任意长度和锥角双锥天线的精确瞬态分析

Ramakrishna Janaswamy，IEEE 会士

arXiv:2305.03587v3 [physics.class-ph] 8 Jun 2023

摘要——从频域模态展开系数的一种新因式分解出发，本文为任意长度和锥角的双锥天线的各种相关量推导了时域解析表达式。具体而言，推导了馈电电流的冲激响应、辐射场以及瞬态有效长度的表达式。针对天线有效长度，将本文结果与文献中已有的测量结果进行了比较。任意其他馈电电压脉冲的响应均可通过卷积用冲激响应表示。本文给出了高斯馈电电压脉冲和快速上升馈电电压脉冲下的结果。对于快速上升的馈电电压脉冲，结果表明，在距天线相当大的范围内，瞬态辐射能量密度的衰减速度低于距离平方的倒数。本文给出的表达式均具有一般性和精确性，不受任何解析近似的限制。

索引词—双锥天线、解析方法、瞬态分析、奇异性展开法、电磁导弹。

I. 引言

THE 双锥天线（见图 1）是一种超宽带（UWB）天线，[1] 能够辐射极窄脉冲。Schelkunoff[2], [3], 和 Tai [4] 此前已对该天线的连续波（CW）工作进行了广泛分析，相关分析总结见 [5] 和 [6]。文献 [7] 和 [8] 在假设包围球内的场仅由横电磁波构成的前提下，进行了近似频域分析。文献 [9] 和 [10], 分别对锥角不相等的情况进行了分析，以及开展了涉及其他相关电磁指标的更详尽分析。由于具有优异的带宽特性，超宽带领域 [11]仍在不断尝试双锥天线的新型几何结构。

然而，关于双锥天线的时域研究寥寥无几，尽管超宽带应用 [12], [13]带来了尚未满足的需求。从 [7] 和 [8] 的近似频域模型出发，并采用傅里叶逆变换， [14] 研究了宽角双锥天线的瞬态响应。 [15] 在频域中利用电场积分方程（EFIE），并结合快速傅里叶变换（FFT）逆变换算法，生成双锥天线的脉冲响应。顺便一提，基于傅里叶反演且作用于带限信号的技术必然会产生非因果信号。

R. Janaswamy 任职于美国马萨诸塞州阿默斯特市马萨诸塞大学阿默斯特分校电气与计算机工程系，邮编 01003。电子邮箱：janaswam@umass.edu。投稿日期：2023年1月9日，录用日期：2023年5月4日。

与这些早期的近似研究不同，我们在此从球谐展开出发，通过研究复频域中各种函数的解析性质，对双锥天线进行精确分析。采用拉普拉斯变换技术后，这将直接得出天线的瞬态特性， `如奇异性展开法所示 [16]。与对带限频域表述进行数值快速傅里叶变换相比，采用拉普拉斯变换技术进行解析处理的一个优点是，能够正确得到因果波形。此外，本文得出的严格解析结果将使该天线成为验证各种时域数值仿真方法所亟需的基准案例。对此值得一提的是，即使在不存在因果性问题的频域中，各种数值软件工具的结果也彼此不一致 [17] ，因为它们受到尚无法解决的误差影响，这些误差源于：(i) 几何离散不当，或 (ii) 计算域离散不当，或 (iii) 计算域截断不当，或 (iv) 无法施加边缘条件、尖端条件等辅助物理边界条件，或 (v) 缺乏收敛性，或 (vi) 上述问题的综合影响。另一方面，本文提出的解不受此类误差影响，并能够在表述中自动纳入所有物理现象。此外，它还揭示了天线的时域性能，而这些信息是当前数值仿真方法无法获得的。

特别值得一提的是，本文有以下新贡献：(i) 本文开展的瞬态分析是精确的；(ii) 球谐展开采用了一种特殊形式，使展开系数可以分解为仅取决于锥角的因子和仅取决于电长度的因子，从而能够以解析方式进行奇点展开过程；(iii) 推导了馈电电流冲激响应和辐射电场冲激响应的新表达式；(iv) 给出了接收天线时域有效长度的表达式；(v) 求得了常用输入电压激励下的脉冲响应；最后，(vi) 将时域有效长度与 [18] 中提供的测量结果进行了比较。

在下一节中，我们将首先给出频域中的场方程，然后通过解析地进行拉普拉斯逆变换，得到所需的时域响应。更具体地说，实频域中的初始公式直接导出一个公式，适用于在……中】【。

复波数域，随后可转换到复频域。

II. 理论与结果

A. 频域中的场方程

图 1 所示为一对对称、同轴的双锥天线，其理想导电（PEC）圆锥完全相同，半角为 θ_0，轴线沿 z 轴排列。整个天线位于半径为 L 的球体内，我们将其标记为天线的长度。图中未显示的方位角记为 ϕ。两个圆锥之间的区域（区域I）为$\theta_0 \le \theta \le \pi-\theta_0$、 $0 \le \phi \le 2\pi$、 $0 < r \le L$。$r = L$ 外部的区域标记为区域II。圆锥的两端均以球形PEC端盖[1] 封闭。在天线顶点处施加频率相关电压 $V_g(\omega)$ 的无穷小源，并假设角频率 ω 下采用 $e^{j\omega t}$ 时间约定。假设圆锥外部介质为真空，其电参数为（ϵ_0、 μ_0）。

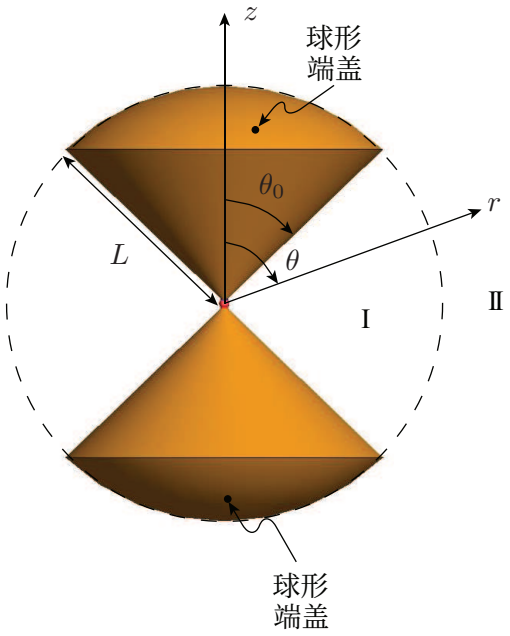


图 1. 长度为 L 、半角为 θ_0 的对称双锥天线。锥体末端由理想导电球形端盖封闭。

我们假设天线工作于平衡模式，此时顶点附近的横向电场是关于 $\theta = \pi/2$ 平面对称的极角 θ 的偶函数。在这种情况下，场的非零分量只有 E_r、 E_θ 和 H_ϕ，且均为方位角不变量。因此，场由低阶横向磁（TM$_r$）模式构成，这些模式没有方位角变化。除了这些模式外，该结构还支持横向电磁（TEM）

[1]实际的双锥天线可能带有平端盖，也可能是中空的。此处采用球形端盖，以便获得精确解析解。预期平端盖天线与球形端盖天线之间的差异只会产生二阶效应。图4显示，本文采用球形端盖所得结果与 [18] 在中空双锥天线上进行的实验结果吻合良好。

外接球内的模（即区域$0 \le r \le L$内）。如前所述， [7] 和 [8] 中的分析是近似的，并假定外接球内仅存在TEM模。然而，有证据表明，区域I中存在的非TEM模会对天线的阻抗和辐射特性产生显著影响 [19] 。因此，我们不会在此采用这种可疑的假设，而是将区域I和区域II中的场分别按完备集展开。

区域I中的场展开为

$$rE_r = \frac{V_g(\omega)LA_0(k)}{r}\sum_{\nu_n} a_{\nu_n}(k)\widehat{J}_{\nu_n}(kr)M_{\nu_n}(\theta), \quad (1)$$

$$rE_\theta = V_g(\omega)kLA_0(k)\sum_{\nu_n}\frac{a_{\nu_n}(k)\widehat{J}'_{\nu_n}(kr)M'_{\nu_n}(\theta)}{\nu_n(\nu_n+1)} + rE_{\theta 0}, \quad (2)$$

$$rH_\phi = -j\frac{V_g(\omega)kLA_0(k)}{\eta}\sum_{\nu_n}\frac{a_{\nu_n}(k)\widehat{J}_{\nu_n}(kr)M'_{\nu_n}(\theta)}{\nu_n(\nu_n+1)} + rH_{\phi 0}, \quad (3)$$

其中 $\widehat{J}_{\nu_n}(\cdot)$ 是阶数为 ν_n 的球形里卡蒂-贝塞尔函数，$M_{\nu_n}(\theta) = [P_{\nu_n}(\cos\theta) - P_{\nu_n}(-\cos\theta)]/2$是关于 $\theta = \pi/2$ 的 θ 奇函数， $P_\nu(\cdot)$ 是次数为 ν （可能为非整数）的勒让德函数，$\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 是自由空间的本征阻抗，$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \omega/c$ 是工作频率 ω 下自由空间的波数， c 是自由空间中的光速。贝塞尔函数上的撇号表示对其整个自变量求导。球形TEM场（$E_{\theta 0}, H_{\phi 0}$）同时包含出射波和入射波，其表达式为

$$E_{\theta 0} = \frac{V_g(\omega)A_0(k)}{r\sin\theta}\left(e^{-jkr} + \Gamma_{\rm in}(k)e^{jkr}\right), \quad (4)$$

$$H_{\phi 0} = \frac{V_g(\omega)A_0(k)}{r\eta\sin\theta}\left(e^{-jkr} - \Gamma_{\rm in}(k)e^{jkr}\right). \quad (5)$$

为便于记号表示，当不存在引起混淆的情况时，将场和电压中显式依赖于 (r) 和/或 ω 的自变量省略。量 $\Gamma_{\rm in}(k)$ 是 TEM 波的频率相关反射系数，而因子 $A_0(k)$ 无量纲。此处使用的模展开系数 a_{ν_n} 的形式不同于先前工作和 [10] 中所假设的形式。这些系数连同式 (1) 求和符号前出现的常数，以及式 (4) 中前行波和后行波的叠加，均采用了便于在后续分析中对频率相关项和角度相关项（即与 θ_0 相关的项）进行因式分解的形式。如果始终停留在频域中，这些细微差别并不重要。然而，在研究复频域中的奇点以及推导各种时域波形时，它们将发挥重要作用。

馈电间隙两端的电压可完全用TEM电场表示为

$V\ 0\ k = \omega\ A_0\ k\ 1 + (;)$

$\Gamma_{\rm in}\ k\ 2\ \lim_{r\to 0}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} rE_{\theta 0}\,d\theta = V_g(\,)\,(\,)(\,(\,))\ln\cot(\,)$。为了使其等于

对于假设的间隙电压 $V_g(\omega)$，我们需要$2A_0(k)(1+\Gamma_{\rm in}(k))\ln[\cot(\theta_0/2)]=1$，或者等价地，

$$A_0(k)=\frac{C_0}{1+\Gamma_{\rm in}(k)}, \tag{6}$$

其中，$C_0=\eta Y_0/2\pi=1/2\ln[\cot(\theta_0)]$，而 $Z_0=Y_0^{-1}$是无限双锥传输线的特性阻抗。穿过馈电间隙并沿正z方向的电流 $I(0;k)$ 可完全用 TEM磁场表示，且等于

$$\begin{aligned} I(0;k) &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta=\pi/2}}\oint rH_{\phi 0}\,d\phi = 2\pi\frac{V_g(\omega)}{\eta}A_0(k)(1-\Gamma_{\rm in}(k)) \\ &= V_g(\omega)Y_0\,\frac{1-\Gamma_{\rm in}(k)}{1+\Gamma_{\rm in}(k)} = V_g(\omega)Y_{\rm in}(\omega), \end{aligned} \tag{7}$$

