian 结构的黎曼几何。这些结构的一些有趣性质也有相关描述，例如参见 [1, 17, 16]。

在 [16], 中，作者定义了 Hessian结构的所谓第一和第二 Kozsul 形式，a_i、b_{ij}；它们由相应度量的克里斯托费尔符号导出，具体如下

$$a_i = \Gamma^k_{ki}, \qquad b_{ij} = \partial_j \alpha_i . \tag{21}$$

我们可以利用满足 M-A 方程 $(\mathrm{d}\ f)^* \alpha = 0$ 的条件，由此得到

$$\det G^*_\alpha = -E .$$

在这种情况下，第一和第二 Kozsul 形式可简化为以下优美形式

$$a_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \det G^*_\alpha}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln |E|}{\partial x^i} \ ,$$
$$b_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln |E|}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{2}\operatorname{Hess}(\ln |E|) \ .$$

尤其是第二 Koszul形式非常重要。根据 [16]，在 M 上给定一个 Hessian结构后，可以在 TM 上定义一个 K¨ahler结构。设 (x^i, ξ^i) 是 TM和 $z^j = x^j + i\xi^j$ 上的坐标系。那么 Hessian结构为

$$g^T = (g_{ij} \circ \pi)\, \mathrm{d}\, z^i\, \mathrm{d}\, \overline{z}^j \ .$$

那么， g^T 的 Ricci张量由第二 Koszul形式给出

$$R^T_{ij} = -\frac{1}{2} b_{ij} \circ \pi \ .$$

本文作者关注的是通过上述构造得到的复结构，与负Pfaffian的 M-A结构自然关联的复结构之间的关系（该概念的定义见（5））。

3.2.2 Hessian结构的变形

现在只假设 $D = \frac{1}{2}$，那么

$$G^*_\alpha = \begin{pmatrix} 2C & -2B \\ -2B & 2A \end{pmatrix} + \operatorname{Hess}(f) \ .$$

可以选择合适的函数 A、B、C，使得矩阵

$$\begin{pmatrix} 2C & -2B \\ -2B & 2A \end{pmatrix}$$

是某个函数 ϵg 的 Hessian矩阵，其中 $\epsilon > 0$ 是一个标量。这种选择会导致 Hessian结构的变形，因为

$$G^*_\alpha = \operatorname{Hess}(f) + \epsilon \operatorname{Hess}(g) = \operatorname{Hess}(f + \epsilon g) \ .$$

值得注意的是，前面各段中的所有结果均成立。

3.2.3 Pfaffian 与非退化性

到目前为止，我们还不需要假设 f 满足与 M- A 结构 (Ω, α) 相关的 M-A 方程。不过，若假设 M- A 方程 $(\mathrm{d}f)^*\alpha = 0$ 成立，则可以大幅简化表达式 (19)。

命题 3.1. 设 $f \in C^\infty(M)$，并考虑 M-A 结构 $(\Omega, \alpha) \in \Omega^2(T^*M) \times \Omega^2(T^*M)$。假设 f 满足相应的 M-A 方程 $(\mathrm{d}f)^*\alpha = 0$。那么，$(\mathrm{d}f)^* g_\alpha$ 是 M 上的度量，当且仅当 $\mathrm{Pf}(\alpha) \neq 0$，这等价于 M-A 结构 (Ω, α) 的非退化性。此外，$(\mathrm{d}f)^* g_\alpha$ 在典范坐标中的矩阵的特征值为

$$\lambda_{1,2} = C + A + D(f_{xx} + f_{yy}) \pm 2\sqrt{\mathrm{Pf}(\alpha)} \ . \tag{22}$$

证明。M-A 方程的坐标描述 $(\mathrm{d}f)^*\alpha = 0$ 为 (4)。因此，如果 f 满足该方程，那么

$$Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} + D\left(f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2\right) = -E \ .$$

这意味着 (19) 变为

$$\det G^*_\alpha = 4(AC - B^2) - 4DE \ .$$

利用方程 (5) 以及 M-A 结构的坐标描述 (1)、(2)，可以很容易地计算 $\mathrm{Pf}(\alpha) = -B^2 + AC - DE$。因此

$$\det G^*_\alpha = 4\,\mathrm{Pf}(\alpha) \ .$$

特征值是下列方程的解。

$$\lambda^2 - \lambda\,(2C + 2A + 2Df_{yy} + 2Df_{xx}) - 4(B^2 - AC) - 4DE = 0 \tag{23}$$

而它们的确定是直接计算即可得出的。 □

我们注意到，$(\mathrm{d}f)^* g_\alpha$ 的号差取决于两个 M-A 方程。首先，为了得到前面的结果，我们必须假设 f 满足 M-A 方程 $(\mathrm{d}f)^*\alpha = 0$。其次，我们看到特征值方程 (23) 包含拉普拉斯表达式 $2D(f_{yy} + f_{xx})$。然而，该表达式为零意味着满足拉普拉斯方程 $f_{yy} + f_{xx} = 0$，而后者通常是一个不同于 $(\mathrm{d}f)^*\alpha = 0$ 的 M-A 方程。

4 结论与展望

受 V. Lychagin 等人 [9, 11], 以及 I. Roulstone 等人 [2, 13, 12], 的研究成果启发，我们对与 Monge-Amp`ere 结构及相应的 $2D$ Monge-Amp`ere 方程相关的（伪）黎曼结构和 Hessian 结构产生了兴趣。具体而言，本文聚焦于以下问题。

1. 是否存在里奇曲率为零的非恒定 Lychagin-Rubtsov 度量？ 2. 如果第一个问题的答案是肯定的，我们能否对所有这类 Monge-Amp`ere 结构及其对应的 M-A 方程进行分类？ 3. M 上的哪种几何会产生沿 $T^*M \to M$ 的截面对 L-R 度量的拉回?