其中，$Y_{\rm in}$ 是天线输入导纳。请注意，即使施加在间隙两端的电压 $V_g(\omega)$ 与频率无关，馈电电流通常仍与频率有关。$I(0;k)$ 对频率的依赖性源于天线末端发生的反射，而反射还会随 L和 θ_0 变化。内部场中包含的未知量为 ν_n、a_{ν_n} 和 $A_0(k)$，或等价地，$\Gamma_{\rm in}(k)$。

特征值 ν_n、$n=1$、2、.....通过在 $\theta=\theta_0$ 处施加边界条件来确定，详情见[10]，此处不再赘述。只需指出，它们取决于锥角 θ_0，用于确定这些特征值的精确渐近公式为

$$\nu_n\sim\sqrt{n^2\alpha_0^2-0.25}-0.5,\ \frac{\partial\nu_n}{\partial\theta_0}\sim\frac{n^2\alpha_0^3}{\pi(\nu_n+0.5)},\ \nu_n\gg 1, \tag{8}$$

其中 $\alpha_0=(0.5-\theta_0/\pi)^{-1}$。

区域 $L\le r<\infty$（区域II）中的场可按 TM$_r$ 模展开为

$$\begin{aligned} rE_r &= \frac{V_g(\omega)LA_0(k)}{r}\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} j^{-\ell}\ell(\ell+1)b_\ell(k)\widehat{H}_\ell^{(2)}(kr) \\ &\qquad\times P_\ell(\cos\theta), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} rE_\theta &= V_g(\omega)kLA_0(k)\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} j^{-\ell}b_\ell(k)\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(kr) \\ &\qquad\times P_\ell^1(\cos\theta), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} rH_\phi &= -j\frac{V_g(\omega)kLA_0(k)}{\eta}\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} j^{-\ell}b_\ell(k)\widehat{H}_\ell^{(2)}(kr) \\ &\qquad\times P_\ell^1(\cos\theta), \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $P_\ell^1(\cos\theta)=dP_\ell(\cos\theta)/d\theta$，且 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(\cdot)$ 是阶数为 ℓ 的第二类球面 Riccati-Hankel 函数。这些场展开符合文献 $r\ge L$ 中的 Bouwkamp和Casimir定理 [20, p. 1-27:1-29]。展开系数 $b_\ell(k)$ 通常为复数，并取决于锥角 θ_0 以及天线的电长度 kL。

在后续分析中，我们将使用附录 A 的公式 (71) 中引入的修正后的展开系数 c_ℓ（实数值），而不再使用 $b_\ell(k)$。求解这些系数所需的线性方程组见公式 (74)。

其中，展开系数被分解为角度和频率的可分离函数。给定锥角 θ_0 后，线性方程组 (74) 只需完整求解一次，且与天线电长度无关。与双锥天线的先前公式相比，采用修正系数的表述具有这一显著优势。另一项重要优势是，修正形式允许解析求得拉普拉斯逆变换，而这正是时域表示所需的。

令

$$u_\ell^E(kr) = j^{-\ell}\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(kr)e^{jkr}\to 1,\ \text{as } kr\to\infty, \tag{12}$$

$$u_\ell^H(kr) = j^{-\ell-1}\widehat{H}_\ell^{(2)}(kr)e^{jkr}\to 1,\ \text{as } kr\to\infty, \tag{13}$$

对于任意 $r\ge L$，辐射电场和磁场的表达式可利用式（77）中给出的 $\Gamma_{\rm in}$ 的表达式重新写为

$$rE_\theta(r,\theta;k) = -V_g(\omega)C_0e^{-jkr}\,\frac{F_e(\mathbf{r};\zeta)}{F(\zeta)}, \tag{14}$$

$$rH_\phi(r,\theta;k) = -\frac{V_g(\omega)C_0}{\eta}e^{-jkr}\,\frac{F_h(\mathbf{r};\zeta)}{F(\zeta)}, \tag{15}$$

其中 $\zeta=kL=\omega t_0$ 为归一化频率。与电场和磁场相关的方向图函数 $F_e(\mathbf{r};\zeta)$ 和 $F_h(\mathbf{r};\zeta)$ 为

$$F_{\{{e\atop h}\}}(\mathbf{r};\zeta)=\sum_{\ell=1,3}^{\infty}\frac{j^\ell u_\ell^{\{{E\atop H}\}}(kr)c_\ell P_\ell^1(\cos\theta)}{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)+j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)} \tag{16}$$

且函数 $F(\zeta)=[1+\Gamma_{\rm in}(\zeta)]\,e^{j\zeta}/2j$等于

$$F(\zeta)=\sum_{\ell=1,3}^{\infty}w_\ell\frac{\sin\zeta\,\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)+\cos\zeta\,\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)}{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)+j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)} \tag{17}$$

其中 w_ℓ 定义见式 (73)。（ζ）中的 A_0 与（ζ）中的 F 之间的关系为

$$A_0(\zeta)=\frac{C_0e^{j(\zeta-\pi/2)}}{2F(\zeta)}. \tag{18}$$

式（78）给出了以下渐近结果。

$$F(0)=-j;\ F(\zeta\to\infty)\sim -0.5j\,e^{j\zeta}. \tag{19}$$

将式（16）中的 $u_\ell^E(kr)$（相应地，$u_\ell^H(kr)$）替换为单位值，即可得到远区电场（相应地，磁场）。

我们定义第四个函数 $F_{el}(\zeta)=[1-\Gamma_{\rm in}(\zeta)]e^{j\zeta}/2$，利用式 (77) 可得

$$F_{el}(\zeta)=\sum_{\ell=1,3}^{\infty}w_\ell\frac{\cos\zeta\,\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)-\sin\zeta\,\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)}{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)+j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)}. \tag{20}$$

用函数 $F_{el}(\zeta)$ 和 $F(\zeta)$ 表示，馈电电流可写为

$$I(0;\zeta)=V_g(\omega)Y_0\left[\frac{1-\Gamma_{\rm in}(\zeta)}{1+\Gamma_{\rm in}(\zeta)}\right]=-jV_g(\omega)Y_0\frac{F_{el}(\zeta)}{F(\zeta)}. \tag{21}$$

天线在接收模式下的复值矢量有效长度 $\mathbf{h}_e^{Rx}$ 与天线辐射场 $\mathbf{E}_a$ 及馈电电流相关，其定义为 [5, p。 105]

$$\mathbf{h}_e^{Rx}=\frac{4\pi r\mathbf{E}_a e^{jkr}}{jk\eta I(0;k)}.\quad\text{[m]} \tag{22}$$

根据有效长度和入射电场 $\mathbf{E}^i$，开路接收电压 V_{oc} 为

$$V_{oc} = \mathbf{h}_e^{Rx} \cdot \mathbf{E}^i. \tag{23}$$

ˆ此处有效长度的 θ 分量等于

$$h_e^{Rx}(\theta, r; \zeta) = \frac{4\pi r E_\theta(\mathbf{r}; \zeta) e^{jkr}}{j\zeta\eta I(0; \zeta)} L = \frac{-2LF_e(\mathbf{r}; \zeta)}{\zeta F_{el}(\zeta)}. \tag{24}$$

严格来说，有效长度必须与 r 无关，因为它通常使用远区辐射场 $\mathbf{E}_a$ 定义（请注意，因子 $u_\ell^E(kr) \to 1$ 出现在远区）。不过，我们在式 (24) 中保留了适用于任意距离的一般辐射场表达式，因此在天线近场测量有效长度时，该公式仍然有效。

值得注意的是，使用 (73) 后，函数$F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 满足

$$F_{el}(\zeta) + jF(\zeta) = e^{j\zeta} \tag{25}$$

由此可知，利用式 (19) 和 (78) 可得

$$F_{el}(\zeta \to 0) = O(\zeta);\ F_{el}(\zeta \to \infty) \sim 0.5\, e^{j\zeta}. \tag{26}$$

注意到，通过将天线外部的介质视为具有极小损耗，可以对涉及 ζ 、 h_e^{Rx}、 $I(0, \zeta)$ 和 E_θ 的各种函数进行解析延拓，使其进入复 ζ平面；这等价于将实值波数 k 替换为复波数$k(1 - j\epsilon_\ell)$，其中 $\epsilon_\ell > 0$ 源于微小损耗。所得的复值 ζ 与后续分析中使用的复频率变量 s 直接相关。上述各种表达式中涉及的所有函数都可以解析延拓到复 ζ 平面。

在移除自由空间相位和扩展因子后，也可以直接在辐射电场与输入电压之间定义天线传递函数，如下所示

$$T_0^e(\mathbf{r}; k) = \frac{4\pi r E_\theta(\mathbf{r}; k)}{V_g(\omega)} e^{jkr} = -4\pi C_0 \frac{F_e(\mathbf{r}; \zeta)}{F(\zeta)}. \tag{27}$$

该传递函数同样取决于距离、观察角度和工作频率。这类传递函数有助于优化源电压波形，以使天线实现所需的辐射特性。 h_e^{Rx}与 T_0^e之间的关系为 $h_e^{Rx} = T_0^e / jk\eta Y_{\text{in}}$，由此可清楚看出，有效长度增强了$T_0^e$中存在的较低频率成分，并削弱了较高频率成分。有效长度充当天线辐射场与天线馈电电流之间的修正传递函数，常用于根据频域测量结果提取时域特性 [12] ，以及优化天线产生的脉冲波形 [21]。

B. 时域特性

复频域量对应的时域波形通过拉普拉斯逆变换获得。令 $t_0 = L/c$ 为波沿天线长度传播所需的渡越时间。为生成馈电电流的冲激响应，输入馈电电压取为 $v_g(t) = V_0\delta(t - \epsilon t_0)$， [Vsec^{-1}]，其中 $\epsilon > 0$是一个趋近于零的小量。该冲激函数关于变换变量 s 的拉普拉斯变换为 $V_0 e^{-\epsilon s t_0} \to V_0$，其中 $\epsilon \to 0$。

整个天线可以视为一个具有单个输入和多个输出的线性方程组。在下面的分析中，我们将把施加的输入电压视为线性方程组中的原因。由于天线在所有频率下并非表现为纯电阻系统，而是同时具有无功元件的惯性系统，因此，与馈电电流、矢量有效长度、矢量辐射场等多个可观测量相关的输出，在响应之前都会存在一定的时间延迟。这些量共同构成线性方程组的结果。牢记因果性，我们因此关注 $t \leqslant \epsilon t_0$的各种响应，而不是恰好在 $t = \epsilon t_0$时的响应。

馈电电流的冲激响应可用拉普拉斯逆变换表示为

$$\begin{aligned} t_0 i_\delta(t) &= \frac{t_0}{2\pi j} \int_\Gamma I(0; \zeta) e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_q} I(0; \zeta) e^{q\tau}\, dq \\ &= -\frac{Y_0 V_0}{2\pi} \int_{\Gamma_q} \left. \frac{F_{el}(\zeta)}{F(\zeta)} \right|_{\zeta = -jq} e^{q(\tau - \epsilon)}\, dq, \end{aligned} \tag{28}$$

其中， $\tau = t/t_0$ 为归一化时间， $q = st_0$ 为与实际复频率 $s = jkc = j\zeta/t_0 = q/t_0$相对应的归一化复频率， Γ 为布ром维奇围道 [22, p。 275] 如图2所示，而 Γ_q 为 q平面内对应的积分路径。在实际应用中，布ром维奇围道通过复 s平面的右半平面（RHP）或左半平面（ LHP）内的无穷大半圆弧闭合，如图2所示。这样做是为了在计算反演积分时，捕获相应半平面内的所有奇点。因果性要求，对于 $\tau < \epsilon$，冲激响应的积分式（28）必须为零。对于 $\tau < \epsilon$，布ром维奇围道由 S_∞^-闭合。如果 $I(0; \zeta)$在 q平面的右半部分解析，那么根据柯西定理 [22, p, 反演积分为零。 83] 并且，由于$e^{q(\tau - \epsilon)}$ 在 S_∞^-上趋于零。因此，因果性要求 $I(0; \zeta)$在复 q平面中 Γ_q 的右侧不存在奇点。此外，由于存在指数因子$e^{q(\tau - \epsilon)}$，即使对于任意 $\tau > \epsilon$，当 $|\zeta| \to \infty$时，被积函数也会在半圆弧 S_∞^+上趋于零，即使因子 $\left| \frac{F_{el}}{F}(\zeta)\ (\zeta) \right| \neq o(1)$位于左半平面（LHP）内。对于 $\tau > \epsilon$ ，通过S_∞^+ 闭合布ром维奇围道，并应用柯西留数定理 [22,p。 207], 此时，反演积分将等于极点奇点处的留数之和，以及左半平面（LHP）内所有支切周围的积分之和。如果 $^{F_{el}}(\zeta)\ _F(\zeta) \equiv j$，那么对于 $\tau > \epsilon$，反演积分仍将得到零值，但在单一时刻 $\tau = \epsilon$ ，它将得到函数 $V_0 Y_0 \delta(\tau - \epsilon) \to \infty$。在此还需指出，通常要求拉普拉斯变换满足 $\lim_{s \to \infty} \left| \widetilde{F}(s) \right| = 0$，这仅仅是一个充分条件 [23, p。 88], [24, p。 1054] ，其目的是确保.....

拉普拉斯反演积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} \widetilde{F}(s)e^{st}\,ds \tag{29}$$

将得到函数 $f(t)$，该函数在每个有限区间 $t \in (0,T)$ $T>0$ 内连续或分段连续。

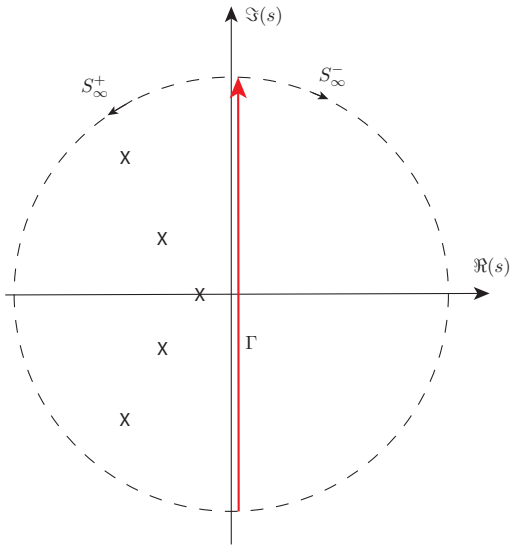


图 2. 复 s 平面中的布ром维奇围道 $\Gamma \in (a-j\infty, a+j\infty)$，其中 $a>\epsilon>0$ 为某个值。所有奇点均位于积分路径 Γ 的左侧。

这里可以得到频域中各种项的显式复频率依赖关系，这使得原本无法实现的解析拉普拉斯反演成为可能。例如，对于式（77）给出的输入反射系数，其显式频率依赖关系由球形 Riccati–Hankel 函数 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)$ 和 $\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)$ 的复自变量行为决定。

在对各种量进行拉普拉斯逆变换之前，有必要研究各种被积函数中存在的奇点分布。可以作出以下观察（记住 $q = st_0 = j\zeta$ ）：

(1) 函数 $F(\zeta)$ $F_e(\zeta)$ $F_h(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 均为无量纲。(2) 在复-ζ 平面上函数 $f_\ell(\zeta) = \widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta) + j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)$ 的零点处，反射系数 $\Gamma_{\text{in}}(\zeta) \to \infty$。然而，馈电电流减小为 $I(0;\zeta) = -V_0 Y_0$，并在该处保持有限。此外，函数 $f_\ell(\zeta)$ 同时出现在 rE_θ 的分子和分母中（通过因子 $F(\zeta)$），h_θ^{Rx} 也是如此，因此两者在该处均为有限值。因此，$f_\ell(\zeta)$ 的零点不是 $I(0;\zeta)$、$rE_\theta(\mathrm{r};\zeta)$ 或 $h_e^{Rx}(\mathrm{r};\zeta)$ 的奇点。

(3) $I(0;\zeta)$ 和 $rE_\theta(\mathrm{r};\zeta)$ 的奇点均出现在函数 $1+\Gamma_{\text{in}}(\zeta)$ 的零点处；换言之，出现在式 (17) 给出的函数 $F(\zeta)$ 的零点处。这些是馈电间隙呈现短路时的复频率。

(4) 有效长度 $h_e^{Rx}(\theta;\zeta)$ 的奇点出现在公式 (20) 中给出的函数 $F_{el}(\zeta)$ 的零点处，该函数♀♀♀♀♀♀对应于函数 $1-\Gamma_{\text{in}}(\zeta)$ 的零点。这些复频率下，馈电间隙表现为开路。在 $u_\ell^F(kr) \to 1$ 的远区，h_e^{Rx} 在 $\zeta = 0$ 处没有奇点，尽管式 (24) 右端的分母中存在项 ζ。

(5) 下文将清楚地表明，$I(0;\zeta)$、$rE_\theta(\mathrm{r};\zeta)$ 和 $h_e^{Rx}(\mathrm{r};\zeta)$ 的奇点在复 ζ 平面上全都是简单极点。具体而言，不存在分支点奇点（下一项将对此作出明确说明），这与 Baum [16] 提出的猜想一致：有限尺寸理想导体物体的奇点只有简单极点这一种类型。

(6) 函数 $F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 都由单值函数表示，因此不含任何分支点。请注意，球面 Riccati–Hankel 函数 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)$ 出现在 $F(\zeta)$ $F_{el}(\zeta)$ 中，也出现在 $I(0;\zeta)$、rE_θ 和 h_e^{Rx} 的其他表达式部分中；当 ℓ 为整数时，该函数是单值的。这可从其级数表示 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta) = e^{-j\zeta} j^{\ell+1} \sum^{\ell} (\ell+n=0n)!(2j\zeta)^{-n}/n!(\ell-n)!$ 清楚看出。

(7) 在直流情况下 $\zeta \to 0$，根据球形 Riccati–Hankel 函数的小自变量近似式 [20, 附录 C]，$\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta) \sim j(2\ell)!(2\zeta)^{-\ell}/\ell!$，$\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)/\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta) \sim -\ell/\zeta$，很容易证明：

$$\Gamma_{\text{in}}(\zeta) \sim 1+O(\zeta) \implies I(0;\zeta) \sim O(\zeta) \tag{30}$$
$$F_e(r=L,\theta;\zeta) \sim O(1) \tag{31}$$
$$F_h(r=L,\theta;\zeta) \sim O(\zeta) \tag{32}$$
$$F_e(r\to\infty,\theta;\zeta) \sim O(\zeta^2) \tag{33}$$
$$F_h(r\to\infty,\theta;\zeta) \sim O(\zeta^2) \tag{34}$$
$$h_e^{Rx}(r\to\infty,\theta;\zeta) \sim \frac{-2LP_1^1(\cos\theta)c_1}{\sum_{\ell=1,3}^{\infty}(1+\ell^{-1})w_\ell(\theta_0)} \tag{35}$$

因此，不同的近场表现出不同的直流行为。然而，直流馈电电流和直流远区辐射场都如预期般恒为零。

(8) 在高频下，$\zeta \to \infty$ 和

$$F_{\{\substack{e\\h}\}}(kr \gg 1,\theta;\zeta\to\infty) = O(e^{j\zeta}). \tag{36}$$

因此，根据（19），我们在远区区域$kr \gg 1$ 有：

$$E_\theta(\zeta\to\infty) = O(e^{-j\zeta r/L}) = H_\phi(\zeta\to\infty). \tag{37}$$

(9) 由式（19）和（26）可清楚看出，因子

$$\frac{F_{el}(\zeta)}{F(\zeta)} \sim j \text{ as } |\zeta|\to\infty. \tag{38}$$

(10) 利用球面 Riccati-Hankel 函数的性质 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(e^{-j\pi}\zeta^*) = (-1)^{\ell+1}\widehat{H}_\ell^{(1)}(\zeta^*)$，其中上标 * 表示复共轭，容易得出 $F(-\zeta^*) = -F^*(\zeta)$ 和 $F_{el}(-\zeta^*) = -F_{el}^*(\zeta)$。因此，如果 $\zeta_0 = \omega_0 + j\sigma_0$ 是 $F(\zeta)$ 的一个零点，那么 $-\zeta_0^* = -\omega_0 + j\sigma_0$也是。类似地，如果 $\zeta_p = \omega_p + j\sigma_p$是$F_{el}(\zeta)$ 的一个零点，那么 $-\zeta_p^* = -\omega_p + j\sigma_p$ 也是。相应的零点

在复数 q 平面上则表现为复共轭对，因为 $q = j\zeta$】【。

(11) 利用球面 Riccati-Hankel 函数所满足的微分方程，可以很容易地看出，在零点 ζ_0 附近，函数 $F(\zeta)$ 的行为为

$$F(\zeta) \sim \frac{e^{-j\zeta_0}}{\zeta_0^2}(\zeta - \zeta_0)G(\zeta_0), \tag{39}$$

其中

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= \sum_{\ell=1,3}^{\infty} \ell(\ell+1)w_\ell \left[\frac{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)}{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta) + j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)}\right]^2 \\ &= G^*(-\zeta^*). \end{aligned} \tag{40}$$

通过直接代入可以验证，$G(\zeta_0) \neq 0$.因此，$F(\zeta)$ 的零点是单零点。类似地，在 $F_{el}(\zeta)$的零点ζ_p 附近，

$$F_{el}(\zeta) \sim -j\frac{e^{-j\zeta_p}}{\zeta_p^2}(\zeta - \zeta_p)G(\zeta_p). \tag{41}$$

再次可以验证，$G(\zeta_p) \neq 0$，这意味着 $F_{el}(\zeta)$的零点也是单零点。

值得注意的是，出现在 (39) 和 (41) 中的函数 $G(\zeta)/\zeta^2$ 等于 [25, p 的朗斯基行列式。 75]$W[F_{el}, F](\zeta) = F'(\zeta)F_{el}(\zeta) - F'_{el}(\zeta)F(\zeta)$，其中函数为 $F(\zeta)$ 和$F_{el}(\zeta)$。利用 (25) 即可验证这一点。对于 $\zeta \sim 0$，当 $\hat{}H_\ell^{(2)\prime}(\zeta)/\hat{}H_\ell^{(2)}(\zeta) \sim -\ell/\zeta$ 时，可以证明 $\lim_{\zeta\to 0}[G(\zeta)/\zeta^2] = \sum w_\ell(\ell+1)/\ell = 1+\sum w_\ell/\ell \neq 0$。因此$\ell$ $\ell F_{el}(\zeta)$ 和 $F(\zeta)$ 在原点处线性无关。由阿贝尔恒等式 [26, p. 75][2] 可得，$F_{el}(\zeta)$ 和$F(\zeta)$ 在包含原点的扩展区域 S 内也线性无关，这意味着 $G(\zeta)/\zeta^2 \neq 0$ 在 S上成立。这也证明了 $F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 的零点都是单根。