我们针对 T^*M 上的四维度量及其在 M 上的二维拉回，就上述问题给出了部分答案。

第一个问题在命题 2.3 中得到了肯定回答。存在一族非恒定的 L-R度量，取决于满足条件 (11)、(12) 的五个实参数，其中包含 $R_{ij} = 0$。关于第二个问题，我们对以下情况找到了明确答案。

$$D \det \mathrm{Hess}\, f = -E \ , \tag{24}$$

这相当于通过选择 $A = B = C = 0$，抑制一般二维（辛）M-A方程 (3) 的五个自由度中的三个。最后一个问题的答案也基于这一选择，这自然导出了 M 上的二维 Hessian结构、其变形，以及由要求 f 是 M-A方程 (24) 的解所确定的一类 Hessian结构。我们想强调的是，我们的结果中只有一部分依赖于要求 f 满足某个偏微分方程。L-R 度量及其拉回可以在完全不提及 M-A 结构与 M-A 方程之间对应关系的情况下引入，因此 (24)（或其他 M-A方程）是一项附加假设。除了上述三个问题，我们还观察到一族真空场方程的解与 Pl¨ucker 嵌入之间存在有趣的联系，详见推论 2.3.1。关于未来的工作，我们感兴趣的是以下问题。

- g_α 的曲率张量的更多性质，以及曲率与相应 M-A 方程之间的关系。

- 由（24）确定的 Hessian 结构，旨在建立维数大于 2 时 M-A结构与 Hessian 结构（及其变形）之间的更多联系。

- 将与 Koszul 形式相关的复结构与满足 Pf(α) > 0 的 M-A 方程所关联的复结构进行比较。

5 致谢

两位作者感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。R. Such´anek 感谢 J. Slov´ak 和 V. Rubtsov 的讨论与建议，也感谢马萨里克大学和昂热大学的热情接待。R. Such´anek 的工作得到了 GAˇCR EXPRO GX19-28628X 项目和 MUNI/A/1092/2021 项目的资助，部分经费来自由布拉格法国研究所（IFP）和捷克教育、青年和体育部（MYES）组织的巴朗德奖学金项目。作者还感谢第42届几何与物理冬季学校的组织者举办了这场精彩的活动，使作者得以在极具启发性的氛围中开展这一主题的研究。

参考文献

[1] S. Amari 和 J. Armstrong. Hessian流形的曲率. 微分几何及其应用, 33:1–12, 2014.[2] B. Banos, V. Rubtsov, 和 I. Roulstone. Monge–Amp`ère结构与不可压缩流的几何. 物理学A辑：数学与理论, 49, 2016年10月.[3]Bertrand Banos. 可积几何与Monge-Ampère方程. arXiv: 微分几何, 2006.[4] Bertrand Banos. Monge–Amp`ère方程与广义复几何——二维情形. 几何与物理学杂志, 57(3):841–853, 2007.[5] Bertrand Banos. Monge–Amp`ère方程的复解. 几何与物理学杂志, 61(11):2187–2198, 2011.

[6] Sylvain Delahaies。《地球物理流体动力学中的复几何与接触几何》。博士论文，2009年1月。[7] Yvette Kosmann-Schwarzbach 和 Vladimir Rubtsov。《李代数丛上的相容结构与 Monge-Amp`ère 算子》。Acta Applicandae Mathematicae，109(1):101–135，2010年1月。[8] Alexei Kushner、Valentin Lychagin 和 Vladimir Rubtsov。《接触几何与非线性微分方程》。Encyclopedia of Mathematics and its Applications。剑桥大学出版社，2006年。[9] V. V. Lychagin。《接触几何与非线性二阶微分方程》。Russian Mathematical Surveys，34(1):149–180，1979年2月。[10] Valentin V. Lychagin 和 Volodya Roubtsov。《Monge–Amp`ère Grassman 流形、特征类及其他》，第233–257页。施普林格国际出版社，Cham，2019年。[11] Valentin V. Lychagin、V. N. Rubtsov 和 I. V. Chekalov。《Monge-Amp`ère 方程的分类》。Annales scientifiques de l’ ´Ecole Normale Sup ´érieure，Ser. 4，26(3):281–308，1993年。[12] Ian Roulstone、Bertrand Banos、J.D. Gibbon 和 V.N. Roubtsov。《K¨ahler 几何与 Burgers涡旋》。2009年。[13] V. Rubtsov 和 I. Roulstone。《近地转流流体动力学模型中的全纯结构》。Proc. R. Soc. Lond. A.，457:1519–1531，2001年6月。[14] V. N. Rubtsov 和 I. Roulstone。《近地转流哈密顿模型中的四元数结构与 K¨ahler 结构实例》。Journal of Physics A: Mathematical and General，30(4):L63–L68，1997年2月。[15] Volodya Rubtsov。《Monge–Amp`ère 结构的几何》，第95–156页。施普林格国际出版社，Cham，2019年。[16] Hirohiko Shima。《Hessian结构的几何》。WORLD SCIEN-TIFIC，2007年。[17] BURT TOTARO。《Hessian度量的曲率》。International Journal of Mathematics，15(04):369–391，2004年。