$F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 的复零点 ζ_0 和 ζ_p 已分别使用穆勒算法[27, p. 136] 进行了数值求解。请注意，零点仅通过权重 $w_\ell(\theta_0)$（定义见式 (73)）取决于锥角 θ_0 。图 3 展示了锥角为$\theta_0 = 65.22^o$时，复 $q = st_0 = j\zeta$ 平面中零点 $q_0 = j\zeta_0$ 和$q_p = j\zeta_p$ 的一个分布示例。在此锥角下，无限锥形传输线的特性阻抗为 $Z_0 = 53.6\Omega$。图 3 清楚地显示了零点成共轭对出现的特性。同样值得注意的是，$F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 的零点相对于虚 q 轴（实 ζ 轴）彼此交错排列。这是预期的结果，因为这些零点对应于复频率，在这些频率下，馈电间隙的反射系数分别对应短路或开路。需要注意的是，固定长度且终端负载确定的传输线能够发生谐振的频率，将在短路负载和开路负载之间交替出现。

通过应用辐角原理 [20,p. A-4]，可以预测左半复 q平面内某个固定半径 q_R 的半圆中存在的零点个数。掌握这些工具后，我们现在将推导各种电路量和场量的时域响应。

[2]这假设函数 $F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 满足关于自变量 ζ 的同一个二阶线性微分方程。

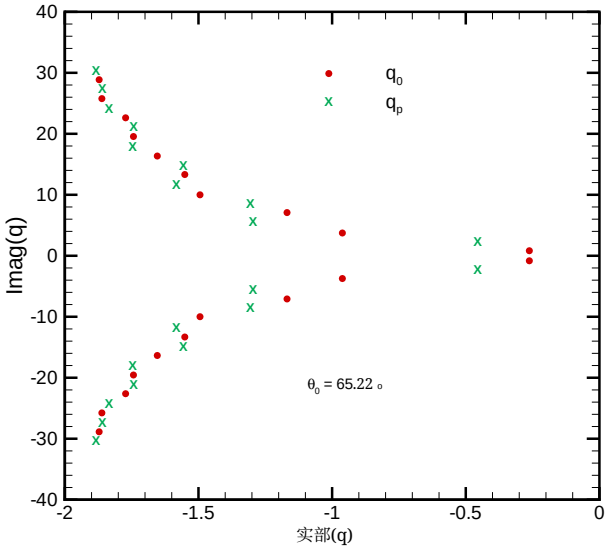


图 3. 半角为 $\theta_0 = 65.22^o$ 时，复 $q = j\zeta$ 平面上 $F(\zeta)$ 和 $F_{el}(\zeta)$ 的零点分布。它们相对于虚 q 轴交错排列。

1) 馈电电流的脉冲响应：我们关注 $\tau \gtrsim \epsilon$ 的脉冲响应 $i_\delta(\tau)$。对于 $\tau < \epsilon$，可以用半圆弧 S_∞^- 闭合积分路径 Γ_q 。由于被积函数在右半平面内解析，该积分的值为零。对于 $\tau > \epsilon$，我们写作

$$\frac{F_{el}(\zeta)}{F(\zeta)} = \left[\frac{F_{el}(\zeta)}{F(\zeta)} - j\right] + j \tag{42}$$

并用左半平面内的半圆弧 S_∞^+ 闭合积分路径 Γ_q 。方括号内所示的第一部分根据式 (38) 在 S_∞^+ 上消失。式 (42) 中第一部分的拉普拉斯反演可通过求被积函数在极点处的留数来解析计算（即在 $F(\zeta)$ 的零点 ζ_0 处）。 $F^{-1}(\zeta)$ 在其极点 $q = q_0(= j\zeta_0)$ 处的留数为 $j\zeta_0^2 e^{q_0}/G(\zeta_0)$。式 (42) 的第二部分在 $\tau > \epsilon$ 时取值为零。因此，对于 $\tau \lesseqgtr \epsilon$，可得结果

$$t_0 i_\delta(\tau) = V_0 Y_0 \sum_{\zeta_0} \frac{\zeta_0^2\, e^{q_0(\tau-\epsilon+2)}}{G(\zeta_0)}\Theta(\tau - \epsilon), \tag{43}$$

其中，$\Theta(\tau)$ 是单位阶跃函数。还可以看出，留数与天线长度 L 无关。在本文余下部分，我们将取 $\epsilon \to 0$，且不失一般性。

可以看出，冲激响应由归一化时间变量 τ 中的复指数函数之和组成。此外，它具有因果性，正如预期的那样。天线的长度通过出现在 $\tau = t/t_0$ 中的渡越时间 $t_0 = L/c$ 体现出来。 q_0/t_0 的实部将决定 t 中指数函数的时间衰减率，而其虚部将决定 t 中的振荡速率。对于给定的根 q_0，与较短的天线相比，较长天线的衰减常数和振荡频率都会更小

一个。因此，与较短的天线相比，较长的天线在早期时刻会呈现出更多的根。

由于直流馈电电流 $I(0;\zeta=0)$ 根据式 (78) 为 $=0$，因此，$i_\delta(\tau)$ 在 $\tau\in(\epsilon,\infty)$ 上的积分必须为零点。因此我们得到恒等式

$$\sum_{\zeta_0}\frac{\zeta_0\, e^{j2\zeta_0}}{G(\zeta_0)}=0, \tag{44}$$

这可作为确定达到给定精度所需零点数量的指导。

由于冲激响应是源电压幅值 V_0 的线性函数，我们可以利用叠加原理来确定对任意其他输入电压 $v_g(t)$（单位为 $[\mathrm{Vs}^{-1}]$）的响应：

$$i_g(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{V_0}t_0 i_\delta(\tau-\tau')v_g(\tau')\,d\tau' \quad [\mathrm{As}^{-1}]. \tag{45}$$

由于 $i_\delta(\tau)$ 中存在复指数函数，因此在某些情况下，可以对式（45）中的卷积积分进行解析求值。

2）辐射场的冲激响应：将 $kr=kLr/L=\zeta R=-jqR$ 代入 (14)，得到 $R=r/L$，并考虑 rE_θ 的拉普拉斯逆变换：

$$t_0 r\mathcal{E}_\theta^\delta(r,\theta;\tau)=-\frac{V_0C_0}{2\pi j}\int_{\Gamma_q}\frac{F_e(\zeta)e^{q(\tau-R)}}{F(\zeta)}\,dq. \tag{46}$$

E_θ^δ 的单位为 $[\mathrm{Vm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}]$。对于 $\tau-R<0$，积分路径可通过 S_∞^- 闭合，从而得到零值。对于 $\tau-R>0$，积分路径在左侧通过 S_∞^+闭合。利用 $F(\zeta)$在其零点附近的表示式 (39)，并通过围道积分捕获留数，得到电场的因果冲激响应如下：

$$t_0 r\mathcal{E}_\theta^\delta(r,\theta;\tau)=\Theta(\tau-R)V_0C_0\sum_{\zeta_0}Q_e(\mathbf{r};\zeta_0)e^{q_0(\tau-R+1)} \tag{47}$$

其中

$$Q_{\left\{\begin{smallmatrix}e\\h\end{smallmatrix}\right\}}(\mathbf{r};\zeta)=-\frac{j\zeta^2}{G(\zeta)}F_{\left\{\begin{smallmatrix}e\\h\end{smallmatrix}\right\}}(\mathbf{r};\zeta). \tag{48}$$

磁场冲激响应$t_0 r\mathrm{H}_\phi^\delta$的表达式，可通过对式 (47)进行以下替换$V_0\to V_0/\eta$和 $Q_e\to Q_h$得到。

与馈电电流的情况一样，对于任意其他输入电压 $v_g(t)$ $[\mathrm{Vs}^{-1}]$，辐射场由以下叠加积分给出：

$$r\mathcal{E}_\theta^g(r,\theta;\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{V_0}t_0 r\mathcal{E}_\theta^\delta(r,\theta;\tau-\tau')v_g(\tau')\,d\tau'.\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}\right] \tag{49}$$

3）时域接收有效长度：天线的时域有效长度通过对（24）式进行拉普拉斯逆变换得到。如前所述，此处被积函数的相关极点是 $F_{el}(\zeta)$ 的单零点 ζ_p $(=-jq_p)$。通过围道积分求取留数来计算拉普拉斯逆变换，可得到有效长度为

$$t_0 h_e^{Rx}(r,\theta;\tau)=-2L\sum_{\zeta_p}\frac{Q_e(\mathbf{r};\zeta_p)}{q_p}e^{q_p(\tau+1)}. \quad [\mathrm{m}] \tag{50}$$

请注意，天线的时域有效长度并非在所有时刻都必须为正。

可以看出，上述三个时间量的公式均为解析式；数值确定展开系数 c_ℓ 以及零点 ζ_0 和 ζ_p 后，即可对其求值。这些参数仅取决于天线的半顶角 θ_0。这些公式中的其他所有量均由已知的特殊函数表示，而这些函数取决于观测点的频率、距离和方位角。

对于一般输入信号，也可以利用有效长度，根据式（22）将天线的辐射电场表示为：

$$4\pi r\mathcal{E}_\theta^g(\mathbf{r};\tau)=\eta\frac{d}{d\tau'}\left[h_e^{Rx}(\mathbf{r};\tau')\circledast i_g(\tau')\right]_{\tau'=\tau-R}, \tag{51}$$

其中 $\circledast$ 表示卷积。对于具有冲激有效长度 $h_e^{Rx}(\mathbf{r};\tau')=h_0(\mathbf{r})\delta(\tau')$ 的理想天线，辐射电场变为

$$4\pi r\mathcal{E}_\theta^g(\mathbf{r};\tau)=\eta h_0(\mathbf{r})\left.\frac{di_g(\tau')}{d\tau'}\right|_{\tau'=\tau-R}. \tag{52}$$

此时，辐射电场是馈电电流的时间导数。只有当天线在接收模式下的时域矢量有效长度与冲激函数成比例时，这种时间微分特性才成立。等价地，天线的频域矢量有效长度必须具有全通特性（幅度响应平坦，相位响应呈线性）。在 [28, p. 204]中，理想化的无反射偶极天线（即支持行波电流分布的偶极天线）表现出近似的时间微分特性。对于非理想但相对宽带的天线，只要其接收矢量有效长度的频谱成分在天线带宽内呈现近似理想的带通特性，辐射场就近似等于馈电电流的时间导数。实际上，非理想性可能是由输入馈电电压脉冲频带内有效长度的非线性相位或非恒定幅度引起的。

关于双锥天线，目前有充分文献记录的实验时域数据非常有限。在这方面值得注意的例外是参考文献 [18] and[29], ，作者在其中对多种超宽带天线进行了详细测量。Licul 采用相似的天线单元作为发射端和接收端的天线，并将二者间隔距离 r，测量了频域天线传输系数。他利用逆快速傅里叶变换将数据转换到时域，并从中提取出时域有效长度。最后，采用 Prony法 [30, p. 458]，通过复指数函数对有效长度的时域数据进行拟合。在图4中，我们将公式（50）预测的理论有效长度与 Licul 对一副参数为 $\theta_0=65.22^o$, $L=17.2\mathrm{cm}$, $r=1.77\,m$的双锥天线所得的测量结果进行了比较。理论结果与测量结果的峰值之间存在一个 $t_{\mathrm{off}}=31\mathrm{ps}$[3] 的小时间偏移，我们已在图4中对其进行了调整。为了使 $r=1.77\mathrm{m}$的测量距离对应于天线的远场距离，其最大线性尺寸

[3] [18] 的结果比我们的结果滞后了 31 ps。

$D = 2 \times 17.2$ cm 和频谱中的最短波长 λ_s 必须共同满足 $\lambda_s \geq 2D^2/r = 13.37$ cm。换言之，频谱中的最高频率成分不得超过 2.24 GHz。然而，Licul 在测量中暗示基带频谱带宽为 6 GHz。因此，他进行的测量被认为是在近区内进行的。从这个意义上说，我们在式（50）中给出的距离相关有效长度具有重要的参考价值。理论模型使用了 26 个复零点 ζ_p 和 101 个展开系数 c_ℓ。从图 4 中可以看出，对于主脉冲，两者具有非常好的一致性。还可以看出，在某些时间段内，有效长度会取负值。主脉冲之外两种结果之间的偏差可能归因于：(i) 将频域转换为时域时，噪声可能导致的测量误差 [31], ; 以及 (ii) 文献 [18] 中使用的天线与本文所用天线在端盖几何形状上的差异。[4]

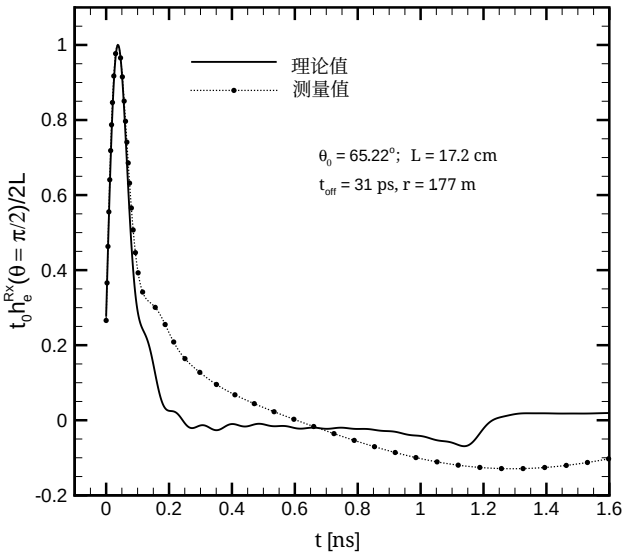


图4. 时域有效长度与 Licul 的测量结果对比 [18]。

图5展示了天线在远区波束轴处（即对于 $\theta = \pi/2$, $r \to \infty$）的频域有效长度曲线，其参数与图4中的天线相同。幅度的动态范围约为 16dB，相位在 $kL \in (0, 20)$ 范围内呈现约 1.4 rad 的非线性变化。有效长度的非线性相位变化与幅度变化相结合，使该天线在此顶角下并非极宽带。不过，在约 $kL = 4$ 处出现拐点之后，有效长度相对平坦，相位也近似线性，但存在一些振荡。

[4]在 [18] 中，双锥天线没有端盖，内部中空；而本文采用的是带有理想电导体球形端盖的封闭式天线。

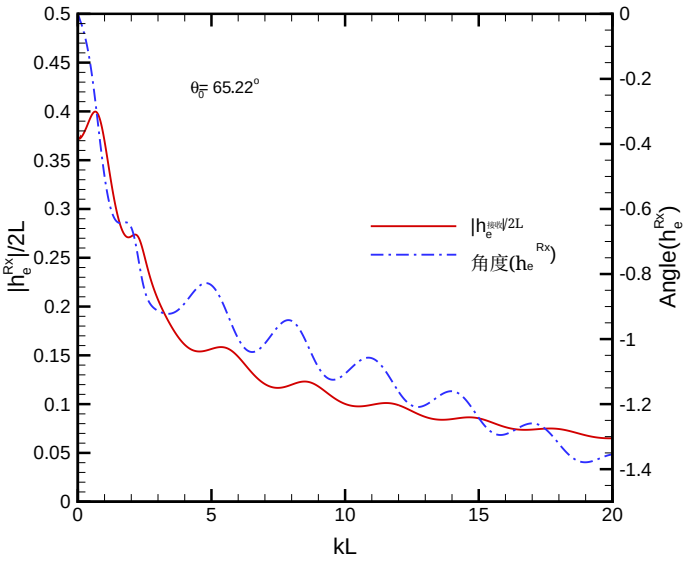


图5. 远区波束轴处天线有效长度的幅度和相位，h_e^{Rx}。天线长度 $L = 17.2$cm。

C. 对高斯输入电压的响应

我们考虑如下形式的截断（即覆盖半无限区间 $t > 0$）高斯输入电压脉冲

$$v_g(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\pi}\sigma_t} e^{-(t-t_c)^2/\sigma_t^2}\, \Theta(t), \quad [\mathrm{Vs}^{-1}] \qquad (53)$$

其中 σ_t [s] 表征上升时间和脉冲宽度。高斯脉冲在 $t = t_c$ 处达到最大值，并在 $t = 0$处取非零值。该脉冲的傅里叶变换可用闭式表达式求得，并以归一化频率 $\zeta = kL$ 表示为

$$V_g(\zeta) = 0.5 V_0\, e^{-j\zeta\tau_c}\, e^{-\zeta^2\sigma^2/4}\, \mathrm{erfc}(\xi), \quad [\mathrm{V}] \qquad (54)$$

其中 $\sigma = \sigma_t/t_0$、$\tau_c = t_c/t_0$、$\xi = j\zeta\sigma/2 - \tau_c/\sigma$以及 erfc(·) 是互补误差函数 [32, 7.1.2]。注意，$v_g(0^+) > 0$，且直流分量 $V_g(0) = 0.5V_0\,\mathrm{erfc}(-\tau_c/\sigma)$。当 $t_c/\sigma_t = \tau_c/\sigma > 2$ 时，$|\mathrm{erfc}(\xi)| \approx 2$，且 $|V_g(\zeta)| \approx V_0\, e^{-\zeta^2\sigma^2/4}$。在这种情况下，脉冲的归一化 10 dB 带宽为 $\zeta_{\max} \approx 2.15/\sigma \approx$ (上升时间)$^{-1}$。脉冲宽度 t_w 可取为 $t_w \approx 2\sigma_t = 2t_0\sigma$。

将（53）代入（45）和（49），并利用复值互补误差函数表示积分，所得结果为（回顾 $R = r/L$、$\tau = t/t_0$、$t_0 = L/c$、$q_0 = j\zeta_0$）

$$\begin{aligned} t_0 i_g(\tau) &= \Theta(\tau)\frac{V_0 Y_0}{2}\sum_{\zeta_0}\frac{q_0^2\, e^{q_0(\tau-\tau_c+2)} e^{(q_0\sigma/2)^2}}{G(\zeta_0)} \\ &\quad \times [\mathrm{erfc}(\xi_1) - \mathrm{erfc}(\xi_0)]\,, \qquad (55) \\ t_0 r \mathcal{E}_\theta^g(\mathbf{r};\tau) &= \Theta(\tau - R)\frac{V_0 C_0}{2}\sum_{\zeta_0} Q_e(\mathbf{r};\zeta_0) e^{q_0(\tau-\tau_c+1-R)} \\ &\quad \times e^{(q_0\sigma/2)^2}\,[\mathrm{erfc}(\xi_2) - \mathrm{erfc}(\xi_0)]\,, \qquad (56) \end{aligned}$$

其中

$$\xi_0 = \frac{q_0\sigma}{2} - \frac{\tau_c}{\sigma};\ \xi_1 = \frac{\tau}{\sigma} + \xi_0;\ \xi_2 = \xi_1 - \frac{R}{\sigma}. \tag{57}$$

图6显示了瞬态馈电电流的曲线，以及

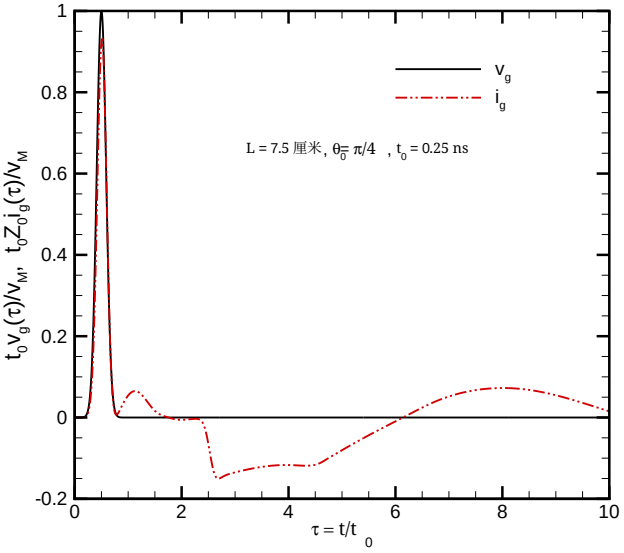


图 6. 输入高斯电压 $v_g(\tau)$（黑色实线）及其产生的馈电电流 $i_g(\tau)$（红色点划线）。

输入高斯电压为 $v_g(\tau)$，其中 $\theta_0 = \pi/4$, L =7.5 cm, $\tau_c = 0.5$ 且 $\sigma = 1/8$.[5]天线长度的渡越时间为 $t_0 = L/c = 0.25$ns，输入脉冲宽度为$t_w = t_0/4 = 62.5$ ps。纵坐标所示的归一化常数为 v_M =max($t_0 v_g(t)$)。馈电电流中出现的初始脉冲峰值为 $\tau = 0.5$，它复现了输入电压脉冲。在$\tau \approx 2.5$ ($\Longrightarrow$ $t \approx t_c + 2t_0$)处可见一个次级负峰值，这是由于反射发生在天线远端，随后返回馈电间隙所致。不过，其幅度仅为主峰幅度的 1/6，表明反射较小，且馈电电流主要由前向传播波构成。所示分析结果使用了 101 个展开系数 c_ℓ 和 40 个复零点 ζ_0生成。

图7显示了天线在波束轴方向（即，对于$\theta = \pi/2$）上距离 $r = 1$m处的缩放辐射电场$t_0 r\mathrm{E}_\theta^g$ 曲线，其中 $\theta_0 = \pi/4$、$L = 7.5$cm、 $\tau_c = 0.5$且 $\sigma = 1/8$。作为比较，我们还显示了移位馈电电流 $i_g(\tau - R)$。所有振幅均用与图6中相同的常数 v_M 归一化，因此图中缩放后的 i_g 和E_θ^g 的相对振幅是真实的。输入高斯电压脉冲的10 dB带宽为 $\zeta_{\max} \approx 2.15/\sigma \approx 17$，脉冲中包含的最小显著波长为 $\lambda_s = 2\pi L/\zeta_{\max} = 2.74$cm。The

[5]为避免码间干扰，Harrison [14] 建议显著脉宽必须满足 $t_w \le (1 - \sin\theta_0)t_0$。在本例中， $t_w = 2t_0\sigma$ 且 $\theta_0 = \pi/4$，要求 $\sigma \le 1/6.83$。

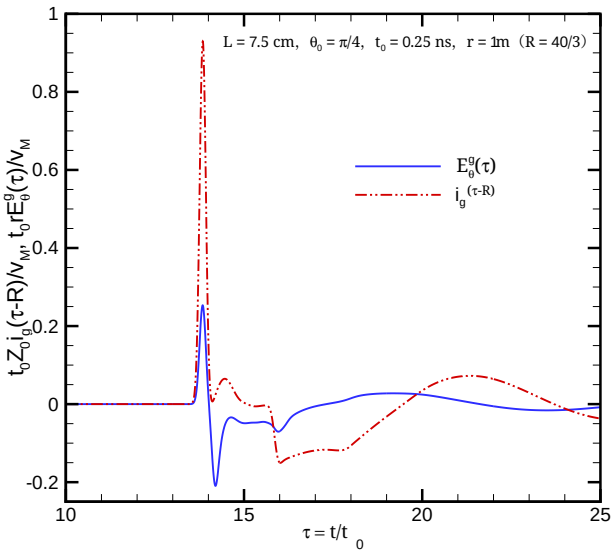


图 7. 固定距离 r 处沿波束轴的辐射电场 $\mathrm{E}_\theta^g(\tau)$（蓝色实线）以及用于比较的延迟馈电电流 $i_g(\tau - R)$（红色点划线）。

天线在该波长下的远场距离为 r_{ff} =2$(2L)^2/\lambda_s = 1.64$ m $> r = 1$m。因此，图7所示的电场处于近区与远区之间的过渡区。图8显示了在输入电压脉冲的主要频谱成分 $\zeta \in (0, \zeta_{\max})$ 范围内，天线归一化有效长度的幅度和相位。在如此宽的频谱范围内，有效长度的幅度呈现出约25dB的动态范围，而相位仅近似呈线性变化。尽管如此，辐射场仍具有近似双极脉冲的形状，这对应于馈电电流中初始高斯脉冲的时间导数。因此，对于所选的几何参数，该天线的性能近似符合理想超宽带天线的特性。

D. 辐射能量和导弹生成电压脉冲

高斯输入电压脉冲不一定是可用于双锥天线的理想波形，因为它在高频下衰减过快，因此对于给定的输入能量，不一定能产生尽可能窄的辐射脉冲。本文探讨另一种波形。尽管它仍非理想波形，但更适合天线的高频特性，并具有一些有趣的辐射特性。对于无耗天线，天线输入端子处提供的输入能量等于总辐射能量，用场表示为

$$\begin{aligned} W_r &= \int_{\Omega_s} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} t_0 r\mathcal{E}_\theta(\mathbf{r};t) t_0 r\mathcal{H}_\phi(\mathbf{r}:t)\, dt \\ &= \frac{t_0}{2\pi}\Re\left[\int_{\Omega_s} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} rE_\theta(\mathbf{r};\zeta) rH_\phi^*(\mathbf{r};\zeta)\, d\zeta\right], \end{aligned} \tag{58}$$

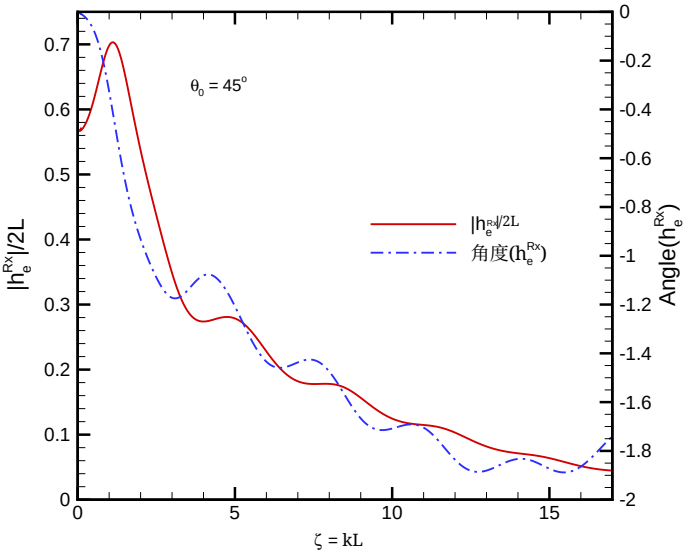


图8. 天线有效长度 $h_e^{Rx}(\theta, r; \zeta)$ 的幅度和相位，其中 $L = 7.5\,\text{cm}$， $\theta = \pi/2$, $r = 1\,\text{m}$。

其中， $\Re(\cdot)$ 表示实部，Ω_s 是三维单位球面。上式最后一个等号由帕塞瓦尔关系得出。将 (14)-(17) 和 (49) 代入 (58)，其中频域激励电压为 $V_g(\omega)$，并对 Ω_s 积分后，得到

$$W_r = \frac{t_0}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} V_g(\omega)\, T_J(\zeta)\, V_g^*(\omega)\, d\zeta, \tag{59}$$

where

$$T_J(\zeta) = \frac{2C_0^2}{|F(\zeta)|^2}\left[\sum_{\ell=1,3}^{\infty}\frac{c_\ell^2 \ell(\ell+1)/(2\ell+1)}{\left|\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta) + j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)\right|^2}\right] =: \frac{2C_0^2}{|F(\zeta)|^2} G_J(\zeta), \tag{60}$$

其中 $G_J(\zeta)$ 对应方括号内的项。正如预期，式（60）与距离 r 无关。能量传递函数 $T_J(\zeta)$ 沿实频率轴为半正定，且仅在零频率处取值为零。图 9 给出了半角为 $\theta_0 = \pi/4$ 的天线的 $T_J(\zeta)$ 随 $\zeta = \omega t_0 = kL$ 变化的曲线。首先可以看出，能量传递函数呈现高通特性。 $\zeta = \zeta_r \approx 0.8$ 处的峰值是双锥天线 [10] 的第一个谐振所致。超过第一个谐振后，可以看到 $T_J(\zeta)$ 相对平坦。还请注意，在低频时它按幂律 ζ^n 上升，指数为 $n = 4$，这让人联想到瑞利散射[33, p。 323]。这种低频下的四次幂行为，也可以直接利用式（19）以及 $G_J(\zeta)$ 中汉克尔函数的小自变量形式加以证明。在高频时， $T_J(\zeta) \sim O(1)$。因此，天线辐射的总能量W_r 不一定有限，除非输入电压 $V_g(\omega)$ 在无穷远处充分衰减。例如，对于冲激输入电压，双锥天线辐射的总能量是无限的。

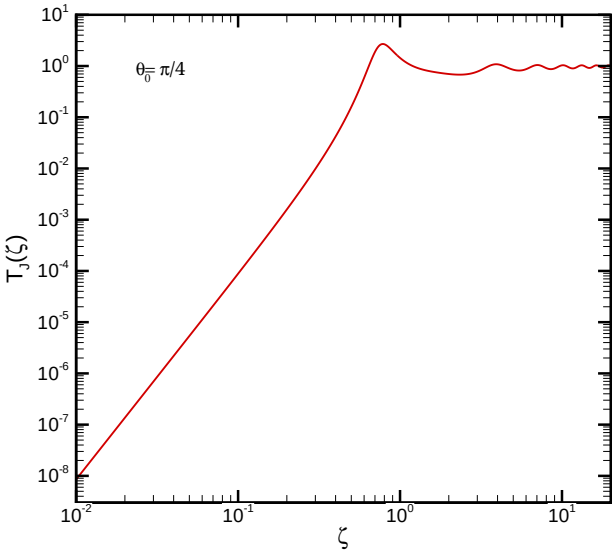


图 9. $\theta_0 = \pi/4$时双锥天线的能量传递函数 $T_J(\zeta)$。

有了各种量的解析表达式，人们可能会考虑采用 [34, 第 6], [35, 章 4],[36] 中概述的优化技术，并设计一种输入电压波形，以实现特定目标。遗憾的是，这些技术都针对低通传递特性，因而不适用于双锥天线。由式（59）可知，为保持有限的辐射能量，输入电压 $V_g(\omega)$ 在无穷远处至少需要具有 $|\omega|^{-(0.5+\epsilon)}$,$\epsilon > 0$ 的代数衰减行为。我们考虑 [37] 中提出的以下波形，用于生成电磁导弹 [38]（即，在空间某一区域内具有比 $1/r^2$ 更慢的路径损耗衰减因子的辐射波形），同时该波形由理想平面孔径 [6] 辐射:

$$v_g(\tau) = V_0\omega_0\,\tau^{2\alpha}\,e^{-\tau/\tau_1}\,\frac{\sin(\Omega_0\tau)}{\Omega_0\tau}\Theta(\tau), \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{s}}\right] \tag{61}$$

其中 $\Omega_0 = \omega_0 t_0$ ，且通常 $\tau = t/t_0$。实值参数 α 控制脉冲在$\tau = 0$ 附近的上升时间特性，而指数时间常数 τ_1 与辛克函数因子共同决定脉冲的下降时间。对于 $\alpha > 0$, 初始值 $v_g(0^+) = 0$。(61) 的傅里叶变换

[6]我们调整 [37] 的波形，使其符合我们的归一化时间记法

可以用闭式形式求得[7]

$$V_g(\omega) = \frac{V_0}{2j}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{(s_1^2(\zeta)+\Omega_0^2)^\alpha}\frac{\sinh\left[\alpha\log\left(\frac{s_1(\zeta)+j\Omega_0}{s_1(\zeta)-j\Omega_0}\right)\right]}{\alpha} \quad (62)$$

$$\sim \frac{V_0}{2j}\log\left(\frac{s_1(\zeta)+j\Omega_0}{s_1(\zeta)-j\Omega_0}\right), \quad \alpha\to 0 \quad (63)$$

$$\sim \frac{V_0\Omega_0\Gamma(2\alpha+1)}{(j\zeta)^{(2\alpha+1)}}, \quad |\zeta|\to\infty \quad (64)$$

$$\sim O(1), \quad \zeta\to 0 \quad (65)$$

其中 $s_1(\zeta) = \tau_1^{-1} + j\zeta$, $\zeta = \omega t_0 = kL$ 且 $\Gamma(x)$ 为伽马函数。表达式 (61) 和 (62) 对任意 $\alpha > -1/2$ 均成立。然而，为满足辐射能量有限的要求，我们令 $\alpha > -1/4$。当 2α 不是整数时，复频率平面上的 $q = -\tau_1^{-1} \pm j\omega_0$ 处将出现分支点。

我们利用 (45)、(47) 和 (49)，并用不完全伽马函数 [39, 3 求出馈电电流和辐射电场。381-1]为

$$t_0 Z_0 i_g(\tau) = \Theta(\tau)\frac{V_0\tau^{2\alpha}}{2}\sum_{\zeta_0}\frac{jq_0^2}{G(\zeta_0)}e^{q_0(\tau+2)} \times [H_{2\alpha}(\beta_1(\tau)) - H_{2\alpha}(\beta_2(\tau))] \quad (66)$$

$$t_0 r\mathcal{E}_\theta(\mathbf{r};\tau) = \frac{V_0 C_0(\tau-R)^{2\alpha}}{2j}\sum_{\zeta_0}Q_e(\mathbf{r};\zeta_0)e^{q_0(\tau-R+1)} \times [H_{2\alpha}(\beta_1(\tau-R)) - H_{2\alpha}(\beta_2(\tau-R))] \times\Theta(\tau-R), \quad (67)$$

其中 $\beta_{\frac{1}{2}} = \tau_1^{-1} - j\Omega_0 \mp q_0$ 和

$$H_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(n+\alpha)} \quad (68)$$

与不完全伽马函数 $\gamma(\alpha, x)$ 的关系为$H_\alpha(x) = x^{-\alpha}\gamma(\alpha, x)$ [39, 8.354]。尽管式 (66) 和 (67) 的右侧含有复数，但瞬时馈电电流和辐射场均为实数值。函数 $H_\alpha(x)/\Gamma(\alpha)$ 关于 α和 x [39, 8解析。351-1]。将式 (65) 中的函数$Q_e(\mathbf{r};\zeta_0)$替换为 $Q_h(\mathbf{r};\zeta_0)$，并将 V_0 替换为 V_0/η，即可得到磁场 $t_0 r\mathrm{H}\phi(\mathbf{r};\tau)$ 的类似表达式。

图10展示了天线在 $L = 75\,\mathrm{cm}$、$\theta_0 = \pi/4$ 条件下，电压 (61) 及其对应馈电电流 (66) 随时间变化的曲线。渡越时间为 $t_0 = 2.5\mathrm{ns}$。源参数为 $\alpha = 10^{-3}, \tau_1 = 0.5$, $\Omega_0 = 5\pi$。分析中使用的模式数 c_ℓ 以及零点数 ζ_0, ζ_p 分别为 101、40 和 26。与图6中由高斯源激发的馈电电流相比，可以看到此处的反射稍小。不过，这也可能是因为此处的天线长度是前者的十倍。然而，在 $\tau = 2$ 处反射开始之前，可以看到，与高斯源电压相比，此处的馈电电流能更好地再现源电压。图11展示了归一化输入源电压 $V_g(\omega)$ 的频域曲线。电压峰值出现在 $\zeta = \Omega_0$，$-3\mathrm{dB}$ 带宽为 $\zeta_{3\mathrm{dB}} \approx 19$。与这一最高基带频率对应的远场距离为$r = 4\,\zeta_{3\mathrm{dB}} L/\pi \approx 24L$。

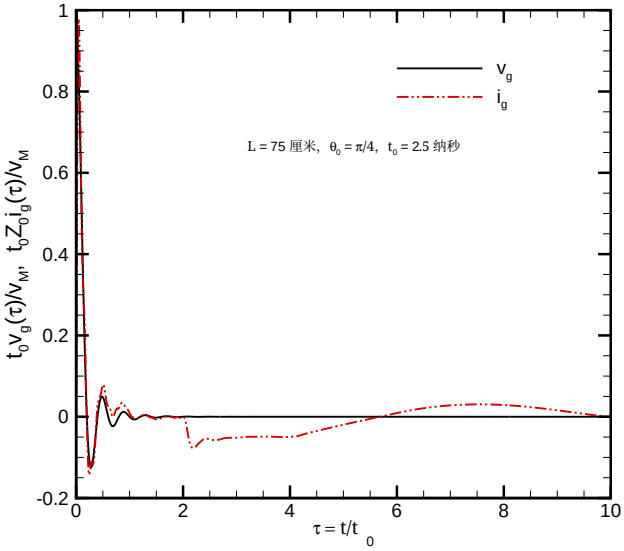


图 10. 对于公式 (61) 中给出的脉冲，输入高斯电压 $v_g(\tau)$（实线，黑色）以及产生的馈电电流 $i_g(\tau)$（点划线，红色）。

为了探究该波形产生电磁导弹的潜力，我们考察特定方向上能量随时间的分布及其与距天线距离之间的函数关系。图 12 展示了沿波束轴 $\mathbf{r} = (r, \theta = \pi/2)$ 方向的能量密度 $t_0^2 r^2 \mathrm{E}_\theta(\mathbf{r};\tau)\mathrm{H}\phi(\mathbf{r};\tau)$ [Js^{-1}] 随 $t = \tau t_0$ 变化的曲线，其中 r 为参数，所研究的天线参数为 $L = 75\,\mathrm{cm}$、$\theta_0 = \pi/4$。我们任意取常数 $V_0 = \Omega_0^{-1}\left(\frac{e}{2\alpha\tau_1}\right)^{2\alpha}$。在远区，能量密度峰值应保持不随距离变化。此处，观测距离从 $r = L$ 开始，以 $\Delta r = 2L = 1.5\mathrm{m}$ 为步长逐渐增加。到第 13 步时，观测距离为 $r = L + 12\times\Delta r = 25L$，此时在 3 dB 频率下已达到远区边界。在天线的紧邻区域（$L \le r \le 7L$）[8]，，可以看到能量密度峰值随距离增加而增大，这表明在近区，辐射场的衰减速度比自由空间中的 $1/r$ 衰减速度更慢。此前，通过由单位阶跃球面波馈电的反射面天线，也已证明实际天线的近场具有这种缓慢衰减的特性 [40]。

III. 总结与结论

本文推导出了任意角度 θ_0 和长度 L的双锥天线在时域下各种天线参数的精确解析表达式。双锥天线具有许多理想的超宽带特性，以下各项概述了本研究的关键步骤和发现：

[7]我们将 $V_g(\omega)$ 表示为一种与 [37] 中截然不同的形式，以便更轻松地推导渐近形式和极限形式。

[8]近区中电场和磁场之间的轻微延迟可能导致能量密度在某些时刻为负。然而，能量密度的时间积分始终为正，这是应有的结果。

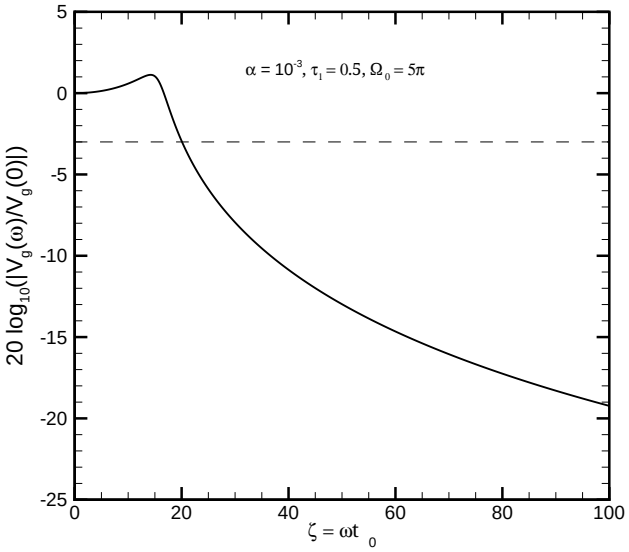


图 11. (62) 的归一化源电压 $20\log_{10}\left|\frac{V_g}{V_g}(\omega)\,(\Omega)\right|$ 与 ζ 的关系。

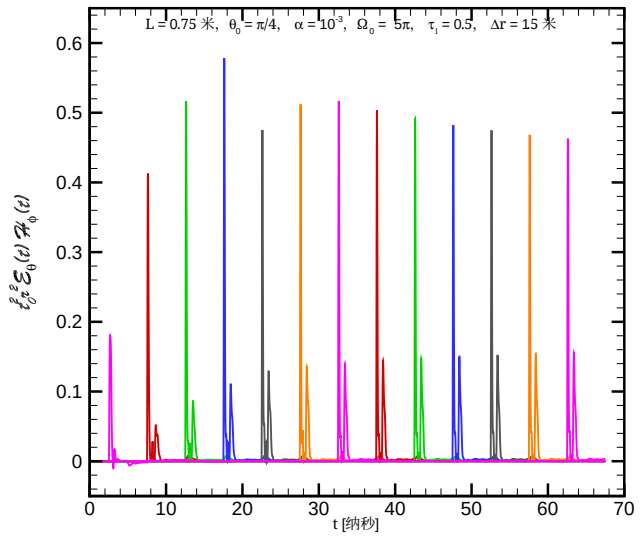


图 12. 双锥天线的瞬时辐射能量密度 $t_0^2 r^2 \mathrm{E}_\theta(r;t)\mathrm{H}\phi(r;\ t)$ 随波束轴方向距离的变化。脉冲之间的空间间隔为 $\Delta r = 1.5\,\mathrm{m}$。

(i) 本文采用了一种新的球谐模态展开系数因式分解方法，如式 (6)、(9)–(11) 和 (71) 所示，以便直接应用拉普拉斯反演公式，进而推导出各种天线特性的解析形式。本文所提出的分析方法对于任意长度和半角的双锥天线均具有精确性。

(ii) 线性方程组 (74) 可用于确定频率-球面展开的频率无关系数。这些系数仅取决于锥角。

θ_0。（iii）函数 $F(\zeta)$ 和$F_{el}(\zeta)$的复零点 ζ_0 和 ζ_p 可使用穆勒算法 [27, p. 136]有效求得。各种函数的奇点均被证明为复频率平面（s平面）左半部的简单极点，从而证实了奇异性展开法 [16]中提出的一项猜想。

(iv) 一旦求得展开系数和复零点，即可分别利用方程 (43)、(47) 和 (50) 求得馈电电流的冲激响应、辐射电场的冲激响应以及瞬态有效长度。

(v) 通过与测量结果进行良好对比，验证了利用解析公式预测瞬态有效长度的准确性。

(vi) 通过方程 (45) 和 (49)，可以根据各自的冲激响应，求出任意输入电压脉冲 $v_g(t)$ 对应的瞬态馈电电流和瞬态辐射电场。文中给出了高斯脉冲 (53) 和快速上升脉冲 (61) 的解析结果。通过对高斯电压脉冲的响应，证明了远区的辐射电场近似表现为馈电电流的时间导数。结果表明，由快速上升脉冲馈电的双锥天线能够在近区产生电磁导弹。

(vii) 如何在实际约束条件下，寻找能够优化给定辐射指标的馈电电压脉冲，将是未来研究的课题。 [41]中重点介绍了一些可能对这类研究有用的相关时域泛函。

附录 A 展开系数的求解

通过对场 (E_θ, H_ϕ) 在 $r = L$ 处施加连续性条件，并以相关球谐函数进行检验（方法与 [10]中的做法类似），即可确定场展开的系数 $a_{\nu_n}(k)$ 和 $b_\ell(k)$。恒等式 [10, (24)-(28)]有助于计算各种积分。对此，有几点需要说明：

(i) 匹配条件独立于因子$A_0(k)$。(ii) 系数 $a_{\nu_n}(k)$ $b_\ell(k)$ $\to 0$ as $kL \to \infty$。(iii) 角函数满足 $M_{\nu_n}(\theta_0) = 0 = M_{\nu_n}$ $(\pi - \theta_0)$ 和 $P_\ell(\cos\theta_0) = -P_\ell(-\cos\theta_0)$。(iv) 复合场 $E_\theta + \eta H_\phi$ 不会显式涉及$\Gamma_{\text{in}}(k)$；然而，场 $E_\theta - \eta H_\phi$ 则会涉及。这些也可以从 TEM 场对应式 (4) 和 (5) 中清楚地看出。

系数 $a_{\nu_n}(k)$ 随后可表示为包含 $b_\ell(k)$ 的级数，反之亦然。将它们结合起来后，

可得到以下方程，用于确定系数 $b_m(k)$、 $m=1$、3、..... where

$$j^{-m}\left[\widehat{H}_m^{(2)}(kL)+j\widehat{H}_m^{(2)\prime}(kL)\right]\frac{m(m+1)}{(2m+1)}b_m=\frac{2e^{-jkL}}{jkL}\times$$
$$\times P_m(\cos\theta_0)+\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} j^{-\ell}\left[\widehat{H}_\ell^{(2)}(kL)+j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(kL)\right]b_\ell\times$$
$$\times\sin\theta_0 P_m(\cos\theta_0)P_\ell(\cos\theta_0)\ell(\ell+1)m(m+1)g_{m\ell}, \quad (69)$$

其中 $g_{\ell m}=g_{m\ell}$ 等于

$$g_{m\ell}=\sum_{\nu_n}\frac{\frac{d\nu_n}{d\theta_0}\frac{2\nu_n+1)}{\nu_n(\nu_n+1)}}{[\nu_n(\nu_n+1)-m(m+1)][\nu_n(\nu_n+1)-\ell(\ell+1)]}. \quad (70)$$

可以看出，矩阵元素 $g_{m\ell}$ 仅取决于天线的顶点角度 θ_0 。这与 [10, 式（31）]中采用的版本以及此前所有双锥天线的公式不同；在那些公式中，矩阵元素是频率和角度的组合函数。然而，式（69）仍存在问题：系数 $b_\ell(k)$隐式地依赖于变量 k、θ_0 和 L。这种隐式依赖此前一直使人无法确定天线时间特性的显式解析形式。变量替换

$$j^{-\ell}\left[\widehat{H}_\ell^{(2)}(kL)+j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(kL)\right]b_\ell(k)=\frac{2e^{-jkL}}{jkL}c_\ell(k) \quad (71)$$

得到关于新系数$c_m(k)$、 $m=1$、3、...的下列方程

$$\frac{c_m(k)}{(2m+1)} = \frac{P_m(\cos\theta_0)}{m(m+1)}+\sin\theta_0 P_m(\cos\theta_0)\times$$
$$\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} c_\ell(k)P_\ell(\cos\theta_0)\ell(\ell+1)g_{m\ell}. \quad (72)$$

由式 (72) 可明显看出，系数 $c_m(k)$仅取决于锥角 θ_0。特别是，它们与频率无关，因此可以放心地省略自变量 k。还可以从式 (71) 推断，系数 $b_\ell(k)$ 对频率的显式依赖完全由不含 c_ℓ的因子决定。这种分解是我们方法的一大优势。

根据合成场在 $E_\theta+\eta H_\phi$ 处$r=a$ 的连续性，还可得到

$$2C_0\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} c_\ell P_\ell(\cos\theta_0)=:\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} w_\ell(\theta_0)=1, \quad (73)$$

归一化权重的一个恒等式， $w_\ell(\theta_0)=2C_0c_\ell P_\ell(\cos\theta_0)$，可用于数值检验系数求解的准确性。

可以将(72)和(73)合并，得到关于系数 c_m 的线性方程组，其条件数优于(72)。结果为

$$\frac{m(m+1)}{2m+1}c_m=(1+\gamma_m)P_m(\cos\theta_0)+\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} G_{m\ell}c_\ell, \quad (74)$$

$$G_{m\ell} = P_\ell(\cos\theta_0)P_m(\cos\theta_0)\Big[\ell(\ell+1)m(m+1)\sin\theta_0 g_{m\ell}$$
$$-2C_0\gamma_m\Big], \quad (75)$$

and

$$\gamma_m=[m(m+1)]^2 g_{mm}\sin\theta_0/2C_0. \quad (76)$$

请注意， $G_{mm}=0$。

根据 $E_\theta-j\eta H_\phi$的连续性，可得到一个用归一化频率 $\zeta=kL$ 表示反射系数的表达式：

$$e^{j(2\zeta+\pi)}\Gamma_{\text{in}}(\zeta)=\sum_{\ell=1,3,\ldots}^{\infty} w_\ell(\theta_0)\frac{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)-j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)}{\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)+j\widehat{H}_\ell^{(2)\prime}(\zeta)}. \quad (77)$$

反射系数对频率显式函数的依赖关系（如式（77）所示）是本方法的另一项主要优势。利用汉克尔函数的小自变量近似 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)$ $\sim 2j(2\ell-1)!/(2\zeta)^\ell(\ell-1)!$, $|\zeta|\ll\ell$ 以及大自变量近似 $\widehat{H}_\ell^{(2)}(\zeta)$ $j^{\ell+1}e^{-j\zeta}$ $|\zeta|\gg\ell$,, 可以直接推得

$$\Gamma_{\text{in}}(\zeta\sim 0)=1+O(\zeta); \quad \Gamma_{\text{in}}(\infty)=0, \quad (78)$$

鉴于式（73）。

参考文献

[1] S. N. Samaddar 和 E. L. Mokole，《超宽带短脉冲电磁学》。马萨诸塞州波士顿：施普林格出版社，1997 年，第 3 卷，第“与超宽带辐射相关的天线的一些基本性质”章，第 147–164 页。[2] S. A. Schelkunoff，“天线中的主波与互补波”，《IRE学报》，第 34 卷，第 23–32 页，1946 年。[3] ——，《高级天线理论》。纽约州纽约：约翰·威立父子出版公司，1952 年。[4] C. T. Tai，“关于双锥天线的理论”，《应用物理学杂志》，第 19 卷，第 1155–1159 页，1948 年 12 月。[5] R. E. Collin 和 F. J. Zucker，《天线理论》，第 1 部分，大学间电子学丛书。纽约州纽约：麦格劳-希尔图书公司，1969 年，第 7 卷。[6] C. T. Tai，《天线工程手册》。纽约州纽约：麦格劳-希尔图书公司，1984 年，第 4 章：偶极天线与单极天线。[7] C. H. Papas 和 R. W. P. King，“同轴线馈电的宽角锥形天线的输入阻抗”，《IRE学报》，第 37 卷，第 1269–1271 页，1949 年。[8] ——，“同轴线馈电的宽角锥形天线的辐射”，《IRE学报》，第 39 卷，第 49–51 页，1951 年。[9] S. N. Samaddar 和 E. L. Mokole，“锥角不等的双锥天线”，《IEEE天线与传播学报》，第 46 卷，第 2 期，第 181–192 页，1998 年 11 月。[10] R. Janaswamy，“任意锥角双锥天线的输入阻抗、方向性和品质因数”，《IEEE天线与传播学报》，第 70 卷，第 5 期，第 3248–3258 页，2022 年 5 月。[11] J. L. McDonald 和 D. S. Filipovic，“接地平面上方的双锥天线”，《IEEE天线与传播学报》，第 60 卷，第 4 期，第 2093–2096 页，2012 年 4 月。[12] W. A. Davis 和 S. Licul，《超宽带通信系统导论》。新泽西州上萨德尔河：普伦蒂斯-霍尔，2005 年，第“天线”章，第 159–212 页。[13] A. Shlivinski、E. Heyman 和 R. Kastner，“时域中的天线表征”，《IEEE天线与传播学报》，第 45 卷，第 7 期，第 1140–1149 页，1997 年 7 月。[14] J. C. W. Harrison 和 J. C. S. Williams，“宽角锥形天线中的瞬态”，《IEEE天线与传播学报》，第 13 卷，第 2 期，第 236–246 页，1965 年 3 月。[15] D. Ghosh、T. K. Sarkar 和 E. L. Mokole，“用于宽带通信的宽角双锥天线设计”，《电磁学研究进展》，第 16 卷，第 225–245 页，2009 年。

[16] C. E. Baum，《瞬态电磁场》，《应用物理专题》丛书。纽约州纽约：施普林格出版社，1976 年，第 10 卷，第“奇异性展开法”章。[17] V. Monebhurrun 和 R. Janaswamy，“IEEE P2816 的制定：应用于天线建模与仿真的计算电磁学推荐实践”，载于《2022年IEEE天线与传播国际研讨会暨美国国家委员会—国际无线电科学联盟无线电科学会议论文集》，第 10.1109/AP-S/USNC-URSI47032.2022.9886444 卷，丹佛，美国科罗拉多州，2022 年，第 647–648 页。[18] S. Licul，《超宽带天线表征与测量》，博士论文，电气与计算机工程系，弗吉尼亚理工大学，布莱克斯堡，美国弗吉尼亚州，2004 年。[19] S. Blume 和 B. Grafm¨uller，“具有椭圆截面的双锥天线和锥形喇叭天线”，《IEEE天线与传播学报》，第 36 卷，第 8 期，第 1066–1070 页，1988 年 8 月。[20] R. Janaswamy，《工程电动力学：定理、原理和场表示汇编》。英国布里斯托尔：物理学会，2020 年 12 月。[21] D. M. Pozar、D. H. Schaubert 和 R. E. McIntosh，“脉冲辐射中偶极天线的最佳馈电电压”，《IEEE天线与传播学报》，第 AP-31 卷，第 4 期，第 5630569 页，1983 年 7 月。[22] M. J. Ablowitz 和 A. S. Fokas，《复变量：导论与应用》。英国剑桥：剑桥大学出版社，1997 年。[23] L. Debnath，《积分变换及其应用》。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社，2000 年。[24] A. T. de Hoop，《波的辐射与散射手册》。英国伦敦：学术出版社，1995 年。[25] E. Kreyszig，《高等工程数学》，第 10 版。新泽西州霍博肯：约翰·威立父子出版公司，2011 年。[26] E. L. Ince，《常微分方程》。纽约州纽约：多佛出版社，1956 年。[27] D. M. Young 和 R. T. Gregory，《数值数学概论》。纽约州纽约：多佛出版社，1973 年，第 I 卷。[28] D. L. Sengupta 和 C.T.-Tai，《瞬态电磁场》，《应用物理专题》丛书。纽约州纽约：施普林格出版社，1976 年，第 10 卷，第“线性天线对瞬态信号的辐射与接收”章。[29] S. Licul 和 W. A. Davis，“统一的频域及时域天线建模与表征”，《IEEE天线与传播学报》，第 53 卷，第 9 期，第 2882–2888 页，2005 年 9 月。[30] F. B. Hildebrand，《数值分析导论》。纽约州纽约：多佛出版社，1974 年。[31] F. Sarrazin 等，“存在噪声时奇异性展开法在时域和频域表征天线中的精度”，《IEEE天线与传播学报》，第 62 卷，第 3 期，第 1261–1269 页，2014 年 3 月。[32] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《含公式、图表和数学表的数学函数手册》。纽约州纽约：多佛出版社，1972 年。[33] A. Ishimaru，《电磁波传播、辐射与散射》。新泽西州霍博肯：约翰·威立父子出版公司，2017 年。[34] L. E. Franks，《信号理论》，第 2 版。宾夕法尼亚州斯特劳兹堡：Dowden & Culver 公司，1981 年。[35] D. A. Pierre，《带应用的优化理论》。纽约州纽约：多佛出版社，1986 年。[36] D. M. Pozar，“超宽带无线电系统的波形优化”，《IEEE天线与传播学报》，第 51 卷，第 9 期，第 2335–2345 页，2003 年 9 月。[37] B. Hafizi，“载波和色散对定向电磁脉冲传播的影响”，《应用物理学杂志》，第 73 卷，第 2 期，第 513–521 页，1993 年 1 月 15 日。[38] H. M. Shen 和 T. T. Wu，“电磁导弹的性质”，《应用物理学杂志》，第 66 卷，第 9 期，第 4025–4034 页，1989 年 11 月。[39] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，第 7 版。学术出版社，2007 年。[40] H. T. Chou、P. H. Pathak 和 P. R. Rousseau，“脉冲激励抛物面反射器天线的早期瞬态辐射解析解”，《IEEE天线与传播学报》，第 45 卷，第 5 期，第 829–836 页，1997 年 5 月。[41] S. F. Wang 和 Y. Z. Xie，“评估超宽带天线辐射高功率电磁脉冲性能的方法”，《IEEE天线与传播学报》，第 70 卷，第 8 期，第 7142–7146 页，2022 年 8 月。